

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СЕРИЯ "КИБЕРНЕТИКА:  
НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ  
И ВОЗМОЖНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ"

---

Основана в 1963 г.

А.В.ЛОТОВ, В.А.БУШЕНКОВ, Г.К.КАМЕНЕВ,  
О.Л.ЧЕРНЫХ

**КОМПЬЮТЕР  
И ПОИСК  
КОМПРОМИССА**

**МЕТОД ДОСТИЖИМЫХ  
ЦЕЛЕЙ**

ББК 22.18  
К 63  
УДК 510.6:681.3

МОСКВА «НАУКА»

**1997**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

академик <i>И.М. Макаров</i> (председатель)	академик <i>А.Ю. Ишинский</i>
академик <i>С.В. Емельянов</i> (зам. председателя)	академик <i>В.А. Кабанов</i> член-корреспондент РАН
академик <i>Н.Н. Шереметьевский</i> (зам. председателя)	<i>С.П. Курдюмов</i>
кандидат философских наук <i>С.Н. Гошиорек</i> (ученый секретарь)	академик <i>Н.Н. Моисеев</i>
академик <i>О.М. Белоцерковский</i>	академик <i>Д.Е. Охоцимский</i>
доктор философских наук <i>Б.В. Бирюков</i>	писатель <i>В.Д. Пекелис</i>
академик <i>Б.В. Бункин</i>	академик <i>Р.В. Петров</i>
академик <i>Е.П. Велихов</i>	доктор технических наук <i>Д.А. Поспелов</i>
академик <i>Ю.В. Гуляев</i>	академик <i>Ю.А. Рыжов</i>
академик <i>Н.Н. Евтихийев</i>	академик <i>А.А. Самарский</i>
академик <i>Ю.И. Журавлев</i>	академик <i>К.В. Фролов</i>
	академик <i>А.Е. Шейндлин</i>
	доктор физико-математических наук <i>В.В. Щенников</i>

Ответственный редактор академик *И.М. Макаров*

К  $\frac{1402000000 - 162}{042(02) - 97}$  49 – 97, I полугодие

ББК 22.18

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Чуть ли не ежедневно поступают сообщения о новых фактах применения компьютерной визуализации в разнообразных областях человеческой деятельности, начиная от простых компьютерных игр до сложнейших географических информационных систем и систем автоматизации проектирования. Широкое использование программного обеспечения компьютеров, предназначенного для представления информации о процессах в природе и обществе в наглядной визуальной форме – характерная черта нынешнего этапа развития цивилизации. В то же время, во многих важных областях компьютерная визуализация используется недостаточно. Одна из них – поиск компромиссных стратегий решения сложных проблем. Поскольку искать компромиссные стратегии приходится постоянно, развитие методов представления информации о возможных стратегиях и отбора наиболее интересных из них является одной из важнейших задач, все еще стоящих перед компьютерной математикой.

Предлагаемая книга посвящена некоторым аспектам этой задачи. В ней описывается новая компьютерная методика графического представления объективной информации о возможных компромиссах в сложных ситуациях и приводятся примеры ее использования при разработке стратегий решения экологических и экономических проблем. Методика достаточно проста для пользователя, и это дает возможность применять ее в компьютерных сетях.

Компьютерные сети позволяют обмениваться информацией людям, находящимся на расстоянии многих тысяч километров. Так, бизнесмены могут проводить переговоры в стенах собственных офисов. В отличие от переговоров, ведущихся по обычному телефону, переговоры с использованием компьютерных сетей могут включать в себя дополнительные возможности, связанные с использованием компьютеров, например, поиск новых стратегий совместных действий. Благодаря этому, в процессе переговоров могут генерироваться новые разумные стратегии. Особенно важны открытые сети, такие как глобальная компьютерная сеть ИНТЕРНЕТ, которая предоставляет новые фантастические возможности независимого поиска и получения информации из источников, находящихся в любых точках Земного шара. Разнообразнейшая информация может быть получена через домашний компьютер, в том числе и информация об экономических и экологических проблемах.

Бытует поверхностное мнение, состоящее в том, что для анализа стратегий решения сложных проблем достаточно собрать информацию по этим проблемам и представить ее в удобной форме. Это, быть может, и верно в тех простых случаях, когда последствия решений очевидны, а число возможных вариантов решений – невелико (не более пяти-семи). Если же последствия решений не очевидны, а их число велико, то требуются специальные методы поиска разумного компромиссного варианта. Непонимание этого факта приводит к затратам огромных средств на сбор и первичную обработку информации, которая оказывается бесполезной из-за отсутствия эффективных способов поиска разумных стратегий.

В 60-х годах были предложены методы поддержки принятия решений, в которых решение выбирается компьютером, а человеку остается лишь реализовать это решение. Поскольку в реальной жизни решение принимается некоторым человеком или группой лиц, которые несут ответственность за его последствия, такие методы не нашли широкого применения. В настоящее время наиболее распространены компьютерные системы, которые лишь информируют людей об изучаемой ситуации. В тех же компьютерных системах поддержки принятия решений (СППР), в которых возможные варианты решения сравниваются между собой, обычно ограничиваются анализом их небольшого числа. При этом привлекают экспертов или разрабатывают математические модели; в последнем случае готовится исходная информация и проводятся вычисления, позволяющие найти последствия рассматриваемых вариантов – используется метод вариантных расчетов, отвечающий на вопрос “что будет, если...” Результаты таких расчетов представляются человеку в виде таблиц и диаграмм.

В последнее время результаты анализа отдельных стратегий (как и другую информацию) все чаще представляют с использованием современных компьютерных средств. Большую известность получили средства мультимедиа, в которых человек выбирает различные сочетания текста, рисунков, слайдов, фильмов, музыки и голосовых комментариев, представляющие информацию наиболее удобным образом. Более того, появились методы компьютерного погружения человека в мир, каким он станет, если некоторое решение будет реализовано (так называемая виртуальная реальность). Конечно, такое компьютерное представление результатов расчетов по математическим моделям более впечатляюще и доходчиво, нежели вывод цифр.

Среди компьютерных средств рассмотрения отдельных стратегий в последнее время большое место занимают географические информационные системы (ГИС). Эти системы предназначены для визуализации тех стратегий, которые могут быть представлены на географической карте. Кроме того, в рамках ГИС хранится некоторая “базовая” информация, всесторонне характеризующая регион, затрагиваемый изучаемой стратегией. Благодаря этому, анализируемая стратегия может быть легко сопо-

ставлена с базовой информацией, причем это сопоставление осуществляется в наглядной форме – в виде географических карт различного типа и масштаба, демонстрируемых по запросу человека.

Подчеркнем еще раз, что все указанные возможности современных компьютерных технологий направлены на обсуждение одного или сравнение небольшого числа вариантов решения. Встает вопрос о том, что же делать, если число возможных решений велико (сотни, тысячи или миллионы). Если заранее ограничиться анализом небольшого числа интуитивно или случайно выбранных решений, то возникнет подозрение, что наиболее интересные стратегии остались не рассмотренными. Если же начать увеличивать число вариантов, рассматриваемых один за другим, то вскоре лица, участвующие в принятии решения или переговорах, перестанут воспринимать чрезмерные для них объемы информации. Очевидно, что нужны специальные методы, которые позволят с помощью достаточно простых компьютерных средств выделить малое число стратегий, предназначенных для дальнейшего детального анализа. Один из таких методов рассматривается в данной книге: он позволяет проанализировать ситуации, характеризующиеся большим числом возможных стратегий, и найти разумные варианты.

При обсуждении вопроса о том, как компьютерные методы могут помочь людям в выборе стратегий решения сложных проблем, в книге используется следующая психологическая концепция: считается, что целенаправленная человеческая деятельность (в том числе выбор решения и ведение переговоров) регулируется мысленным образом реальности, базирующимся на жизненном опыте человека, в том числе и на полученных им знаниях. Такой образ реальности дает человеку целостное описание рассматриваемого им вопроса и позволяет ориентироваться при оценке последствий тех или иных действий. Поскольку этот образ бывает неполным, неточным, внутренне противоречивым и даже в чем-то ошибочным, возникает проблема его совершенствования, которая может быть решена с помощью компьютерных средств.

Один из путей совершенствования мысленного образа реальности – использование дополнительной информации, в частности, результатов математического моделирования. Для этого, однако, должна быть решена проблема представления результатов в форме, понятной для человека, участвующего в выборе решения. Если этот человек не является квалифицированным специалистом в области математического моделирования (а обычно это именно так), представлять результаты моделирования следует в простом, наглядном виде. Только в этом случае модельная информация имеет шанс быть осознанной человеком, стать частью имеющегося у него целостного мысленного образа реальности. Описываемый здесь метод основан на наглядном представлении объективной информации о разумных компромиссах. В чем же состоит суть рассматриваемого метода?

