Определение и способы задания булевой функции

Рассмотрим n-мерный булев куб: B^n

Определение:

Булевой функцией от n переменных $x_1, ..., x_n$ называется функция, заданная на булевом кубе B^n и принимающая значения в булевом кубе B^1, то есть булева функция - это отображение: $B^n \longrightarrow B^1$

Обозначение: $f(x_1, ..., x_n)$ Аргументами функции являются 0 и 1 и значение функции тоже равно либо 0, дибо 1.

Способы задания:

1.Табличный.

Наборы значений переменных, то есть булевы вектора располагаются в порядке возрастания чисел, двоичным выражением которого они являются. Такой порядок называется лексикографическим.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & x_1 & x_2 & ... & x_n & f \\
 & 0 & 0 & ... & 0 & \gamma_1 \\
 & 0 & 0 & ... & 1 & \gamma_2 \\
2^n \{ & ... & ... & ... & ... & ... \\
 & ... & ... & ... & ... & ... \\
 & 1 & 1 & ... & 1 & \gamma_n
\end{array}
$$

$$N = 2^n$$

2.Векторный.

При стандартном упорядочивании вершин булева куба B^n для задания функции достаточно указать только вектор ее значений $(\gamma_1, ..., \gamma_N)$ Так как имеется всего $2^N = 2^{2^n}$ N-мерных булевых векторов $(\gamma_1, ..., \gamma_N)$, то получим:

Число булевых фунций, зависящих от n переменных равно 2^{2^n}

3. Геометрический

Определение:

Для булевой функции $f(x_1, ...x_n)$ вершина булева куба B^n называется единичной, если значение функции на этом векторе равно единице. Совокупность всех единичных вершин для функции называется носителем этой функции и обозначается N_f.

Чтобы задать булеву функцию достаточно перечислить все вершины, входящие в носитель N_f.

Определение:

Функция $f(x_1, ...x_n)$ зависит от i-ого аргумента фиктивно, если какие бы два набора значений переменных, отличающихся только значением i-ой переменной, мы не взяли, значения функции на них совпадают.

В этом случае переменная x_i называется фиктивной.

Определение:

Переменная x_i функции f называется существенной, если существуют такие два набора переменных, отличающихся i-ой компонентой, что выполняется неравенство:
$f(x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n) \neq f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$

В этом случае говорят, что функция зависит существенно от i-ой переменной.

В функцию можно добавлять и изымать из этой функции фиктивные переменные.

Определение:

Две булевые функции f_1 и f_2 называются равносильными (или равными), если одна из них может быть получена из другой путем добавления или изъятия фиктивных переменных.

Если функция g получена из функции f удалением фиктивных переменных x_i, то нужно вычеркнуть в таблице строки, соответствующие значениям $x_i = 1$, после этого нужно вычеркнуть столбец значений переменной x_i и получим таблицу для функции g.

Число фунций от одной переменной:
$2^{2^1} = 4$

x	0	x	$\neg x$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Число фунций от двух переменных:
$2^{2^2} = 16$

x	y	0	$x \wedge y$	$x \hookrightarrow y$	x	$x \hookleftarrow y$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \equiv y$	$\bar{x}$	$x \longleftarrow y$	$\bar{x}$	$x \longrightarrow y$	$x \vert y$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Определение:

Основными элементарными функциями называются 0, 1, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ Элементарными булевыми функциями называют все основные и, кроме того, $\longrightarrow$, $\oplus$, $|$, $\downarrow$, $\equiv$.

Основные элемнтарные функции удовлетворяют аксиомама булевой алгебры:
$x \wedge y = y \wedge x$
$x \vee y = y \vee x$
$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
$x \wedge 0 = 0$
$x \wedge 1 = x$
$x \vee 0 = x$
$x \vee 1 = 1$
$x \wedge \bar{x} = 0$
$x \vee \bar{x} = 1$
$(\bar{\bar{x}}) = x$
$x \wedge x = x$
$x \vee x = x$
$\neg(x \vee y) = \bar{x} \wedge \bar{y}$
$\neg(x \wedge y) = \bar{x} \vee \bar{y}$

Кроме того, полезно знать следующие свойства:
$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$
$x \oplus 1 = 1 \oplus x = \bar{x}$
$x \oplus y = y \oplus x$
$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
$(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$

Суперпозиция булевых функций

Определение:

Пусть дана система функций $\Phi = \{\phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi_k(y_1, ...y_l)\}$ Тогда элементарной суперпозицией функций из системы Φ называется функция Ψ , которая может быть получена из функций системы Φ одним из следующих способов:

1) переименованием какой-то из переменных. В частности, переменные можно отождествлять. $\phi_i(x_1, x_2, ..., x_k)$

2) подстановкой какой-то функции ϕ_i в любую другую функцию вместо какого-то аргумента.

Эти действия будем называть операциями элементарной функции.

Определение: Функция Ψ называется суперпозицией функций системы Φ если она может быть получена путем последовательного применения конечного числа операций элементарной суперпозиции к функциям системы.

Определение: Суперпозиция элементарных булевых функций называется формулой. Если булева функция f равносильна формуле F , то будем говорить, что формула F задает или реализует функцию f

Для удобства записи формул договоримся о старшинстве операций: 1) отрицание старше всех функций, 2) конъюнкция старше любой из операций кроме отрицания.

Все элементарные булевы функции представимы в виде суперпозиции основных элементарных булевых функций:
$x \oplus y = x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y$
$x \equiv y = x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y}$
$x \to y = \bar{x} \vee y$
$x | y = \neg(x \cdot y) = \bar{x} \vee \bar{y}$
$x \downarrow y = \neg(x \vee y) = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)
Конъюнктивные нормальные формы (КНФ)

Введем обозначение $x^\delta =$
x, если $\sigma = 1$
$\bar{x}$, если $\sigma = 0$

Определение: Выражение вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_n}^{\sigma_n}$ называется элементарной конъюнкцией, а $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_{i_n}^{\sigma_n}$ элементарной дизъюнкцией.

Элементарнная конъюнкция называется правильной, если все входящие в нее переменные различны.

Элементарнная конъюнкция называется полной относительно набора переменных $x_1, \dots, x_n$, если она правильна и в нее входят все переменные.

Аналогичные определения для элементарных дизъюнкций.

Определение: ДНФ называется любая дизъюнкция различных правильных элементарных конъюнкций. ДНФ называется совершенной (СДНФ), если все входящие в неё элементарные конъюнкции полны относительно данного набора переменных.

Определение: КНФ называется всякая конъюнкция различных правильных элементарных дизъюнкций. КНФ называется совершенной (СКНФ), если все входящие в неё элементарные дизъюнкции полны относительно данного набора переменных.

Теорема:

Всякая булева функция не равная тождественно $\hat{0}$ может быть представлена в виде СДНФ и это представление единственно.

$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee\limits_{\vec{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in N_f} (x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \dots, x_n^{\sigma_n})$

Определение: Пусть задана функция $f(x_1, \dots, x_n)$, двойственной к ней функцией называется функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x_1}, \dots, \bar{x_n})$

Если есть таблица для функции $f(x_1, \dots, x_n)$, то для получения столбца для функции $f^*(x_1, \dots, x_n)$ надо перевернуть столбец для f и взять его отрицание.

Теорема (принцип двойственности) Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n)$ является следующей суперпозицией функций $f, f_1, \dots, f_k$

$F(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)))$

тогда справедливо:

$F^*(x_1, \dots, x_n) = f^*(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k^*(x_1, \dots, x_n)))$

Теорема. Всякая булева функция не равная тождественно $\hat{1}$.

$f(x_1, \dots, x_n) = \wedge(\mathrm{x}_1^{\bar{\sigma_1}} \vee x_2^{\bar{\sigma_2}} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma_n}})$

$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \notin N_f$

Основные понятия, связанные с минимизацией ДНФ. Тривиальный алгоритм минимизации.

Определение: Пусть элементарная конъюнкция имеет вид $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r}$ тогда число r называется её рангом. Рангом ДНФ называется сумма рангов элементарных конъюнкций, входящих в ДНФ.

Определение: Минимальной ДНФ функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ называется сумма рангов элементарных функций содеражщая минимальное число символов переменных по сравнению со всеми ДНФ реализующими функцию $f(x_1, \cdots, x_n)$. То есть она имеет минимальный ранг.

Теорема: Число различных ДНФ от переменных равно $2^{3^n-1} - 1$

Доказательство: Каждой элементарной конъюнкции К можно сопоставить вектор $(a_1, \dots, a_n)$;$a_i = \begin{cases} 1, \text{если } x_i \in K \\ 0, \text{если } \bar{x}_i \in K \\ -1, \text{если } x_i \notin K \end{cases}$

Сколько будет различных векторов такого типа?:3^n Отбросим случай, когда вектор имеет вид $(-1, 1, \cdots, -1)$ т.е. когда элементарной конъюнкции не существует, останется $N = 2^n - 1$. Каждая из N элементарных конъюнкций может входить или не входитьв ДНФ, следовательно всего различных ДНФ может быть $2^N - 1 = 2^{3^n - 1} - 1$

Тривиальный алгоритм минимизации: 1. Все ДНФ от n переменных упорядочиваем по числу символов переменных.
2. Сравниваем исходную функцию с упорядоченными ДНФ. Первая, которая будет равна исходной функции и будет являться минимальной.
Этот алгоритм плох тем, что надо перебирать много ДНФ.

Геометрическая интерпретация построения ДНФ для данной функции.

Определение: Носитель элементарной конъюнкции ранга r называется интервалом ранга r. в B^n интервал ранга r содержит 2^{n-r} вершин.
$N_{x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r}} = \left\{ \vec{\alpha} | \alpha_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_r}^{\sigma_r} = 1 \right\}$
$\vec{\alpha} = \{(\ldots, \sigma_1, \ldots, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, \ldots)\}$

Теорема: $N_{f \vee v} = N_f \vee N_g$

Доказательство:

$$\forall \alpha \in N_{f \vee v} \Longleftrightarrow f(\vec{\alpha}) \vee g(\vec{\alpha}) = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} g(\vec{\alpha}) = 1 \\ \text{или} \\ f(\vec{\alpha}) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \vec{\alpha} \in N_g \\ \text{или} \\ \vec{\alpha} \in N_f \end{array} \Longleftrightarrow \vec{\alpha} \in N_f \vee N_g$$

Следствие: Носитель ДНФ есть объединение носителей элементарных конъюнкций, т.е. совокупность интервалов.

Определение: Интервал J называется допустимым для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ если он принадлежит носителю функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Элементарная конъюнкция, носителем которой является допустимый интервал называется импликантой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Для того чтобы написать ДНФ, равносильную данной функцию можно представить носитель этой функции в виде объединения допустимых интервалов и, затем, взять дизъюнкцию соответствующих импликант. Это и будет искомая ДНФ:
$N_f = \bigvee_{i=1}^{S} J_i \Longrightarrow$ ДНФ: $\bigvee_{i=1}^{S} K_i$

Определение: Представление носителя функции в виде объединения допустимых интервалов называется покрытием носителя интервалами.

Сокращенные и тупиковые ДНФ функций.

Определение: Допустимый интервал называется максимальным, если не существует другого допустимого интервала целиком содержащего в себе исходный. Конъюнкция, носителем которой является максимальный интервал, называется простой импликантой.

Определение: ДНФ, отвечающая покрытию носителя функции всеми возможными максимальными интервалами называется сокращенной ДНФ: D_c т.е. сокращенная ДНФ - это дизъюнкция всех простых импликант.

Определение: Покрытие носителя максимальными интервалами называется неприводимым, если удаление любого из интервалов приводит к нарушению покрытия. Соответствующая неприводимому покрытию ДНФ называется тупиковой.: $D_{\text{туп}}$
Очевидно, что всякая минимальная ДНФ данной функции находится среди её тупиковых.

Определение: Максимальный интервал называется ядровым, если он содержит хотя бы одну вершину Булева куба, не принадлежащую никаким другим максимальным интервалам. Простая импликанта соответствующая ядровому интервалу также называется ядровой.

Замечание: Каждый ядровой интервал содержится в любом неприводимом покрытии. Каждый ядровой импликант входит в любую тупиковую ДНФ.

