An initial-boundary value problem on a semi-axis for the generalized Kawahara equation with an absorption term which can degenerate on a bounded interval is considered. A result on large-time decay of weak solutions is established.

Key words: Kawahara equation; initial-boundary value problem; large-time decay of solutions.

Опритова Мария Александровна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: upi23@mail.ru

Opritova Mariya Aleksandrovna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: upi23@mail.ru

Фаминский Андрей Вадимович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

Faminskii Andrei Vadimovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

УДК 330.4, 519.86, 517.977.5

ОПТИМИЗАЦИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ПОЛИТИКИ ФИРМ ИННОВАЦИОННОГО СЕКТОРА

© В.А. Остапов, Н.Н. Оленев

Ключевые слова: динамическая модель; венчурное инвестирование; оптимальное управление.

Статья посвящена исследованию процесса инвестирования в инновационные проекты. Построена динамическая модель жизненного цикла инновационных фирм на основе микроописания соответствующего инвестиционного периода. Поставлена и решена неавтономная задача оптимального управления для фирмы инновационного сектора экономики.

В статье дано построение динамической модели, являющейся упрощенным микроописанием деятельности фирм – объектов венчурного инвестирования типа стартапов или других инновационных проектов.

Основной целью исследования этой работы является изучение влияния различных форм инвестирования на прибыль венчурного капиталиста (ВК) и капитализацию фирмы, которая получает от первого инвестиции, выплачивая обратно определенную часть дохода или передавая часть капитала в его собственность.

Существенным аспектом модели является наличие мультипликатора знаний, влияющего на выпуск инновационных фирм. По своей форме он отражает процесс передачи знаний о ведении бизнеса от инвестора к мелким фирмам, что позволяет вторым успешно выходить на рынок. При этом задачей инвестора является масштабирование бизнеса, т. е. превращение мелкого стартапа в крупную корпорацию. Ниже предложена модель, описывающая жизненный цикл инновационного проекта.

Предположим, что состояние фирмы в каждый момент времени t определяется капиталом K. Считаем, что фирма существует конечное время T, которое соответствует длине инвестиционного периода, и выпускает некий продукт в количестве Y в единицу времени, нанимая работников в количестве R, которым платит заработную плату по ставке s. Считаем также, что фирма платит налоги Z. В качестве производственной функции возьмем ПФ Кобба–Дугласа, то есть будем считать, что выпуск Y определяется степенной функцией от труда R и капитала K. Помимо этого считаем, что на выпуск влияют знания фирмы A, или информация, которую она получает от венчурного инвестора, таким образом:

$$Y = AK^{\gamma}R^{1-\gamma}.$$

Мультипликатор знаний A определяется следующим образом:

$$A = \theta(\Theta + \tau A_V e^{-\mu_A t}),$$

где μ_A — темп устаревания знаний, Θ и θ —- параметры, τA_V — знания, полученные от венчурного инвестора.

Часть выпуска I фирма тратит на воспроизводство основных фондов и собственные инвестиции, остальное продает по цене p. При этом капитал деградирует с темпом μ_K, т. е. изменяется в силу уравнения:

$$\dot{K} = pI - \mu_k k.$$

В работе [1] показано, что для инвестора невыгодно растягивать выплаты инвестиций во времени, поэтому мы считаем, что фирма получает инвестиции Q в качестве стартового капитала, далее делая выплаты W в течение инвестиционного периода, т. е. $K(0) = Q$.

Задачей фирмы является максимизация капитала на конец инвестиционного периода:

$$K(T) \longrightarrow \max_{W}.$$

Мы считаем, что фирма не накапливает наличность, т. е. прибыль Π_Y полностью распределяется между собственными инвестициями и платежами ВИ:

$$\Pi_Y := pY - sR - Z = pI + W.$$

Инвестор требует, чтобы полученные от фирмы выплаты вместе с его долей β в капитале фирмы принесли доход не меньше некоторой нормы α, поэтому должно выполняться следующее неравенство:

$$\int_0^T W\,dt + \beta K(T) \geqslant \alpha Q.$$

При достаточно простых предположениях относительно зависимости Z и R от капитала (см. [2]) поставленная задача сводится к следующей задаче оптимального управления:

$$-x_1(T) \longrightarrow \inf, \qquad t \in [0,T], \qquad T < \infty,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} c_1 e^{-\delta t} + c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x(0) = (Q, 0)^T,$$

$$x_2(T) + \beta x_1(T) \geqslant \alpha Q, \tag{1}$$

$$u \in [0, \frac{\alpha Q}{n}] \quad \forall t,$$

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Здесь константы c_1 и c_2 характеризуют влияние на темп роста фирмы венчурного инвестора и собственный темп роста фирмы соответственно, x_1 — капитал фирмы, x_2 — объем произведенных фирмой выплат по инвестициям, максимальный транш ограничен долей $\frac{1}{n}$ от ожидаемого дохода инвестора.