Пусть уже сформулирована математическая модель ситуации, подготовлены исходные данные и задана совокупность возможных решений. Будем считать, что человек, анализирующий возможные решения, или лица, участвующие в переговорах, доверяют модели в достаточной степени для того, чтобы принимать во внимание результаты модельного исследования. В математических моделях интересы людей, связанные с выбором решения, представляются значениями некоторых переменных – так называемых показателей качества решения. Поэтому любое сочетание интересов представляется в виде некоторого набора значений этих показателей. Как уже говорилось, при большом числе возможных решений вариантный подход, в котором рассчитываются отдельные достижимые сочетания значений показателей, уже не пригоден. В таком случае часто предлагают использовать целевой подход: человек задает цель – некоторое сочетание значений показателей, а далее компьютер находит такое решение, которое приводит к результатам, наиболее близким (в каком-то смысле) к заданной цели.

Недостатком целевого подхода является то, что цель задается “вслепую”, без знания реальных возможностей. Поэтому достижимые значения показателей, даже наиболее близкие к заданной цели, зачастую оказываются очень далекими от нее. Метод достижимых целей (МДЦ), описываемый в данной книге, направлен на преодоление такого недостатка целевого подхода. В рамках МДЦ совокупность достижимых целей (т.е. достижимых сочетаний значений показателей) представляется лицам, участвующим в принятии решения или в переговорах, в наглядном графическом виде. Среди достижимых целей они могут выбрать некоторую наиболее предпочтительную или компромиссную цель. Далее компьютер находит решение, приводящее к выбранной компромиссной цели. Это решение может быть рассмотрено с использованием всех современных компьютерных средств, включая мультимедиа, ГИС и виртуальную реальность. Таким образом, МДЦ позволяет решить важнейшую задачу выделения решений из исходной совокупности. Принципиально важно, что МДЦ может быть реализован в сети ИНТЕРНЕТ на основе использования обычных WWW-браузеров.

Информация о том, какие цели достижимы, содержится в скрытой форме в соотношениях математической модели и в исходных данных. В МДЦ эта информация представляется в наглядном виде. Ясно, что сведения о том, какие цели реализуемы, а какие – нет, крайне полезны при принятии решений и в переговорах<sup>1</sup>, но ранее эти сведения не использовались, поскольку отсутствовали методы анализа моделей, направленные на их получение. МДЦ можно трактовать как компьютерное средство совершенствования целостных образов реальности, имеющихся у людей,

---

<sup>1</sup> См., например, работы академиков РАН Н.Н.Моисеева [42, с.37] и Г.С.Поспелова [50, с.61].

участвующих в дискуссиях. При этом, с одной стороны, лицам, использующим этот метод, не задаются сложные вопросы об их предпочтениях, а с другой – метод позволяет отвлечься от личностных позиций, занимаемых людьми в дискуссии, осуществить визуальный анализ разумных компромиссов и только потом, на основе понимания объективных взаимосвязей между интересами, искать решение, отвечающее наиболее разумному их сочетанию.

В МДЦ можно выделить четыре основных шага: 1) построение совокупности достижимых целей; 2) визуальный анализ этой совокупности; 3) выбор компромиссной (или наиболее предпочтительной в случае одного человека) достижимой цели; 4) расчет решения, приводящего к выбранной достижимой цели.

Второй шаг, т.е. визуальный анализ множества достижимых целей, является центральным при практическом использовании МДЦ. Этому шагу, понятному любому грамотному человеку, уделяется основное внимание в книге. Благодаря этому книга доступна читателю, не имеющему математической подготовки<sup>2</sup>.

Книга состоит из введения, пяти глав и заключения. В первой главе описывается применение метода достижимых целей на простейших примерах, а также в рамках модельной проблемы выбора стратегии развития региона при наличии несовпадающих интересов. Эта глава предназначена для того, чтобы дать читателю наглядное представление о методике, используемой в книге. В главах 2 и 3 описываются примеры применения МДЦ для выработки компромиссных решений в экологических и экономических проблемах. В четвертой главе обобщается опыт, описанный в предыдущих главах: рассматриваются методические проблемы визуализации разумных компромиссов, в том числе вопросы использования МДЦ в сети ИНТЕРНЕТ. В главе 5 в упрощенной форме описаны методы построения множества достижимых целей, т.е. рассматриваются вопросы, связанные с реализацией первого шага МДЦ. Авторы сочли необходимым включить в книгу эту главу, поскольку именно отсутствие эффективных алгоритмов построения множества достижимых целей препятствовало использованию МДЦ на практике. Эта глава поможет специалистам по прикладной математике оценить возможные ограничения на применение МДЦ в своих задачах.

Итак, книга (за исключением последней главы) доступна самому широкому кругу читателей, интересующихся современными компьютерными методами. Она может быть полезной студентам гуманитариям, изучающим курсы по экономике и социальному

---

<sup>2</sup> Отметим, что МДЦ является частным случаем метода множеств достижимости – универсального компьютерного подхода к визуализации информации, содержащейся в математических моделях и экспертных оценках. Идеи МДЦ были впервые сформулированы в работах [30, 32].

планированию. Книга будет полезна при изучении проблем охраны окружающей среды. В то же время, книгу могут использовать студенты – будущие специалисты по прикладной математике и кибернетике в рамках учебных курсов по методам использования компьютеров для анализа сложных систем и конфликтных ситуаций, а также в учебных курсах, посвященных использованию систем поддержки принятия решений в экономических и экологических проблемах.

Авторы признательны академику Н.Н.Моисееву, еще в начале 80-х годов предложившему написать книгу, посвященную методу достижимых целей, и постоянно поддерживавшему эту идею. Мы приносим нашу искреннюю благодарность член-корреспонденту РАН А.А.Петрову, оказавшему большую помощь авторам в процессе работы над методом и книгой. Авторы глубоко признательны член-корреспонденту РАН О.И.Ларичеву, председателю Совета по многокритериальному принятию решений при Президиуме РАН, за важную моральную поддержку, оказанную в процессе работы над методом. Авторы благодарят сотрудников ВЦ РАН за поддержку и конструктивные критические замечания.

Первым специалистом, использовавшим на практике метод, описанный в данной книге, был безвременно скончавшийся заведующий отделом ЦЭМИ РАН, доктор экономических наук И.С.Матлин. Авторы хотели бы отметить его влияние на формирование нашей методики.

Как увидит читатель, значительная часть прикладных задач, рассмотренных в книге, связана с деятельностью Российско-финской (ранее Советско-финской) технической рабочей группы по исследованию операций. Авторы хотели бы подчеркнуть роль выдающегося русского ученого, академика А.А.Дородницына (1910-1994), организатора этой группы, а также ее многолетних координаторов А.Г.Шмидта из ВЦ РАН и О.Хеллмана из Университета г.Турку, Финляндия. Профессора О.Хеллмана хотелось бы также поблагодарить как первого зарубежного специалиста, включившего изложение основ МДЦ в программу университетского курса лекций.

Авторы благодарны декану факультета окружающей среды Йельского университета Дж.Кохону, который первым оценил роль МДЦ как многокритериального метода, и активному пропагандисту МДЦ доктору Э.Либерману, автору книги "Многокритериальное программирование в СССР" (издательство Академик Пресс, Нью-Йорк, 1991). Авторы благодарны профессору П.Лауксу из Университета Корнелл (США) за распространение метода среди студентов и инженеров, специалистов по водохозяйственному строительству. Значительную помощь в пропаганде метода оказали члены Международного общества поддержки принятия решений при нескольких критериях, особенно бывшие президенты этого общества профессор С.Зайонц и профессор Р.Штойер (США), как и нынешний президент, профессор П.Корхонен (Финляндия), а также профессора Х. и Ю. Валлениус из Хельсинкской экономической школы.



Считаем своим приятным долгом поблагодарить С.Н.Гоншорека, приложившего много сил и энергии для издания книги.

В данной книге в качестве модельной (см. § 1.3) используется проблема, основанная на реальном исследовании, проводившемся в начале 80-х годов в Международном институте прикладного системного анализа (г.Лаксембург, Австрия). Авторы хотели бы выразить глубокую благодарность профессорам А.Вержбицкому и Я.Киндлеру (Польша), а также заведующему отделом ВЦ РАН Ф.И.Ерешко, организаторам и активным участникам этого исследования.

На основе модельного примера разработана компьютерная лабораторная работа КОМПРОМИСС для студентов ВУЗов, иллюстрирующая возможности метода достижимых целей и в то же время демонстрирующая способы построения рациональных экологических стратегий. С начала 90-х годов она использовалась в вычислительном практикуме по методам математического моделирования в Московском физико-техническом институте. В настоящее время работа используется при преподавании курса компьютерных систем поддержки принятия решений на факультете Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.Ломоносова, а также и в Российском университете дружбы народов. Желающие могут получить эту работу по сети ИНТЕРНЕТ, обратившись на WWW-сервер:

<http://www.ccas.ru/mmes/mmeda/software/>

Читатель имеет возможность испытать макет активных электронных средств массовой информации, осуществив по сети ИНТЕРНЕТ визуальный анализ модельной проблемы и самостоятельно разработав стратегию ее решения. Для этого можно обратиться на WWW-сервер:

<http://www.ccas.ru/mmes/mmeda/resource/>

Макет реализован сотрудником ВЦ РАН А.В.Черновым, которому авторы приносят искреннюю благодарность.

## ВВЕДЕНИЕ

Поиск разумной сбалансированной стратегии решения какой-либо сложной проблемы – непростая задача. Действительно, в процессе поиска разумных стратегий человеку приходится учитывать различные аспекты и последствия этих стратегий. Задача становится на порядок более сложной, если выбираемая стратегия должна быть согласованным решением различных лиц.

Основным средством поиска согласованного варианта действий являются переговоры. При изучении противоречивых интересов и вызываемых ими конфликтов традиционно выделяют два типа ситуаций – ситуации с противоположными и непротивоположными интересами.

В первом случае интересы противников в конфликте противоположны, следовательно всякая неудача противника соответствует интересам конфликтующей стороны, и наоборот. Поэтому в данном случае переговоры – временная передышка в конфронтации. Принципиально иная ситуация складывается в случае с непротивоположными интересами. Здесь поиск компромисса является единственно разумным способом ведения переговоров<sup>3</sup>.

Для экологических и экономических проблем, которые обсуждаются в данной книге, наличие непротивоположных интересов является характерным. Рассмотрим простейший экономический пример – покупку некоторого товара (скажем, овощей) на розничном рынке. Прежде чем деньги будут отданы, требуется договориться о цене. Только на первый взгляд продавец и покупатель имеют противоположные цели в дискуссии о цене продукта. На самом деле, продавец заинтересован не в увеличении цены, а в увеличении своего дохода. Точно так же покупатель заинтересован не столько в цене, сколько в обеспечении своей семьи. Существенное отличие такого понимания интересов от простого желания увеличить (или уменьшить) цену станет ясно после обсуждения различия позиционных и принципиальных переговоров.

В 60-х -70-х годах один из наиболее известных специалистов в области теории игр и переговоров, профессор Гарвардского университета (США) Ховард Райфа выработал комплекс рекомендаций о проведении переговоров. Эти рекомендации явились результатом не только

---

<sup>3</sup> Математическую теорию конфликтов с непротивоположными интересами развил в 60 - 70-х годах Ю.Б.Гермейер [11].

теоретического анализа, но и его личного опыта участия в международных переговорах. На их основе была разработана концепция принципиальных переговоров<sup>4</sup>.

Основная идея принципиальных переговоров состоит в необходимости вести переговоры о компромиссе интересов, а не о компромиссе позиций, и искать такие решения, которые приводят к взаимно приемлемым комбинациям интересов. Так, в рассмотренном выше примере позиция – предлагаемая цена. Продавец имеет свою позицию, покупатель – свою. Позиционные переговоры – это препирательство о цене. Принципиальные переговоры – это попытка идти от интересов, которые мы описали выше. Если отталкиваться от этих интересов, то компромисс может быть, например, таким: покупатель покупает продукт по предложенной им цене, но, скажем, не один килограмм, а пять. Такой вариант может быть приемлемым для обеих сторон, так как соответствует их интересам.

Как видим, в данном случае компромиссный вариант может быть найден достаточно легко. В более сложных проблемах реализовать концепцию принципиальных переговоров далеко не так просто: многое зависит от содержательной области, к которой принадлежит рассматриваемая ситуация. Переговоры встречаются повсеместно, а разработать универсальную методику и компьютерную поддержку переговоров, пригодную для всех случаев жизни, не представляется возможным. В дальнейшем мы ограничиваемся важным классом проблем – экологическими и экономическими проблемами.

Экологические и экономические проблемы представляют собой пример задач, решение которых связано с большими затратами, а сами решения оказывают долгосрочное масштабное воздействие на судьбу больших социальных групп, а иногда и на судьбу человечества в целом. Принятие решений о выборе стратегии решения той или иной экологической проблемы или о выборе варианта крупномасштабного экономического решения связано с анализом огромного числа факторов, связей и интересов. Это делает неизбежным обращение к современным средствам анализа сложных проблем, основанным на использовании компьютерных средств поддержки принятия решений и переговоров. При этом затраты на создание специальных компьютерных систем поддержки переговоров по этим вопросам не идут ни в какое сравнение с теми потерями, которые могут возникнуть из-за недостаточно продуманного выбора решений.

Подчеркнем принципиальную особенность ситуации, связанной с переговорами относительно экономических или экологических проблем: для этих проблем (по крайней мере, в принципе) можно построить объективные математические модели, связывающие возможные решения и их результаты. Этого нет, скажем, при переговорах по политическим про-

---

<sup>4</sup> Концепция принципиальных переговоров изложена в популярной форме в книге Р.Фишера и У.Юри [55].

блемам. Наличие объективной модели означает, что логический анализ проблемы можно базировать на объективной основе. Таким образом, при реализации принципиальных переговоров относительно экономических и экологических проблем современные компьютеры можно использовать не только как средство хранения и визуализации первичных данных, но и как средство глубокого анализа сути проблемы. Конечно, построение модели, описывающей последствия возможных решений – далеко не простая задача. Более того, различные варианты модели могут отражать различные интересы, так что само построение математической модели может вызвать конфликт. Тем не менее, объективный научный базис в данном случае существует.

Вопрос о применении математических моделей для анализа проблем принятия решений в экономике и экологии требует специального рассмотрения. В отличие от физики (и особенно механики), в которых математические модели являются продуктом многовекового достаточно успешного опыта, математические модели экологических и особенно экономических процессов описывают реальность грубо, а зачастую дают и качественно неверные предсказания. Это связано как с огромной сложностью природных процессов, описываемых в экологических моделях, так и с недостаточной изученностью социальных процессов, играющих определяющую роль в экономических явлениях. Поэтому отношение к результатам моделирования как к чему-то безусловному, столь естественное в механике, недопустимо в системах поддержки принятия решений и переговоров по экономическим и экологическим вопросам.

Решение этой проблемы может быть найдено, если использовать математическое моделирование для генерирования идей, которые воспринимаются не как истина в последней инстанции, а как предмет дальнейшего обсуждения и неформального анализа. В частности, именно так следует относиться к стратегиям, получаемым с помощью методов математического моделирования. При этом недостатки математических моделей могут быть компенсированы использованием знаний и опыта людей – эксперты могут помочь оценить надежность и осмысленность получаемых результатов. Важно то, что модели позволяют найти нестандартные стратегии, которые в противном случае остались бы незамеченными. Кроме того, математические модели часто позволяют проверить уже известные стратегии с помощью строго установленных законов сохранения, заимствованных из физики. В дальнейшем будем предполагать, что уже разработаны математические модели, удовлетворяющие участников принятия решения или переговоров в смысле, указанном выше. Тогда математические модели должны позволить лицам, участвующим в переговорах, или просто заинтересованным людям лучше понять ситуацию, выработать и аргументированно отстаивать свою точку зрения в дискуссиях о возможном решении.

Отметим другую важную особенность компьютерных систем, предназначенных для поддержки переговоров по экологическим и экономическим проблемам – в силу масштабности и долгосрочного воздействия рассматриваемых решений эти системы должны обеспечивать какое-то участие в выборе решений представителей всех тех организаций и групп, на которые оказывает влияние выбор решения. Так, при разработке проекта улучшения экологической обстановки в некотором регионе возникает вопрос об участии в обсуждении представителей местных органов власти, финансовых организаций, предприятий, органов экологического надзора, федеральных органов, политических партий и движений, а также широких слоев общественности. Это требует разработки методов, направленных на информирование участников процесса переговоров и широкого круга наблюдателей об объективных возможностях и потенциальных последствиях возможных решений, а также о тех решениях, которые являются рациональными с различных точек зрения. К этим методам предъявляется требование доступности результатов их применения, т.е. требование представить информацию об изучаемой проблеме в форме, доступной широкому кругу пользователей.

Наконец, последнее и главное – экологические и экономические проблемы являются ситуациями с противоположными интересами. Это означает, что при организации компьютерной поддержки переговоров разумно использовать идеи, лежащие в основе концепции принципиальных переговоров. Рассмотрим их более подробно. Главными из них представляются следующие:

- 1) объективные общепризнанные интересы, которые должны учитываться при поиске компромисса, должны быть отделены от интересов лиц, участвующих в переговорах;
- 2) необходимо требовать, чтобы переговоры концентрировались на общепризнанных интересах, а не на позициях, выдвигаемых участниками переговоров;
- 3) следует стараться рассмотреть возможно более широкую совокупность вариантов решения, их относительные достоинства и недостатки, с целью поиска таких вариантов, которые могут оказаться приемлемыми с точки зрения всех общепризнанных интересов.

В переговорах по экологическим и экономическим проблемам, основанным на использовании математических моделей, вопрос о разделении официально признанных и личных интересов участников переговоров должен быть решен в процессе формулировки математической модели, в которой все признанные интересы должны быть представлены в виде специальных переменных модели – показателей. Они и будут учитываться в переговорах в качестве критериев выбора решения.