Определение: Дизъюнкция ядровых импликант называется ядровой ДНФ.: $D_{\text{я}}$

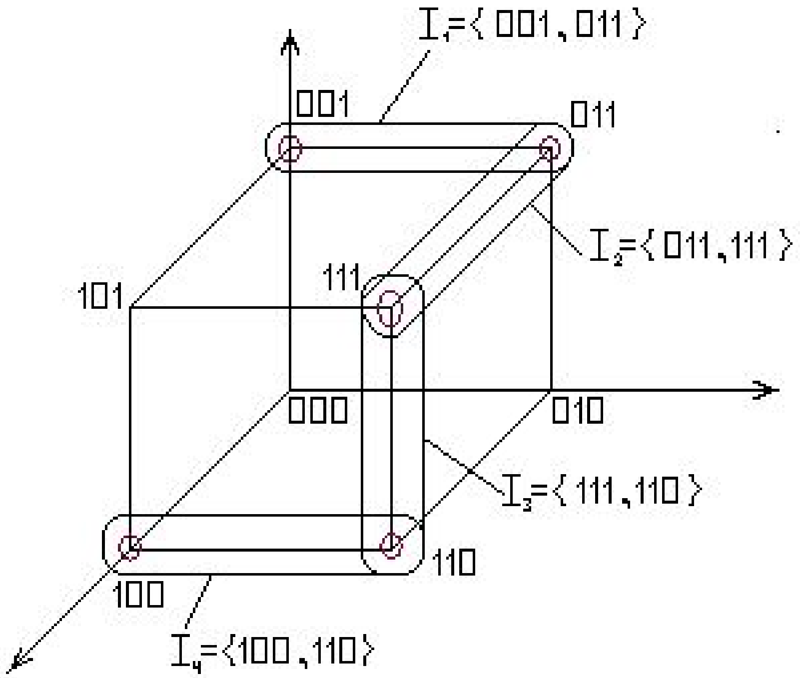
Алгоритм отыскания минимальных ДНФ:

1. Определяем носитель функции и находим все максимальные интервалы и соответствующие им простые импликанты.
2. Находим ядровые интервалы и выделяем ядро функции.
3. Используя ядровые интервалы, с помощью комбинаций не ядровых интервалов находим все возможные неприводимые покрытия и, таким образом, выписываем все тупиковые ДНФ.
4. Выделяем среди тупиковых ДНФ все минимальные.

Пример:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$I_1 \leftrightarrow \pi_1 = \overline{x}_1 x_3$



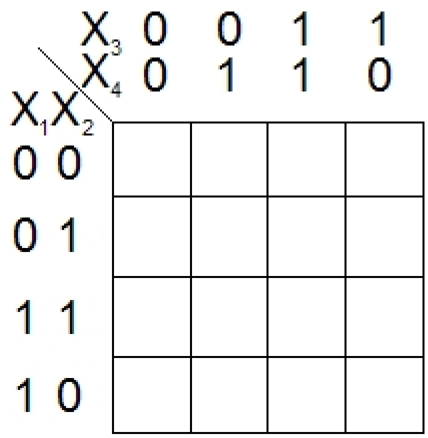
$I_2 \leftrightarrow \pi_2 = x_2x_3$
$I_3 \leftrightarrow \pi_3 = x_1x_2$
$I_4 \leftrightarrow \pi_4 = x_1\overline{x}_3$
Ядровые: I_1, I_4
$D = \pi_1 \vee \pi_4 = \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3$
$N_f = I_1 \cup I_4 \cup I_3$
$D_{.1} = \pi_1 \vee \pi_4 \vee \pi_3 = \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2$ ранг=6
$N_f = I_1 \cup I_4 \cup I_2$
$D_{.2} = \pi_1 \vee \pi_4 \vee \pi_2 = \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$ ранг=6
$D_{min} = D_{.1} = D_{.2}$

Метод карт Карно отыскания минимальных ДНФ.

Четырехмерный булев куб B^4 на плоскости нжжждж можно изобразить в виде следующей карты Карно: у которой считаем, что левый край я вляется смежным с правым, а верхний край - с нижним. Тогда соседние клетки куба Карно отвечают соседним вершинам B^4.

Интервалы на карте Карно будут иметь следующий вид: интервал ранга I может быть образован 8 клетками, лежащими в двух соседних строках или в двух соседних столбцах; интервал ранга II может быть образован 4 клетками, лежащими в одной строке или в одном столбце или образующими квадрат 2×2; интервал ранга III может быть образован 2 клетками, соседними по горизонтали или по вертикали; интервал ранга IV может быть образован 1 отдельной клеткой.

Элементарная конъюнкция, носителем которой будет данный интервал, получается следующим образом: та переменная, котрая меняет свое значение



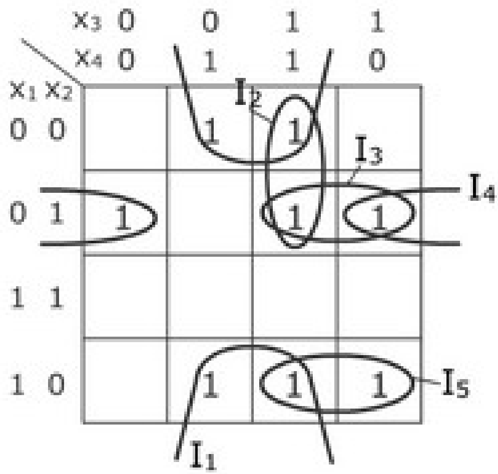
при переходе от одной клетки интервала к другой, входить в элементарную конъюнкцию не будет, а та переменная которая не меняет своё для всех клеток интервала будет входитьв элементарную конъюнкцию и, если эта переменная для всех клеток имеет значение 0, то эта переменная входит в элементарную конъюнкцию с отрицанием, а если эта переменная для всех клеток имеет значение 1, то она входит в элементарную конъюнкцию без отрицания.

Алгоритм отыскания элементарных ДНФ с помощью карт Карно:

1. Выделяем на карте Карно носитель функции, пометив соответствующие клетки единицами.
2. Выделяем на карте все допустимые интервалы ранга I, если они есть.
3. Выделяем все допустимые интервалы ранга II, не покрытые целиком каким либо уже выделенным интервалом.
4. Выделяем все допустимые интервалы ранга III, не покрытые целиком каким либо уже выделенным интервалом.
5. Выделяем все допустимые интервалы ранга IV, не покрытые целиком каким либо уже выделенным интервалом.
6. Выделяем все ядровые интервалы.
7. С помощью комбинации неядровых интервалов находим все возможные неприводимые покрытия.
8. Для каждого неприводимого покрытия выписываем соответствующую тупиковую ДНФ.
9. Выделяем среди тупиковых ДНФ минимальную.

Пример:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0101101101110000)$



$I_1 = \{(0001), (0011), (1001), (1011)\} \Rightarrow \pi_1 = \bar{x_2} \cdot x_4$
$I_2 = \{(0011), (0111)\} \Rightarrow \pi_2 = \bar{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4$
$I_3 = \{(0111), (0110)\} \Rightarrow \pi_3 = \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$
$I_4 = \{(0100), (0110)\} \Rightarrow \pi_4 = \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot \bar{x_4}$
$I_5 = \{(1011), (1010)\} \Rightarrow \pi_5 = x_1 \cdot \bar{x_2} \cdot x_3$

ядровые: I_1, I_4, I_5
$D = \pi_1 \vee \pi_4 \vee \pi_5 = \bar{x_2} \cdot x_4 \vee \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot \bar{x_4} \vee x_1 \cdot \bar{x_2} \cdot x_3$

$N_f = I_1 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_2$
$D_1 = \pi_1 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \vee \pi_2 = \bar{x_2} \cdot x_4 \vee \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot \bar{x_4} \vee x_1 \cdot \bar{x_2} \cdot x_3 \vee \bar{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4$
ранг $= 11$

$N_f = I_1 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_3$
$D_2 = \pi_1 \vee \pi_4 \vee \pi_5 \vee \pi_3 = \bar{x_2} \cdot x_4 \vee \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot \bar{x_4} \vee x_1 \cdot \bar{x_2} \cdot x_3 \vee \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$
ранг $= 11$

$D_{min_1} = D_1 \qquad D_{min_2} = D_2$

Метод Квайна - Мак-Клоски отыскания минимальной ДНФ функции.

Определение:

Ипликант K_1 целиком покрывается импликантом K_2 если каждыя переменная, входящая в K_2, точно так же входит в K_2.

Пример: $K_1 = x_1 \cdot \bar{x_2} \cdot x_4 \qquad K_2 = x_1 \cdot x_4$

Геометрический смысл состоит в том, что $N_{K_1} \subset N_{K_2}$

Утверждение:

K_1 покрывается K_2 тогда и только тогда, когда $K_1 = K_2 \cdot K_3$.
В дальнейшем будем использовать следующие операции над элементарными коньюнциями:

1. Склеивание коньюнкций: $x \cdot k \vee \bar{x} \cdot k = k$.

2. Поглощение: $k_1 \vee k_1 \cdot k_2 = k_1$.

3. Обобщённое склеивание: $x \cdot k_1 \vee \bar{x} \cdot k_2 = x \cdot k_1 \vee \bar{x} \cdot k_2 \vee \ k_1 \cdot k_2$.

Алгоритм Квайна:

1. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ представляется в виде СДНФ.
2. Провести все возможные склеивания между импликантами, входящими в СДНФ, и выписать все полученные импликанты меньших рангов. К полученным импликантам опять применим все возможные склеивания и выпишем все полученные импликанты, и т.д. ... При каждом склеивании сохраняется список всех получаемых импликант.
3. Из всех полученных импликант удаляем те, которые покрываются хотя бы одним другим импликантом. Т.е. удаляем те импликанты, которые хотя бы один раз учавствовали в склеивании.

Можно доказать, что в процессе действий шага 2 появляются все простые импликанты, поэтому после применения шага 3 останутся
только простые импликанты и при этом все простые импликанты. Таким образом можно получить сокращённую ДНФ.

Формализация Мак-Клоски:

Элементарные коньюнкции будем представлять в виде векторов:
Для n переменных: переменные пишутся в выбранном порядке и каждой импликанте K ставится в соответствие вектор $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$:

$\alpha_i =$
1,если $x_i \in K$;
0,если $\bar{x_i} \in K$;
-,если $x_i \notin K, \bar{x_i} \notin K$.

$K_1 = x_1 \cdot \bar{x_3} \cdot x_4 \longleftrightarrow \overrightarrow{\alpha_1} = (1 - 0\ 1)$
$K_2 = x_1 \cdot x_4 \longleftrightarrow \overrightarrow{\alpha_2} = (1 - - 1)$

Алгоритм Квайна - Мак-Клоски:

1. Функция $f = (x_1, ..., x_n)$ представляется в виде СДНФ. Все элементарные коньюнкции, входящие в СДНФ вписываются в формализованном виде в виде векторов.

2. Объединяем выписанные вектора в классы по числу единиц, содержащихся в координатах векторов. Классы распологаем в порядке возрастания числа единиц. Записываем все вектора в столбец один за другим по классам.

3. Проводим все возможные склеивания между векторами, выписанными в столбец. Склеивание может происходить только между векторами, находящихся в соседних классах. Вектора, участвующие в склеивании, помечаем „звёздочкой“, а результаты склеивания выписываем в соседний справа столбец и снова располагаем по классам и проводим все возможные склеивания векторов из нового столбца и так далее .... до тех пор пока среди вновь полученных векторов нельзя будет провести ни одного склеивания.

   Все вектора, оставшиеся не помеченными „звёздочкой“ в конце процесса склеивания соответствуют простым импликантам. Обозначим их через π_i, а вектора из первого столбца обозначим через κ_j

4. Построим таблицу, у которой строки соответствуют векторам $\pi_1, ..., \pi_i, ...$, а столбцы - векторам $\kappa_1, ..., \kappa_j, ...$. Если элементарная коньнкция π_i покрывает элементарную коньюнкцию κ_j, то на пересечении j-того столбца и i-той строки ставится „крестик“ $/+/$

   Находим столбцы, содержащие единственный „крестик“ $/+/$. Строки, в которых находится такой „крестик“ соответствуют ядровым импликантам.

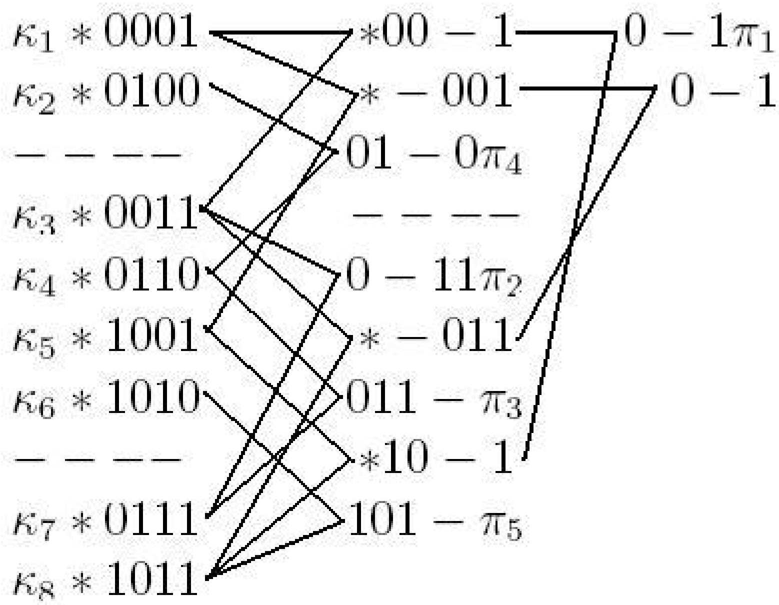
5. Вычёркиваем строки в таблице, соответствующие ядровым импликантам.

