УДК 519.86

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

С. Дэмбэрэл, Н.Н. Оленев, И.Г. Поспелов [1] [2]

Исследовательский центр астрономии и геофизики МАН, Улаанбаатар
Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

Представлены новые результаты математического моделирования взаимодействия экономических и экологических процессов, которые продолжают работу [1]. Предложена модель взаимного влияния животноводства — одной из двух главных отраслей сельского хозяйства — и природных пастбищ, которые являются существенной составляющей кормовой базы животноводства. Из исходного микроописания рационального регулирования поголовья животных, дифференцированных по возрасту, выведено макроописание отрасли животноводства: численность животных общая и по возрастам, численность молодняка, объем производства животноводческой продукции и затраты на производство, спрос на кредит и прибыль. Полученное описание образует блок "экономика" в модели взаимного влияния животноводства и природных пастбищ — природных растительных ценозов.

TO A MATHEMATICAL MODEL OF ECONOMY AND ENVIRONMENT INTERACTION

S. Demberel, N.N. Olenev, I.G. Pospelov

Research Centre of Astronomy and Geophysics of the Mongolian Academy of Sciences
Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences

This paper presents new results of mathematical modeling of economy and environment interaction that continues paper [1]. A model of mutual interaction of livestock farming — one in a two main agricultural branches — and natural pastures that are the essential part of livestock farming forage reserve is proposed. Macrodescription of livestock farming such as: total and vintage number of livestock, number of young animals, livestock outputs and production inputs, demand for credit, and profit — follows from the initial microdescription of rational managing of vintage livestock. This description forms a block "Economy" of the model of mutual interaction of livestock farming and natural pastures — natural vegetable coenoses.

---

[2] Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00114) и программой государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта 00-15-96118).

1 Введение

Оценка воздействия экономической деятельности на природную среду не менее актуальна, чем оценка воздействия на природную среду ядерного оружия. К тому же задача оценки экологических последствий экономической деятельности имеет специфическую трудность. Дело в том, что состояние среды обитания относится к так называемым общественным продуктам, которые до сих пор не входят в сферу "деятельности" социально-экономических механизмов самоорганизации, будь то рыночных или не рыночных. Поэтому регулирование экологических последствий экономической деятельности ложится на государственные и общественные институты. И если использовать современные информационные технологии оценки экологических последствий экономической политики, то необходимо явным образом учитывать сложившиеся в обществе специфические экономические механизмы регулирования, через которые проявляются государственные решения.

В работах [1] и [2] предложен подход к преодолению указанной трудности. В модели взаимодействия экономической и экологической систем блок "экономика" содержал явное описание рыночных механизмов регулирования производства, обращения и потребления и воздействия на них государственной экономической политики, а блок "экология" — описания роста биомассы природного растительного ценоза под воздействием губительного воздействия производства и восстановительных мероприятий государства. Однако блок "экономика" был недостаточно структурирован. В описании промышленное производство не было явным образом разделено с сельскохозяйственным производством, хотя ясно, что каждое из них имеет свою специфику.

Данная работа проделана с целью усовершенствовать структуру блока "экономика" в моделях взаимодействия экономических и экологических процессов. Использовав ту же общую схему модели, что и в работах [1] и [2], мы построили модель одной из основных отраслей сельского хозяйства — животноводства — и учли воздействие его на природную среду. Для этого было рассмотрено отгонное (пастбищное) животноводство. До сих пор в мире достаточно стран, в которых эта отрасль является ведущей (Монголия, Ботсвана, Новая Зеландия, Аргентина). Кроме того, пастбищное животноводство обладает главной особенностью животноводческой отрасли сельского хозяйства, которое надо явным образом отразить в модели. Сельскохозяйственные животные являются и основными производственными фондами, и конечным продуктом отрасли, поэтому здесь цикл производства совпадает с циклом воспроизводства и существенно дольше, чем цикл производства в растениеводстве или в промышленности. Он дольше и цикла восстановления природных растительных ценозов[3].

Модель взаимного влияния состояния пастбищного животноводства и состояния природных пастбищ строится на принципах системного анализа развивающейся экономики [3]. В статье приведена только общая схема модели. Основное содержание статьи составляет описание блока "экономика" модели: вывод макромодели отрасли животноводства из исходного микроописания рационального регулирования поголовья животных, дифференцированных по возрасту.

Для описания общей схемы модели рассмотрим гипотетическую рыночную экономику,

[3] Заметим, что стойловое животноводство, как отрасль сельскохозяйственного производства, отличается от пастбищного тем, что использует дополнительные основные фонды — помещения для содержания скота — и несет дополнительные затраты на покупку кормов у второй основной отрасли сельского хозяйства — растениеводства. Ясно, как учесть это в математическом описании.

в которой основной производственной отраслью служит пастбищное животноводство. Мы предполагаем, что в этой экономике существует достаточно развитая рыночная инфраструктура. Это означает, что хозяйства, содержащие животных, работают на рынок, преследуют коммерческие цели и могут пользоваться кредитом. Мы также считаем, что данная экономика служит базой самостоятельного государства [4], (а не региона).

Традиционное отгонное пастбищное животноводство не требует больших затрат труда, однако существенно зависит от внешних метеорологических условий и оказывает огромное влияние на травяную степную экосистему, вызывая при неумеренной нагрузке ее деградацию.

По этим причинам мы описываем экономику как взаимодействие четырех агрегированных агентов: "Животноводство" — производители, "Банковская система" — финансовый сектор, "Домашние хозяйства" — потребители и собственники животноводческих ферм и банков, и "Государство" — общественный сектор, который реализует потребление общественных благ, в частности финансирует природоохранные мероприятия, и регулирует экономику.

Агенты взаимодействуют на рынках продукции животноводства и рынке капитала, "Животноводство" напрямую взаимодействует со степной экосистемой. Эта схема взаимосвязей приведена на рис. 1.

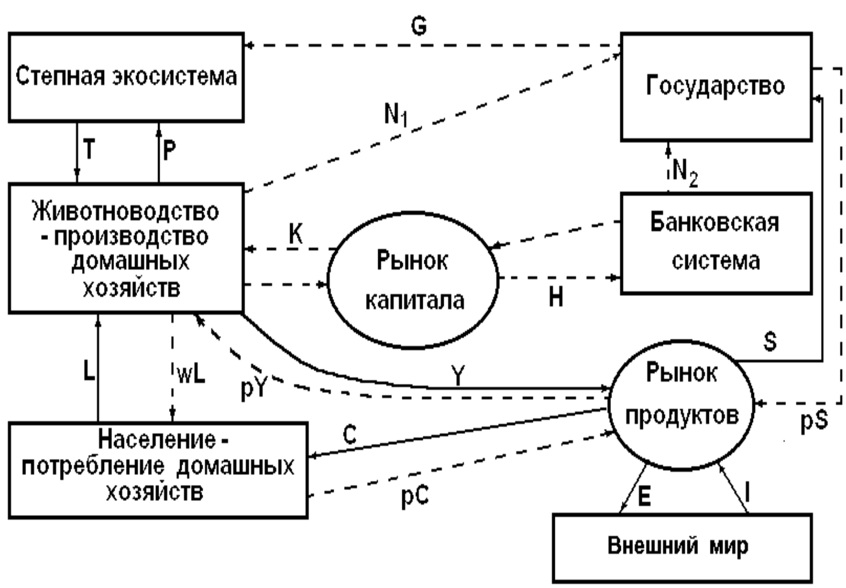

Рис.1 Схема эколого-экономической модели степного пастбищного животноводства.