Требование концентрироваться на интересах, а не на позициях, выдвигаемых участниками переговоров (второй пункт концепции принципиальных переговоров), можно было бы относительно легко выполнить,

если число вариантов решения было мало. Действительно, при малом числе вариантов наличие объективной математической модели позволяет рассчитать последствия предлагаемых решений и, таким образом, превратить переговоры из дискуссии о позициях в дискуссию об интересах. Такой подход, однако, обычно не пригоден при обсуждении экологических и экономических проблем, в которых число возможных вариантов решения крайне велико или даже бесконечно. Если ограничиться вариантами, предложенными на основе прошлого опыта или случайно, то можно заранее обречь себя на неудачу, так как наиболее разумные варианты останутся вне рассмотрения. Часто предлагается собрать и изучить все варианты, предлагаемые участниками переговоров. Но ведь заранее известно, что этот набор вариантов может не содержать разумные компромиссы! Более того, участники переговоров могут попытаться навязать другим выгодные им самим варианты как предмет для рассмотрения. Поэтому в методике принципиальных переговоров содержится третий пункт – требование рассмотреть возможно более широкую совокупность вариантов и оценить их относительные достоинства и недостатки с целью поиска таких вариантов, которые могут оказаться компромиссными.

Простой вариантный расчет для выполнения этого пункта концепции принципиальных переговоров по экологическим и экономическим проблемам использовать невозможно. В данной книге вместо этого предлагается применить метод достижимых целей (МДЦ). В МДЦ с помощью математической модели, дополненной, может быть, экспертными оценками, рассчитывается совокупность достижимых целей, т.е. достижимых сочетаний значений критериев выбора решения. Эта совокупность в наглядном графическом виде отражает связь между интересами участников переговоров и может служить основой для выбора компромисса. При этом все (!) возможные решения представлены в множестве достижимых целей, т.е. третий пункт методики принципиальных переговоров выполнен. Подчеркнем, что позиции (решения) как бы скрыты от участников переговоров – только выбрав некоторую достижимую цель, можно получить соответствующее решение, которое приводит к осуществлению выбранной цели. Таким образом, второй пункт концепции принципиальных переговоров также реализуется.

Заметим, что среди всех достижимых целей можно выделить совокупность так называемых неуплучшаемых целей, т.е. таких, что невозможно улучшить значение одного из критериев, не ухудшив значение другого. Совокупность неуплучшаемых целей, называемая недоминируемым, или эффективным множеством (а также множеством Эджворта-Парето), геометрически представляется частью границы множества достижимых целей. Она наглядно характеризует совокупность компромиссов, разумных с точки зрения рассматриваемых интересов. МДЦ позволяет получить информацию о разумных компромиссах не только между двумя критериями (что используется довольно давно, например, в методе “за-

траты-результат”), но и между тремя, четырьмя и большим числом критериев. Разумные компромиссы представляются на дисплее в диалоговом режиме в виде набора кривых, т.е. в форме, доступной любому заинтересованному человеку. Важно, что при этом представляется полная совокупность вариантов решения, их относительные достоинства и недостатки с точки зрения рассматриваемых интересов. Более того, так как любой грамотный человек может изучить всю совокупность достижимых компромиссов, подобная визуализация позволяет осуществить общественный контроль за тем, разумны ли с точки зрения общественных интересов цели, которые обсуждаются в переговорах.

Как видно, использование МДЦ оказывается связанным с возможностью общественного контроля за переговорами и решениями по экономическим и экологическим проблемам. Как стало ясно в последнее время, МДЦ позволяет решить одну из важнейших общественных задач – предоставить независимую объективную информацию о возможных стратегиях решения экономической или экологической проблемы. Право на независимую информацию – одно из основных гражданских прав, защищаемых демократическим обществом. Чтобы понять специфику задачи предоставления информации о возможных стратегиях решения сложных проблем, достаточно заметить принципиальное отличие этой информации от информации о фактах или о результатах анализа тенденций.

Действительно, вместо большого или бесконечного числа вариантов стратегии, пригодной для решения той или иной экологической или экономической проблемы, рядовой гражданин вынужден ограничиться, в лучшем случае, несколькими вариантами, разработанными несколькими группами экспертов (скажем, правительственными, оппозиционными и нейтральными). Отбор варианта, совершаемый экспертами, конечно же, отражает их убеждения и стремления. Человек, рассматривающий отобранные варианты, может иметь убеждения, не совпадающие с убеждениями ни одной из групп экспертов, однако вынужден ограничиться рассмотрением предлагаемых ему стратегий, которые были выбраны помимо него. Возможно, что существуют стратегии, отвечающие его взглядам, но они остаются скрыты от него. Можно ли считать, что в такой ситуации реализуется право рядового гражданина на объективную независимую информацию? Ясно, что нельзя. Принимая во внимание то, что варианты, отобранные экспертами, могут быть весьма убедительно представлены с помощью современных средств массовой информации и компьютерных средств, зависимость рядового человека от чужого мнения оказывается безраздельной.

Рассмотренное ограничение права на объективную независимую информацию связано с ограниченностью технической базы распространения информации. Действительно, газеты и телевидение могут описать лишь несколько стратегий. Глобальные компьютерные сети меняют ситуацию – они предоставляют широкий доступ к имеющейся информации.

По оценке экспертов, к началу 1996 г. число пользователей сетей ИНТЕРНЕТ во всем мире достигло 30 миллионов, а к середине первого десятилетия XXI века практически все компьютеры будут подключены к этой глобальной сети. Учитывая то, что уже началось производство специальных упрощенных дешевых компьютеров для присоединения к сети ИНТЕРНЕТ, можно с уверенностью утверждать, что вскоре подключение к этой сети станет такой же обыденной вещью, как подключение к кабельному телевидению. Технические возможности глобальных сетей дополняются программным обеспечением, позволяющим пользоваться сетями любому грамотному человеку. Уже сейчас послать письмо по электронной почте куда проще, чем по обычной – современное программное обеспечение автоматически адресует и отправляет его. Точно так же, использование системы World Wide Web (WWW) позволяет легко ознакомиться с информацией, подготовленной на компьютере в любой точке земного шара. Наконец, публичные электронные конференции позволяют организовывать группы для обмена информацией по любой тематике. Важно, что все перечисленные средства общения общедоступны и требуют лишь поверхностного знания компьютера.

Для того чтобы обеспечить право на объективную независимую информацию о стратегиях решения экологических и экономических проблем, то есть сделать возможным выбор стратегии решения той или иной проблемы рядовым пользователем сети ИНТЕРНЕТ, необходимо разработать программное обеспечение, позволяющее сделать такой выбор легко и наглядно. Программное обеспечение, реализующее МДЦ (в частности, диалоговые карты решений), и является таким средством. Поэтому к вопросу об использовании МДЦ в рамках сети ИНТЕРНЕТ мы вернемся в конце книги, после рассмотрения метода достижимых целей и опыта его применения.



## Глава 1.

### ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД ДОСТИЖИМЫХ ЦЕЛЕЙ

В первых двух параграфах данной главы рассматриваются несколько простейших моделей, на основе которых объясняется смысл метода достижимых целей. Далее описывается более сложная (но, по-прежнему, условная) задача анализа компромиссов при выборе стратегии развития региона. В конце главы делаются выводы из рассмотренных примеров.

#### 1.1. Простейший пример

В этом параграфе особенности метода достижимых целей продемонстрированы на простейшем примере. Примеры сформулированы в виде простой математической модели, не выходящей за рамки школьной математики.

**Модель выбора технологии очистки стоков предприятий.** Рассмотрим некоторое предприятие, стоки которого сбрасываются в реку, протекающую поблизости. Предположим, что не представляется возможным изменить технологию производства, сделав ее безотходной, поэтому необходимо построить очистные сооружения, которые позволят уменьшить выброс загрязнения в реку.

Пусть без очистных сооружений в реку в единицу времени сбрасывается единица объема сточных вод, в которых загрязнитель присутствует в количестве  $\beta_0$ . Предположим, что можно использовать две технологии очистки стоков. Обозначим через  $x_1$  мощность оборудования для очистки стоков по первой технологии, а через  $x_2$  – по второй. Будем считать, что величины  $x_1$  и  $x_2$  – это те решения, которые должны быть приняты в результате анализа проблемы. Тогда возможные варианты очистных сооружений описываются соотношениями

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Первое неравенство означает, что суммарная мощность оборудования не должна превышать полного объема сточных вод, а смысл двух последних неравенств очевиден – мощности не могут быть отрицательны.