6. Выписываем ядро функции, т.е. дизьюнкцию ядровых импликант. Затем вычёркиваем столбцы, где где есть вычеркнутые „крестики“. Получим новую, уменьшенную таблицу.

7. В уменьшенной таблице ищем все возможные минимальные комбинации строк, которые удовлетворяют свойству, что в каждый столбец входит хотя бы один „крестик“ из этой комбинации.

   Диьюнкция ядра функции с соответствующими простыми импликантами, отвечающими любой такой комбинации строк, определяет тупиковую ДНФ функции. Выписывая все тупиковые ДНФ функции, выбираем из них минимальные.

   $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0101101101110000)$



	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8
π_1	+		+		+			+
π_2			+				+	
π_3				+			+	
π_4		+		+				
π_5						+		+

	κ_7
π_2	+
π_3	+

$D_R = \pi_1 \vee \pi_4 \vee \pi_5 = \bar{x}_1 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$

$D_1 = D_R \vee \pi_2 = \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4$

ранг $= 11$

$D_2 = D_R \vee \pi_3 = \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$
ранг $= 11$ '
$D_{min} = D_1 = D_2$

Функциональная полнота систем функций.}

Пусть задана конечная совокупность булевых функций:

$\sum_1 = \{f_1, ..., f_e\}$

Определение: Система $\sum$ называется функциональной полной, если любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции функций из системы $\sum$.

Определение: Если функция f$(x_1, ..., x_n)$ представлена в виде суперпозиции функций из системы $\sum$ то будем говорить, что функция представлена формулой над $\sum$.

Теорема: Пусть имеется две системы функций $\sum$ и $\sum_1$, причем система $\sum_1$ является полной. Если любая функция из системы $\sum_1$ представима формулой над $\sum$, то и система является функционально полной.

Доказательство: $\sum$=$\{f_1, ..., f_e\}$,$\sum_1$=$\{g_1, ..., g_r\}$
Произвольная булева функция F$(x_1, ..., x_n)$ в силу полноты системы $\sum_1$ представима формулой над $\sum_1$. Заменив в этой формуле каждую функцию из системы $\sum_1$ суперпозицией функций из системы $\sum$, мы получим, что эта функция F$(x_1, ..., x_n)$ представима формулой над $\sum$. Следовательно система $\sum$ является функционально полной, что и требовалось доказать.

Теорема: Пусть система $\sum = \{f_1, ..., f_e\}$ является функционально полной, тогда система $\sum^* = \{f_1^*, ..., f_e^*\}$ состоящая из двойственных функций также является функционально полной.

Доказательство: Пусть система F$(x_1, ..., x_n)$ это произвольная булева функция, рассмотрим функцию двойственную к ней F$^*(x_1, ..., x_n)$. Она может быть представлена в виде формулы над $\sum$. Заменим в этой формуле "Принципа двойственности"новая формула будет равна функции F$(x_1, ..., x_n)$, то есть эта функция будет представима формулой над $\sum^*$. Следовательно эта система полна.

Важнейшие функциональные полные системы функций:

$\sum_1 = \{x \vee y, x \wedge y, \neg x\}$ (СДНФ) $\quad \sum_2 = \{x \vee y, \neg x\}$
$\sum_3 = \{x \wedge y, \neg x\} \quad \sum_4 = \{x|y\} \quad \sum_5 = \{x \downarrow y\}$
$\sum_6 = \{x \wedge y, x \oplus y, 1\}$ - система Жегалкина
xy$=\neg(\neg x \vee \neg y) \quad x \vee y = \neg(\neg x \neg y)$

Определение: Одночлен называется выражение вида $\alpha_{i_1 \cdots i_r} \cdot x_{i_1} ... \cdot x_{i_r}$, где $\alpha_{i_1 \cdots i_r}$ равна либо 0 либо 1.

Определение: Многочленом Жегалкина называется сумма по модулю два различных одночленов.

Теорема Жегалкина: каждая булева функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина и притом единственным образом.

Доказательство: Представим функцию в виде СДНФ. Выразим функции дизъюнкция и отрицание в СНДФ через функции системы Жегалкина, раскроем в формуле скобки и приведем подобные члены. Получим формулу, которая по определению будет являться многочленом Жегалкина. Докажем теперь единственность такого представления. Для этого подсчитаем сколько различных многочленов Жегалкина существует от n переменных. Различных одночленов будет 2^n. Различных многочленов будет $2^{2n} - 1$ и плюс ещё нулевая функция. А это как раз столько, сколько существует различных булевых функций от n пременных, следовательно, каждой функции соответствует только один многочлен Жегалкина.

Метод неопределенных коэффициентов нахождения многочлена Жегалкина, равного данной функции.

Если функция зависит от n переменных, то выписываетм общий вид искомого многочлена Жегалкина с неизвестными коэффициентами: $P\left(x_1, ..., x_n\right) = C_0 \oplus C_1 \cdot x_1 \oplus .... \oplus C_{12..n} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n$ составляем систему линейных уравнений, содержащую 2^n неизвестных:

$$\left\{ f(\overrightarrow{\alpha}) = P(\overrightarrow{\alpha}),\ \overrightarrow{\alpha} = B^n \right.$$

Неизвестные коэффициенты $C_0, C_1, ..., C_{12n}$ находят из решения системы.

Пример!: $x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$
$\neg x = x \oplus 1,\ x^{\sigma} = x \oplus \sigma \oplus 1$
f$(x_1, ..., x_n) = \vee x_1^{\sigma 1} ... x_n^{\sigma n} =^{\otimes} \oplus \sum (x_1 \oplus \sigma_1 \oplus 1)...(x_n \oplus \sigma_n \oplus 1)$, причем $\overrightarrow{\sigma}$: $f(\overrightarrow{\sigma}) = 1$, раскрыв скобк, приведем подобные $x \oplus x = 0$, получим многочлен Жегалкина.
$\otimes$ здесь учли, что $(x_1^{\sigma_1} ... x_n^{\sigma_n})(x_1^{\sigma_1^{'}} ... x_n^{\sigma_n^{'}}) \equiv 0$ при $\overrightarrow{\sigma} \neq \overrightarrow{\sigma^{'}}$
U$\Longrightarrow$ V будет равна $\oplus$, т.к. A$\vee$B=A$\oplus$B, при AB=0.

Замкнутые классы функций

Пусть B - конечная или бесконечная совокупность булевых функций.

Определение: Замыканием множества B называется множество всех булевых функций
представимых в виде формулы над B : [B].

Определение: Класс B называется функционально замкнутым, если он совпадает со своим замыканием: B= [B].

Определение: Булева функция называется линейной если ее многочлен жегалкина не содержит одночленов выше первой степени, то есть многочлене жегалкина коэффициенты при коньюнкциях переменных равны нулю.

Теорема: Класс всех линейных функций (L) функционально замкнутый класс.

Доказательство: Так как любая линейная функция представима в виде

$$f(x_1, ..., x_n) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus ...... \oplus C_n x_n$$

то любые суперпозиции функций такого вида будут линейными функциями

Теорема: Необходимое условие линейности. Если функция линейна и не является константой, то на половине своих наборов она обращается в единицу.

Доказательство: Если функция $f(x_1, ..., x_n)$ линейная, то она представима в в следующем виде

$$f(x_1, ..., x_n) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus ...... \oplus C_n x_n.$$

А так как, по условию, она не является константой, то хотя бы один из коэффициентов $_1, ..., _n$ отличен от нуля. Пусть, для определенности $C1 \neq 0$ то есть $f(x_1, ..., x_n) = C_0 \oplus x_1 \oplus ...... \oplus C_n x_n$ Рассмотрим уравнение

$$x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus ..... \oplus x_n C_n \oplus C_0 = 1$$

множество решений этого уравнения, очевидно с носителем функции f. Это уравнение можно преобразовать в эквивалентное:

$$x_1 = C_2 x_2 \oplus ..... \oplus C_n x_n \oplus C_0 \oplus 1$$

Следовательно для любых значений $x_2 = \alpha_2$,.......,$x_n = \alpha_n$ из уравнения однозначно определяется значение

$$x_1 = \alpha_1 = C_2\alpha_2 \oplus ...... \oplus C_n\alpha_n \oplus 1.$$

Следовательно число различных решений уравнения равно числу различных двоичных наборов $(\alpha_2, ..., \alpha_n)$ то есть $2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n$.

Определение: Булева функция называется самодвойственной, если она равна своей двойственной: $f = f^*$

$$f^*(x_1, ..., x_n) = \bar{f}(\bar{x_1}, ..., \bar{x_n})$$

Теорема: Класс всех самодвойственных функций (S) является функционально замкнутым.

Доказательство: Возьмем какую нибудь суперпозицию самодвойственных функций $F(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n))$.
По принципу двойственности двойственная к функции $F(x_1, ..., x_n)$ функция будет равна

$$F^*(x_1, ..., x_2) = f^*(f_1^*(x_1, ..., x_2), ..., f_k^*(x_1, ..., x_2)).$$

А в силу самодвойственности исходных функций получим:

$$F^*(x_1, ..., x_2) = f(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n)).$$

Следовательно функция $F(x_1, ..., x_n)$ также будет самодвойственной.

Определение: Будем говорить, что набор $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ предшествует набору $\overrightarrow{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$, $\overrightarrow{\alpha} \leq \overrightarrow{\beta}$ если $\alpha_1 \leq \beta_1, ..., \alpha_n \leq \beta_n$

Определение: Булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ из условия $\overrightarrow{\alpha} \leq \overrightarrow{\beta}$ следует, что $f(\overrightarrow{\alpha}) \leq f(\overrightarrow{\beta})$

Теорема: множество всех монотонных функций образует функционально замкнутый класс **M**
$F(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$ пусть $\overrightarrow{\alpha} \leq \overrightarrow{\beta}$ тогда $\gamma_1 = f_1(\alpha_1, ..., \alpha_n) \leq f_1(\beta_1, ..., \beta_n) = \delta_1 .... \gamma_m = f_m(\alpha_1, ..., \alpha_n) \leq f_m(\beta_1, ..., \beta_n) = \delta_m$

то есть $\overrightarrow{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \leq \overrightarrow{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_n) \Longrightarrow F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = f(\gamma_1, ..., \gamma_n) \leq (\delta_1, ..., \delta_n) = F(\beta_1, ..., \beta_n) \Longrightarrow F(x_1, ..., x_n)$ монотонная функция.

Определение: Классом сохраняющим константу δ (T_δ) называется совокупность всех булевых функций, для которых выполнено условие $f(\delta, \delta, ..., \delta) = \delta$

Теорема: Классы T_0 и T_1 являются функционально замкнутыми.

Доказательство: Проведем для класса T_0. Возьмем произвольную суперпозицию функций сохраняющих константу 0 :

$$F(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n)).$$

Тогда

$$F(0, ..., 0) = f(f_1(0, ..., 0), ..., f_k(0, ..., 0)) = f(0, ..., 0) = 0.$$

То есть функция F также принадлежит классу T_0.

Критерий полноты системы функций

Лемма 1.(О несамодвойственной функции) Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ несамодвойственная, то из неё путем подстановки вместо переменных x$_i x\bar{x}$.

Доказательство: Так как функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ по условию является несамодвойственной, то найдутся два таких противоположных набора $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\vec{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n)$.
Рассмотрим функцию $\phi(x) = f(x^{sigma_1}, \ldots, x^{sigma_n})$. Для неё справедливо:$\phi(0) = f(0^{sigma_1}, \ldots, 0^{sigma_n}) = f(\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(1^{sigma_1}, \ldots, 1^{sigma_n}) = \phi(1)$. Таким образом функция $\phi(x)$ является константой.

Лемма 2.(О немонотонной функции) Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ немонотонная, то из неё путем подстановки вместо переменных x$_i x, \bar{x}$.