Из схемы видно, что "Государство" собирает налоги N_1 с производителей и налоги N_2 с банковской системы, и тратит часть их pS на общественное потребление S, а другую часть G на поддержку степной экосистемы. "Банковская система" посредством рынка

[4]Например, подобная экономика существует сейчас в Монголии.

капитала предоставляет кредит K производителям и получает от них платежи погашения H. Степная экосистема служит источником T питания животных и испытывает от них разрушающее воздействие P. Труд L домашних хозяйств служит фактором производства и приносит населению доход wL. Население получает продукты потребления C на рынке продуктов, расходуя средства pC. Связь с внешним миром (мировой рынок и неучтенные здесь отрасли) описывается потоками экспорта E и импорта I.

2 Модель жизненного цикла одновозрастной когорты животных

Теперь рассмотрим агрегированную отрасль животноводства, в которой функционирует единственная порода, то есть, полагаем, что все многообразие пород отрасли с помощью пересчетных коэффициентов сведено к одной. Кроме того, полагаем, что затрачиваемая рабочая сила также однородна, а затрачиваемый природный ресурс единственен — травяная растительность степей.

2.1 Описание технологии животноводства

При отгонном пастбищном животноводстве производством управляют домашние хозяйства. Считаем, что хозяйства управляют стадами примерно одинаково в соответствии с общей для всех хозяйств экономической конъюнктурой, и рассмотрим одно типовое хозяйство. Стадо, которым распоряжается данное хозяйство, состоит из животных, родившихся в разные моменты $\tau \leq t$ (когорт τ). Численность когорты τ в момент времени t обозначим через $n(t,\tau)$. Эта численность уменьшается со временем вследствие естественной смертности, а также за счет убоя.

$$\partial n(t,\tau)/\partial t = -d(t-\tau,t)n(t,\tau) - w(t,\tau), \tag{1}$$

где $d(t-\tau,t) > 0$ — смертность, а $w(t,\tau) \geq 0$ — скорость убоя животных возраста $t-\tau$ в момент t. Скорость убоя целиком определяется самим хозяйством. Смертность зависит главным образом от возраста когорты $t-\tau$, и как здесь предполагается, не зависит от действий хозяйства. Зависимость смертности от времени отражает технический прогресс отрасли. В принципе он в животноводстве выражен слабо и в основном состоит в замене одних пород другими, более жизнестойкими или продуктивными.

Одна из основных проблем традиционного животноводства в том, что оно остается весьма рискованной отраслью, поэтому мы ниже, кроме ожидаемого $d(t-\tau,t)n(t,\tau)$ и управляемого $w(t,\tau)$ сокращения когорты, учтем еще случайное, как возможность ее одномоментной гибели целиком от эпидемии, снегопадов на зимних пастбищах, засухи на летних и т.п.

Животные размножаются, давая начало новым когортам. Численность новорожденных животных в момент t задается соотношением

$$n_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \beta(t-\tau,t)n(t,\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $\beta(t-\tau,t) > 0$ — фертильность животных когорты τ, которая, как и смертность, зависит в основном от возраста когорты $t-\tau$.

Содержание животных наносит ущерб природе и требует затрат труда. Первый фактор будет учтен в соответствующем блоке модели, поскольку отдельное хозяйство ущерба природе, как результата своей деятельности, не ощущает и не оценивает. Затраты труда $v(t)$ будем считать пропорциональными численности стада и не зависящими от его возрастной структуры

$$v(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \lambda(t-\tau,t)n(t,\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $\lambda(t-\tau,t) > 0$ — трудоемкость ухода за животными возраста $t-\tau$ в момент t. Живые животные возраста $t-\tau$ производят определенный поток продукции (молоко, шерсть), а забитые — дают определенный запас (мясо, кожа). Будем считать, что эти продукты сводятся в один — объем производства — с помощью подходящих индексов цен. Тогда можно считать, что выход продукции $y(t)$ составляет

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(k(t-\tau,t)n(t,\tau) + m(t-\tau,t)w(t,\tau)\right)d\tau, \tag{4}$$

где $k(t-\tau,t) \geq 0$ — выход продукции с одного живого животного возраста $t-\tau$ в единицу времени в момент t, а $m(t-\tau,t) \geq 0$ — выход продукции с одного забитого животного возраста $t-\tau$ в момент t. Характерный вид зависимости функций $k(a,t)$ и $m(a,t)$ при заданном t от возраста a представлен на рис.2.

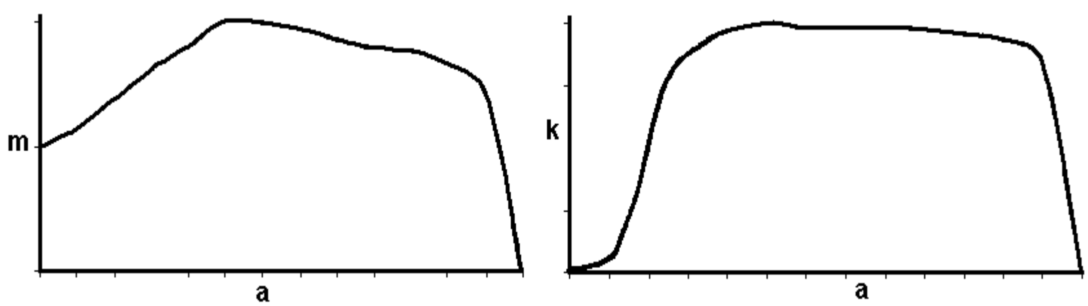

Рис.2 Норма m выхода конечной продукции при убое в возрасте a, в процентах к выходу от одной особи условной породы. Фондоотдача k в течение жизненного цикла от производственного капитала в возрасте a, в процентах к выходу от одной особи условной породы.

2.2 Описание экономической деятельности хозяйства

Как уже говорилось, мы считаем, что хозяйства работают в рыночных условиях: они продают продукт $y(t)$ по единой цене $p(t)$, используют наемный труд, который оплачивается по единой ставке заработной платы $s(t)$, и стремятся максимизировать ожидаемую прибыль. Прибыль в момент времени t, грубо говоря, составляет величину [5]

$$py - sv = \int_{-\infty}^{t} \left(p(t)(k(t-\tau,t)n(t,\tau) + m(t-\tau,t)w(t,\tau)) - s(t)\lambda(t-\tau,t)n(t,\tau)\right) d\tau. \qquad (5)$$

Из сделанных выше предположений, казалось бы напрашивается следующее описание экономически рациональной деятельности хозяйства: максимизировать приведенную ожидаемую прибыль

$$\int_{t}^{\infty} \exp\left[-\delta(u-t)\right]\left[p(u)y(u) - s(u)v(u)\right] du \qquad (6)$$

где $\delta > 0$ — некоторый коэффициент дисконтирования, при ограничениях (1),(3),(4), условии

$$n(t,t) = n_0(t) \qquad (7)$$

и заданной начальной численности когорт $n(t_0,\tau)$, $\tau < t_0$. Однако, такая постановка задачи, подразумевающая воспроизводство стада в рамках каждого хозяйства, не только очень сложна из-за запаздывающего условия (2), но и не слишком реалистична. С одной стороны, хозяйства постоянно разделяются и сливаются, а с другой, как уже говорилось, — стадо может внезапно погибнуть и его надо возобновлять за счет покупки. Поэтому сделаем следующее упрощающее предположение. Хозяйство продает весь народившийся молодняк $n_0(t)$ по цене $q(t)$ и при желании может всегда его купить по той же цене для дальнейшей эксплуатации. Тогда, если функционал, который максимизирует хозяйство, линеен по численности когорт, подобно (5), задача экономически рационального поведения хозяйства распадается на задачи управления отдельными когортами, причем начальная численность когорты $n(t,t)$ будет новым независимым управляющим параметром. Возможность продажи и покупки взрослых животных мы рассматривать не будем, но, как будет показано в конце работы, добавление этой возможности не изменит результатов, если торговля ведется по "правильным" ценам.

2.3 Экономически рациональное управление численностью когорты

Итак, будем рассматривать задачу об оптимальной эксплуатации когорты животных. При этом учтем дополнительно к сказанному выше еще три обстоятельства.

- Кроме издержек на труд, хозяйство должно платить налог. Обычно в современной экономике налогом облагается доход, но для животноводства, как для традиционной отрасли, часто сохраняется архаичная форма обложения "с головы" по фиксированной ставке. Современные формы налогообложения на моделях изучались многократно. Интересно будет исследовать влияние фиксированного налога. Поэтому считаем, что животноводческие хозяйства платят государству фиксированную сумму s_0 с каждой головы имеющихся животных.

[5]Ниже мы уточним это выражение.

- Для покупки молодняка хозяйство может брать кредит. Чтобы оценить возможную роль банковской системы в развитии животноводства, будем считать, что банк позволяет хозяйству пользоваться наиболее прогрессивной системой расчетов — кредитной линией (кредитной картой). Именно, срок возврата кредита не назначается, и кредит может использоваться для проведения всех платежей. Известен только начисляющийся на текущую сумму кредита процент $r(t)$ и лимит кредитования. Будем считать, что лимит кредитования определяется главным активом хозяйства — стоимостью имеющихся у него животных.

- Когорта может погибнуть от случайных причин. Считаем, что это событие можно описывать как случайное событие пуассоновского потока с заданной частотой Λ.

Пусть в момент t хозяйство решает, стоит ли ему покупать молодняк в количестве $n(t,t)$. Для этого цену молодняка с учетом полученного под его покупку кредита надо сопоставить с ожидаемыми выгодами от эксплуатации этих животных с учетом платежей погашения по кредиту. Поскольку прибыль от эксплуатации $z(u,t)$ поступит в будущем, при $u > t$, а расходы надо нести сейчас, будущие доходы надо привести к текущему моменту. В рыночных условиях это можно сделать, используя в качестве коэффициента дисконтирования процент по безрисковым сбережениям ρ. Обычно [4] таковым считается процент по банковским депозитам. Прибыль поступает не бесконечно, а только до случайного момента гибели когорты T. Считая для простоты, что хозяйство нейтрально относится к риску, получаем выражение для функционала хозяйства через математическое ожидание E_T будущих доходов

$$J = E_T \int_t^T (\exp\left[-\rho(u-t)\right])z(u,t)du - q(t)n(t,t) + l(t,t), \tag{8}$$

где $l(t,t)$ — кредит взятый хозяйством на покупку молодняка $n(t,t)$. По предположению случайный момент гибели когорты T независимо от предыдущих событий имеет плотность распределения $\Lambda exp(-\Lambda T)dT$, поэтому

$$J = \int_t^\infty (\exp\left[-(\rho+\Lambda)(u-t)\right])z(u,t)du - q(t)n(t,t) + l(t,t). \tag{9}$$

Считаем, что в соответствии с правилами кредитной линии все расчеты хозяйства идут через остаток кредита $l(u,t)$ (доходы из него вычитаются, а расходы к нему прибавляются). Для простоты считаем норму процента по кредиту постоянной. Тогда с учетом налоговых платежей s_0, начисления процента r и доходов от продажи молодняка

$$\begin{aligned} \partial l(u,t)/\partial t = rl(u,t) - p(u)(k(u-t,u)n(u,t) + m(u-t,u)w(u,t)) + \\ +(s(u)\lambda(u-t,u) + s_0)n(u,t) + z(u,t) - q(u)\beta(u-t,u)n(u,t). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $p(u)$, $q(u)$, $s(u)$ — прогнозы цен и ставок заработной платы при $u > t$, $k(u-t,u)$, $m(u-t,u)$, $\beta(u-t,u)$ — ожидаемые значения продуктивностей и фертильности при $u > t$.

Ожидаемая численность когорты в соответствии с (1) определяется уравнением

$$\partial n(u,t)/\partial u = -d(u-t,u)n(u,t) - w(u,t). \tag{11}$$

Мы предполагаем, что хозяйство не может исполнять функции кредитора, т.е.

$$l(u,t) \geq 0. \tag{12}$$

Как уже говорилось, лимит кредитования определяется денежной оценкой наличного стада. Будем предполагать, что такой оценкой служит ликвидационная стоимость $p(u)m(u-t,u)n(u,t)$. Если стадо погибает, то долг не возвращается. Поэтому банк не будет давать кредит на всю эту величину, а потребует, чтобы часть стада был создана на собственные средства хозяйства.

$$l(u,t) \leq \sigma p(u)m(u-t,u)n(u,t), \quad 0 \leq \sigma < 1. \tag{13}$$

Связь величин σ и частоты гибели Λ обсудим при обсуждении модели банка в следующей публикации.

Может вызвать возражение предположение о том, что кредит, данный на покупку когорты, гарантируется стоимостью именно этой когорты, а не всем имуществом хозяйства. Заметим, однако, что если происходит стихийное бедствие, то гибнет не одна когорта, а все стадо и хозяйство становится банкротом, а пока бедствия не произошло, хозяйство функционирует в стационарном режиме, систематически беря кредиты на покупку новых когорт, так что общий долг хозяйства можно считать разложенным по когортам пропорционально их стоимости. Таким образом, предположение (13) о "финансовой самостоятельности" когорт, которое сильно упрощает задачу, с содержательной точки зрения не выглядит большим преувеличением.

Таким образом, экономически рациональное решение хозяйства о покупке молодняка в момент t в количестве $n(t,t)$ должно опираться на решение следующей задачи *планирования жизненного цикла* когорты: найти динамику численности $n(u,t)$, объема кредитов $l(u,t)$, скорости убоя $w(u,t) \geq 0$ и извлекаемых доходов $z(u,t)$, удовлетворяющих условиям (10)- (13) оптимальные в смысле критерия (9).

2.4 Задача планирования жизненного цикла когорты

Сначала будем решать задачу планирования жизненного цикла когорты при фиксированной положительной численности купленного молодняка:

$$n(t,t) = n_0 > 0. \tag{14}$$

Чтобы избежать скачков фазовых переменных на оптимальной траектории, кроме естественного ограничения $w(u,t) \geq 0$, введем еще ограничение сверху на скорость убоя $w(u,t) \leq Sn(u,t)$, где S — сколь угодно большая, но фиксированная положительная величина. Ясно, что с содержательной точки зрения, убой с очень большим темпом эквивалентен мгновенному убою когорты. В полной модели мы будем использовать результаты решения задачи при $S \to \infty$. Функции $m(.,.)$, $k(.,.)$, $\beta(.,.)$, $\lambda(.,.)$ считаем достаточно гладкими и равномерно ограниченными вместе со всеми производными, которые нам понадобятся.

Прогнозы цен $p(u),\ q(u),\ s(u)$ мы считаем положительными достаточно гладкими функциями на $[t,\ \infty)$, удовлетворяющими условию $p(u)\exp(-\rho u),\ q(u)\exp(-\rho u),\ s(u)\exp(-\rho u) \to 0$ при $u \to \infty$. Эта оценка естественна с экономической точки зрения. Если хозяйство ожидает инфляцию, т.е. систематический рост цен, то, будучи заинтересованным в реальном, а не номинальном доходе, оно должно увеличить коэффициент дисконтирования будущих доходов на величину ожидаемого темпа инфляции. Иначе говоря, в нормально функционирующей рыночной экономике процент по безрисковым активам ρ должен превосходить темп инфляции. Естественно считать, что и производные функций $p(u), q(u), s(u)$ нужных нам порядков тоже растут не быстрее $\exp(\rho u)$. В данном разделе удобно будет использовать обозначения

$$\pi(u) = p(u)k(u-t,u) - s(u)\lambda(u-t,u) - s_0 + q(u)\beta(u-t,u), \tag{15}$$

$$\kappa(u) = p(u)m(u-t,u). \tag{16}$$

Согласно сделанным предположениям $\pi(u),\ \kappa(u)$ — гладкие функции на $[t,\infty)$, удовлетворяющие условиям: $\pi(u),\ \kappa(u)$ и их производные растут не быстрее $\exp(\rho u)$ при $u \to \infty$, $\kappa(u) > 0$. Введем еще обозначение

$$\delta(u) = d(u-t,u). \tag{17}$$

Поскольку продолжительность жизни животных ограничена, считаем, что смертность $\delta(u) > 0$ и с ростом u растет неограниченно, но медленнее любой экспоненты.

Заметим, что в силу уравнения (11) численность когорты со временем монотонно убывает, а значит, в силу ограничения (13) долг хозяйства растет не быстрее, чем цены. Поэтому естественно назвать *пространством управлений* задачи планирования жизненного цикла когорты множество U четверок функций $< n(u),\ l(u),\ w(u),\ z(u) >$ заданных на $[t,\infty)$, таких что

1. $w(u),\ z(u)$ — измеримы;
2. $n(u),\ l(u)$ — абсолютно непрерывны;
3. $l(u)\exp(-\rho u),\ n(u)\exp(-\rho u) \to 0$ при $u \to \infty$;
4. $n(0) = n_0$ — измеримы.

Допустимым множеством D задачи планирования жизненного цикла когорты назовем подмножество элементов U, почти всюду на $[t,\infty)$ удовлетворяющих условиям[6]

$$\partial n(u)/\partial u = -\delta(u)n(u) - w(u), \tag{18}$$

$$\partial l(u)/\partial u = -\pi(u)n(u) - \kappa(u)w(u) + z(u) + rl(u), \tag{19}$$

[6] Для вывода уравнений использовалась система Maple 6, в которой производные по одной переменной всегда обозначаются как частные независимо от количества переменных. Поскольку мы используем обозначения Maple 6, то в дальнейших формулах частные производные следует воспринимать как обычные.

$$0 \le l(u),\ l(u) \le \sigma n(u)\kappa(u),\ 0 \le w(u),\ w(u) \le Sn(u). \tag{20}$$

Из (10)-(13) видно, что это просто ограничения исходной задачи с уточнениями, введенными для исключения скачков фазовых переменных, переписанные в сокращенных обозначениях.

Утверждение 1. Допустимое множество D не пусто и на нем определен функционал

$$J = \int_t^\infty (\exp\left[-(\rho + \Lambda)(u - t)\right]) z(u) du - q(t) n_0 + l(t). \tag{21}$$

Доказательство. Допустимым является, например, набор функций, который получится, если положить $w(u) = 0$, $l(u) = 0$ и определить $z(u)$ из уравнения баланса (19), а $n(u)$ — из дифференциального уравнения (18) с начальным условием 4. Пусть теперь $< n(u),\ l(u),\ w(u),\ z(u) >$ –произвольный набор функций из D. Выразим $z(u)$ из (19), подставим выражение в функционал (21) и, интегрируя по частям, уберем производную $\partial l(u)/\partial u$ из-под интеграла. Верхняя подстановка обратится в 0 в силу оценок 3, и останется конечное выражение для функционала.

Оптимальным решением задачи планирования жизненного цикла когорты назовем точку максимума функционала (21) на множестве D.