Пусть стоимость очистки единицы объема сточных вод по первой технологии равна  $\alpha_1$ , по второй –  $\alpha_2$ . Тогда общая стоимость очистки  $y_1$  подсчитывается так

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \quad (1.2)$$

Пусть в результате очистки по первой технологии количество загрязнителя в сточных водах падает с  $\beta_0$  до  $\beta_1$ , а по второй – до  $\beta_2$ . Поэтому количество загрязнителя  $y_2$ , которое выбрасывается в реку, подсчитывается так

$$y_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_0 (1 - x_1 - x_2), \quad (1.3)$$

где  $(1 - x_1 - x_2)$  – объем сточных вод, не прошедших очистку.

Будем предполагать, что критериями выбора того или иного варианта проекта являются две характеристики – стоимость очистки  $y_1$  и выброс загрязнителя  $y_2$ . Таким образом, мы получили двухкритериальную задачу выбора решения, которая является частным случаем многокритериальной задачи выбора. Представим рассматриваемую задачу в графической форме.

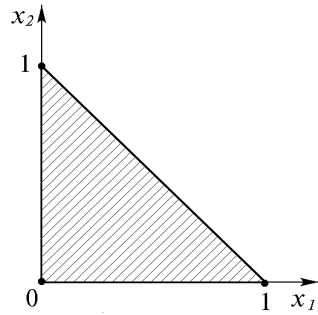


Рис. 1.1

На рис. 1.1 заштрихована совокупность (множество) решений  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих ограничениям (1.1). Как видно, это треугольник с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ . Такое множество принято называть множеством допустимых решений.

Рассмотрим теперь значения критериев  $y_1$  и  $y_2$ . Каждому допустимому варианту решения, т.е. точке  $(x_1, x_2)$  из заштрихованного треугольника, соответствует некоторая пара значений критериев  $y_1$  и  $y_2$ , рассчитываемых по формулам (1.2) и (1.3). Пусть для определенности первая технология более дешевая ( $\alpha_1 < \alpha_2$ ), но и менее действенная ( $\beta_1 < \beta_2$ ).

Тогда (см. рис. 1.2):

- варианту решения  $(0, 0)$ , в котором очистка стоков не предусмотрена, соответствует точка  $(0, \beta_0)$ , т.е. нет затрат, но и выброс загрязнителя равен исходному;
- варианту решения  $(1, 0)$ , в котором осуществляется полная очистка на основе первой технологии, соответствует точка  $(\alpha_1, \beta_1)$ ;
- варианту решения  $(0, 1)$ , в котором осуществляется полная очистка на основе второй технологии, соответствует точка  $(\alpha_2, \beta_2)$ .

Эти три варианта изображены на рис. 1.2 для конкретных значений параметров  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 4$ ,  $\beta_0 = 4$ ,  $\beta_1 = 2$ ,  $\beta_2 = 1$ .

Итак, мы нашли значения критериев для вариантов, соответствующих вершинам треугольника допустимых решений, изображенного на рис. 1.1. Легко понять (а с помощью теории линейных неравенств и доказать), что все достижимые пары значений критериев, т.е. пары значений, соответствующие решениям из треугольника на рис. 1.1, также являются тре-

угольником с найденными нами вершинами  $(0, \beta_0)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$ . Этот треугольник изображен на рис. 1.3.

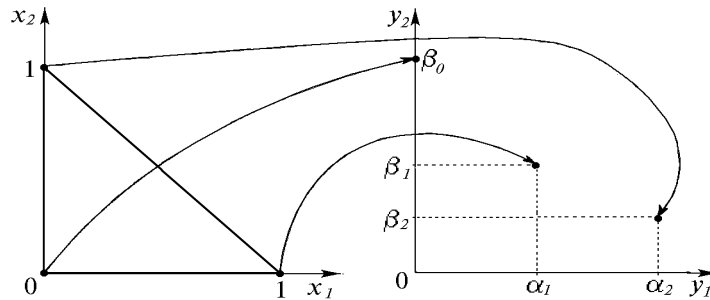


Рис. 1.2

Для тех, кто все-таки захочет проверить наши утверждения о том, что треугольник на рис. 1.3 является множеством достижимых значений критериев, можно предложить, используя соотношения (1.2) и (1.3), выразить  $x_1$  и  $x_2$  через  $y_1$  и  $y_2$  и подставить эти выражения в (1.1). В результате будет получена система неравенств относительно  $y_1$  и  $y_2$ , решением которой будет треугольник на рис. 1.3.

Обратим внимание на следующий момент. Тот, кто заинтересован в минимизации выброса загрязнителя, может решить задачу поиска соответствующего допустимого решения. В данном случае – это единственное решение  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  и точка  $(\alpha_2, \beta_2)$  в пространстве критериев. Если кто-то захотел бы минимизировать затраты, то он получил бы единственное решение  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  и точку  $(0, \beta_0)$  в пространстве критериев. В отличие от этих решений, отражающих частные интересы, треугольник на рис. 1.3 показывает всевозможные достижимые сочетания значений критериев вне зависимости от интересов исследователя, т.е. дает объективную картину ситуации.

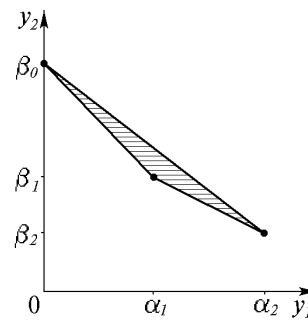


Рис. 1.3

**Некоторые подходы к задаче выбора решения.** Заметим, что в рассматриваемой задаче принятия решения множество возможных вариантов, изображенное на рис. 1.1, известно нам заранее – оно задано соотношениями модели (1.1). В тоже время множество достижимых целей (рис. 1.3) заранее не задано. Нам легко удалось построить его только в связи с исключительной простотой модели. Поэтому на практике множе-

ства достижимых целей не применялись при числе критериев, большем двух. В связи со сложностью их построения вместо этого использовались уже упоминавшиеся подходы к решению задач выбора решений: вариантный (имитационный) и оптимизационный.

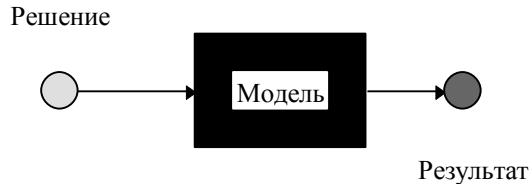


Рис. 1.4

В первом из них, вариантном, исследователю предлагается задать несколько вариантов решения, т.е. в нашем случае точек из множества на рис. 1.1, а затем с помощью компьютера рассчитать результат – набор отдельных точек множества достижимых результатов. Схема вариантного подхода приведена на рис. 1.4. Он пригоден, если число допустимых вариантов мало. Если же число допустимых вариантов велико или, как в нашем случае, бесконечно, все варианты просмотреть не удастся. Поэтому в таких случаях вариантный метод является, по существу, не обоснованным.

Другим распространенным подходом является оптимизационный подход. От человека требуют задать так называемую свертку критериев, т.е. функцию, с помощью которой можно сравнивать сочетания значений критериев – чем больше значение функции, тем лучше сочетание значений<sup>5</sup>. Далее компьютер находит допустимое решение, которое приводит к достижимой точке в пространстве критериев с наибольшим значением целевой функции среди всех достижимых точек.

Распространенным (и наиболее наглядным и простым) вариантом оптимизационного подхода является целевой метод. Человеку предлагается (не имея, конечно, картины типа изображенной на рис. 1.3) задать некоторое целевое сочетание значений критериев. Затем компьютер рассчитывает вариант, результаты использования которого наиболее близки к выбранной цели. Схема целевого метода приведена на рис. 1.5.

Прокомментируем этот подход на примере рассматриваемой задачи. Ясно, что хотелось бы уменьшить и затраты, и загрязнение. Поэтому можно предположить, что в качестве цели человек выбрал точку с нулевыми затратами и нулевым загрязнением. Давайте для анализа последствий такого выбора целевой точки взглянем на рис. 1.3, доступный нам, но не доступный для человека, выбравшего целевую точку. Какая же

---

<sup>5</sup> Такая функция иногда называется также целевой функцией или функцией полезности (ценности).

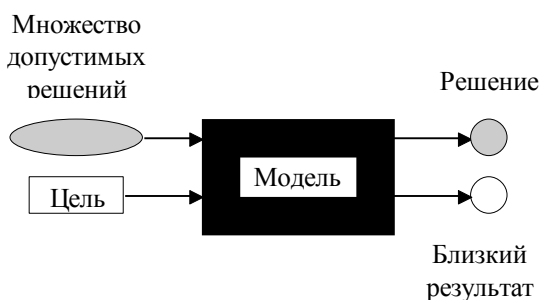


Рис. 1.5

точка заштрихованного треугольника является ближайшей к выбранной цели, являющейся началом координат на рис. 1.3? Если использовать обычное (Евклидово) расстояние, то на рисунке ближайшей будет точка  $(\alpha_1, \beta_1)$ , которая соответствует первой технологии.

Теперь изменим единицу измерения затрат (перейдем, например, от миллионов к миллиардам рублей). Тогда треугольник преобразуется к виду, приведенному на рис. 1.6.