Доказательство: Из немонотонности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ следует существование наборов $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$, но $f(\vec{\alpha}) = 1, f(\vec{\beta}) = 0$. Для простоты будем считать, что наборы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ отличаются в первых k координатах. Тогда, учитывая, что набор $\vec{\alpha}$ предшествует набору $\vec{\beta}$: $\vec{\alpha} \leq \vec{\beta}$, будем иметь $\vec{\alpha} = (0, \ldots, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n), \vec{\beta} = (1, \ldots, 1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$
Рассмотрим функцию $\phi(x) = f(x, \ldots, x, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$
Так как $f(\vec{\alpha}) = 1$, а $f(\vec{\beta}) = 0$, то получим, что
$\phi(0) = f(0, \ldots, 0, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\vec{\alpha}) = 1 \qquad \phi(1) = f(1, \ldots, 1, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) =$

$f(\vec{\beta}) = 0$
Следовательно, функция $\phi(x) = \bar{x}$

Лемма 3.(О нелинейной функции) Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ нелинейная, то из неё путем подстановки констант 0 и 1 и функций x и $\bar{x}$:
$x_1 \wedge x_2; x_1 \vee x_2; x_1 \bar{\wedge} x_2; x_1 \bar{\vee} x_2$

Доказательство: Представим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ в виде многочлена Жегалкина. Так как функция $f(x_1, \dots, x_n)$ по условию нелинейна, то в этом многочлене есть хотя бы одно слагаемое, содержащее конъюнкцию хотя бы двух переменных. Пусть это будут переменные $x_1 x_2$, $f(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 g_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1 g_2(x_3, \dots, x_n) \oplus x_2 g_3(x_3, \dots, x_n) \oplus g_4(x_3, \dots, x_n)$ где g_1, g_2, g_3, g_4 некоторые многочлены от $x_3, \dots, x_n$ причем $g_1(x_3, \dots, x_n) \neq 0$

$\phi(x_1, x_2) = f(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha, \alpha_3 \dots \alpha_n) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = x_1 x_2$
В силу условия, что $g_1(x_3, \dots, x_n) \neq 0$ существует такой набор значений переменных $x_3 = \alpha_3, \dots, x_n = \alpha_n$ что $g_1(x_3, \dots, x_n) \neq 1$. Подставим этот набор значений переменныхв представление функции $f(x_1, \dots, x_n)$, получим:
$f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = \phi(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$, где константы $\alpha, \beta, \gamma \alpha = g_2(\alpha_3, \dots, \alpha_n), \beta g_3(\alpha_3, \dots, \alpha_n), \gamma = g_4(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$

Если $\alpha = \beta = 1, , x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ получим:
$$\phi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \oplus \gamma = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \vee x_2, \text{если} \gamma = 0 \\ x_1 \bar{\vee} x_2 \text{если} \gamma = 1 \end{array} \right.$$

Если $\alpha = \beta = 0,$
$$\phi(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus \gamma = \left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2, \text{если} \gamma = 0 \\ x_1 \bar{} x_2 \text{если} \gamma = 1 \end{array} \right.$$

Если $\alpha = 0, \beta = 1,$
$$\phi(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 \oplus x_2 \oplus \gamma = (\bar{x}_1 \oplus 1) x_2 \oplus \gamma = \left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2, \text{если} \gamma = 0 \\ x_1 \bar{} x_2 \text{если} \gamma = 1 \end{array} \right.$$

Если $\alpha = 1, \beta = 0,$
$$\phi(x_1, \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_2 \oplus x_2 \oplus \gamma = x_1 x_2 \oplus \gamma = \left\{ \begin{array}{l} x_1 x_2, \text{если} \gamma = 0 \\ x_1 \bar{} x_2 \text{если} \gamma = 1 \end{array} \right.$$

Теорема Поста(О функциональной полноте.) Система функций $B = \{f_1, \dots, f_l, \dots\}$ полна в том и только в том случае, когда она целиком не содержится ни в одном из 5 замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L

Доказательство: Необходимость. Пусть система функций В полна, то есть $B = P_2$. Допустим, что система В целиком содержится в одном из замкнутых классов. Тогда из свойства замыкания получим, что этот замкнутый класс совпадает со всем множеством булевых функций $P_2.,, x|y$.

Достаточность. Если условия теоремы выполнены, то из системы В можно выделить функции f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 :

$f_1 \notin T_0, f_2 \notin T_1, f_3 \notin S, f_4 \notin M, f_5 \notin L$
Будем считать, что эти функции зависят от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$. Укажем алгоритм, позволяющий через данные функции выражать функции уже известных стандартных полных систем. Тем самым установим полноту исходной системы функций.

Алгоритм получения стандартной полной системы

1. Получение констант 0 и 1: Рассмотрим функцию $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ возможны два случая:

а) Если $f_1(1,1,...,1) = 1$, то, поскольку $f_1 \notin T_0$, имеем
$f_1(0,0,...,0) = 1 = f_1(1,1,...,1)$.
Поэтому функция $\varphi(x) = f_1(x,...,x) \equiv 1$ константа 0 получается ввиде следующей суперпозиции:
$\psi(x) = f_2(f_1(x,...,x),...,f_1(x,...,x))_2(1,...,1) \equiv 0$
Здесь используем то, что $f_2 \notin T_1$ и следовательно $f_2(1,...,1) = 0$.

б) Если $f_1(1,...,1) = 0$, то $\varphi(x) = f_1(x,...,x) = \bar{x}$,
$\varphi(0) = f_1(0,...,0) = 1, \varphi(1) = f_1(1,...,1) = 0$
Далее, возьмем функцию $f_3 \notin S$ и воспользуемся леммой I:
путем подстановки в функцию $f_3(x_1,...,x_n)$ функции x и $\bar{x}$ получим одну из констант а,
реализованную в виде формулы над множеством f_1, f_3. Другую константу $\bar{a}$ получим, используя уже имеющуюся функцию $\bar{x}$.

2. Получение отрицания. Если отрицание $\bar{x}$ еще не получено, то берем функцию $f_4 \notin M$ и применим к ней лемму 2. В результате получим функцию $\bar{x}$, реализованную в виде формулы над множеством $\{f_1, f_2, f_4\}$.
3. Получение дизъюнкцию или конъюнкции. Берем функции $f_5 \notin L$
и применяем к ней лемму 3. В результате получим одну из следующих функций: $x_1 \wedge x_2$; $x_1 \vee x_2$; $\overline{\overline{x_1 \wedge x_2}}$; $\overline{x_1 \vee x_2}$. Используя функцию отрицание, получим дизъюнкцию или конъюнкцию.