Для оптимальности набора управлений $A^* =< n(u),\ l(u),\ w(u),\ z(u) >$ достаточно существования набора измеримых двойственных переменных $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ (к ограничениям-равенствам (18) и (19)), $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$, $\varphi_4(u)$ (к неравенствам (20)) таких, что:

- на пространстве решений U определен функционал Лагранжа, который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \int_t^\infty (\exp\left[-(\rho + \Lambda)(u - t)\right])[z(u) + \psi_1(u)(-\delta(u)n(u) - w(u) - \partial n(u)/\partial u) + \\ +\psi_2(u)(-\pi(u)n(u) - \kappa(u)w(u) + z(u) + rl(u) - \partial l(u)/\partial u) + \varphi_1(u)l(u) + \\ +\varphi_2(u)(\sigma n(u)\kappa(u) - l(u)) + \varphi_3(u)w(u) + \varphi_4(u)(Sn(u) - w(u))]du \\ -q(t)n_0 + l(t);\end{aligned} \tag{22}$$

- набор управлений $< n(u),\ l(u),\ w(u),\ z(u) >$ доставляет максимум функционалу Лагранжа по всему пространству управлений U;

- набор управлений $< n(u),\ l(u),\ w(u),\ z(u) >$ почти всюду удовлетворяет ограничениям-равенствам — в данном случае (18) и (19);

- набор управлений $< n(u),\ l(u),\ w(u),\ z(u) >$ и двойственных переменных к неравенствам почти всюду удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости — в данном случае

$$\begin{aligned}\varphi_1(u)l(u) = 0,\\ \varphi_2(u)[\sigma n(u)\kappa(u) - l(u)] = 0,\\ \varphi_3(u)w(u) = 0,\\ \varphi_4(u)[Sn(u) - w(u)] = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Действительно, в силу условий дополняющей нежесткости $A^* \in D$ и $\mathcal{L}[A^*] = J[A^*]$, а для любой другой допустимой точки $A \in D$ $\mathcal{L}[A^*] \geqslant \mathcal{L}[A] \geqslant J[A]$.

Ниже мы предъявим набор двойственных переменных в явном виде, так что будем дальше рассуждать так, как будто двойственные переменные есть и обладают хорошими свойствами. В частности, будем искать такие двойственные переменные к равенствам, которые допускают интегрирование по частям (с нулевой верхней подстановкой) членов, содержащих производные прямых переменных. Выполняя интегрирование по частям получаем для лагранжиана выражение

$$\begin{aligned}
\psi_1(t)n_0 + \psi_2(t)l(t) - q(t)n_0 + l(t) + \int\limits_t^{\infty} \exp(-(\rho+\Lambda)(u-t)) \cdot \\
\cdot\{-z(u)[1+\psi_2(u)] + n(u)[\psi_1(u)\delta(u) - \partial\psi_1(u)/\partial u + \\
+\rho\psi_1(u) + \Lambda\psi_1(u) + \psi_2(u)\pi(u) + \sigma\kappa(u)\varphi_2(u) + \varphi_4(u)S] + \\
+w(u)[\psi_1(u) + \kappa(u) * \psi_2(u) - \varphi_3(u) + \varphi_4(u)] + \\
+l(u)[(\Lambda+\rho-r)\psi_2(u) - \partial\psi_2(u)/\partial u - \varphi_1(u) + \varphi_2(u)]\}du.
\end{aligned} \tag{24}$$

Утверждение 2. Функционал (24) достигает максимума на U тогда и только тогда, когда почти всюду на $[t,\infty)$ обращаются в 0 частные производные по $n(u), l(u), w(u), z(u)$ подынтегрального выражения в (24) и производная этой величины по $l(t)$, т.е.

$$\begin{aligned}
\partial\psi_1(u)/\partial u - (\delta(u)+\rho+\Lambda)\psi_1(u) - \pi(u)\psi_2(u) + \sigma\kappa(u)\varphi_2(u) + S\varphi_4(u) = 0, \\
\partial\psi_2(u)/\partial u - (\rho+\Lambda-r)\psi_2(u) + \varphi_1(u) - \varphi_2(u) = 0, \\
-\psi_1(u) - \kappa(u)\psi_2(u) + \varphi_3(u) - \varphi_4(u) = 0, \\
1 + \psi_2(u) = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Доказательство. Функционал Лагранжа (24) в данном случае линейный и достаточность условий (25) очевидна. Необходимость можно доказать стандартным образом. Пространство решений U допускает отклонения от любого своего элемента на функции вида $\cos(N(u-t))$ по $l(u)$, $z(u)$, $w(u)$ и на функции вида $\sin(N(u-t))$ по $n(u)$. Пользуясь полнотой тригонометрических систем и свойством убывания коэффициентов Фурье можно построить вариацию указанного вида, которая увеличивает функционал (24), если не выполнено хотя бы одно из условий (25). Уравнения (18), (19), соотношения дополняющей нежесткости (23) и уравнения (25) образуют систему достаточных условий оптимальности для задачи планирования жизненного цикла когорты. Эта система, разумеется, включает все исходные ограничения на прямые переменные. Но она не содержит достаточного количества граничных условий на двойственные переменные (условий трансверсальности). Их заменяет требование того, чтобы функционал Лагранжа (22) был определен на всем пространстве управлений и допускал интегрирование по частям.

Соотношения (25), очевидно, гарантируют, что для всех наборов функций из пространства управлений определен функционал (24). Значит остается только потребовать, чтобы его можно было преобразовать к виду (22) интегрированием по частям "в обратную сторону". Четвертое уравнение в условии (25) означает, что

$$\psi_2(u) = -1. \tag{26}$$

Полагая, что это соотношение выполнено для всех $u \in [t, \infty)$, получаем, что функционал (24) допускает интегрирование по частям относительно $\partial\psi_2(u)/\partial u$ и выполнено четвертое уравнение в условии (25). Из (26) и второго уравнения в (25) получаем, что

$$\rho + \Lambda - r + \varphi_1(u) - \varphi_2(u) = 0. \tag{27}$$

Из последнего ограничения в (20) и уравнения (18) следует, что при положительном начальном условии $n(t) > 0$ численность $n(u)$ не обращается в 0. Тогда из первых двух условий в (23), вытекает, что $\varphi_2(u)$ и $\varphi_1(u)$ не могут быть положительными одновременно, а поскольку обе эти величины неотрицательны, из (27) следует, что

$$\varphi_2(u) = [\rho + \Lambda - r]_+,\ \varphi_1(u) = [\rho + \Lambda - r]_-. \tag{28}$$

Из первых двух условий в (23) тогда получаем, что

$$l(u) = \begin{cases} \sigma n(u)\kappa(u), & \text{если } \rho + \Lambda - r \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \rho + \Lambda - r \leqslant 0. \end{cases} \tag{29}$$

Из положительности $n(u)$, третьего и четвертого условий в (23) следует, что не могут быть одновременно положительными величины $\varphi_4(u), \varphi_3(u)$, так что из третьего уравнения (25) и (26)

$$\varphi_3(u) = [\kappa(u) - \psi_1(u)]_+, \quad \varphi_4(u) = [\kappa(u) - \psi_1(u)]_-. \tag{30}$$

