ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Н.Н. ОЛЕНЕВ, В.А. ОСТАПОВ

К ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С УЧЕТОМ ВЕНЧУРНОГО КАПИТАЛА

ВЦ
РАН

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А.ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2014

УДК 519.86

Ответственный редактор

член-корр. РАН И.Г. Поспелов

Строится динамическая модель экономики с учетом венчурного капитала. Выделено семь экономических агентов: крупные и мелкие производители, Правительство, венчурные капиталисты, банковская система, домашние хозяйства, торговые посредники. Предполагается, что мелкие производители существуют за счет венчурного капитала. Поставлены и решены задачи оптимального инвестирования в новые проекты.

Ключевые слова: модель экономики, экономические агенты, венчурный капитал, численные эксперименты

Toward a Dynamic Model for Economy with Venture Capital

N.N. Olenev, V.A. Ostapov

The work started to build a dynamic model of economy based on venture capital. Seven economic agents are allocated: large producers, small producers, Government, venture capitalists, banking system, households, and trade intermediates. It is supposed that small enterprises exist by the venture capital. Problems of optimal investment in new projects are formulated and solved.
Keywords: economy model, economic agents, venture capital, numerical experiments.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 12-01-00916, 13-07-01020, 14-01-31185).

Рецензенты: А.Ю. Флёрова,
А.В. Арутюнов

Научное издание

1. Введение

Экономика дефицита ресурсов ушла в прошлое. В современной экономике потребителю важен не только суммарный объем потребления, но и само разнообразие потребительских благ определенного типа. Пришло время экономики разнообразия [1], в которой производство описывается выпуклой производственной функцией от человеческого капитала. При попытке математического описания новой экономики разнообразия возникает множество проблем. В предлагаемой работе рассматривается одна из этих проблем – задача для венчурного капиталиста по оптимальному инвестированию в новые проекты.

Здесь предполагаем, что с каждым новым проектом связан предприниматель, у которого нет необходимого для запуска этого проекта начального капитала и достаточных знаний о безубыточном ведении бизнеса в выбранной им отрасли производства. Поэтому он вынужден использовать внешнее финансирование для запуска проекта и внешние рекомендации по управлению бизнесом. Стартовые инвестиции и советы по ведению бизнеса может предложить предпринимателю венчурный капиталист в обмен на долю от доходов в новом бизнесе [2].

В настоящей работе рассмотрим замкнутую экономику, т.е. экономику без внешних обменов, в которой в условиях рыночной совершенной конкуренции взаимодействуют семь экономических агентов: два сектора производства, торговля, население, государство, банки и венчурные капиталисты. Производство разделено на секторы: крупный (устоявшееся производство) и мелкий (новые проекты). Данная работа посвящена решению задачи венчурного капиталиста об оптимальном инвестировании, и здесь мы считаем, что оба сектора выпускают однородный продукт.

Относительно второго сектора, реализующего новые проекты, мы предполагаем, что существует бизнес-цикл жизни фирм этого сектора, причем в течение каждого периода фирмы появляются, развиваются и функционируют, а в конце периода либо переходят в первый сектор, либо разоряются. Население предлагает однородный труд для обоих секторов.

Торговый посредник скупает у секторов весь выпуск, распределяя его между агентами – конечными потребителями. Считаем, что агенты занимаются обменом ресурсами и продуктами производства, сопровождающимися кредитно-денежными операциями, т.е. финансовым обменом.

Помимо этого считаем, что венчурный капиталист генерирует и накапливает инвестиционный опыт, т.е. информацию о рынке, которой он может делиться со вторым сектором (может давать советы по ведению бизнеса). Второй сектор, в свою очередь, накапливает, но не генерирует полученную информацию. В модели предполагается, что наличие информации увеличивает выпуск сектора. Тем самым порождается третий тип обменов и балансов – информационный. Далее рассмотрим его подробнее.

Работа построена следующим образом. Разделы со второго по пятый посвящены описанию уравнений балансов и следствий из них. Во втором разделе введено понятие информационного потока, описаны процессы генерации новых знаний и их передача между экономическими агентами. В третьем и четвертом разделах дано описание для материальных и финансовых балансов, соответственно. В пятом разделе приведены следствия из описанных балансов. В шестом разделе даны постановки задач оптимального управления для двух агентов – венчурного капиталиста и мелкого производства (предпринимателя). В седьмом разделе сформулирован принцип максимума Понтрягина в форме, подходящей для решения поставленных задач. Восьмой раздел завершает настоящую работу подробным изложением решения задач оптимального управления для мелкого производства при различных предположениях, а также дает качественный анализ результатов их решения. Приводится экономическая интерпретация полученных результатов. В девятом разделе сделаны выводы об актуальности работы и указаны возможности для использования полученных результатов в дальнейших исследованиях.

2. Описание информационных балансов

Положим τ - время жизни фирм сектора 2. Будем считать, что в каждый момент времени $t_n = \tau \cdot n,\ n \epsilon \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

происходит смена фирм в секторе 2. Таким образом, на каждом полуинтервале $T_n = [t_n, t_n + \tau) = [t_n, t_{n+1})$ мы имеем дело с разными фирмами и с разными предпринимателями в этом секторе.

Ключевым вопросом исследования в этой модели является изучение влияния инвестирования с информационной поддержкой венчурным капиталистом второго сектора на экономику в целом. Рассмотрим деятельность венчурного капиталиста (ВК).

В каждый момент времени ВК инвестирует во второй сектор Λ_V^2 денег, а в качестве дохода по инвестициям W_2^V от второго сектора получает долю в его доходах. Тогда на каждом из полуинтервалов T_n можно определить текущий объем инвестированного ВК во второй сектор Λ_n и объем полученного от него обратно дохода по инвестициям W_n по формулам

$$\Lambda_n(t) = \int_{t_n}^{t} \Lambda_V^2(\xi)d\xi;$$

$$W_n(t) = \int_{t_n}^{t} W_2^V(\xi)d\xi, \qquad \forall t \in T_n.$$

При этом полный объем инвестированного и полученного в качестве дохода венчурным инвестором в период T_n определяется следующим образом:

$$\tilde{\Lambda}_n(T_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Lambda_V^2(t)dt;$$

$$\widetilde{W}_n(T_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} W_2^V(t)dt.$$

Таким образом, можно определить инвестиционную прибыль за период T_n:

$$\tilde{\Gamma}_n(T_n) = \widetilde{W}_n(T_n) - \tilde{\Lambda}_n(T_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [W_2^V(t) - \Lambda_V^2(t)]dt.$$

Аналогичным образом можно определить текущую относительную инвестиционную прибыль ВК:

$$\Gamma_n(t) = W_n(t) - \left(\frac{t - t_n}{\tau}\right)\Lambda_n(t).$$

Положим $\Gamma_n = \Gamma_n^+ + \Gamma_n^- \ \forall t$, где $\Gamma_n^+ = \begin{cases} 0, & \Gamma_n < 0 \\ \Gamma_n, & \Gamma_n \geq 0 \end{cases}$, $\Gamma_n^- = \begin{cases} \Gamma_n, & \Gamma_n < 0 \\ 0, & \Gamma_n \geq 0 \end{cases}$, и рассмотрим два вектора, назовем их вектором абсолютных значений инвестиционных показателей и вектором коэффициентов полезности инвестиционного опыта соответственно:

$$\bar{\Gamma}_n = (\Gamma_n^+, -\Gamma_n^-) \geq 0;$$
$$\bar{\zeta} = (\zeta^+, \zeta^-) \geq 0.$$

Далее, будем считать, что в каждый момент времени $t \epsilon \sqcup T_n$ ВК получает знания в объеме $\Gamma_\zeta = \langle \bar{\Gamma}_n, \bar{\zeta} \rangle = \zeta^+ \Gamma_n^+ - \zeta^- \Gamma_n^-$, которые затем устаревают с темпом μ_A, т.е. баланс его знаний A_V изменяется согласно уравнению

$$\frac{dA_V}{dt} = \Gamma_\zeta - \mu_A A_V, \qquad \forall t \epsilon \sqcup T_n$$

$$A_V(0) = A_V^0.$$

Рассмотрим процесс образования знаний во втором секторе. В начале каждого периода T_n производители второго сектора получают от ВК долю τ_n имеющихся у него знаний, определяемую ВК; таким образом, изменение баланса его знаний A_2^n описывается уравнением

$$A_2^n(t, t_n) = \tau_n(t_n) A_V(t_n) e^{-\mu_A(t - t_n)}, \ \forall t \epsilon \sqcup T_n,$$

т.е. знания второго сектора пропорциональны объему знаний ВК, устаревают с тем же темпом и обновляются в начале каждого инвестиционного периода.

3. Описание материальных балансов

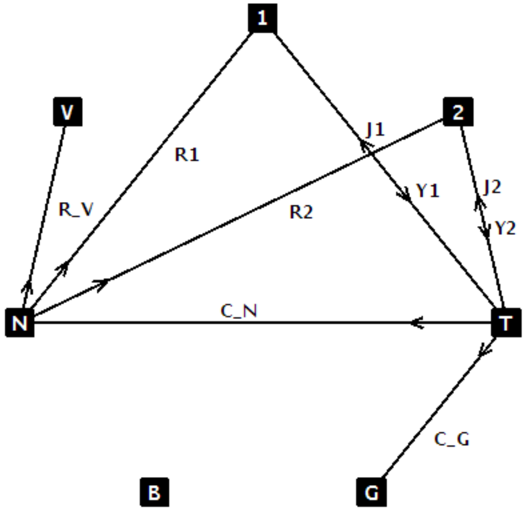

Рис. 1. Граф материальных потоков

3.1. Производство

Мы считаем, что оба сектора производят однородный продукт в количестве Y_1 и Y_2 соответственно, причем выпуск зависит от рабочей силы R_1^L и R_2^L, и капитала K_1 и K_2, а также, некоторым образом, от имеющейся информации A_V и A_2^n.

