

Параллельные вычисления в моделировании процесса венчурного инвестирования¹

Н.Н. Оленёв, А.С. Шерстнева

ВЦ РАН, РУДН, г. Москва

При построении модели экономики надо выделить экономических агентов, которых мы будем учитывать. Стационарный вариант модели венчурного инвестирования строим в соответствии с [1]. Считаем, что в каждый заданный период времени в экономике действует I индивидов, которые могут стать предпринимателями, рабочими или безработными. Считаем, что кроме этих индивидов в каждый период времени в экономике действует фиксированное число F венчурных капиталистов (ВК). Пусть у предпринимателей нет необходимого для запуска нового проекта начального капитала k и достаточных знаний о безубыточном ведении бизнеса в выбранной отрасли, т.е. они вынуждены использовать внешнее финансирование для запуска проекта и внешние рекомендации по управлению бизнесом. ВК предлагает стартовые инвестиции и бизнес-советы в обмен на долю α от доходов нового бизнеса. Считаем, что труд однороден (все рабочие неразличимы), а предприниматели относятся к одному из двух типов, первому или второму, которые отличаются вероятностью проекта на успех. Пусть задана постоянная доля z второго типа предпринимателей среди индивидов. Для простоты считаем, что проект, осуществляемый первым типом предпринимателей, имеет нулевую вероятность успеха. Вероятность успеха p проекта второго типа зависит от уровня совета, данного ВК, a ; $p = p(a)$ - квадратичная функция, $p(0) = 0$. В случае успеха предприниматель второго типа нанимает рабочую силу l в соответствии с производственной технологией $f(l)$, где $f'(\cdot) \geq 0$, а $f''(\cdot) < 0$, а рабочим выплачивает зарплату по ставке w . Для простоты считаем, что неудачные проекты не производят никакой продукции, а нанятые для выполнения их рабочие не получают никакой заработной платы.

Считаем, что до выбора карьеры индивиды не знают, к какому типу они относятся, а ВК обладает совершенным знанием об индустрии, и в результате индивид, ставший предпринимателем, нанимает ВК для оценки надежности проекта. Обозначим через P число тех индивидов I , которые решают стать потенциальными предпринимателями. Не всем потенциальным предпринимателям удастся заручиться поддержкой ВК. Обозначим через v долю свободных финансистов. Дорогостоящий процесс отбора потенциальных предпринимателей считаем совершенным, так что ВК выбирает только потенциальных предпринимателей. Дорогостоящий отбор порождает трения на рынке ВК, которые отражает функция связывания $x(P, vF)$ - однородная первой степени функция, возрастающая, вогнутая, везде дифференцируемая по обоим аргументам. Функция связывания дает число связываний в единицу времени.

Вероятность, что созданная ВК вакансия будет занята потенциальным предпринимателем, такова:

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 08-01-00377, 07-01-00563, 07-01-12032-офи), программ фундаментальных исследований (Президиума РАН № 15, ОМН РАН № 3, РАН № 16), по гранту Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ-2982.2008.1).

$$\frac{x(P, vF)}{vF} = x\left(\frac{P}{vF}, 1\right) \equiv q(\theta), \quad (1)$$

где отношение числа предпринимателей к числу доступных вакансий

$$\theta = P/vF \quad (2)$$

является мерой нехватки венчурного капитала. Аналогично находим вероятность связывания (встречи) потенциального предпринимателя с доступным капиталом:

$$\frac{x(P, vF)}{P} = \frac{vF}{P} x\left(\frac{P}{vF}, 1\right) = \frac{1}{\theta} q(\theta). \quad (3)$$

По свойству функции связывания, $q'(\theta) \geq 0$ и $0 \leq q(\theta) \leq 1$.

ВК находится под влиянием трех различных цен. Первая – это цена создания вакансии δ , которая связана с отбором проектов, возрастает и выпукла по числу вакансий, удачно занятых и отобранных, т.е. $\delta'(\theta) > 0$ и $\delta''(\theta) < 0$. ВК также требует платы, когда дает совет предпринимателю второго типа. Для простоты предполагаем линейность функции цены совета, ga . Отметим, что совет является конфиденциальной информацией и не поддается проверке, на его основе нельзя заключить контракт. Однако можно отследить прибыли. И наконец, последняя цена – это цена начальных инвестиций k с внешней процентной ставкой r .

В рыночном равновесии последовательность событий такова:

- Шаг 1. Профессиональный выбор – индивиды выбирают, стать ли потенциальными предпринимателями или рабочими.
- Шаг 2. Связывание и отбор – ВК выбирают число вакансий. ВК и потенциальные предприниматели связываются в соответствии с функцией связывания, и происходит отбор. Потенциальные предприниматели, которым не удастся найти ВК, или те, которым это удалось, но относящиеся к первому типу, становятся безработными.
- Шаг 3. Торги – после успешного связывания и отбора, ВК и предприниматели договариваются о разделении прибыли.
- Шаг 4. Выбор совета - ВК выбирает уровень совета по управлению.
- Шаг 5. Набор рабочей силы – успех проекта очевиден, и предприниматели нанимают работников.