При $\varphi_4(u) = 0$ скот не забивают ($w(u) = 0$), а при $\varphi_3(u) = 0$ — забивают с максимальной скоростью: $w(u) = Sn(u)$. Из содержательных соображений можно ожидать, что начинаться процесс должен с первого режима, а после некоторого момента u^* скот начинают забивать. Тогда при больших значениях u из первого и третьего условий в (25) с учетом (26) при $\varphi_3(u) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} &\partial\varphi_4(u)/\partial u = -f(u) + (\delta(u) + \Lambda + \rho + S)\,\phi_4(u), \\ &\psi_1(u) = \kappa(u) - \varphi_4(u), \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$f(u) = -\left(-\delta(u) - \rho + [\rho + \Lambda - r]_+\sigma - \Lambda\right)\kappa(u) - \pi(u) - \partial\kappa(u)/\partial u. \tag{32}$$

При большом S все, кроме одного, решения первого уравнения в (31) растут как $\exp(Su)$ при $u \to \infty$. При соответствующих $\psi_1(u)$ функционал (22) не будет определен на всем пространстве управлений. Единственная возможность удовлетворить достаточным условиям оптимальности состоит в том, чтобы взять в качестве $\varphi_4(u)$ при больших значениях u единственное решение первого уравнения в (31), которое может расти медленнее, чем $\exp(Su)$. Это решение имеет вид

$$\varphi_4(u) = \int\limits_u^\infty f(x)\exp\left(-\int\limits_u^x (\delta(\xi) + \Lambda + \rho + S)d\xi\right)dx. \tag{33}$$

При больших S это выражение можно приближенно представить, пользуясь асимптотикой Лапласа [5]:

$$\int_u^\infty F(x,u)\exp(-S(x-u))dx = (1/S)F(u,u) + (1/S^2)\partial F(x,u)/\partial x\mid_{x=u} +$$

$$+(1/S^3)\partial^2 F(x,u)/\partial x^2\mid_{x=u} + \int_u^\infty (1/S^3)\left(\partial^3 F(x,u)/\partial x^3\right)\exp\left(-S(x-u)\right)dx,$$

так что

$$\varphi_4(u) = (1/S)f(u) + (1/S^2)\left(\partial f(u)/\partial u - f(u)\Lambda - f(u)\delta(u) - f(u)\rho\right) + (1/S^3)\epsilon(u). \tag{34}$$

При больших u $\varphi_4(u) > 0$, поскольку $\delta(u)$ неограниченно растет на бесконечности (см. (32)). Предположим, что уравнение

$$f(u) = 0 \tag{35}$$

имеет единственный простой корень $u = u_0$. Тогда по теореме о неявной функции неравенство $\varphi_4(u) > 0$ будет выполнено на интервале $[u^*, \infty)$, где

$$u^* = u_0 - 1/S + O(1/S^2),$$
$$\psi_1(u^*) = \kappa(u^*). \tag{36}$$

Поскольку функция $f(u)$ в точке u_0 меняет знак с "-" на "+", из (36) следует, что

$$f(u^*) < 0. \tag{37}$$

Исходя из сделанных выше предположений о функциях $\pi(u), \kappa(u), \delta(u)$, нетрудно показать, что все члены в правой части (34) будут непрерывными функциями, растущими с ростом u не быстрее, чем $\exp(\rho u)$. Так же и $\psi_1(u)$ будет ограниченной при $u > u^*$, а, значит, функционал Лагранжа (22) будет определен на пространстве управлений, если мы сможем продолжить функцию $\psi_1(u)$ на отрезок$[t, u^*]$ как абсолютно непрерывную с соблюдением условий оптимальности. На отрезке времени $[t, u^*]$ животных не забивают: $w(u) = 0,\ \varphi_4(u) = 0,$ — поэтому из (26)

$$\partial\varphi_3(u)/\partial u = (\delta(u) + \Lambda + \rho)\varphi_3(u) + f(u),$$
$$\psi_1(u) = \kappa(u) + \varphi_3(u). \tag{38}$$

Откуда

$$\varphi_3(u) = -\int_u^{u^*}(f(x)\exp(\int_x^u(\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi))dx. \tag{39}$$

Поскольку на $[t, u^*)$ $f(x) < 0$ из (39) $\varphi_3(u) > 0$ Итак, доказано

Утверждение 3. Если на (t, ∞) функция (32) один раз меняет знак с "-" на "+", то оптимальное решение задачи планирования жизненного цикла когорты существует и имеет вид: (29),

$$w(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u < u^*, \\ Sn(u), & \text{если } u > u^*, \end{cases} \tag{40}$$

где

$$u^* = u_0 - 1/S + O(1/(S^2)), \quad f(u_0) = 0. \tag{41}$$

Задача планирования жизненного цикла когорты была решена при заданном положительном начальном значении $n_0 = n(t)$. Эта величина фактически представляет собой еще одно управление хозяйства. Оптимальное значение функционала (21) J^* равно оптимальному значению лагранжиана (24). На оптимальной траектории интегральный член в (24) обращается в ноль, поэтому в силу (26), второго соотношения в (38), (39)

$$J_*(n_0) = [\kappa(t) - \int\limits_t^{u_*}[f(x)\exp(\int\limits_x^t(\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi)]dx]n_0 - q(t)n_0. \tag{42}$$

Максимизируя это выражение по $n_0 \geqslant 0$ получаем

Утверждение 4. В условиях утверждения 3 оптимальная величина покупки молодняка хозяйством $n(t)$ определяется следующим образом:

- если $\kappa(t) - \int_t^{u_*}[f(x)\exp(\int_x^t(\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi)]dx - q(t) > 0$, то $n(t) = 0$;
- если $\kappa(t) - \int_t^{u_*}[f(x)\exp(\int_x^t(\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi)]dx - q(t) = 0$, то $n(t) \geqslant 0$ — любое;
- если $n(t)\{\kappa(t) - \int_t^{u_*}[f(x)\exp(\int_x^t(\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi)]dx - q(t)\} > 0$, то задача определения оптимальной величины покупки молодняка не разрешима: формально $n(t) = \infty$.

Заметим, что оптимальное значение функционала равно нулю, что естественно, поскольку задача линейно однородна по управлениям.