В качестве производственных функций секторов возьмем ПФ Кобба-Дугласа, при этом учтем влияние совета на выпуск второго сектора:

$$Y_1 = {K_1}^{\gamma_2} {R_1^L}^{1-\gamma_2},$$

$$Y_2 = \theta(\Theta + A_2^n){K_2}^{\gamma_2} {R_2^L}^{1-\gamma_2},$$

где θ и Θ – некоторые коэффициенты.

3.2. Торговля

Торговля скупает у секторов весь выпуск и распределяет продукт между всеми агентами. Запас продукта Q изменяется в силу уравнения

$$\frac{dQ}{dt} = Y_1 + Y_2 - C_N - C_G - I_1 - I_2 \text{ или } \dot{Q} = Y - I + C,$$

$$Q(0) = Q^0.$$

Здесь C_i – потоки потребительского продукта, I_i – потоки фондообразующего продукта.

Изменение оптовой закупочной цены продукта p зависит от его количества на складе:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha Q.$$

При этом потребление не может превышать предложение, состоящее из выпуска без инвестиций в производственные фонды и имеющегося на складе запаса:

$$Y - I + Q \geq C$$

3.3. Население

В материальных потоках участвует население, предоставляя рабочую силу R, которая распределяется между всеми секторами, предъявляющими на нее спрос, с заданным начальным условием $R(0) = R^0$:

$$\dot{R} = \Upsilon^s(\mathrm{R}).$$

Можно считать, что население увеличивается с темпом роста λ, т.е.

$$\frac{\dot{R}}{R} = \lambda.$$

3.4. Рынок рабочей силы

Спрос производственных секторов на рабочую силу от капитала, имеющегося в секторе:

$R_i^d = \Upsilon^{\mathrm{d}}(\mathrm{K_i})$.

Здесь $i = 1{,}2$ – соответствующие секторы.

Спрос ВК на рабочую силу R_V^d на период T_n определяется соотношением

$$\tau_n A_V(t_n) = \theta_A R_V^d,$$

где θ_A – коэффициент трудоемкости инвестиционной деятельности на одного рабочего в единицу времени.

При этом предложение R распределяется между секторами следующим образом:

$$R_i^s = \chi_i R, \chi_i \geq 0, \sum_{i=1,2,V} \chi_i \equiv 1.$$

Численность занятых в секторах $i = 1{,}2, V$ определяется соотношением

$$R_i^L = min\{R_i^d, R_i^s\}.$$

Считаем разность уровней занятости в секторах мотивом миграции, т.е.

$$\frac{d\chi_i}{dt} = \frac{1}{\Delta_\chi} \sum_{j=1,2,V} \left(\frac{R_i^L}{R_i^s} - \frac{R_j^L}{R_j^s} \right),$$

где Δ_χ – постоянная времени.

Опишем процесс формирования ставки заработной платы:

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i}{\Delta_s} max\left\{0, \frac{R_i^d - R_i^s}{R_i^s}\right\}.$$

Здесь Δ_s – постоянная времени.

4. Система уравнений финансовых балансов

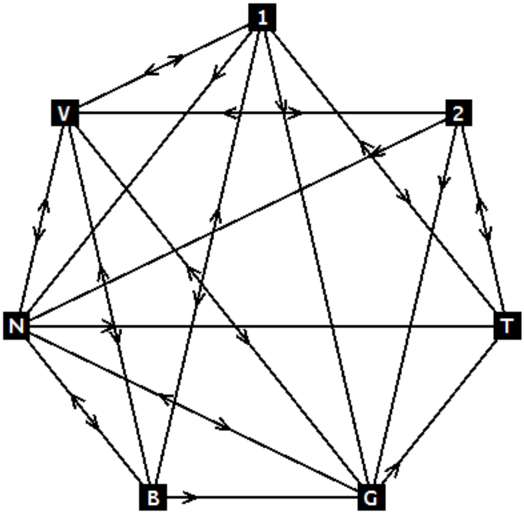

Рис. 2. Граф финансовых потоков

Из рис. 2 видно, что в финансовой деятельности участвуют все агенты, начнем с описания крупного производства.

4.1. Первый сектор

Запас наличности N_1 изменяется в силу уравнения

$$\frac{dN_1}{dt} = pY_1 - s_1 R_1^L - \Lambda_1^V + W_V^1 + \Phi_1 - V_1 - T_1 - d_1.$$

Здесь и далее, s_i – ставка заработной платы в секторе i, Λ_i^j и W_i^j – инвестиции агента i в агента j и доход по инвестициям агента i в агента j (от j к i), Φ_1 и V_1 - кредиты БС первому сектору и выплаты по ним, T_i - налоги государству от агента i, d_i - дивиденды агента i.

Получается, что первый сектор продает конечный продукт населению, государству и часть фондов на воспроизводство второму сектору, платит зарплату рабочим, получает и выплачивает кредиты банкам, инвестирует в ВК и получает от него доходы, платит налоги государству и откладывает дивиденды на депозитный D_1^B счет в банк с процентной ставкой r_1^D:

$$\frac{dD_1^B}{dt} = d_1 + r_1^D D_1^B.$$

Задолженность банковской системе описывается уравнением

$$\frac{dL_1}{dt} = V_1 - \Phi_1 - \Psi_1 + r_1 L_1,$$

где Ψ_1 – списание части задолжности, r_1 - процентная ставка по кредиту.

Изменение собственного капитала

$$\frac{dK_1}{dt} = pI_1 - \mu_K K_1 + u(t, t_n) K_2,$$

где μ_K – темп устаревания основного капитала, а $u(t, t_n) = \delta(t - t_n - \tau)$ – дельта-функция. Последнее слагаемое соответствует переходу капитала из сектора 2 в сектор 1 в конце инвестиционного периода.

4.2. Второй сектор

Второй сектор продает весь выпуск, скупая часть для восполнения основных фондов, платит зарплату рабочим, инвестирует в ВК и получает от него доходы, платит налоги государству.

$$\frac{dN_2}{dt} = pY_2 - pI_2 - s_2 R_2^L + \Lambda_V^2 - W_2^V - T_2,$$

Уравнение изменения основного капитал аналогично уравнению для первого сектора и учитывает переход фирм в первый сектор по окончании инвестиционного периода:

$$\frac{dK_2}{dt} = pI_2 - \mu_K K_2 - u(t, t_n)K_2.$$

Здесь $u(t, t_n) = \delta(t - t_n - \tau)$.

4.3. Торговля

Торговля в данной модели выполняет техническую роль, не накапливает дивиденды, оперируя с фиксированным расчетным счетом и перераспределяя продукт от производителя к потребителю:

$$\frac{dN_T}{dt} = p(Y_1 + Y_2 - I_1 - I_2) - p_C(C_N + C_G) = p(Y - I) - p_C.$$

Положим $\dot{N}_T \equiv 0$, тогда

$$p(Y - I) = p_C C, \text{или } p_C = p\frac{Y - I}{C},$$

где p_C – розничная цена потребительского продукта.

4.4. Население

Население получает зарплату от первого и второго секторов, а также ВК, дивиденды от банков, пособия от государства, платит ему налоги и инвестирует в ВК, получая от него доходы.

$$\frac{dN_N}{dt} = s_1 R_1^L + s_2 R_2^L + s_V R_V^L - p_C C_N - \Lambda_N^V + W_V^N - T_N + d_B + U.$$

4.5. Государство

Государство собирает налоги с населения и производства, покупает потребительский продукт, платит пособия и инвестирует в ВК, получая от него доходы.

$$\frac{dN_G}{dt} = T_N + T_1 + T_2 - p_C C_G - \Lambda_G^V + W_V^G - U,$$

4.6. Венчурный капиталист

ВК берет деньги у населения, первого сектора и государства, инвестирует их во второй сектор, получает от него доход, выплачивая его часть обратно населению, первому сектору и государству соответственно, а часть его разделяет на зарплату рабочим и дивиденды, которые он кладет на депозитный счет в банк, или снимает с него в случае необходимости, имея тем самым свой резерв.

$$\frac{dN_V}{dt} = \Lambda_N^V + \Lambda_1^V + \Lambda_G^V - \Lambda_V^2 - W_V^N - W_V^1 - W_V^G + W_2^V - \overline{s_V} R_V^L,$$

$$\overline{s_V} R_V^L = s_V R_V^L + d_V,$$

Изменение депозитного счета в банке с процентной ставкой r_V:

$$\frac{dD_V^B}{dt} = d_V + r_V D_V^B.$$

4.7. Банковская система

Кассовая наличность банка N_B описывается уравнением

$$\frac{dN_B}{dt} = V_1 - \Phi_1 + d_V + d_1 - d_B + e,$$

где e – эмиссия, а собственный остаток D_B:

$$\frac{dD_B}{dt} = r_1 L_1 - r_V D_V^B - r_1^D D_1^B - d_B - \Psi_1 + \omega,$$

здесь ω – прирост собственного капитала.