В результате работы алгоритма мы получим одну из следующих систем $\{\bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$;$\{\bar{x}, x_1 \vee x_2\}$ каждая из которых полна.
Следовательно, исходная система также ложна.
$\sum = \{f_1 = (00001101)\,, f_2 = (10001110)\}$

f	T_0	T_1	S	M
f_1	+	+	-	-
f_2	-	-	+	-

1) $f_2 \notin T_0, T_1$ $f_2(x,x,x) = \bar{x}$
2) $f_1 \notin S$ $f_1\,(0,0,1) = 0$
$f_1\,(0,0,1) = 0$
$f_1\,\Big(x,x,\bar{x}) \equiv \hat{0}$
$f_1\,(x,x,f_2\,(x,x,x)) = \hat{0}$

3) $\hat{1} \equiv \bar{f}_1\left(x, x, \bar{x}\right)$=$f_2\left(f_1\left(x, x, f_2\left(x, x, x\right)\right), f_1\left(x, x, f_2\left(x, x, x\right)\right), f_1\left(x, x, f_2\left(x, x, x\right)\right)\right)$

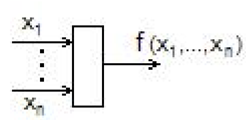
4) $f_1 \notin L$

СДНФ

$f_1 = x_1\overline{x_2 x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1\left(x_2 \oplus 1\right)\left(x_3 \oplus 1\right)_1\left(x_2 \oplus 1\right)x_3 \oplus x_1x_2x_3$= $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3$= $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1$

Схемы из функциональных элементов

Определение: Функциональным элементом называется устройство с n упорядоченными входами и одним выходом, такое что при подаче на входы любой комбинации двузначных сигналов $x_1, \ldots, x_n$ на выходе возникает сигнал $f(x_1, \ldots, x_n)$.



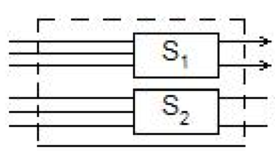
В этом случае говорят, что функциональный элемент реализует функцию f.
Сигналами могут быть отсутствие или наличие электрического тока.
Функциональный элемент $\approx$

Определение логической сети(схемы).

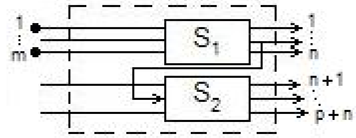
Пусть имеется конечное множество логических элементов $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$. Элемент F$_i n_i$f$_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n_i}})$. Множество F будем называть базисом, а его элементы базисными.

Логическая сеть строится по следующим правилам

1. Каждый элемент $F_i \in F$ есть сеть. Входы и выходы сети совпадает с входом и выходом F.
2. Пусть определены сети S$_1 S_2, , .S, S_1 S_2, S_1 S_2$.



3. Новая сеть S’ может быть получена из сети S, если в качестве выходов взять только часть их.
4. Если в данной сети отождествить два выхода, то получим сеть S’.



5. Пусть заданы сети $S_1 S_2, , .S_1 S_2., S_1 S_2, , S_1 S_2$.

   Определение. Логическая сеть S, имеющая n входов и p выходов, в которой входам приписаны переменные ($x_1, \ldots, x_n$), $-(y_1, \ldots, y_n)\Sigma(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$
   Из определения функционального элемента и правил построения логической схемы следует, что функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать схемой, построенной из элементов данного базиса F в том и только в том случае, если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быть представлена формулой над множеством $\{f_1, \ldots, f_n$, где $f_i -, F_i$.

   Определение. Базис логических элементов $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$ называется полным, если любую булеву функцию можно реализовать в виде логической схемы из элементов F - $F_1, \ldots, F_k$.
   Из определения функциональной полноты вытекает, что базис логических элементов F будет полным тогда и только тогда, когда соответствующая система булевых функций будет полной.

Сложность схемы. Функция Шеннона

Определение. Число логических элементов из базиса $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$ в схеме $\Sigma F \mathrm{L}_F(\Sigma)$.
Рассмотрим стандартный логический базис $F = \{\wedge, \vee, \neg\}$ (инвертор)
Определение. Минимальной функциональной схемой для булевой функции f называется схема над $\{\wedge, \vee, \neg\}$, реализующая функцию f и содержащая min число функциональных элементов.
Это число обозначается $\mathrm{L}_f f\{\wedge, \vee, \neg\}$

Как писать min функциональную схему? Сначала находим D_min для функции f, а затем преобразуем D_min так, чтобы уменьшить количество операций. А затем полученную формулу реализуем функциональной схемой.

Фиксируем число аргументов n

Определение: Функцией Шеннона называетс максимальная сложность схемы, реализующей функцию от n переменных
$\alpha(n) = max\alpha$
$f(x_1, \ldots, x_n)$

Теорема Лупанова: Имеет место следующая оценка для скорости роста $\alpha(n)$ с ростом n :
$\alpha(n) \approx \frac{2^n}{n}$

Пример построения min функции $f = (1100001111001101)$
$D_{min1} = x_1 \cdot \bar{x_3} \vee \bar{x_2} \cdot \bar{x_3} \vee \bar{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 = \bar{x_3} \cdot (x_1 \vee \bar{x_2}) \vee x_2 \cdot (\bar{x_1} \cdot x_3) \vee x_1 \cdot x_4$

$\alpha = 10$
$D_{min2} = \bar{x_3} \cdot (x_1 \vee \bar{x_2}) \vee x_2 \cdot x_3 \cdot (\bar{x_1} \vee x_4)$
$\alpha = 9$

Схема сумматора n-разрядных двоичных чисел

Сумматор - схема, имеющая $2n$ входов и $(n+1)$ выходов и реализующая сложение двух чисел в двоичной системе счисления.

$x \oplus y = z$
$x = \quad\quad x_n x_{n-1} ... x_2 x_1$
$y = \quad\quad y_n y_{n-1} ... y_2 y_1$
$z = z_{n+1} z_n z_{n-1} ... z_2 z_1$
$z_i = x_i \oplus y_i \oplus q_i$, где q_i - остаток с предыдущего шага
$q_{i+1} = x_i \cdot y_i \vee x_i \cdot q_i \vee y_i \cdot q_i$ равен 1 тогда, когда хотя бы один из конъюнктов равен 1.