УТОЧНЁННОЕ НЕРАВЕСТВО ДЛЯ МНОЖЕСТВА БИФУРКАЦИЙ ДВУХКОМПОНЕНЕТНОЙ ГАУССОВОЙ СМЕСИ

[1]Апраушева Н.Н., [2]Де Ванса Викрамаратне В.К., [2]Сорокин С.В.

Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва, Россия

[1]*E-mail: plat@ccas.ru* [2]*E-mail: www2009@ccas.ru*

При корректном использовании плотности вероятности гауссовой смеси $f(x,\theta)$ для описания нелинейных динамических систем их возможные неустойчивые состояния возникают при существовании вырожденных критических точек (ВКТ) этой функции. Нам удалось математически описать множество ВЦТ гауссовой смеси в частном случае.

Исследовалась одномерная гауссова смесь с плотностью вероятности [1, 2]

$$f(x,\theta) = \left(\sqrt{2\pi}\tau\right)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \pi_i exp(-(x-\mu_i)^2(-2\sigma^2)^{-1}), \qquad (1)$$

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \sigma, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k),$$

$2 \le k < \infty$, μ_i — математическое ожидание -й компоненты, π_i — её априорная вероятность, $\pi_i \in (0,1)$, $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k = 1$, σ^2 — дисперсия каждой компоненты.`

Вырожденная критическая точка функции $f(x,\theta)$ — это точка, в которой [3]

$$f'_x(x,\theta) = 0, \quad f''_{xx}(x,\theta) = 0.$$

Существование ВКТ функции $f(x,\theta)$ при «шевелении» параметра θ изменяет число её экстремумов. В [1, 2] приведено уравнение всех ВКТ исследуемой функции,

$$x^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i^2 \pi_i \psi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i \psi_i\right)^{-1} - \sigma^2,$$

$$\psi_i = exp(-(x-\mu_i)^2(-2\sigma^2)^{-1}).$$

Показано, что при $k=2$ вырожденными критическими точками функции $f(x,\theta)$ могут быть её моды или точки перегиба [2]. Множество вырожденных мод определяется условиями

$$\pi_1 = \pi_2, \rho = 2,$$

где ρ — расстояние Махаланобиса, $\rho = |\mu_2 - \mu_1|\sigma^{-1}$. При $\rho > 2$, $\pi_1 \ne \pi_2$ множество, содержащее все вырожденные критические точки перегиба определяется вероятностно-статистическим неравенством

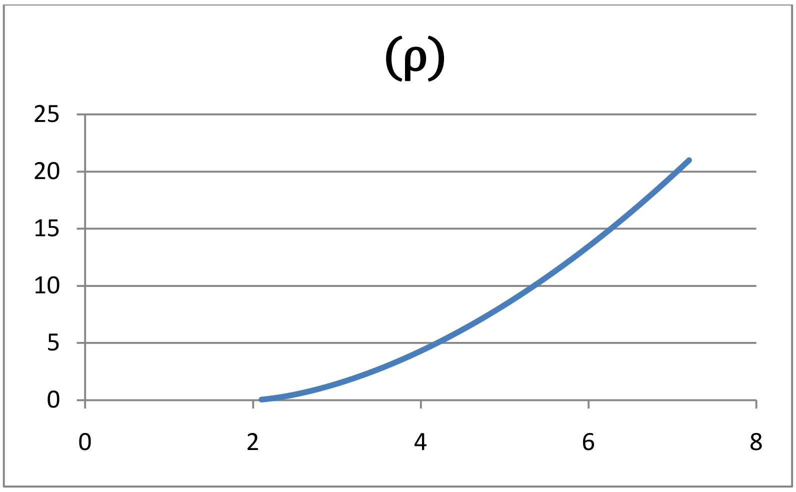
$$P\{d + 3.242 < |ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})| < d + 4.234\} > 0{,}937, \qquad (2)$$

$$d = 0.827\rho^2 - 3.867\rho + 2ln\left(2^{-1}\left(\rho + \sqrt{\rho^2 - 4}\right)\right), \rho \in (2.06,\ 5.65),$$

полученным регрессионным методом по 15-и экспериментальным точкам.

В этой работе для $k=2$, $\rho > 2$, $\pi_1 \ne \pi_2$ представлено более простое и более точное вероятностно-статистическое описание множества, содержащего все критические точки перегиба при $\rho \epsilon [2.1,\ 7.2]$.

Экспериментальным путём было найдено 52 критические точки перегиба функции $f(x,\theta)$, в каждой из них фиксировались значения ρ и $\psi = |ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})|$, $\rho \epsilon [2.1,\ 7.2]$. График функции $\psi(\rho)$ представлен на рисунке.



Рисунок

Апроксимировав функцию $\psi(\rho)$ полиномом 2-й степени $\psi = a\rho^2 + b\rho + c$ и вычислив оценки для неизвестных параметров $a,\ b,\ c$ методом наименьших квадратов [4], получили уравнение

$$\tilde{\psi} = 0.579\rho^2 - 1.242\rho + 0.004, \quad \rho \in [2.1,\ \ 7.2]. \qquad (3)$$

При такой аппроксимации функции $\psi(\rho)$ имеем: средняя абсолютная погрешность $\Delta = 0.040$, средняя относительная погрешность $\delta = 0.062$, среднеквадратичное отклонение $\sigma_1 = 0.046$, $\sigma_1^2 = 0.002$. Наибольшие значения абсолютных погрешностей Δ_i, $i = 1,\ 2, \ldots, 52$, наблюдались на концах отрезка $[2.1,\ \ 7.2]$, $\Delta_{max} = 0.099$.

Т.к. $\psi = |ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})|$, то в силу (3) получаем приближённое уравнение всех вырожденных критических точек перегиба функции $f(x,\theta)$,

$$|ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})| = 0.579\rho^2 - 1.242\rho + 0.004, \quad \rho \in [2.1,\ 7.2],$$

Используя неравенство Чебышева [4] для функции $\psi(\rho)$,

$$P\{|\psi - \tilde{\psi}| < t\sigma_1\} > 1 - t^2,$$

построим для неё доверительный коридор при $t = 4$ и $\sigma_1 = 0.046$,

$$P\{\tilde{\psi} - 0.184 < |ln(\pi_1 {\pi_2}^{-1})| < \tilde{\psi} + 0.184\} > 0.937, \qquad (4)$$

где $\tilde{\psi}$ выражается формулой (3).

Неравенство (4) определяет множество, содержащее все вырожденные критические точки перегиба функции $f(x,\theta)$ при $k = 2$, $\pi_1 \neq \pi_2$ $\rho \in [2.1,\ 7.2]$.

Неравенство (4) с дисперсией регрессии $\sigma_1^2 = 0.002$ точнее неравенства (2) с дисперсией $\sigma_1^2 = 0.015$ [1,2]

Список литературы

1. Апраушева Н.Н., Сорокин С.В., О бифуркации семейства простейших гауссовых смесей. Четвёртые Курдюмовские чтения. Междунар. междисциплинарная научн. Конф. «Синергетика в естественных науках», Тверь, 2008.
2. Aprausheva N., Sorokin S. On the Uni- and Bimodality of a Two-Component Gaussian Mixture. ISSN 1054–6618. Pattern Recognition and Image Analysis, 2008, Vol. 18, N 4, pp. 577–579.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Комкнига, 2005.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.