С помощью принципа максимума из [3] были получены (см. [2]) траектория оптимального роста для данной задачи и оптимальное управление, соответствующее выплатам фирмы по инвестициям:

$$x_1^*(t) = \begin{cases} Qe^{c_2 t - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t}-1)}, & t \in [0, t_1]; \\ Qe^{c_2 t - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t}-1)} - \frac{\alpha Q}{n} e^{c_2(t-t_1) - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t} - e^{-\delta t_1})} \int\limits_{t_1}^{t} e^{-c_2(\tau - t_1) + \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta\tau} - e^{-\delta t_1})} d\tau, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1]; \\ \dfrac{\alpha Q}{n}, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Уравнение для момента переключения t_1 :

$$\beta\left(\frac{e^{c_2 T - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta T}-1)}}{n} - \frac{e^{c_2(T-t_1) - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta T} - e^{-\delta t_1})}}{n} \int\limits_{t_1}^{T} e^{-c_2(\tau - t_1) + \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta\tau} - e^{-\delta t_1})} d\tau \right) + \frac{T - t_1}{n} = 1.$$

Вид оптимального управления говорит о том, что расплачиваться по ним нужно с максимальной возможной скоростью в самом конце инвестиционного периода в максимально короткие сроки.

У т в е р ж д е н и е 1. *Максимум капитала достигается при* $n \to \infty$ *, т. е. на импульсном управлении, сосредоточенном в момент времени* T *.*

Это значит, что максимум капитала доставляет разовая выплата всей необходимой суммы. Следует заметить, что неравенство (1) вырождается в равенство.

У т в е р ж д е н и е 2. *При* $\lambda K(T) \geqslant \beta Q$ *получим* $W \equiv 0$ *.*

Утверждение 2 говорит о том, что в случае, если на конец периода доля инвестора в капитале фирмы будет достаточно большой, то он не станет выводить свой капитал заранее, а дождется конца периода.

Полученные результаты согласуются с реальным положением дел в отрасли, что подтверждает адекватность предложенной модели. Отсутствие экспоненциально растущей задолженности по кредиту принципиально меняет схему выплат, и фирме выгодней расплачиваться в конце инвестиционного периода, первоначально максимально вкладываясь в собственные инвестиции и накапливая капитал.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остапов В.А.* Задача оптимального инвестирования // Модернизация и инновационное развитие экономических систем. М.: РУДН, 2014. С. 344–362.

2. *Оленев Н.Н., Остапов В.А.* К динамической модели экономики с учетом венчурного капитала. М.: ВЦ РАН, 2014.

3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. С. 387-395.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-01020.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 г.

Ostapov V.A., Olenev N.N. OPTIMIZATION IN AN INVESTMENT POLICY DYNAMIC MODEL OF INNOVATIVE SECTOR FIRMS

The article investigates the problem of investing in innovative projects. A dynamic model of a lifecycle during an investment period of such a firms is given. Non-autonomous optimal control problem for an innovative firm is solved.

Key words: dynamic modeling; venture investment; optimal control.

Остапов Всеволод Александрович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: vaostapov@gmail.com

Ostapov Vsevolod Aleksandrovich, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: vaostapov@gmail.com

Оленев Николай Николаевич, Вычислительный центр им. А.А Дородницына РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: nolenev@yahoo.com

Olenev Nicholai Nicholaevich, Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: nolenev@yahoo.com

УДК 515.124

О ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫХ И КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

© **Е.А. Панасенко**

Ключевые слова: пространство замкнутых подмножеств метрического пространства; вполне ограниченное множество; компактное множество.

В работе продолжены исследования [1, 2] пространства $\operatorname{clos}(X)$ непустых замкнутых подмножеств метрического пространства X с метрикой ρ_X^{cl}. В частности, рассмотрены критерии полной ограниченности и компактности множеств в $\left(\operatorname{clos}(X), \rho_X^{\mathrm{cl}}\right)$.

Пусть (X, ϱ_X) — метрическое пространство. Будем использовать следующие обозначения: $\overline{M} \doteq X \setminus M$ — дополнение к множеству $M \subset X$; $\operatorname{clos}(X)$ и $\operatorname{clbd}(X)$ — пространства всех *непустых замкнутых*, *непустых замкнутых ограниченных* подмножеств X, соответственно; $B_X^o(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) < r\}$, $B_X(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) \leqslant r\}$ — открытый и, соответственно, замкнутый шары в пространстве X радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0; $B_X^o(x_0, 0) = \varnothing$; $\varrho_X(x, M) \doteq \inf\limits_{y \in M} \varrho_X(x, y)$ — расстояние в X от точки x до множества $M \neq \varnothing$; $d_X(M_1, M_2) \doteq \sup\limits_{x \in M_1} \varrho_X(x, M_2)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества