Вычисление неподвижных точек непрерывного монотонно возрастающего оператора

Н. Н. Апраушева[1], С. В. Сорокин[2]

Вычислительный центр им. А.А Дородницына РАН

Москва, Россия: e-mail plat@ccas.ru[1]; e-mail www2008@ccas.ru[2]

Разработан алгоритм получения решения уравнения $x = \varphi(x)$, где φ — непрерывный, монотонно возрастающий оператор с непрерывной производной $\varphi_x'(x) > 0$ при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Известно, что неподвижные точки (НТ) оператора φ $a_1, a_2, \ldots, a_\mathrm{n}$ лежат на отрезке $[a_0, a_{n+1}]$, концы которого не являются НТ, и $0 < \varphi_x'(x) \leqslant C$ при всех $x \in [a_0, a_{n+1}]$, C — известная константа.

Для вычисления всех НТ оператора φ использован метод Пикара [1]. Доказано, что в каждом интервале (a_i, a_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n$, величина $\tau(x) = \varphi(x) - x$ имеет постоянный знак и что в смежных интервалах (a_i, a_{i+1}), (a_{i+1}, a_{i+2}), $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, эта величина имеет противоположные знаки. Поэтому последовательности итераций Пикара $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, при $x_0 \in (a_i, a_{i+1})$ и при $x_0 \in (a_{i+1}, a_{i+2})$ сходятся к одной НТ a_{i+1}, если знак $\tau(x)$ в этих интервалах меняется с «+» на «–», и они сходятся к разным НТ a_i, a_{i+2} соответственно, если в этих интервалах знак $\tau(x)$ меняется с «–» на «+». Для получения всех НТ построено уравнение $x = \zeta(x)$, равносильное исходному, $\zeta(x) = (1 - C^{-1})x + C^{-1}\varphi(x)$, и такое, что $\operatorname*{sgn}_{x \in (a_i, a_{i+1})} \tau(x) = -\operatorname*{sgn}_{x \in (a_i, a_{i+1})} \eta(x)$, $\eta(x) = \zeta(x) - x$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Тогда в любом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ для получения НТ a_{i+1} используется оператор φ, если $\tau(x_0) > 0$, $x_0 \in (a_i, a_{i+1})$, в противном случае (при $\eta(x_0) > 0$) используется оператор ζ.

Предлагаемый алгоритм успешно применен для вычисления всех стационарных точек плотности вероятности гауссовой смеси [1].

Список литературы

1. *Апраушева Н. Н., Сорокин С. В.* Вычисление стационарных точек плотности вероятности простейшей гауссовой смеси. Труды института системного анализа РАН. Динамика неоднородных систем. Вып. 10(2) М.: КомКнига, 2006. С. 113-136.