О БИФУРКАЦИИ СЕМЕЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГАУССОВЫХ СМЕСЕЙ

Апраушева Н.Н.[1], Сорокин С.В.[2]
Вычислительный центр им.А.А.Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: [1]plat@ccas.ru [2]www2008@ccas.ru

Гауссовы смеси широко используются в различных областях науки и практики: в распознавании образов, радиотехнике, машинном обучении, метеорологии, теории управления и др. [1, 2]. При использовании модели плотности вероятности гауссовой смеси для описания нелинейных динамических систем их неравновесные неустойчивые состояния создаются вырожденными критическими точками этой функции.

Исследовалась простейшая гауссова смесь с плотностью вероятности

$$f(x,\theta) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \pi_i exp(-(x-\mu_i)(-2\sigma^2)^{-1}), \qquad (1)$$

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k, \sigma, \pi_1, \pi_2, \dots \pi_k),$$

$2 \leq k < \infty$, μ_i — среднее значение i-й компоненты, π_i — её априорная вероятность, σ^2 — дисперсия каждой компоненты, $\pi_i \in (0,1)$, $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k = 1$.

По определению [3], критическая точка (КТ) функции $f(x,\theta)$ — это точка, в которой

$$f_x'(x,\theta) = 0, \qquad (2)$$

вырожденной критической точкой (ВКТ) этой функции является точка, в которой

$$f_{xx}''(x,\theta) = 0. \qquad (3)$$

Существование вырожденных критических точек функции $f(x,\theta)$ создает ветвления или бифуркации решений уравнения (2) [3, 4]. Получив выражения для $f_x'(x,\theta)$ и $f_{xx}''(x,\theta)$, на основании уравнений (2), (3) имеем уравнение всех ВКТ функции

$$x^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} {\mu_i}^2 \pi_i \psi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i \psi_i\right)^{-1} - \sigma^2,$$

$$\psi_i = exp(-(x-\mu_i)^2(-2\sigma^2)^{-1}).$$

Обнаружено, что для $k = 2$ при $\pi_1 = \pi_2$ и $\rho = 2$,

$$\rho = |\mu_2 - \mu_1|\, \sigma^{-1},$$

вырожденными критическими точками функции $f(x,\theta)$ являются её моды с абциссами $x = 2^{-1}(\mu_1 + \mu_2)$.

Кроме того, для $k = 2$ найдено множество D, содержащее критические точки перегиба функции $f(x,\theta)$. Множество D определено вероятностным неравенством

$$P\{d + 3.242 < |ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})| < d + 4.234\} > 0.937, \qquad (4)$$

$$d = 0.827\rho^2 - 3.867\rho + 2ln\left[2^{-1}\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4}\right)\right],$$

ρ — расстояние Махаланобиса. Определение множества D неравенством (4) корректно при $\rho > 2$ и $\pi_1 \neq \pi_2$.

Неравенство (4) получено на основе теорем (приведенных ниже) об унимодальности функции $f(x,\theta)$ и результатов экспериментальных исследований по составлению уравнения критических точек перегиба этой функции [5].

Теорема 1. При $k = 2$ функция $f(x,\theta)$ унимодальна, если $\rho \leq 2$.

Теорема 2. При $k = 2$ и $\rho > 2$, $\pi_1 \neq \pi_2$ функция $f(x,\theta)$ унимодальна, если

$$|ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})| \geq 2^{-1}\rho^2 + 2ln\left(2^{-1}\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4}\right)\right).$$

Список литературы

1. Carriera M., Williams C. An isotropic Gaussian mixture can have more modes than components. Informatics Research Report EDI-INF-RR-0185. School of Informatics, University of Edinburg, 2003.
2. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. М.: Радио и связь, 1986.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: УРСС, 2004.
4. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: КомКнига, 2005.
5. Aprausheva N., Sorokin S. On the unimodality and the bimodality of a Gaussian mixture of the two components. 8th Intern. Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies. PRIA-8-2007. Yoshkar-Ola, 2007.