В случае $d_B = r_1 L_1 - r_V D_V^B - r_1^D D_1^B - \Psi_1$ получим

$$\frac{dD_B}{dt} = \omega.$$

Резерв банковской системы Ω_B изменяется следующим образом:

$$\frac{d\Omega_B}{dt} = \omega.$$

5. Следствия из уравнений балансов

Просуммируем уравнения для изменения наличности всех агентов:

$$\frac{d}{dt}(N_1 + N_2 + N_N + N_T + N_G + N_V + N_B) = \frac{dN}{dt} = e.$$

Из последнего уравнения следует, что система замкнута, то есть деньги из нее не уходят и не приходят в нее извне.

Аналогично, можно показать, что

$$\frac{d}{dt}(L_1 + \Omega_B + N_B - N - D_V^B - D_1^B - D_B) = 0,$$

т.е. положив константу интегрирования и эмиссию равными нулю, можем считать, что

$$L_1 + \Omega_B + N_B = N + D_V^B + D_1^B + D_B,$$

или, считая, что $\frac{dD_B}{dt} = \omega$, получим

$$L_1 + N_B = N + D_V^B + D_1^B.$$

6. Постановка задач

6.1. Задача венчурного капиталиста

Будем сначала рассматривать деятельность ВК на фиксированном интервале времени, равном длине инвестиционного периода τ. Считаем, что своей задачей он ставит максимизацию полученных дивидендов D_V^B на конец периода.

$$D_V^B(t_{n+1}) \Rightarrow \max_{d_V, \Lambda_2, \tau_n}, \; t \epsilon [t_n, t_{n+1}],$$

$$\frac{dD_V^B}{dt} = d_V + r_V D_V^B.$$

Сделаем некоторые дополнительные предположения по поводу деятельности ВК: ограничимся пока вложениями в него лишь первым сектором, будем считать, что он ежегодно выплачивает процент с вложенного инвесторами капитала, то есть его задолженность им изменяется в силу уравнения

$$\frac{dL_V^1}{dt} = (1 - \varphi_2)\Lambda_1 + r_V^1 L_V^1 - V_V^1.$$

Причем, доля вложенного капитала $\varphi_2 \Lambda_1$идет в качестве гонорара ВК и на оплату его работы и определяет возможности информационной поддержки второго сектора, т.е.можно через фонд заработной платы, считая ставку s_V заданной, а τ_n - управлением, определить параметр φ_2:

$$\frac{s_V R_V T}{\int_0^T \Lambda_1 dt} = \varphi_2, \qquad \tau_n A_V(t_n) = \theta_A R_V, \qquad \tau_n \in [0,1].$$

Или

$$\frac{s_V \tau_n A_V(t_n) T}{\theta_A \int_0^T \Lambda_1 dt} = \varphi_2, \qquad \varphi_2 \in [0,1].$$

Считаем, что ВК в конце периода продает свою долю λ_V в капитале $K_2(T)$ второго сектора первому по цене p_K, за счет чего окупает вложения и получает дивиденды, то есть уравнение изменения расчетного счета примет вид

$$\frac{dN_V}{dt} = \varLambda_1 - W_1 - \varLambda_2 + W_2 - s_V R_V - d_V + u(t, t_n)\lambda_V p_K K_2.$$

Далее будем считать, что $\frac{dN_V}{dt} \equiv 0$.

ВК выплачивает первому сектору процент со вложенного капитала и долю в доходах от второго сектора, таким образом

$$W_1 = V_V^1 + \varphi_1 W_2.$$

При этом во второй сектор он вкладывает не меньше вложенного в него капитала за вычетом гонорара:

$$\varLambda_2 \geq (1 - \varphi_2)\varLambda_1,$$

Будем также считать, что ВК действует лишь при условии определенной доходности по инвестициям:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} W_2\,(t)dt + \lambda_V K_2(t_{n+1}) \geq (1 + \xi) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varLambda_2\,(t)dt,$$

$$W_2(t) \geq 0,$$

причем параметр φ_1 определится из равенства норм прибыли первого сектора и ВК.

$$n_1 = \frac{\varphi_1 \int_0^T W_2 dt + \int_0^T V_V^1 dt + \lambda_V p_K K_2(T)}{\int_0^T \varLambda_1 dt},$$

$$n_v = \frac{\int_0^T d_V dt}{\int_0^T \varLambda_2 dt}$$

или

$$\varphi_1 = \frac{\int_0^T \Lambda_1 dt \int_0^T d_V dt}{\int_0^T \Lambda_2 dt \int_0^T W_2 dt} - \frac{\int_0^T V_V^1 dt + \lambda_V p_K K_2(T)}{\int_0^T W_2 dt}.$$

Вид функции W_2 определим позднее.

Далее, положим параметры $\varphi_1, s_V, \lambda_V, r_V^1, r_V, A_V(0)$ фиксированными на весь отрезок времени. Параметр φ_1 пока считаем заданным. Задача подчинена следующим граничным условиям:

$$D_V^B(t_n) = D_{V\,0}^B, \qquad L_V^1(0) = (1 - \varphi_2)\Lambda_1(0), \qquad L_V^1(t_n) = 0.$$

Управляющие параметры - τ_n, d_V и Λ_2.

Перейдем к новым обозначениям:

$$\tau = T, \tau_n = u_3, D_V^B = x_1, L_V^1 = x_2, d_V = u_1, \Lambda_2 = u_2, R_V = f_3,$$

$$\Lambda_1 = f_1, A = A_V(0), W_2 = F(t, u_2, u_3; A), V_V^1 = f_2,$$

$$r_V = k_1, r_V^1 = k_2, K = p_K \lambda_V K_2(T), \frac{\theta_A}{A} = k_3, \frac{s_v}{k_3} = k_4,$$

$$\frac{\int_0^T \Lambda_1 dt}{s_V A T \theta_A} = k_5, k_6 = 1 - \varphi_1, k_7 = 1 + \xi,$$

$$W_1 = f_2 + \varphi_1 F.$$

Тогда задача примет вид

$$x_1(T) \Rightarrow \max, t \epsilon [0, T], T = const,$$

$$\dot{x}_1 = k_1 x_1 + u_1,$$

$$\dot{x}_2 = k_2 x_2 + u_1 + u_2 + u_3(k_4 - k_5 f_1) - k_6 F(t, u_2, u_3; A) - \delta_T \cdot K,$$

$$\dot{x}_3 = u_2,$$

$$\dot{x}_4 = F(t, u_2, u_3; A).$$

Допустимые управления

$$u_3 = c_3 \in [0,1] \cap [0, k_5],$$

Граничные условия

$$x_1(0) = x_0, \qquad x_2(0) = (1 - \tfrac{c_3}{k_5}) f_1(0),$$

$$x_2(T) = x_4(0) = x_3(0) = 0.$$

Ограничения

$$x_4(T) + K \geq k_7 x_3(T), \qquad u_2 \geq \left(1 - \tfrac{c_3}{k_5}\right) f_1 \ \forall t.$$

6.2. Задача второго сектора

Предположим, что состояние фирмы в каждый момент времени t определяется следующими параметрами: капиталом K и расчетным счетом N. Считаем, что фирма выпускает некий продукт в количестве Y в единицу времени, нанимая работников в количестве R, которым платит заработную плату по ставке s. Считаем также, что фирма платит налоги Z.

Мы полагаем, что фирма существует конечное время T, которое соответствует длине инвестиционного периода.

В качестве производственной функции возьмем ПФ Кобба-Дугласа, т.е. будем считать, что выпуск Y определяется степенной функцией от труда R и капитала K. Помимо этого считаем, что на выпуск влияют знания фирмы A, или информация, которую она получает от венчурного инвестора, таким образом

$$Y = AK^{\gamma} R^{1-\gamma}.$$

Мультипликатор знаний A определяется следующим образом:

$$A = \theta(\Theta + \tau_n A_V e^{-\mu_A t}),$$

где μ_A - темп устаревания знаний, Θ и θ – параметры, $\tau_n A_V$ – знания, полученные от венчурного инвестора.

Часть выпуска I фирма тратит на воспроизводство основных фондов и собственные инвестиции, остальное продает по цене p. При этом капитал устаревает с темпом μ_K, т.е. изменяется в силу уравнения

$$\dot{K} = pI - \mu_K K.$$

Принимая во внимание, что фирма получает от ВК инвестиции Λ, выплачивая W обратно, получим уравнение изменения расчетного счета фирмы:

$$\dot{N} = p(Y - I) - sR - \mathrm{Z} + \Lambda - \mathrm{W}.$$

Задачей фирмы является максимизация капитала на конец инвестиционного периода. Считая все параметры определенными, например фиксированными, мы можем сформулировать следующую задачу:

$$K(T) \to \max_{W,\Lambda},$$

$$\dot{K} = pI - \mu_K K,$$

$$\dot{N} = p(Y - I) - sR - \mathrm{Z} + \Lambda - \mathrm{W}.$$

Здесь W и Λ - управляющие параметры, относительно которых далее будем делать различные предположения.

Сперва для простоты сделаем ряд дополнительных предположений относительно входящих в задачу параметров: считаем, что труд пропорционален капиталу, а налог – количеству работников, с коэффициентами ξ и $\widetilde{\mathrm{Z}}$ соответственно, ставка зарплаты s и цена продукта p фиксированы на весь период T, кассовый остаток будем считать фиксированным. Тогда задача примет вид

$$K(T) \to \max_{W,\Lambda},$$

$$\dot{K} = [\xi^{1-\gamma}A - ((s + \widetilde{Z})\xi + \mu_K]K + \Lambda - W.$$

Считаем, что суммарный объем инвестиций фиксирован, т.е. $\int_0^T \Lambda \, dt = \widetilde{\Lambda}$ и существует некий фонд.