2.5 Реализация планов хозяйства

Ясно, что для описания эволюции экономики важно не то, как хозяйства планируют, а то, как они реализуют свои планы. Реализуемость планов, в свою очередь зависит от того, насколько точно хозяйства прогнозируют цены. Кажется, что моделирование попадает в ловушку парадокса: модель нужна, чтобы помочь хозяйствам прогнозировать цены, а для построения модели надо знать, как хозяйства делают прогноз цен. Парадокс решается применением гипотезы рациональных ожиданий [6]: на потребном временном горизонте хозяйства прогнозируют цены правильно (во всяком случае не делают существенных систематических ошибок). Таким образом, в модели мы рассматриваем самосогласованные цены. Заметим, что в рамках детерминированной модели единственной альтернативой рассматриваемому подходу было бы описание совокупности хозяйств, которые всегда все одинаково ошибаются в оценке будущей конъюнктуры рынка. Опыт, однако, показывает, что экономически активная часть населения быстро адекватно оценивает недалекое будущее за исключением коротких периодов структурных кризисов. Современные модели, впрочем, тоже не могут описывать кризисы. Хорошая модель может предсказать, какой и когда будет кризис, но не может сказать, какие экономические отношения возникнут после кризиса.

Итак, отождествляя плановые, фактические и прогнозные величины и возвращаясь от функции $\kappa(u)$ к исходным обозначениям согласно (16), получаем из (29) для долга $l(t,\tau)$ связанного с когортой $n(t,\tau)$ выражение

$$l(t,\tau)=\begin{cases}\sigma n(t)\kappa(t-\tau,t), & \text{если } \rho+\Lambda-r\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } \rho+\Lambda-r\leqslant 0.\end{cases} \tag{43}$$

Это выражение показывает, что хозяйство, независимо от ожидаемых цен, берет максимально возможный кредит, если $r\le\rho+\Lambda$ и отказывается пользоваться кредитом, если процент больше $\rho+\Lambda$. Ограничение $w(u)\le Sn(u)$ было введено только для регуляризации. Переходя к пределу при $S\to\infty$, и возвращаясь от функции $f(u)$, $\kappa(u)$, $\pi(u)$, $\delta(u)$ к исходным обозначениям согласно (32), (15), (16), (17), получаем из (40), что когорту животных, рожденных в момент τ, целиком забивают в возрасте θ, который определяется из уравнения

$$\begin{aligned}0=(-[\rho+\Lambda-r]_+\sigma+\Lambda+d(\theta,t)+\rho)p(t)m(\theta,t)-p(t)k(\theta,t)+s(t)\lambda(\theta,t)+\\ +s_0-q(t)\beta(\theta,t)-[\partial p(t)/\partial t]m(\theta,t)-p(t)[\partial m(\theta,t)/\partial\theta+\partial m(\theta,t)/\partial t].\end{aligned} \tag{44}$$

Видно, что решение этого уравнения θ зависит от времени, но не зависит от момента рождения τ животных когорты, $\theta=\theta(t)$. Экономический смысл этого уравнения вполне прозрачен: скот надо забивать, когда расходы на его содержание $s(t)\lambda(\theta,t)+s_0$ и убытки от отсрочки забоя $(\Lambda+d(\theta,t)+\rho)p(t)m(\theta,t)$ сравняются с суммой доходов от продажи продукта $p(t)k(\theta,t)$, доходов от продажи молодняка $q(t)f(\theta,t)$, выгоды от прироста стоимости забитого животного $[\partial p(t)/\partial t]m(\theta,t)+p(t)[\partial m(\theta,t)/\partial\theta+\partial m(\theta,t)/\partial t]$ и выгоды от получения кредита под залог животного $\sigma[\rho+\Lambda-r]_+p(t)m(\theta,t)$.

Убытки $(\Lambda+d(\theta,t))p(t)m(\theta,t)$ от отсрочки забоя возникают из-за того, что животное может погибнуть, а убытки $\rho p(t)m(\theta,t)$ - из-за того, что хозяйство желает получить доход пораньше. Согласно утверждению 3 эти выводы верны, если уравнение (44) при всех t имеет единственное решение, в котором правая часть меняет знак с "-" на "+" (расходы и убытки становятся больше, чем доходы и выгода). Второй аргумент функций $m(\theta,t)$, $\beta(\theta,t)$, $d(\theta,t)$, $\lambda(\theta,t)$ выражает сравнительно медленное изменение технологии животноводства со временем. Если пренебречь этой зависимостью, а также зависимостью трудоемкости ухода за скотом от его возраста, то уравнение (44) примет вид:

$$\begin{aligned}(p(t)k(\theta)+q(t)\beta(\theta)-s(t)\lambda-s_0)/(p(t)m(\theta))-d(\theta)+(\partial m(\theta)/\partial\theta)/m(\theta)+\\ +[\rho+\Lambda-r]_+\sigma-\Lambda+(\partial p(t)/\partial t)/p(t)-\rho=0.\end{aligned} \tag{45}$$

где функции $k(\theta),m(\theta)$ имеют вид, изображенный на рис. 2. При увеличении θ остаются ограниченными все члены уравнения (45), кроме $d(\theta)$, которая неограниченно возрастает. Это обеспечивает требуемый отрицательный знак правой части (45) при больших θ.

То, что при некотором θ правая часть (45) оказывается положительной, означает, что содержание животных хотя бы в одном возрасте достаточно рентабельно. Естественно ожидать, что такое условие обеспечивается ценами, которые соответствуют равновесию спроса и предложения на рынке продукции животноводства. При малых θ величины $k(\theta)$, $m(\theta)$ малы, но велика величина $(\partial m(\theta)/\partial\theta)/m(\theta)$ (см. рис. 2).

Таким образом, предположение о существовании корня уравнения (44) с требуемыми свойствами не противоречит представлениям о характере функций, задающих технологию животноводства и представлениям об механизмах регулирования этой отрасли, поэтому в дальнейшем мы принимаем это предположение. [7].

3 Агрегированное описание отрасли животноводства: равновесная цена молодняка

Обозначим через $M(\tau)$ общее количество молодняка во всех хозяйствах. Если когорта животных, родившихся в момент τ не погибнет случайно, не дожив до возраста a, что происходит с вероятностью $\exp(-\Lambda a)$, то к моменту, когда она достигнет возраста $a < \theta(t)$, ее численность согласно (1) уменьшится по сравнению с первоначальной в $\exp(-\int_0^a (d(x,\tau + x)dx)$ раз. Если случайная гибель когорт происходит в различных хозяйствах более или менее независимо, то общее поголовье $N(a,t)$ животных возраста $a < \theta(t)$ в момент t в экономике можно оценить как

$$N(a,t) = M(t-a)\exp(-\int_0^a d(x,t-a+x)dx - \Lambda a). \tag{46}$$

Тогда общий выпуск продукции животноводства в момент t согласно (4) составит

$$Y(t) = \int_0^{\theta(t)} (k(a,t)M(t-a)\exp(-\int_0^a d(x,t-a+x)dx - \Lambda a)da +$$
$$+m(\theta(t),t)M(t-\theta(t))\exp(-\int_0^{\theta(t)} d(x,t-\theta(t)+x)dx - \Lambda\theta(t)), \tag{47}$$

а общие затраты труда $V(t)$ согласно (3) составят

$$V(t) = \int_0^{\theta(t)} (\lambda(a,t)M(t-a)\exp[-\int_0^a d(x,t-a+x)dx - \Lambda a])da. \tag{48}$$

[7]Из доказательства утверждения 3 можно усмотреть, что требование единственности корня (44) несколько избыточно. Достаточно потребовать существования θ такого, что a) $\varphi(\theta,t) = 0$, b) $\varphi(u,t) < 0$ при $\theta < u$, c) $0 < \int_u^\theta (\varphi(x,t)\exp(\int_x^u (d(\xi,t) + \Lambda + \rho)d\xi))dx$ при $u < \theta$, где $\varphi(\theta,t)$ — правая часть уравнения (44).