Здесь ближайшей является точка  $(\alpha_2, \beta_2)$ , так что предлагается выбрать вторую технологию. Наоборот, измеряя затраты в тысячах рублей, мы получили бы, что ближайшей является точка, близкая к  $(0, \beta_0)$ , т.е. стоки почти не требуется очищать. Итак, решение зависит от выбора единиц измерения. Более того, в качестве расстояния можно взять не Евклидово, а какое-либо другое, что может привести к иным результатам.

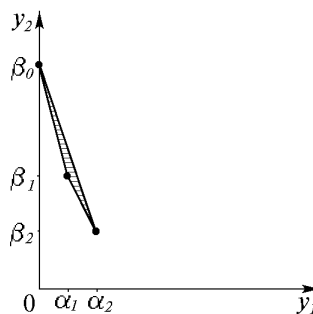


Рис. 1.6

Таким образом, результат применения целевого метода зависит более от различных параметров модели, чем от предпочтений человека. Такое свойство целевого метода связано с тем, что цель была выбрана (как это обычно бывает на практике) недостижимой. Это и привело к необходимости минимизировать расстояние, которое может измеряться достаточно произвольно. Если бы человек имел возможность заранее увидеть и осознать, какие цели достижимы, а какие – нет, он мог бы выбрать гарантированно достижимую цель и проблема зависимости от параметров расстояния не возникла бы. Более того, эта информация позволила бы ему лучше осознать задачу и выбрать цель с пониманием того, что возможно получить в данной ситуации.

Метод, который рассматривается в данной книге, состоит в демонстрации человеку множества достижимых целей, в выборе им достижи-

мой цели и в расчете (с помощью компьютера) допустимого решения, приводящего к выбранной цели. Упрощенная схема метода, который назван Методом Достижимых Целей (МДЦ), представлена на рис. 1.7. Реализовать этот метод (и, таким образом, воплотить в жизнь рассуждения о полезности информации такого рода) позволили прогресс вычислительной техники и успехи прикладной математики (особенно вычислительной геометрии).

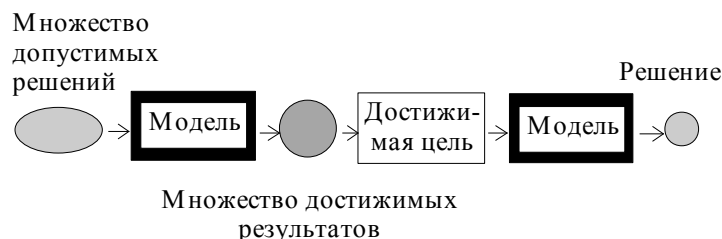


Рис. 1.7

Сделаем одно важное замечание. В традиционных постановках задач выбора решения считается, что множество допустимых решений задано заранее. В реальных задачах часть из ограничений может быть не задана – этот вопрос также должен быть решен лицом, принимающим решение, или участниками переговоров. Метод достижимых целей может быть эффективно использован для решения и этой задачи<sup>6</sup>. Пока же, чтобы не усложнять изложение, будем предполагать, что, как обычно, множество допустимых решений задано заранее.

**Недоминируемые цели.** Рассмотрим рис. 1.3 более внимательно. Мы уже говорили, что при прочих равных условиях представляет интерес уменьшение значений обоих показателей – и затрат, и выброса загрязнителя. Геометрически это означает, что для некоторой цели  $A$ , т.е. точки в координатах  $y_1$  и  $y_2$ , более предпочтительные точки лежат к “юго-западу” от нее. На рис. 1.8 совокупность более предпочтительных точек выделена штриховкой. Заметим, что заштрихованная фигура, которая в школьном курсе геометрии была бы названа углом, в высшей математике называется конусом.

Взяв некоторую цель  $A$  внутри треугольника, мы сможем сразу указать такую точку  $B$  на его “юго-западной” границе, что она будет лучше цели  $A$ . Как принято говорить, цель  $B$  доминирует цель  $A$ . Поэтому представляется нецелесообразным выбирать достижимые цели внутри треугольника, а также на его “северо-восточной” границе.

В отличие от внутренних точек треугольника (а также его “северо-восточной” границы) цель  $B$  на “юго-западной” границе обладает следу-

<sup>6</sup> Этот вопрос рассмотрен в § 3.5.

ющим свойством (см. рис. 1.9): не существует такой достижимой цели С, чтобы она была лучше, чем В. Это видно из того, что заштрихованный

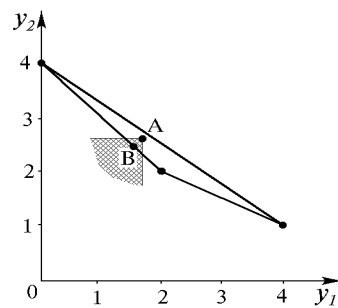


Рис. 1.8

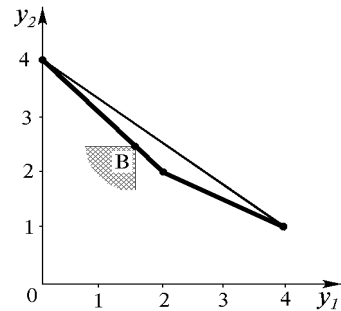


Рис. 1.9

конус точек, лучших, чем В, не пересекается с треугольником достижимых целей. Достижимые цели, обладающие таким свойством, называются неулучшаемыми, или недоминируемыми.

Как уже говорилось, совокупность неулучшаемых (недоминируемых) целей называется недоминируемым, или эффективным множеством (а также множеством Эджворта-Парето). При разумном подходе к вопросу, цель нужно выбирать именно из совокупности недоминируемых целей, выделенной на рис. 1.9 жирной линией. Как видно, недоминируемое множество выделяется среди остальных точек множества достижимых целей естественным образом: оно является его “юго-западной” границей. Такая наглядность множества недоминируемых целей сохраняется и в более сложных задачах.

Итак, точки недоминируемого множества одинаково неулучшаемы со следующей точки зрения: улучшение значения одного из критериев невозможно без ухудшения значений других. В то же время, для лица, принимающего решения, в силу его личных предпочтений, они могут быть совсем не равноценны. Скажем, точка с нулевыми затратами и исходным уровнем выброса загрязнителя может вызывать у него возмущение и протест. Что же, роль человека в многокритериальных методах как раз и состоит в том, чтобы делать выбор среди недоминируемых вариантов. В рамках МДЦ человек на дисплее компьютера, демонстрирующего множества достижимых целей, должен указать некоторую недоминируемую цель. Соответствующий вариант решения, который найдет компьютер, принято называть эффективным.

Заметим, что при выборе целевой точки человек может руководствоваться абсолютными значениями критериев на недоминируемом множестве. В то же время, большое значение имеет так называемое объективное

замещение между величинами критериев, т.е. наклон ломаной, описывающей недоминируемое множество. Слово “объективный” в термине “объективное замещение” означает, что этот наклон не зависит от чьих-то интересов: он показывает, каким ухудшением одного показателя требуется платить за улучшение другого. В нашем случае (рис. 1.9) объективное замещение показывает, сколько придется платить за уменьшение выброса загрязнителя, если используются эффективные (т.е. разумные) решения. Используется также термин “кривая объективного замещения между двумя критериями”, под которой в задачах с двумя критериями имеется в виду просто недоминируемое множество. В случае большего числа критериев это понятие является более сложным и будет рассмотрено позднее.

**Разумные компромиссы.** До сих пор мы рассматривали задачу выбора варианта очистных сооружений как принятие решения одним человеком, например, губернатором некоторого региона или, скажем, начальником бассейнового управления. Обычно же различные критерии отражают интересы различных людей или групп населения. Скажем, в улучшении качества воды заинтересованы, прежде всего, люди, живущие на реке ниже рассматриваемого предприятия. В то же время, рабочие и тем более владельцы предприятия могут быть более заинтересованы в уменьшении затрат на очистку стоков. Если различные критерии отражают интересы разных лиц, недоминируемое множество представляет собой множество разумных компромиссов. Обсуждение и выбор компромиссной цели в МДЦ основывается на знании этого множества, на понимании замещения между величинами критериев.

Часто возникает вопрос о том, как люди могут договориться о каком-то компромиссе, если у них имеются различные интересы. Почему участники переговоров уступают партнерам с целью достижения компромисса? Дело в том, что в реальной жизни кроме интересов, представленных в модели, имеются и другие интересы, в модели не описанные – например, желание достичь компромисса к определенному сроку или достичь его вообще. Обычно каждая из сторон испытывает те или иные неудобства от того, что компромисс не был достигнут. В то же время, некоторые из участников переговоров страдают в большей степени, чем другие, поэтому более склонны к уступкам. Кроме того, конфликт, описываемый в модели, обычно затрагивает лишь один из многих вопросов, по которым приходится взаимодействовать участникам переговоров. Поэтому уступка в изучаемой ситуации может быть обусловлена уступкой партнеров в других вопросах.