Для дальнейшего исследования задачи перейдем к новым обозначениям: $K = x_1, \Lambda = u_1, W = u_2, \widetilde{\Lambda} = Q$. Темп роста капитала фирмы обозначим за $a(t)$, тогда

$$a(t) = \xi^{1-\gamma}A(t) - (s + \tilde{Z})\xi - \mu_K > 0.$$

В новых обозначениях получим

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

$$\dot{x}_1 = ax_1 + u_1 - u_2,$$

$$\int_0^T u_1 \, dt = Q.$$

Уравнение изменения капитала является ЛНДУ первого порядка. От интегрального ограничения избавимся введением новой переменной $\dot{x}_2 = u_1$ при условии $x_2(0) = 0$. Считаем, что в начальный момент фирма имеет капитал x_1^0.

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

$$\dot{x}_1 = ax_1 + u_1 - u_2,$$

$$\dot{x}_2 = u_1,$$

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = 0, x_2(T) = Q.$$

Будем считать, что u_1 ограничено снизу нулем, а сверху – константой $\frac{Q}{m}$, где параметр m можно интерпретировать как минимальный срок передачи фондов, т.е. $\frac{1}{m}$ – максимальная разрешенная доля передаваемого в виде инвестиций капитала Q в единицу времени.

Для того чтобы завершить строгую постановку задачи оптимального управления необходимо наложить ограничения на u_2.

Сначала рассмотрим простой случай, когда инвестор требует вернуть на конец инвестиционного периода как минимум сумму, пропорциональную вложенному капиталу:

$$\alpha Q \leq \int_0^T u_2 \, \mathrm{dt}.$$

При этом максимальный транш ограничен долей $\frac{1}{n}$ от ожидаемого минимального дохода инвестора, т.е.

$$u_2 \leq \frac{\alpha Q}{n} \ \forall t.$$

От возникшего интегрального ограничения избавимся введением новой переменной x_3, такой что $\dot{x}_3 = u_2, x_3(0) = 0, x_3(T) \geq \alpha Q$.

В итоге задача примет вид

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

$$\dot{x}_1 = a x_1 + u_1 - u_2,$$

$$\dot{x}_2 = u_1,$$

$$\dot{x}_3 = u_2,$$

$$x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = 0, x_2(T) = Q, x_3(0) = 0, x_3(T) \geq \alpha Q.$$

$$u_1 \in [0, \frac{Q}{m}], \qquad u_2 \in [0, \frac{\alpha Q}{n}] \ \forall t.$$

Полученная задача является задачей оптимального управления, к которой применим принцип максимума Понтрягина

(ПМ). Управляемая система линейна по x и u, время фиксировано. Приведем краткую формулировку принципа максимума для общей задачи оптимального управления нашего типа [3] и перепишем ее еще раз.

7. Формулировка принципа максимума Понтрягина

Сформулируем задачу оптимального управления с закрепленным временем (з0):

минимизируемый функционал

$$J(x^0, u, x) = \int_{t_0}^{T} f^0(x, u, t)dt + g^0\big(x^0, x(T)\big) \to inf;$$

управляемая система

$$\dot{x} = f(x, u, t), t \in [t_0, T];$$

начальные условия

$$x(t_0) = x^0;$$

допустимые управления

$$u \in V \, \dot{\forall} t;$$

концевые ограничения

$$g^i(x^0, x(T)) \le 0, i = \overline{1, m}, \qquad g^i(x^0, x(T)) = 0, i = \overline{m+1, s}.$$

Моменты t_0, T фиксированы, $u = (u_1, \dots, u_r)$ - параметры управления, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – фазовые переменные, $f = (f^1, \dots, f^n)$, $u(\cdot)$ – измеримая существенно ограниченная функция.

Для формулировки принципа максимума введем следующие функции:

функция Гамильтона-Понтрягина

$$H(x,u,t,\psi,a_0) = -a_0 f^0 + <\psi, f>,$$

малый лагранжиан

$$l(x,y,\hat{a}) = <\hat{a}, g>.$$

Здесь $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ и $\hat{a} = (a_0, \dots, a_s)$ – вспомогательные переменные.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). Пусть функции $f^j(x,u,t), j = \overline{1,n}$, $g^j(x,y), j = \overline{1,s}$, имеют частные производные по аргументам x_i и y_i для всех $i = \overline{1,n}$ и непрерывны вместе с ними по совокупности своих аргументов для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \bar{V}$ и $t \in [t_0, T]$, где $\bar{V}$ – замыкание V. Пусть на отрезке $[t_0, T]$ решением задачи (з0) является тройка $(x^0, x(t), u(t))$, т.е. x и u оптимальные. Тогда найдутся такие числа $a_0, \dots, a_s$ и вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)), t \in [t_0, T]$, что

1) $\hat{a} = (a_0, \dots, a_s) \neq 0, a_i \geq 0\ \forall i$;
2) $\psi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ является решением сопряженной системы $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,u,t,\psi(t),a_0)$, соответствующей рассматриваемому решению $(x^0, x(\cdot), u(\cdot))$;
3) почти для всех $t \in [t_0, T]$, являющихся точками непрерывности оптимального управления $u(\cdot)$, функция $H(x(t),u,t,\psi(t),a_0)$ переменной $u = (u_1, \dots, u_r)$ достигает своей верхней грани на множестве V при $u = u(t)$, т.е оптимальное управление доставляет максимум функции H при фиксированных остальных аргументах

$$\max_{u \in V} H(x(t),u,t,\psi(t),a_0) = H(x(t),u(t),t,\psi(t),a_0);$$

4) выполнены условия трансверсальности

$$\psi(t_0) = \frac{\partial l}{\partial x^0}, \qquad \psi(T) = -\frac{\partial l}{\partial x(T)}$$

и условия дополняющей нежесткости

$$a_j g^j = 0 \; \forall j = \overline{1, m}.$$

Замечание 1. Если $f^0 \equiv 0$, и управляемая система линейна относительно x и u, т.е.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad t \in [t_0, T],$$

тогда

$$H(x, u, t, \psi, a_0) =< A^T\psi, x > + < \psi, Bu >,$$

и в силу того, что первое слагаемое функции Гамильтона-Понтрягина не зависит от u, мы можем рассматривать только второе слагаемое $\widetilde{H} =< \psi, Bu >$ и заменить условие 3 теоремы условием

$$\max_{u \in V} \widetilde{H}(u, t, \psi) =< \psi, Bu(t) >,$$

при этом

$$\dot{\psi}(\mathrm{t}) = -A^T\psi(t).$$

8. Решение задачи второго сектора

8.1. Решение задачи оптимального инвестирования в простом случае

Будем сначала считать, что знания не устаревают, т.е. $\mu_A = 0$, тогда $a(t) \equiv a$, где a - некоторая постоянная большая нуля. Нашу задачу можно записать в следующем виде:

минимизируемый функционал

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

управляемая система

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

начальные условия

$$x(0) = (x_1^0, 0,0)^T,$$

концевые ограничения

$$x_2(T) = Q, x_3(T) \geq \alpha Q,$$

допустимые управления

$$u_1 \in [0, \frac{Q}{m}], \qquad u_2 \in [0, \frac{\alpha Q}{n}]\ \forall t,$$
$$x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^2.$$

Решение.

Будем применять принцип максимума. Выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина $\widetilde{H}$ для линейной задачи оптимального управления и малый лагранжиан l:

$$\widetilde{H} = u_1(\psi_1 + \psi_2) + u_2(\psi_3 - \psi_1),$$

$$l = -a_0 x_1(T) + a_1\big(\alpha Q - x_3(T)\big) + a_2(x_2(T) - Q).$$

Далее запишем условие дополняющей нежесткости:

$$a_1(\alpha Q - x_3(T)) = 0.$$

Решение сопряженной системы ψ в нашем случае имеет вид

$$\psi = (c_1 e^{-at}, c_2, c_3)^T = (a_0 e^{a(T-t)}, -a_2, a_1)^T.$$

Подставим ψ в $\widetilde{H}$,

$$\widetilde{H} = u_1\big(a_0 e^{a(T-t)} - a_2\big) + u_2\big(a_1 - a_0 e^{a(T-t)}\big).$$

Видно, что $a_1 \neq 0$, так как в противном случае $u_2 \equiv 0$ и не выполняется условие $x_3(T) \geq \alpha Q$, кроме как в случае $Q = 0$, и в силу условия дополняющей нежесткости $\alpha K = x_3(T)$. В случае $a_2 \leq 0$ получим, что $u_1 \equiv \frac{Q}{m}$ и условие $x_2(T) = Q$ выполняется только в случае $m = T$ или $Q = 0$, что, по существу, не имеет смысла. Поэтому будем считать, что $a_2 > 0$. Случай $a_0 = 0$ влечет, что $\widetilde{H} = u_2 a_1 - u_1 a_2$, что ведет к ситуации, невозможной по смыслу и причинам, изложенным выше, когда $u_2 \equiv \frac{\alpha Q}{n}$, а $u_1 \equiv 0$. Поэтому $a_0 \neq 0$, и мы можем считать, что $a_0 = 1$.

Таким образом, получим оптимальное управление

$$u_1 = \begin{cases} \frac{Q}{m}, & t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1 \end{cases}, \qquad u_1 = \begin{cases} 0, & t \leq t_2, \\ \frac{\alpha Q}{n}, & t > t_2. \end{cases}$$

Определим моменты t_1 и t_2 переключения, существование которых следует из того, что функция $a_0 e^{a(T-t)}$ монотонно убывает:

$$\frac{Q}{m}\int_0^{t_1} dt = Q \ \Rightarrow t_1 = m \ \Rightarrow \ \frac{1}{a} ln a_1 = T - m, \qquad a_2 = e^{a(T-m)},$$

$$\frac{\alpha Q}{n}\int_{t_2}^{T} dt = \alpha Q \ \Rightarrow t_2 = T - n \ \Rightarrow \ \frac{1}{a} ln a_2 = n, \qquad a_1 = e^{an}.$$

Решение сопряженной системы и значение вспомогательных множителей

$$\hat{a} = (1, e^{a(T-m)}, e^{an}), \ \ \psi = (e^{a(T-t)}, e^{an}, -e^{a(T-m)})^T.$$

Оптимальная траектория будет выглядеть следующим образом:

$$x_1^* = \begin{cases} \left(x_1^0 + \frac{Q}{am}\right) e^{at} - \frac{Q}{m}, & t \le m, \\ x_1(m) e^{a(t-m)}, & t \in (m, T-n], \\ \left(x_1(T-n) - \frac{\alpha Q}{an}\right) e^{a(t-T+n)} + \frac{\alpha Q}{an}, & t > T-n. \end{cases}$$

Здесь $x_1(m) = \left(x_1^0 + \frac{Q}{am}\right) e^{am} - \frac{Q}{m}$, а $x_1(T-n) = x_1(m) e^{a(T-m-n)}$.

Получим в итоге оптимальное значение капитала фирмы на конец инвестиционного периода:

$$x_1^*(T) = x_1^0 e^{aT} + Q e^{aT} \left(\frac{1 - e^{-am}}{am} \right) + \alpha Q \left(\frac{1 - e^{an}}{an} \right).$$

Утверждение 1.

$$\underset{m,n \ge 0}{sup}\ x_1^*(T) = \lim_{m,n \to 0} x_1^*(T) = x_1^0 e^{aT} + Q(e^{aT} - \alpha).$$

Доказательство. Найдем частные производные $x_1^*(T)$ по параметрам m и n:

$$\frac{\partial x_1^*(T)}{\partial m} = \frac{Q e^{aT}}{am^2 e^{am}} (1 + am - e^{am}) < 0,$$

$$\frac{\partial x_1^*(T)}{\partial n} = \frac{\alpha Q}{an^2} (1 - an - e^{-an}) < 0\ \forall m, n.$$

Из очевидных соображений об отрицательности множителей в скобках и неотрицательности множителей перед ними можно сделать вывод, что обе частные производные отрицательны при $m, n > 0$. Это значит, что терминальное значение капитала уменьшается при увеличении m и n, т.е. максимум достигается при $m = n = 0$, ч.т.д.

Вид оптимального управления в нашей задаче

$$u_1^* = \begin{cases} \frac{Q}{m}, & t \le m, \\ 0, & t > m \end{cases}, \qquad u_2^* = \begin{cases} 0, & t \le T-n, \\ \frac{\alpha Q}{n}, & t > T-n, \end{cases}$$

говорит о том, что получать инвестиции и расплачиваться по ним нужно с максимальной возможной скоростью в начале и конце инвестиционного периода соответственно, при этом фирма отдаст ровно αQ.

8.2. Анализ результатов решения первой задачи

Рассмотрим подробнее выражение для капитала в момент T, переписав его в более удобном виде:

$$x_1^*(T) = x_1^0 e^{aT} + Qe^{aT}\left(\frac{1-e^{-am}}{am}\right) - \alpha Q\left(\frac{e^{an}-1}{an}\right).$$

Первое слагаемое здесь соответствует приросту собственного капитала за время T, второе описывает влияние инвестиций на конечную капитализацию, третье – выплат.

Как было показано, $x_1^*(T)$ растет при стремлении m и n к нулю:

$$\sup_{m,n\geq 0} x_1^*(T) = x_1^0 e^{aT} + Q(e^{aT} - \alpha).$$

Этот случай соответствует импульсным управлениям $u_1^* = Q\delta(0)$ и $u_2^* = \alpha Q\delta(T)$, которые становятся неограниченными. Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: оптимальной будет разовая выплата всей необходимой проекту суммы в начале инвестиционного периода, а выплаты по ним необходимо осуществлять в конце периода в максимально короткие сроки.

Утверждение 2. Растягивание инвестором во времени выплат фирме эквивалентно уменьшению длины инвестиционного периода.

Доказательство. Положим $m > 0$, тогда из условия $Qe^{aT}\left(\frac{1-e^{-am}}{am} - \alpha\right) = Q\left(e^{a\hat{T}} - \alpha\right)$ можно получить значение времени $\hat{T}$:

$$\hat{T} = T - m + \frac{1}{a} ln\left(\frac{e^{am}-1}{am}\right),$$

ч.т.д.

8.3. Задача оптимального инвестирования с ограничением на долю в терминальном капитале

Рассмотрим теперь ситуацию, в большей степени соответствующую реальному положению дел, когда часть дохода по инвестициям ВК получает в виде фиксированной доли в капитале фирмы в конце периода, а оставшуюся часть – в виде дохода, как и в предыдущей задаче. При этом сейчас будем считать, опираясь на свои выводы и наблюдения, что фирма в начале периода уже имеет на руках весь капитал Q, ее собственным пренебрежем, знания по-прежнему не устаревают. Задача примет вид:

минимизируемый функционал

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

управляемая система

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

начальные условия

$$x(0) = (\mathrm{Q}, 0)^T,$$

концевые ограничения

$$x_2(T) + \beta x_1(T) \geq \alpha Q,$$

допустимые управления

$$\mathrm{u} \in [0, \frac{\alpha Q}{n}] \ \forall t,$$
$$x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}.$$

Решение.

Снова выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина $\widetilde{H}$ для линейной задачи оптимального управления и малый лагранжиан l:

$$\widetilde{H} = u(\psi_2 - \psi_1),$$

$$l = -a_0 x_1(T) + a_1\big(\alpha Q - x_2(T) - \beta x_1(T)\big).$$

Далее запишем условие дополняющей нежесткости

$$a_1(\alpha Q - x_2(T) - \beta x_1(T)) = 0.$$

Сопряженная система для нашей задачи имеет вид

$$\dot{\psi} = -\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi \;\Rightarrow\; \psi = (c_1 e^{-at}, c_2)^T.$$

Выпишем ее решение ψ:

$$\psi(T) = (a_0 + a_1\beta, a_1)^T \;\Rightarrow\; \psi = \Big((a_0 + a_1\beta)e^{a(T-t)}, a_1\Big)^T.$$

Подставим ψ в $\widetilde{H}$:

$$\widetilde{H} = u\,\underbrace{\left(a_1 - (a_0 + a_1\beta)e^{a(T-t)}\right)}_{\tilde{f}}.$$

Очевидно, что $(a_0 + a_1\beta)e^{a(T-t)} > 0$, и, следовательно, $a_1 \neq 0$, так как в противном случае $u \equiv 0$,что может быть только при $Q = 0$, следовательно, $\alpha Q - x_2(T) - \beta x_1(T) = 0$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$. Случай $a_0 = 0$ изучим отдельно ниже.

Рассмотрим $\tilde{f}$. Видно, что $\tilde{f}' > 0$, из условия $\tilde{f} = 0$ получим, что $t = T - \frac{1}{a} ln \frac{a_1}{a_0 + a_1\beta}$. Это значит, что $\tilde{f}$ является монотонно возрастающей функцией, проходящей через ноль при t, равном $T - \frac{1}{a} ln \frac{a_1}{a_0 + a_1\beta}$. Введем обозначение $\tilde{T} = \frac{1}{a} ln \frac{a_1}{a_0 + a_1\beta}$. Из сказанного выше сделаем вывод:

$$\max_u \widetilde{H} = \begin{cases} 0, \ \tilde{f} \le 0, \\ \frac{\alpha Q}{n}\tilde{f}, \ \tilde{f} > 0 \end{cases}, \text{ при } u^* = \begin{cases} 0, \ t \le T - \tilde{T}, \\ \frac{\alpha Q}{n}, \ t > T - \widetilde{T}. \end{cases}$$

Для того чтобы определить $\tilde{T}$ необходимо использовать уравнение

$$\frac{\alpha Q}{n}\int_{T-\tilde{T}}^{T} dt = \alpha Q - \beta x_1(T).$$

В этой задаче оптимальная траектория будет иметь следующий вид:

$$x^* = \begin{cases} \begin{pmatrix} Qe^{at} \\ 0 \end{pmatrix}, & t \le T - \tilde{T}, \\ \begin{pmatrix} Qe^{at} + \frac{\alpha Q}{an}\left[1 - e^{a(t-T+\tilde{T})}\right] \\ \frac{\alpha Q}{n}(t - T + \tilde{T}) \end{pmatrix}, & t > T - \widetilde{T}. \end{cases}$$

Значение капитала на конец инвестиционного периода

$$x_1^*(T) = Q\left(e^{aT} - \frac{\alpha}{an}\left[e^{a\tilde{T}} - 1\right]\right).$$

8.4. Анализ результатов решения второй задачи

Исследуем зависимость между $\tilde{T}$ и n, которую найдем из системы условий:

$$\begin{cases} \alpha Q - x_2(T) - \beta x_1(T) = 0, \\ x_1^*(T) = Q\left(e^{aT} - \frac{\alpha}{an}\left[e^{a\tilde{T}} - 1\right]\right), \\ x_2^*(T) = \frac{\alpha Q}{n}\widetilde{T}, \\ n \ge 0, \\ 0 \le \beta \le 1. \end{cases}$$

Выпишем уравнение для $\tilde{T}$ и n:

$$1 - \frac{\tilde{T}}{n} = \frac{\beta}{\alpha} e^{aT} - \frac{\beta}{an}\left(e^{a\tilde{T}} - 1\right).$$

Очевидно, случай $\beta = 0$ возвращает нас к предыдущей задаче и $\tilde{T} = n$.

Выразим n через $\tilde{T}$:

$$n = c_1\left[\beta\left(1 - e^{a\tilde{T}}\right) + a\tilde{T}\right], \qquad c_1 = \frac{\alpha}{a(\alpha - \beta e^{aT})}.$$

Знак c_1 зависит от знака $\alpha - \beta e^{aT}$, так как α и a - положительные константы, причем $\alpha \geq 1$. Обсудим три возможные ситуации:

1) Случай $\alpha > \beta e^{aT}$ влечет, что $\tilde{T} > 0$, т.е. выплаты начинаются до окончания периода, инвестор выводит свой капитал заранее, чтобы в конце получить запланированную прибыль. В случае $\tilde{T} > T$ инвестор заведомо не получит ожидаемую прибыль, задача оптимального управления не имеет решения. При $\tilde{T} = T$ весь капитал компании перейдет в собственность венчурного инвестора в конце периода. Последний случай можно считать равновесным в той ситуации, когда инвестор ставит своей целью поглощение удачных проектов своим бизнесом.
2) Случай $\alpha < \beta e^{aT}$ влечет, что $\tilde{T} = 0$ и инвестор получит больше запланированного дохода, получив долю в капитале компании, превышающую его в $\frac{\beta}{\alpha} e^{aT}$ раз. Подобная ситуация выгодна инвестору, и не очень выгодна компании, которая отдаст денег сверх ожидаемой суммы, тем не менее данная ситуация говорит о том, что сверхожидаемый доход получили как фирма, так и инвестор, при этом инвестор получает только долю в компании, $u \equiv 0$ для любого n.
3) Случай $\alpha = \beta e^{aT}$ является равновесным. В этом случае $\tilde{T} = 0$, инвестор и фирма получают запланированный доход, причем инвестор получает его долей в капитале, $u \equiv 0$ для любого n.

Заметим, что содержательным является первый случай, когда $c_1 > 0$. Введем обозначения $y = n/c_1, x = a\tilde{T}$ и рассмотрим полученное уравнение

$$y = \beta(1 - e^x) + x.$$

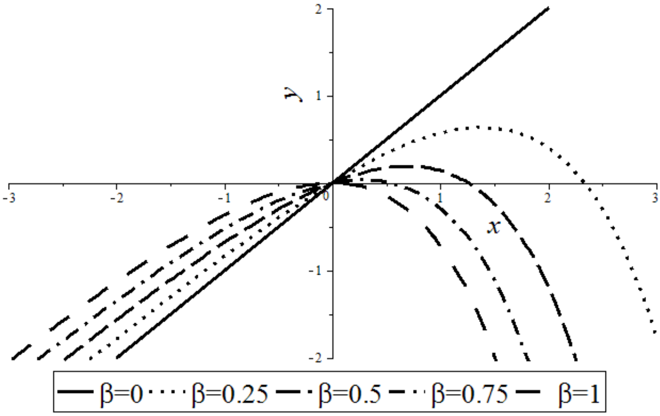

Рис. 3. Функция $y(x)$

На рис. 3 изображен его график при различных значениях параметра β.

Видно, что в случаях $\beta = 0$ и $\beta = 1$ функция пересекается с осью x только в нуле, причем для первого случая мы имеем линейную зависимость $y = x$, или $\tilde{T} = n$, а для второго единственной точкой, удовлетворяющей условию $n \geq 0$, является начало координат, так как в этом случае область значений – все неположительные числа. При остальных значениях параметра функция имеет две точки пересечения и глобальный максимум между ними.

Рассмотрим первую и вторую производные $y(x)$:

$$y' = 1 - \beta e^x, \qquad y'' = -\beta e^x < 0 \; \forall x.$$

Из необходимого условия экстремума первого порядка и достаточного условия максимума второго порядка получаем, что максимум достигается в точке $x = ln\beta^{-1}$.

Возвращаясь к исходным обозначениям, максимум n по $\tilde{T}$ достигается при $\tilde{T}$= $a^{-1}ln\beta^{-1}$. Из принципа максимума следует, что $\tilde{T} = \frac{1}{a} ln \frac{a_1}{a_0 + a_1\beta} \leq a^{-1} ln\beta^{-1}$, т.е. функция n от $\tilde{T}$ возрастает на всей своей области определения. Равенство возможно лишь при a_0=0. В этом случае $u \equiv \frac{\alpha Q}{n}$ $\forall t[0, T]$, и, необходимо $\tilde{T} = T$.

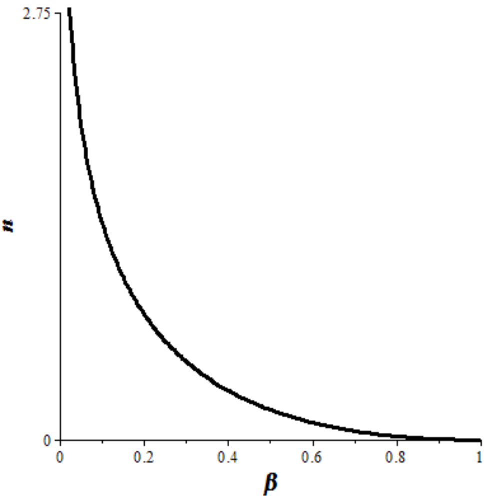

Рис. 4. Функция $n(\beta)$

Такая ситуация возможна только если $\beta e^{aT} = 1$, при этом получим, что $n = \frac{\alpha}{a(\alpha-1)}(\beta - 1 + ln\beta^{-1})$ (рис. 4). При $\beta = 1$ имеем, что либо a, либо T равны нулю, в остальных случаях имеем некоторую зависимость, которая ведет нас к случаю равновесия типа полного поглощения.

Таким образом, мы доказали, что n и $\tilde{T}$ растут одновременно на множестве своих допустимых значений.

Изучим теперь зависимость $x_1^*(T)$ от n и $\tilde{T}$. Мы знаем, что $x_1^*(T) = Q\left(e^{aT} - \frac{\alpha}{an}\left[e^{a\tilde{T}} - 1\right]\right)$. Найдем ее частную производную по $a\tilde{T}$:

$$\frac{\partial x_1^*(T)}{\partial(a\tilde{T})} = \frac{\alpha Q}{ac_1} \frac{e^{a\tilde{T}}(1 - a\tilde{T}) - 1}{(\beta\left(1 - e^{a\tilde{T}}\right) + a\tilde{T})^2},$$

$$n = c_1\left[\beta\left(1 - e^{a\tilde{T}}\right) + a\tilde{T}\right],$$

$$n' = c_1\left[1 - \beta e^{a\tilde{T}}\right].$$

Обозначим $\frac{\partial x_1^*(T)}{\partial(a\tilde{T})}$ за y, $a\tilde{T}$ за x, а $\frac{\alpha Q}{ac_1}$ за $\tilde{c}$, таким образом:

$$y = \tilde{c}\frac{e^x(1-x) - 1}{(\beta(1-e^x) + x)^2}.$$

На рис. 5 изображена функция $y(x)$ при различных параметрах β, очевидно, что она всюду меньше нуля.

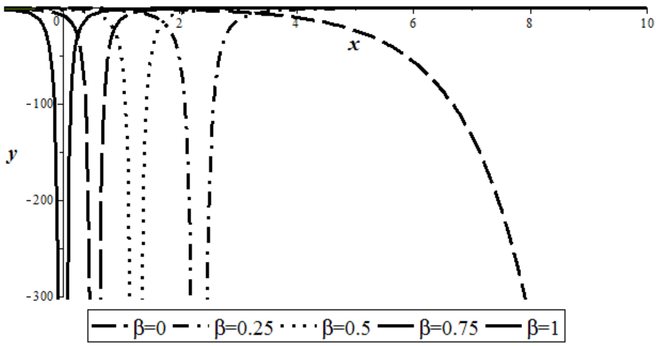

Рис. 5. Функция $y(x)$

Таким образом, мы показали, что $x_1^*(T)$ убывает с ростом $\tilde{T}$ и соответственно n. Тем самым доказано, что максимум капитала фирмы будет достигаться при $n = 0$ и соответствующем этому импульсном управлении, сосредоточенном в момент времени T. В подобном случае венчурный инвестор просто получит весь свой ожидаемый доход долей α в капитале фирмы, и значение параметра β, до тех пор пока оно не превышает αe^{-aT}, роли играть не будет, т.е. ограничения задачи вырождаются.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. При $n = 0$ и $\alpha \geq \beta e^{aT}$ получим, что $x_1^*(T)$ не зависит от β. При $\alpha < \beta e^{aT}$ получим, что $x_1^*(T)$ не зависит от n.

8.5. Задача оптимального инвестирования с неубывающим капиталом

В этом разделе рассмотрим следующую постановку задачи: будем по-прежнему считать, что в начальный момент фирма получает весь капитал, знания не устаревают, ограничения на долю в капитале в этом разделе отсутствуют, при этом выплаты производятся таким образом, чтобы темп роста капитала был неотрицательным, т.е. добавлено условие $\dot{x}_1 \geq 0$. Тогда задача примет вид

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_2(T) \geq \alpha Q,$$

$$R = u - ax_1 \leq 0,$$

$$x(0) = (\mathrm{Q}, 0)^T,$$

$$\mathrm{u} \in [0, \frac{\alpha Q}{n}] \ \forall t,$$

$$x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}.$$

В данной задаче присутствует смешанное ограничение, для ее решения применим ПМ из статьи [4].

Выпишем снова соотношения принципа максимума и сопряженную систему [5]:

$$H = \psi_1 a x_1 + u(\psi_2 - \psi_1),$$

$$l = -a_0 x_1(T) + a_1(\alpha Q - x_2(T)),$$

$$a_1(\alpha Q - x_2(T)) = 0,$$

$$r(u - ax_1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 - \psi_1 = r,$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -a\psi_1 - ar, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \end{cases}$$

$$\psi_1(T) = a_0,$$

$$\psi_2(T) = a_1$$

$$\max_{u \in V} \widetilde{H}(u, \psi) = u(a_1 - \psi_1).$$

Видно, что ψ_1 – положительная невозрастающая функция, так как a_0 и r неотрицательны, таким образом,

$$u^* = \begin{cases} 0, & t \leq \mathrm{t}_1, \\ ax_1, & t > \mathrm{t}_1. \end{cases}$$

При этом $\forall\, t > \mathrm{t}_1$ имеем

$$\dot{x}_1 \equiv 0, \qquad x_1^* \equiv x_1(\mathrm{t}_1), \qquad u^* \equiv aQe^{a\mathrm{t}_1},$$

$$\dot{\psi}_1 = -aa_1, \qquad \psi_1 = a_0 + aa_1(T - t),$$

$$r(t) = a_1\big(1 - a(T - t)\big) - a_0,$$

т.е. при $a_0 = 1$ получим

$$r(t) = a_1(1 - a(T - t)) - 1.$$

А для всех $t < \mathrm{t}_1$

$$\psi_1 = (1 + aa_1(T - t_1))e^{a(\mathrm{t}_1 - \mathrm{t})}, \qquad \psi_2 = a_1.$$

Оптимальный процесс в данной задаче

$$x^* = \begin{cases} \begin{pmatrix} Qe^{at} \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, t_1], \\ \begin{pmatrix} Qe^{a\mathrm{t}_1} \\ a_Q e^{a\mathrm{t}_1}(t - \mathrm{t}_1) \end{pmatrix}, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

$$u^* = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ aQe^{a\mathrm{t}_1}, & t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Уравнение для момента переключения t_1

$$-\frac{a}{\alpha}(t_1 - T) = e^{-a\mathrm{t}_1}.$$

8.6. Анализ результатов решения третьей задачи

Вид оптимального процесса говорит о том, что траектория разобьется на 2 участка: сначала фирма будет развиваться, пуская весь доход на собственные инвестиции, а начиная с некоторого момента t_1, весь доход будет уходить на выплаты инвестору. При этом на втором участке капитализация фирмы будет оставаться на постоянном уровне. График зависимости капитала от времени изображен на рис. 6. На первом участке графиком является сплошная кривая, на втором – пунктирная линия.

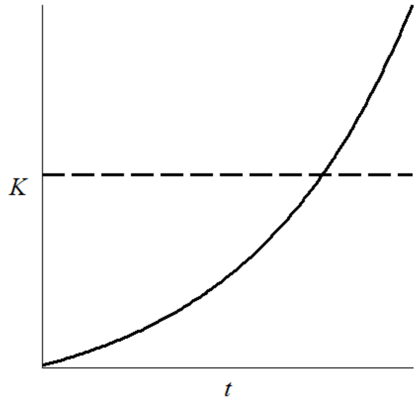

Рис. 6. Траектория в задаче с неубывающим капиталом

8.7. Задача оптимального инвестирования с ограничением на темп роста капитала

В этом разделе мы рассмотрим задачу, в которой инвестор оставляет фирме некоторый рост. Ее отличие от предыдущей состоит в том, что темп роста капитала ограничен снизу не нулем, а некоторой неотрицательной постоянной ε:

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_2(T) \geq \alpha Q,$$

$$R = u - (a - \varepsilon)x_1 \leq 0, \qquad \dot{x}_1 \geq \varepsilon x_1,$$

$$x(0) = (\mathrm{Q}, 0)^T,$$

$$\mathrm{u} \in [0, \frac{\alpha Q}{n}]\ \forall t,$$

$$x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}.$$

Эта задача также содержит смешанные ограничения, при этом, как будет видно далее, траектория разобьется уже на три участка.

Соотношения ПМ для этой задачи:

$$H = \psi_1 a x_1 + u(\psi_2 - \psi_1),$$

$$l = -a_0 x_1(T) + a_1(\alpha Q - x_2(T)),$$

$$a_1(\alpha Q - x_2(T)) = 0,$$

$$r(u - (a - \varepsilon)x_1) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 - \psi_1 = r,$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -a\psi_1 - (a - \varepsilon)r, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \end{cases}$$

$$\psi_1(T) = a_0,$$

$$\psi_2(T) = a_1,$$

$$\max_{u \in V} \widetilde{H}(u, \psi) = u(a_1 - \psi_1).$$

Аналогично ψ_1 – положительная невозрастающая функция, так как a_0 и r неотрицательны.

Предположим существование моментов t_1, t_2 попадания и схода со смешанных ограничений.

Траектория на отрезке $[t_1, t_2]$ описывается следующими уравнениями:

$$\dot{x}_1 = \varepsilon x_1, \qquad x_1^* = Qe^{a\mathrm{t}_1 + \varepsilon(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1)}, \qquad u^* = (a - \varepsilon)Qe^{a\mathrm{t}_1 + \varepsilon(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1)},$$

$$u^*(t_2) = (a-\varepsilon)Qe^{a\mathrm{t}_1+\varepsilon(t_2-\mathrm{t}_1)} = \frac{\alpha Q}{n}.$$

На отрезках $[0, t_1]$ и $[t_2, T]$ траектория ведет себя аналогично, например, второму случаю, когда управление постоянно.

Выпишем оптимальный процесс

$$x_1^* = \begin{cases} Qe^{at}, & t \in [0, t_1], \\ Qe^{a\mathrm{t}_1+\varepsilon(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)}, & t \in [t_1, t_2], \\ Qe^{(a-\varepsilon)(\mathrm{t}_2-\mathrm{t}_1)+at} + \frac{\alpha Q}{an}\left[1 - e^{a(t-\mathrm{t}_2)}\right], & t \in [t_2, T], \end{cases}$$

$$u^* = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_1], \\ (a-\varepsilon)Qe^{a\mathrm{t}_1+\varepsilon(\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)}, & t \in [t_1, t_2], \\ \dfrac{\alpha Q}{n}, & t \in [t_2, T]. \end{cases}$$

Уравнения для моментов переключений t_1 и t_2

$$\begin{cases} a\mathrm{t}_1 + \varepsilon(t_2 - \mathrm{t}_1) = ln\dfrac{\alpha}{n(a-\varepsilon)}, \\ \left(\dfrac{a}{\varepsilon} - 1\right)e^{a\mathrm{t}_1}\left(e^{\varepsilon(t_2-\mathrm{t}_1)} - 1\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{T-t_2}{n}\right). \end{cases}$$

8.8. Анализ результатов решения четвертой задачи

В этой задаче траектория разбивается на три участка.

- На первом участке фирма растет с максимальным темпом, не делая никаких выплат инвестору.
- На втором участке фирма растет с темпом ε, оставленным ей инвестором, весь оставшийся доход идет инвестору.
- Как только капитализация фирмы достигает уровня, когда доход без доли ε больше ограничения на выплаты, выплаты становятся фиксированными, а капитализация фирмы начинает расти быстрее.

В случае $\varepsilon = 0$ мы, очевидно, получим предыдущую задачу.

8.9. Задача оптимального инвестирования с устаревающими знаниями (неавтономный случай)

В последнем разделе рассмотрим вторую задачу (с ограничением на долю в капитале), в которой положим $\mu_A > 0$, т.е. будем считать, что знания устаревают. Сделаем замену:

$$c_1 = \xi^{1-\gamma}\theta\tau A_V e^{-\mu_A t}, c_2 = \xi^{1-\gamma}\theta\Theta - \left(s + \tilde{Z}\right)\xi - \mu_K, \mu_A = \delta.$$

Здесь c_2 – константа, характеризующая собственный темп роста фирмы, а c_1 – влияние на темп роста венчурного инвестора.