Для решения этой игры используется концепция равновесия, которая заключается в прохождении каждой подыгры (каждого шага) в обратном порядке.

На пятом шаге решается задача предпринимателя

($d = \alpha$ в презентации)

$$\max_l \left[-d \cdot p \cdot q \cdot f \cdot C - w \cdot l \right],$$

решением которой являются условия первого порядка:

$$f'(\theta) = w. \quad (4)$$

Таким образом, оплата рабочих в силу (4) производится по предельному продукту труда. Это условие определяет $l(w)$, с $dl/dw < 0$, как и ожидалось. Подстановка $l(w)$ в целевую функцию предпринимателя определяет функцию прибыли $\pi^E(a, w, d)$.

На четвертом шаге ВК производит выбор размера советов a для каждого из предпринимателей, чтобы увеличить доходы при заданных значениях α , v , w и θ , в соответствии со следующей задачей:

$$\max_a p(a) f(wl) - (r+k) - ga - \delta \pi^E(a, w, d) \quad (5)$$

Условие первого порядка,

$$p'(a) f(wl) - g = 0, \quad (6)$$

определяет оптимальную функцию совета $a(\alpha, w)$. Подставляя $a(d, w)$ в целевую функцию, ВК определяет функцию прибыли, $\pi^V(a, w, v, k, \theta)$ для показательного проекта. Можно показать, что оптимальная функция совета $a(d, w)$ возрастает по d и убывает по w . Более высокая доля с доходов обеспечивает ВК средствами для предоставления большего количества советов. Более высокая заработная плата уменьшает прибыль ВК, тем самым, и их возможность давать советы.

На третьем шаге ВК отдельно проводит переговоры с каждым из предпринимателей с данными w , v , и θ . ВК и предприниматель используют данные $a(d, w)$ и $l(w)$, определенные на четвертом и пятом шагах, соответственно. Задача Нэша для торгов такова:

$$\max_d \beta \pi^E - (1-\beta) \pi^V - k^{1-\beta}, \quad (7)$$

где π^E определено на шаге 5, а π^V - на шаге 4. Рыночная власть предпринимателя определяется как $\beta \in (0,1)$. Степень риска для предпринимателя равна нулю, так как предприниматель получает нулевую прибыль в случае неудачных торгов с ВК. Степень риска для ВК равняется начальному вкладу k , так как в случае неудачных переговоров с предпринимателем он сохраняет начальный вклад. Оптимальную долю акции $d(w, v, \theta)$ находим из следующего условия первой степени:

$$\pi^E = \beta \Phi + (1-\beta) \pi^V - k - d \frac{d\pi^E}{da}, \quad (8)$$

где $\Phi \equiv \pi^E + \pi^V - k$ - это общая прибыль, которая делится между предпринимателем и ВК. Уравнение (8) определяет правило разделения прибыли, свойства ее сравнительной статики неоднозначны. Второе слагаемое в (8) получается отрицательным согласно свойствам вероятностной функции $p(a)$. Таким образом, в равновесии предприниматель получает долю прибыли, которая оказывается меньше, чем его рыночная власть β . Обеспечение ВК большей частью прибыли, повышает его

активность подачи советов, что выгодно и ВК и предпринимателю. Таким образом, предприниматель принимает меньшую долю прибыли, так как тем самым он увеличивает предполагаемый размер прибыли.

ВК выбирает количество вакансий, чтобы увеличить предполагаемую прибыль, используя заданные θ и w и ожидая получить $a(d, w)$, $l(w)$ и $d(w, v, \theta)$, которые будут определены на более поздних шагах. Задача ВК такова:

$$\max_v q(\theta)v(1-z)[p(a)(f(l) - wl)d - ga - (1+r)k] - \delta(q(\theta)v). \quad (9)$$

Оптимальное число вакансий $v(w, \theta)$ определяется из условия первой степени:

$$(1-z)[p(a)(f(l) - wl)d - ga - (1+r)k] + v(1-z)p(a)(f(l) - wl) \frac{\partial d}{\partial v} - \delta' = 0 \quad (10)$$

Свойства сравнительной статистики неоднозначны.

На первом шаге индивиды выбирают, стать ли им рабочими или предпринимателями путем сравнения ожидаемой прибыли в обоих случаях. Прodelывая это, индивиды опираются на $l(w)$, $a(\alpha, w)$, $\alpha(w, v, \theta)$ и $v(w, \theta)$, определяемые на более поздних шагах. Индивид, решающий стать рабочим, получает заработную плату w с вероятностью p . Индивид, решающий стать предпринимателем, получает доход π^E , при условии, что индивид свяжется с ВК и будет отобран во второй тип. В рыночном равновесии индивиду все равно, стать ли рабочим или предпринимателем. Из этого следует, что следующее условие равновесия выбора профессии должно выполняться:

$$pw = \frac{1}{\theta} q(\theta)(1-z)\pi^E \quad (11)$$

Уравнение (11) определяет ставку заработной платы, которая может либо расти, либо убывать по θ .

