Контрольная работа 3 по курсу "Дискретный анализ",
1 курс, МФТИ, гр. 511, 512, 516, 2 декабря 2005 г.

Вариант 1.

1. 1 балл

   Пусть G_n– граф со множеством вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, в котором вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда i и j взаимно просты. Изобразите графы G_4 и G_8 и найдите их матрицы смежности.

   Покажите, что если $m < n$, то G_m является подграфом G_n.

2. 1 балл

   Доказать, что если наибольшая из степеней вершин графа G равна ρ, то этот граф $(\rho + 1)$-раскрашиваем.

3. 1 балл

   Доказать, что неориентированный связный граф остаётся связным после удаления некоторого ребра тогда и только тогда, когда это ребро принадлежит какому-нибудь циклу.

4. 2 балла

   Доказать, что граф K_5 имеет 264 эйлеровых цикла.

5. 2 балла

   Показать, что следующий алгоритм всегда позволяет найти эйлеров цикл в неориентированном простом связном графе, если он существует: начать с некоторой вершины P и каждый раз вычёркивать пройденное ребро; не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две несвязные компоненты (не считая изолированных вершин). Оценить трудоёмкость алгоритма.

6. 1 балл

   Доказать, что во всяком турнире существует гамильтонов путь.

Контрольная работа 3 по курсу "Дискретный анализ",
1 курс, МФТИ, гр. 511, 512, 516, 2 декабря 2005 г.

Вариант 2.

1. 1 балл

   Доказать, что с точностью до изоморфизма существуют ровно 4 простых графа с тремя вершинами и одиннадцать – с четырьмя вершинами. Сколько можно построить простых графов с 5 вершинами?

2. 1 балл

   Если G не является полностью несвязным графом, то $\chi(G) = 2$ тогда и только тогда, когда G не содержит циклов нечётной длины.

3. 1 балл

   Пусть G– простой граф с n вершинами и k компонентами. Доказать, что число m его рёбер удовлетворяет неравенствам

   $$n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

4. 1 балл

   Доказать, что максимальный простой путь в связном графе может иметь тип цикла только тогда, когда граф имеет гамильтонов цикл.

5. 2 балла

   Показать, что следующий алгоритм всегда позволяет найти эйлеров цикл в неориентированном простом связном графе, если он существует: начать с некоторой вершины P и каждый раз вычёркивать пройденное ребро; не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две несвязные компоненты (не считая изолированных вершин). Оценить трудоёмкость алгоритма.

6. 2 балла

   Доказать, что существует ровно $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ помеченных простых графов с n вершинами; сколько из них имеет в точности m рёбер?

Контрольная работа 3 по курсу "Дискретный анализ",
1 курс, МФТИ, гр. 511, 512, 516, 2 декабря 2005 г.

Вариант 3.

1. 1 балл

   Как определить понятие изоморфизма между ориентированными графами? Доказать, что существует 16 попарно неизоморфных простых ориентированных графов с тремя вершинами.

2. 2 балла

   Доказать, что $\chi(G) = 2$ тогда и только тогда, когда G – двудольный граф, отличный от полностью несвязного графа.

3. 1 балл

   Доказать, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину.

4. 1 балл

   Дано множество, состоящее из пятнадцати костей домино от 0-0 до 4-4. Сколькими различными способами можно их уложить в цикл, соблюдая правила этой игры?

5. 2 балла

   Показать, что следующий алгоритм всегда позволяет найти эйлеров цикл в неориентированном простом связном графе, если он существует: начать с некоторой вершины P и каждый раз вычёркивать пройденное ребро; не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две несвязные компоненты (не считая изолированных вершин). Оценить трудоёмкость алгоритма.

6. 1 балл

   Доказать, что каждое дерево является двудольным графом; какие деревья являются полными двудольными графами?

Контрольная работа 3 по курсу "Дискретный анализ",
1 курс, МФТИ, гр. 511, 512, 516, 2 декабря 2005 г.

Вариант 4.

1. 1 балл

   Нарисовать все регулярные графы степени 3 с не более чем 8 вершинами.

2. 1 балл

   Найти хроматические числа полного графа с n вершинами и полностью несвязного графа с n вершинами.

3. 1 балл

   Показать, что если каждый из двух различных циклов некоторого графа G проходит через ребро e, то в графе существует цикл, не проходящий через e.

4. 1 балл

   Показать, что граф, вершины и рёбра которого соответствуют вершинам и рёбрам $n-$мерного куба, имеет гамильтонов цикл.

5. 2 балла

   Показать, что следующий алгоритм всегда позволяет найти эйлеров цикл в неориентированном простом связном графе, если он существует: начать с некоторой вершины P и каждый раз вычёркивать пройденное ребро; не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две несвязные компоненты (не считая изолированных вершин). Оценить трудоёмкость алгоритма.

6. 2 балла

   Доказать, что существует ровно шесть неизоморфных деревьев с шестью вершинами и одиннадцать – с семью вершинами.