Вернемся к рис. 1.9. Мы видим, что при движении из точки (0, 4) в точку (2, 2) с ростом затрат происходит существенное уменьшение выброса загрязнения. В то же время, при перемещении из точки (2, 2) в точку (4, 1) эффективность использования затрат значительно ниже. Это может побудить инвесторов, которые, возможно, хотели бы раньше ограничиться малой величиной затрат на очистку стоков, увеличить сумму. В



то же время позиция жителей, требующих максимальной очистки стоков, может быть изменена на требование перехода в точку (2, 2), если они сочтут, что лучше синица в руках, чем журавль в облаках – все равно не удастся найти средства для строительства дорогостоящих очистных сооружений, а отказ от очистки стоков по первой технологии может привести к тому, что они останутся без очистных сооружений вообще (по крайней мере, на ближайшее время). Поэтому точка (2, 2) может оказаться компромиссной целью. Впрочем, все зависит от конкретной ситуации: от остроты проблемы, т.е. от уровня загрязнения для рассматриваемых вариантов, от требуемых объемов капиталовложений и наличия средств и т.д. Так, компромиссной точкой может оказаться, например, середина отрезка между (2, 2) и (4, 1), которой соответствует решение  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 0.5$ . В любом случае, знание кривой объективного замещения помогает понять связь между различными интересами и искать компромисс интересов не вслепую.

А теперь представим себе, что могло произойти в том случае, если бы вместо принципиальных переговоров на основе графика недоминируемого множества использовались позиционные переговоры. Пусть инвесторы не желают слышать об очистке стоков, т.е. требуют выбрать точку (0, 0) на рис. 1.1. Пусть население требует полного использования второй технологии, т.е. требуют выбрать точку (0, 1). Тогда промежуточной будет точка (0, 0.5). Пусть она стала результатом компромисса позиций. Тогда, как легко заметить, соответствующее сочетание затрат и загрязнения, т.е. точка (2, 2.5), будет лежать на “северо-восточной” границе треугольника достижимых целей. Эта точка доминируема – она явно хуже точки излома (2, 2), в которой при тех же затратах загрязнение меньше. Напомним кстати, что точка излома соответствует полному использованию первой технологии. Таким образом, принципиальные переговоры демонстрируют свою эффективность и в этом случае.

**Случай четырех технологий.** Пусть теперь в задаче об очистке стоков имеются четыре технологии, т.е. соотношения модели приобретают вид

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \quad (1.4)$$

По аналогии со случаем двух технологий легко понять, что множество допустимых решений представляет собой в данной проблеме многогранник в четырехмерном пространстве с пятью вершинами:

$$(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1).$$

Мы не станем изображать это четырехмерное множество, поскольку это затруднительно; кроме того, в изображении множества допустимых решений не так уж много прока: в практических задачах, в которых число

переменных может достигать многих сотен тысяч, вопрос об изображении этого множества даже не возникает.

Критерии рассчитываются по формулам, аналогичным (1.2) и (1.3):

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \quad (1.5)$$

$$y_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_0 (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4). \quad (1.6)$$

Множество достижимых целей будет представлять собой многоугольник, натянутый на пять точек:

$$(0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4).$$

Пусть для определенности  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  имеют те же значения, что и в модели с двумя технологиями, а

$$\alpha_3 = 3, \alpha_4 = 3, \beta_3 = 3, \beta_4 = 2.$$

Для этих значений параметров множество достижимых целей, оказавшееся четырехугольником, изображено на рис. 1.10. Одна точка оказа-

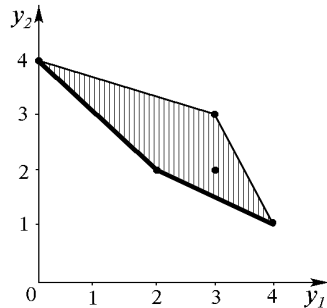


Рис. 1.10

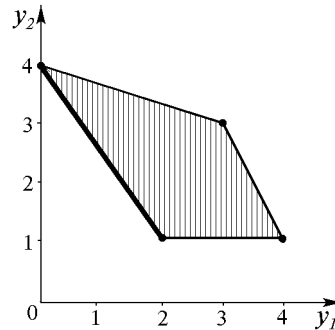


Рис. 1.11

лась внутри четырехугольника. Недоминируемое множество осталось прежним. Таким образом, введенные технологии не имеют отношения к разумным компромиссам и могут не рассматриваться в случае двух критериев, изучаемых нами.

**О форме недоминируемого множества и его визуализации.** В нашей простой линейной модели кривая объективного замещения представляет собой ломаную с единственным изломом в точке  $(\alpha_1, \beta_1)$ . В точке излома наклон кривой, т.е. объективное замещение, меняется скачком. В сложных линейных задачах могут встретиться кривые объективного замещения с тысячами и даже миллионами таких изломов. Заметим, что если модель нелинейна, то могут встретиться как постепенное (непрерывное) изменение объективного замещения, так и разрывы кривой.

Форма недоминируемого множества (кривой объективного замещения), изображенного на рис. 1.10, определяется сочетанием параметров модели (1.4) – (1.6), т.е. при иных сочетаниях параметров форма множества будет иной. Этот факт весьма важен при выборе методов его визуализации. Пусть величина  $\beta_1$  стремится к  $\beta_2$ , т.е. результат действия первой технологии приближается к результату второй. Тогда треугольник множества достижимых целей стремится к виду, представленному на рис. 1.11, причем при  $\beta_1 = \beta_2$  недоминируемое множество скачком сокращается до отрезка, соединяющего  $(0, \beta_0)$  с  $(\alpha_1, \beta_1)$ . Таким образом, недоминируемое множество имеет важную особенность – оно может резко меняться при малом изменении параметров (зависимость не является непрерывной). Это свойство является весьма опасным при компьютерном построении недоминируемого множества.

Действительно, арифметические операции в компьютере совершаются с определенной ошибкой (ошибкой округления). В связи с этим, результат обычно соответствует не исходным параметрам задачи, а их некоторому другому, возмущенному значению. Поэтому отсутствие непрерывной зависимости недоминируемого множества от параметров модели делает задачу его построения, как принято говорить в математике, нерегулярной. В связи с этим, мы не пытаемся строить недоминируемое множество, а изображаем его в виде границы множества достижимых целей. Исследования показали, что в разумно сформулированных задачах множество достижимых целей непрерывно зависит от параметров.

**Другой пример.** Приведем пример иного расположения недоминируемого множества, отличающегося от приведенного на рис. 1.9. Рассмотрим задачу распределения земли некоторого хозяйства между двумя технологиями выращивания зерновой культуры. Первая технология характеризуется низким потреблением воды для орошения и низкой урожайностью, вторая – большим потреблением воды и высокой урожайностью. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – площади, занятые первой и второй технологиями соответственно. Тогда, если предположить, что общая площадь равна 1, соотношения модели приобретают вид

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Эти соотношения совпадают с (1.1), и, таким образом, множество допустимых вариантов имеет вид, приведенный на рис. 1.1. Пусть затраты воды  $y_1$  характеризуются соотношением

$$y_1 = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2,$$

где  $\delta_1, \delta_2$  – удельные затраты воды, а сбор урожая  $y_2$  имеет вид

$$y_2 = \Delta_1 x_1 + \Delta_2 x_2,$$

где  $\Delta_1, \Delta_2$  – урожайности. Множество достижимых целей, характеризуемых затратами воды и урожаем, имеет вид, изображенный на рис. 1.12.

Так как мы заинтересованы в сборе урожая и уменьшении затрат воды, то недоминируемой границей является “северо-западная”, которая выделена на рисунке.

Таким образом, вопрос о том, какая часть границы множества достижимых целей является недоминируемой, зависит не от модели, а от направления улучшения значений критериев. Часто встречаются задачи с двумя критериями, в которых значения обоих критериев надо увеличивать. Легко понять, что в этом случае интерес представляет “северо-восточная” граница множества достижимых целей.

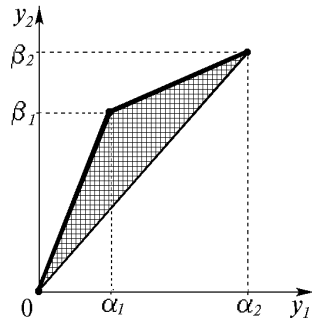


Рис. 1.12

**Заключение.** Демонстрация кривой объективного замещения для двух критериев получила довольно широкое распространение. Насколько нам известно, для линейных моделей эта идея впервые была предложена в 1955 г. известными американскими специалистами в области теории исследования операций С.Гассом и Т.Саати [70]. Кривые объективного замещения также применяются при выборе вариантов технических или иных систем (метод “затраты-эффективность”), при выборе вариантов капиталовложений, при выборе структуры пакета акций (так называемый метод анализа границ), при изучении конфликтов в водном хозяйстве и т.д. Наша задача состоит в том, чтобы распространить эти достижения на случай трех, четырех, пяти и большего числа критериев.