Наша задача примет вид

$$-x_1(T) \to inf, \qquad t \in [0, T],$$

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} c_1 e^{-\delta t} + c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_2(T) + \beta x_1(T) \geq \alpha Q,$$

$$x(0) = (Q, 0)^T,$$

$$u \in [0, \frac{\alpha Q}{n}]\ \forall t,$$

$$x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}.$$

Выпишем для нее соотношения ПМ:

$$\widetilde{H} = u(\psi_2 - \psi_1),$$

$$l = -a_0 x_1(T) + a_1(\alpha Q - x_2(T) - \beta x_1(T)),$$

$$a_1(\alpha Q - x_2(T) - \beta x_1(T)) = 0,$$

$$\psi(T) = (a_0 + a_1\beta, a_1)^T,$$

$$\psi_1 = (a_0 + a_1\beta) e^{c_2(T-t) - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta T} - e^{-\delta t})},$$

$$\psi_2 = a_1.$$

Решение ее аналогично разбору предыдущих случаев, запишем оптимальный процесс:

$$x_1^* = \begin{cases} Qe^{c_2 t - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t} - 1)}, \qquad t \in [0, t_1], \\ Qe^{c_2 t - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t} - 1)} - \dfrac{\alpha Q}{n} e^{c_2(t - t_1) - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t} - e^{-\delta t_1})} \cdot \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t} e^{-c_2(\tau - t_1) + \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta \tau} - e^{-\delta t_1})} d\tau, \qquad t \in [t_1, T], \end{cases}$$

$$u^* = \begin{cases} 0, \qquad t \in [0, t_1], \\ \dfrac{\alpha Q}{n}, \qquad t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Уравнение для момента переключения t_1

$$\beta \left(\frac{e^{c_2 T - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta t} - 1)}}{\alpha} - \frac{e^{c_2(T - t_1) - \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta T} - e^{-\delta t_1})}}{n} \text{x} \right.$$

$$\left. \text{x} \int_{t_1}^{T} e^{-c_2(\tau - t_1) + \frac{c_1}{\delta}(e^{-\delta \tau} - e^{-\delta t_1})} d\tau \right) + \frac{T - t_1}{n} = 1.$$

8.10. Анализ результатов решения пятой задачи

В данной задаче траектория снова разбивается на два участка.

- На первом участке выплаты отсутствуют, фирма растет, вкладывая весь доход в собственные инвестиции.
- На втором участке фирма делает выплаты в максимальном объеме в единицу времени.

Различные варианты поведения траектории в этой задаче в зависимости от параметров изображены ниже на рис. 7, на первом участке траектория обозначена сплошной, а на втором – штрихованной кривыми.

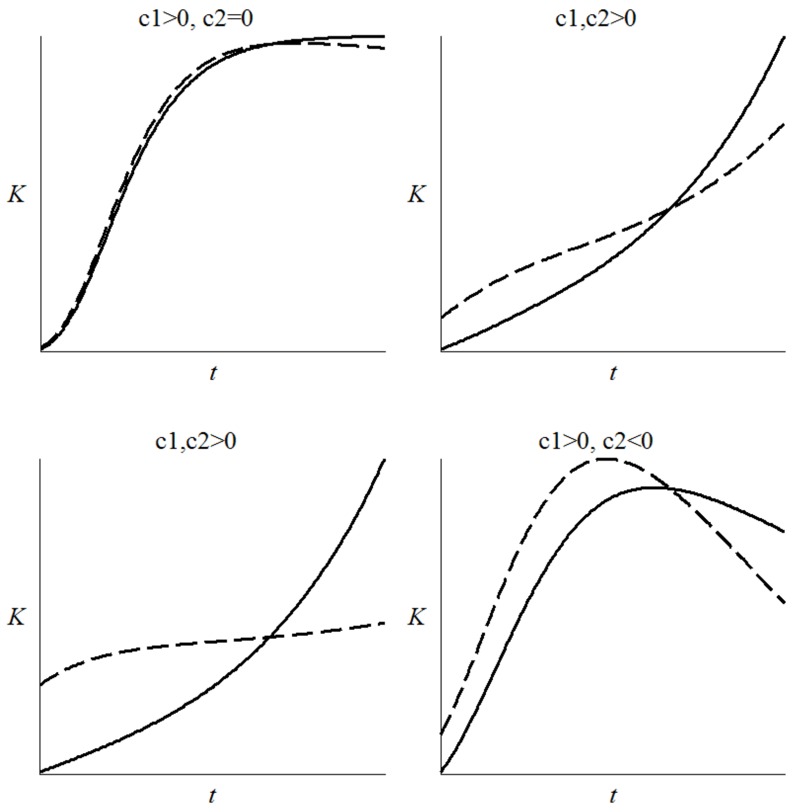

Рис. 7. Траектории пятой задачи

При этом процесс устаревания знаний позволяет выделить три качественно разных случая, когда c_2 равно нулю, больше нуля и соответственно меньше нуля.

1. В первом случае за счет знаний инвестора происходит резкий рост капитализации фирмы, траектория ведет себя практически линейно в начале, потом довольно резко

уходит к постоянному значению к моменту когда знания почти полностью устаревают. Таким образом, можно сделать следующий вывод: *венчурное инвестирование позволяет масштабировать капитализацию фирм-стартапов, не обладающих собственным потенциалом роста.* Очевидно, что если рост прекратится до конца инвестиционного периода, то выплаты инвестору в этом случае будут происходить за счет продажи собственного капитала.

2. Второй случай качественно не отличается от уже рассмотренных случаев, траектория будет вести себя похожим образом.
3. Третий случай соответствует инвестированию в убыточный бизнес. Как видно из рис. 7, траектория ведет себя практически, как и в первом случае, но к моменту устаревания знаний капитализация фирмы начинает падать, при этом выплаты инвестору естественным образом на порядок ускоряют этот процесс. Тем не менее *знания инвестора позволяют ему на конец инвестиционного периода увеличить стоимость активов, вложенных в потенциально убыточный бизнес*. Таким образом, можно сделать еще один вывод: *венчурное инвестирование позволяет убыточным стартапам выходить на рабочий уровень и развивать фирмы, не обладающие достаточным потенциалом в бизнесе.*

9. Заключение

В работе представлена модель замкнутой рыночной экономики с семью экономическими агентами [6], в которой описан процесс венчурного инвестирования. На качественном уровне дано описание процесса инвестирования в новые проекты. При достаточно общих условиях показано, что целесообразным является разовое инвестирование всей суммы, необходимой для вновь создаваемой фирмы. Доказана эквивалентность сокращения инвестиционного периода растягиванию выплат.

Рассмотрены две схемы выплат по инвестициям. Оказалось, что при наличии только денежных выплат увеличение периода вывода капитала отрицательно сказывается на итоговой капитализации компании. Оптимальными для фирмы являются разовые выплаты в конце инвестиционного периода.

Получен ряд качественных результатов для случая, когда венчурный капиталист получает часть дохода от инвестиций в новую фирму в виде фиксированной доли в капитале этой фирмы в конце периода. Изучены две крайние схемы поведения венчурного капиталиста: (1) схема поглощения, при которой вся собственность компании переходит инвестору в конце периода, (2) равновесная схема, когда инвестор и фирма максимизируют общий возможный доход. Выписаны соотношения между полученной инвестором долей в капитале и требуемой доходностью по инвестициям, а также найдена зависимость решения задачи от этих параметров. Соотношения найдены как при получении венчурным капиталистом сверхожидаемого дохода, так и при получении им убытков.

В работе получены результаты для двух типов ограничений на темп роста капитала фирмы: его нестрогая и строгая неотрицательность.

Также исследован неавтономный случай, когда знания считаются устаревающими со временем. Показана целесообразность инвестирования в проекты, не обладающие собственным потенциалом роста или выглядящие убыточными.

Полученные в работе соотношения позволят уточнить описание модели экономики на макроуровне и применить полученные результаты для решения задачи оптимальной инвестиционной политики на макроэкономическом уровне. После полного описания модели перед ее использованием возникнет проблема идентификации внешних параметров [7], а затем и исследование устойчивости прогнозирования по полученной модели [8].

Литература

1. *Поспелов И.Г.* Новые явления требуют новых моделей: экономика разнообразия // XXV-й международный коллоквиум института CEDIMES. (CEDIMES-2014). VI-я Межд. научная конференция "Модернизация и инновационное развитие экономических систем:

проблемы, стратегии, структурные изменения". Москва, Россия. 30-31 октября 2014 г. /Сб. тезисов. – М.: РУДН, ВЦ РАН, CEDIMES-Russie осс., 2014. http://www.ccas.ru/cedimes/CEDIMES2014BookOfAbstracts.pdf (дата обращения: 01.12.2014).

2. *Оленев Н.Н., Шерстнева А.С.* Параллельные вычисления в моделировании процесса венчурного инвестирования// 8-я межд. конф. Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах (HPC-2008). Тр. конф. Казань: Изд. КГТУ, 2008. С.314-318.

3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979, 223 с.

4. *Арутюнов А.В., Асеев С.М.* Принцип максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Невырожденность и устойчивость // Доклады РАН. 1994. Т.334. № 2. С.134-137.

5. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. С.387-395.

6. *Поспелов И.Г.* Экономические агенты и системы балансов. Препринт WP2/2001/03. Сер. WP2. М.: ГУ ВШЭ, 2001. 67с.

7. *Гергель В.П., Горбачев В.А., Оленев Н.Н., Рябов В.В., Сидоров С.В.* Параллельные методы глобальной оптимизации в идентификации динамической балансовой нормативной модели региональной экономики// Вестник ЮУрГУ, №25 (242), 2011. С.4-15. (Сер. "Математическое моделирование и программирование", вып.9.)

8. *Каменев Г.К., Оленев Н.Н.* Исследование устойчивости идентификации и прогнозирования российской экономики на модели Рамсея // Математическое моделирование, 2014. Том. 26. № 9. С.3-17.

Содержание

Оленёв Николай Николаевич, Остапов Всеволод Александрович

К динамической модели экономики с учетом венчурного капитала

Подписано в печать 25.12.2014
Формат бумаги 60x84 1/16
Уч.-изд.л. 2. Усл.-печ.л. 3.25
Тираж 120 экз. Заказ 28

Отпечатано на ротапринтах
в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук
119333, Москва, ул. Вавилова, 40