Проход шагов 1-5 в обратном порядке дает рекурсивное решение для рыночного равновесия, оценивая l , a , α , v и w как функции от θ . Пусть E – общее число предпринимателей, тогда E равно количеству ВК, умноженному на количество вакансий, отобранных и заполненных каждым ВК:

$$E = (1-z)q(\theta)Fv. \quad (12)$$

Далее, равновесие на рынке труда требует того, чтобы индивиды становились или предпринимателями или рабочими:

$$P + lE = I. \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13), а также определение θ , данное в (2), определяют значения в рыночном равновесии для θ , E и P .

Предполагаемую безработицу \hat{U} мы определяем как уровень безработицы перед тем, как становится известным, какой проект какого предпринимателя становится успешным. Предполагаемая безработица, таким образом, является результатом трений соединения на рынке венчурного капитала. Так как общее число потенциальных предпринимателей P равно общему количеству предпринимателей E плюс количество безработных \hat{U} , из этого следует что

$$\hat{U} = P - E. \quad (14)$$

С другой стороны, фактическая безработица также включает в себя рабочих и предпринимателей, которые становятся безработными из-за провала их проектов. Пусть \bar{U} - число фактических безработных, оно определяется следующим образом:

$$\bar{U} = \hat{U} + (1-p)(1+l)E. \quad (15)$$

Так как все агенты нейтральны к риску и заботятся только об ожидаемом доходе, мы можем абстрагироваться от мотивов перераспределения и смотреть на общий объем продукции или ВВП как на показатель социального благосостояния. ВВП определяется формулой:

$$Y = F\{(1 - z)q(\theta)v[p(a)f(l) - ga - (1 + r)k] - \delta(q(\theta)v)\}. \quad (16)$$

Говорят, что социальный оптимум эффективен по Парето, когда l , a и v максимально увеличивают ВВП при условиях (12), (13) и (2). Из (13) оптимальный выбор l и v определяет оптимальное разделение индивидов на предпринимателей и рабочих. Таким образом, (13) определяет оптимальное число потенциальных предпринимателей P .

Сравнение условий первого порядка для социального оптимума с условиями невмешательства в рыночное равновесие, данное в (5), (7) и (14), приводит к следующему выводу: занятость, уровень советов, количество вакансий, предпринимательская деятельность и безработица в рыночном равновесии невмешательства являются неэффективными.

Расчеты по модели региональной экономики [2], идентифицированным по реальным данным российских регионов показывают, что количество потенциальных и реальных предпринимателей может быть неэффективно низким или высоким в зависимости от внешних эффектов (положительные или отрицательные побочные последствия производства или потребления, осуществляемого одним экономическим агентом, напрямую затрагивающие другого агента). Исходя из того, что l , E и P являются неэффективными в рыночном равновесии, по аналогии можно найти, что уровень предполагаемой и фактической безработицы, определенные в (14) и (15) также являются неэффективными. Таким образом, безработица также может быть или слишком высокой или слишком низкой в рыночном равновесии по сравнению с социальным оптимумом. Для ускорения идентификации модели региональной экономики использовались параллельные вычисления [3-4] на кластерных системах ВЦ РАН, МСЦ РАН (МВС 100К) и ВятГУ (HP HPC Enigma X000).

Оптимальный налог на занятость

$$\tau^* = 1 - \frac{z \bar{q} \theta^* \bar{y}^* p(a^*) [f(l^*) - w^*]}{\Psi [z \bar{y}^* \delta \theta^* \bar{y}^* \bar{y}^* q' \theta^* \frac{\partial \theta}{\partial l}]}$$

$$\geq 0$$

$$<$$

оптимальный налог закрывает разницу между занятостью, выбранной предпринимателем, и ее социально оптимальным уровнем

$$\tau^* = \frac{\partial \pi^E}{\partial l} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial Y}{\partial l}$$

Оптимальный налог на доходы от капитала

$$t^* = 1 - \frac{f(l^*)}{d^* [f(l^*) - w^* l^*]} < 0$$

закрывает разницу между занятостью, выбранной предпринимателем, и ее социально оптимальным уровнем

$$t^* = \frac{1}{p'(a)(f - wl)d} \left\{ \frac{\partial \pi^V}{\partial a} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial Y}{\partial a} \right\}$$

Литература

1. R. Boadway, O. Secrieru, M. Vigneault A Search Model of Venture Capital, Entrepreneurship, and Unemployment. Bank of Canada Working Paper 2005-24. 23 p.
2. Н.Н. Оленев, В.С. Стародубцева Исследование влияния теневого оборота на социально-экономическое положение в Республике Алтай // Региональная экономика: теория и практика. № 11 (68) - 2008 апрель. С.32-37.
3. Н.Н. Оленев Основы параллельного программирования в системе MPI. М.: ВЦ РАН. 2005. 80 с.
4. Н.Н. Оленев, Р.В. Печенкин, А.М. Чернецов Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. М.: ВЦ РАН. 2007. 120 с.