Имеющееся стадо численностью

$$N(t) = \int_0^{\theta(t)} (M(t-a)\exp(-\int_0^a d(x, t-a+x)dx - \Lambda a))da \tag{49}$$

приносит в момент t новый молодняк в количестве

$$M(t) = \int_0^{\theta(t)} (\beta(a,t)M(t-a)\exp(-\int_0^a d(x, t-a+x)dx - \Lambda a))da. \tag{50}$$

Весь молодняк должен быть куплен хозяйствами по цене $q(t)$. Чтобы выяснить условия, когда это произойдет, надо обратиться к условиям утверждения 4. Эти условия не определяют $n(t)$ однозначно, а только различают случаи, когда надо и когда не надо покупать молодняк. Но первые два условия утверждения 4 фактически служит уравнением для определения цены молодняка $q(t)$:

- если выполняется второе условие утверждения 4, то хозяйства будут предъявлять неограниченный спрос на молодняк, и его цена должна будет возрасти;

- если выполняется первое условие утверждения 4, то хозяйства вовсе не будут предъявлять спрос на молодняк, и его цена должна будет упасть.

Таким образом, молодняк $M(t)$ может быть скуплен, только если выполняется второе условие утверждения 4. Легко проверить, что при $S = \infty$

$$\int_t^{u_*} (\beta(x)\exp(\int_x^t (\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi))dx = -\int_t^{\infty} ([\beta(x)]_- \exp(\int_x^t (\delta(\xi) + \Lambda + \rho)d\xi))dx. \tag{51}$$

Поэтому, учитывая (32), (16), (15), (17) получаем следующее интегральное уравнение для равновесной цены молодняка $q(t)$

$$\begin{aligned} 0 \le \kappa(t) + \int_t^{\infty} ([(-[\rho + \Lambda - r]_+ \sigma + \Lambda + d(x-t, x) + \rho)p(x)m(x-t, x) - \\ -p(x)k(x-t, x) + s(x)\lambda(x-t, x) + s_0 - q(x)\beta(x-t, x) - \\ -\partial(p(x)m(x-t, x))/\partial x]_- \exp(\int_x^t (d(\xi - t, \xi) + \Lambda + \rho)d\xi)dx - q(t), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} q(t) = p(t)m(0,t) + \int_t^{\infty} [(-[\rho + \Lambda - r]_+ \sigma + \Lambda + d(x-t, x) + \rho)p(x)m(x-t, x) - \\ -p(x)k(x-t, x) + s(x)\lambda(x-t, x) + s_0 - q(x)\beta(x-t, x) - \end{aligned}$$

$$-\partial(p(x)m(x-t,x))/\partial x]_{-}\exp(\int\limits_{x}^{t}(d(\xi-t,\xi)+\Lambda+\rho)d\xi)dx. \tag{53}$$

Уравнения (49), (53) описывают динамику стада в условиях рыночного хозяйства. Видно, что эти уравнения содержат запаздывающие и опережающие значения неизвестных. Для таких уравнений характерно сложное колебательное поведение решений, что отражает специфику животноводческой отрасли.

В заключение подсчитаем совокупные финансовые показатели цены молодняка отрасли — совокупную задолженность $L(t)$ и совокупную чистую прибыль $Z(t)$. Удобно сделать это отдельно для случая, когда хозяйства пользуются кредитом и для случая, когда они кредитом не пользуются. Если $\Lambda+\rho<r$, то хозяйства кредитом не пользуются и закупают молодняк за счет прибыли. Тогда очевидно

$$Z(t)=p(t)Y(t)-s(t)V(t)-s_0N(t)-q(t)M(t). \tag{54}$$

Если $r<\Lambda+\rho$, то хозяйства берут максимальный кредит, а молодняк закупают частично за счет прибыли а частично в кредит.

$$L(t)=\sigma(t)p(t)\int\limits_{0}^{\theta(t)}m(a,t)M(t-a)\exp(\int\limits_{0}^{a}d(x,t-a+x)dx-\Lambda a)da$$
$$Z(t)=p(t)Y(t)-s(t)V(t)-s_0N(t)-(q(t)-\sigma p(t)m(0,t))M(t)-rL(t). \tag{55}$$

4 Заключение

Итак, в настоящей работе получен основной блок для построения экономической модели — описание производственных процессов отгонного пастбищного животноводства. Этот блок является основой общей эколого- экономической модели, описывающей взаимодействие экономических и экологических процессов.

На основе последовательного микроописания жизненного цикла возрастных когорт получено описание динамики поголовья и технологии животноводства. Поставлена и решена задача экономически рационального управления жизненным циклом когорты. Найдено условие, определяющее оптимальный возраст продажи животных в условиях, допускающих получение кредита на закупку молодняка. Доказано существование равновесной цены молодняка, при которой задача экономически рационального поведения животноводческого хозяйства распадается на задачи управления отдельными возрастными когортами. Получены макросоотношения, определяющие выпуск отрасли животноводства, максимальный объем предоставляемого кредита и объем собственных средств, затрачиваемых на закупку молодняка.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность Петрову А.А. за постоянное внимание к работе и помощь и Шананину А.А. за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г.* Регулирование экологических последствий экономического роста. // Математическое моделирование. 1998. т 10. №8 с. 17-32.

2. *Оленев Н.Н.* Модель государственного регулирования экологических последствий экономического роста. М.: ВЦ АН СССР, 1991. — 43 с.

3. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. 2-е изд. — М.: Изд-во ФАЗИС. ВЦ РАН, 2000. 411 с.

4. *Оленев Н.Н., Поспелов И.Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа. В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. Под ред. Самарского А.А., Моисеева Н.Н., Петрова А.А. М.: Наука. 1986. с. 163-173

5. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1976. 408 с.

6. *Muth J.F.* Rational Expectations and the Theory of Price Movements.// Econometrica, Vol. 29, No. 3. (Jul., 1961), pp. 315-335.

Поступила в редакцию
24.06.02