## 1.2. Случай трех критериев. Диалоговые карты решений

Если число критериев больше двух, то множество достижимых целей (или его недоминируемая граница) не могут быть изображены в виде плоских фигур. Уже в случае трех критериев недоминируемая граница – это обычно некоторая поверхность, представляющая собой часть границы трехмерного множества. Поэтому использовать географические понятия (типа “юго-западной границы”) для того, чтобы охарактеризовать это множество, удастся не сразу. В то же время, метод достижимых целей позволяет найти относительно простые формы представления недоминируемого множества, аналогичные во многом обычным географическим картам.

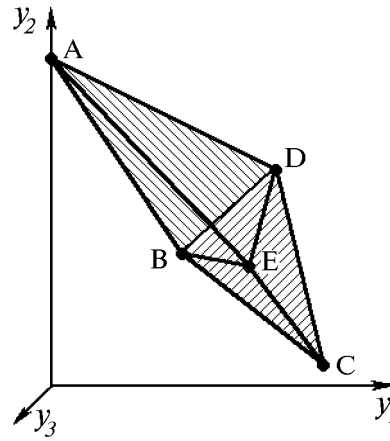


Рис. 2.1

**Усложнение простейшей модели.** Вернемся к модели очистки стоков предприятия. Рассмотрим вариант модели с четырьмя технологиями (1.4), (1.5), (1.6). Пусть рассматриваются три критерия выбора решения: кроме стоимости очистки и выброса исходного загрязнителя учитывается количество нового загрязнителя, вносимого в очищаемую жидкость в процессе очистки (многие из используемых технологий очистки стоков имеют такое негативное свойство).

Количество нового загрязнителя, которое обозначим через  $y_3$ , рассчитывается по формуле

$$y_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4,$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  – соответствующие коэффициенты. Первые два критерия рассчитываются по прежним формулам (1.5) и (1.6). Множество достижимых целей будет представлять собой многогранник, натянутый на пять точек:

$$\mathbf{A} = (0, \beta_0, 0), \mathbf{B} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \mathbf{C} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$

$$\mathbf{D} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3), \mathbf{E} = (\alpha_4, \beta_4, \gamma_4).$$

Пусть для определенности  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\beta_4$  имеют те же значения, что и раньше, а

$$\gamma_1 = 3, \gamma_2 = 4, \gamma_3 = 1, \gamma_4 = 5.$$

Для этих значений параметров множество достижимых целей, являющееся трехмерным многогранником  $ABCDE$  с пятью вершинами, изображено на рис. 2.1. Недоминируемое множество состоит из двух невидимых плоскостей  $ABD$  и  $BDC$ , заштрихованных на рисунке. Как видно, объективное замещение между парами критериев на этом рисунке оценить невозможно, да и значения критериев известны только в вершинах (благодаря тому лишь, что мы выписали их заранее). Поэтому для понимания множества достижимых целей и связей между критериями придется искать другие пути его визуализации.

Один из них – изображать наборы двумерных сечений множества достижимых целей. При этом для случая трех критериев под двумерным сечением понимается совокупность сочетаний значений двух критериев, достижимых при некотором фиксированном значении третьего. В даль-

нейшем будут рассматриваться исключительно двумерные сечения, так что слово “двумерное” будет опускаться.

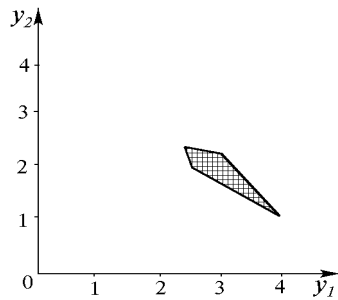


Рис. 2.2

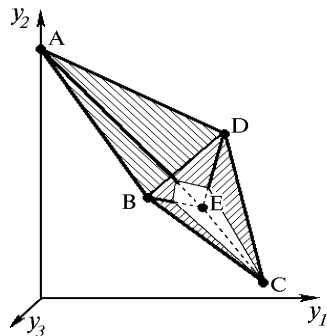


Рис. 2.3

Рассмотрим рис. 2.2, на котором приведено сечение множества достижимых целей для рассматриваемой нами задачи, соответствующее  $y_3 = 4$ . Положение этого сечения в множестве достижимых целей изображено на рис. 2.3. Что можно сказать про это сечение? На рис. 2.2, как и на рис. 1.3, сразу можно увидеть “юго-западную” границу сечения. Мы, однако, не выделили ее на этом рисунке, поскольку, в отличие от рис. 1.3, заранее нельзя сказать, является эта граница сечением недоминируемой границы трехмерного множества достижимых целей или нет.

Наше затруднение легко понять: ведь произвольно взятое значение третьего критерия может не иметь никакого отношения к недоминируемой границе множества достижимых целей, изображенного на рис. 2.1 – плоскость сечения может просто проходить мимо недоминируемого множества. Взглянув на рис. 2.3, легко понять, что в данном случае это именно так – сечение лишь задевает недоминируемое множество в точке С. Поэтому на рис. 2.2 все точки сечения, кроме точки, совпадающей с С, доминируемые. Их демонстрация только затрудняет принятие

решения. Таким образом, увеличение числа критериев до трех (не говоря уже о четырех, пяти и большем числе критериев) приводит к резкому усложнению картины.

Как же поступить в трехмерном случае? Один из возможных подходов состоит в следующем. Для того чтобы понять структуру недоминируемого множества, можно рассмотреть достаточно полный набор сечений.

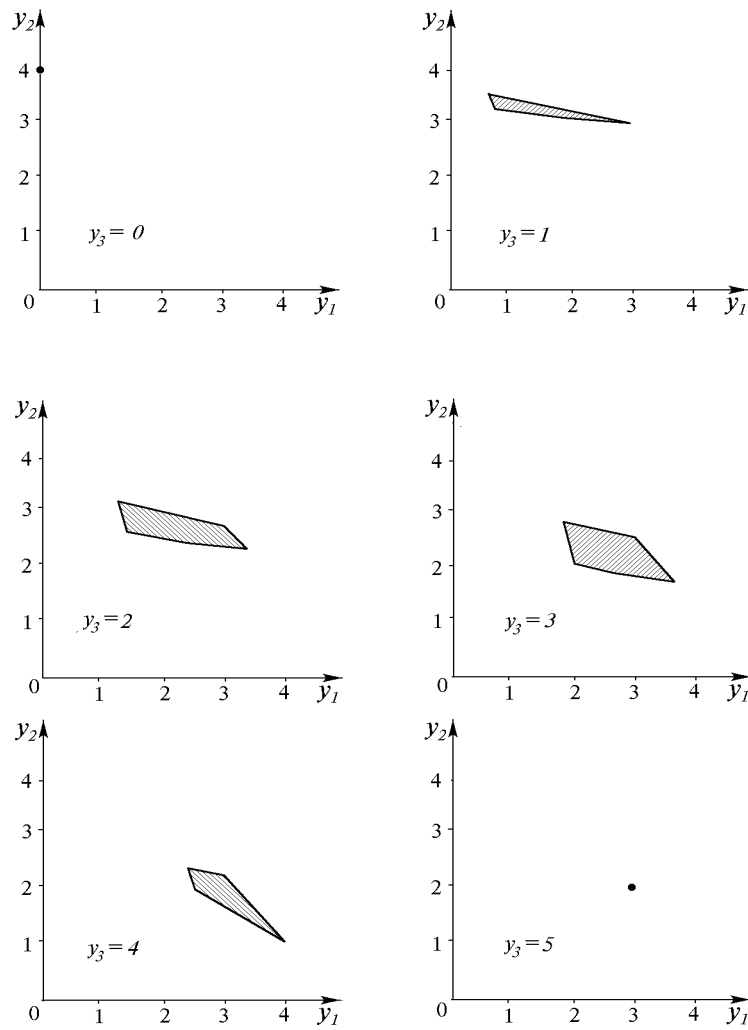


Рис. 2.4

На рис. 2.4, например, приведена серия рисунков, на каждом из которых изображено одно сечение множества достижимых целей при некотором фиксированном значении  $y_3$ , указанном около рисунка.

Другой способ – наложить сечения одно на другое и представить их на одном рисунке (рис. 2.5). Каждый из этих способов имеет определенные достоинства и определенные недостатки.

Так, серия рисунков позволяет хорошо рассмотреть каждое сечение в отдельности, но в то же время сопоставление сечений затруднительно. А ведь на сопоставлении сечений основывается процесс выявления недоминируемого множества! С другой стороны, на рис. 2.5 легко проследить смещение некоторой границы сечения вследствие изменения величины  $y_3$ , но довольно трудно разобраться в путанице линий и получить общее представление о недоминируемой границе множества достижимых целей.

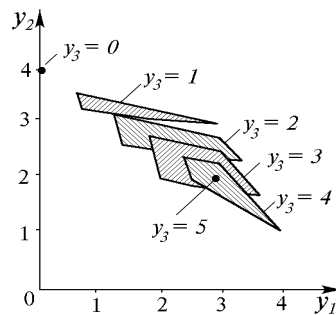


Рис. 2.5

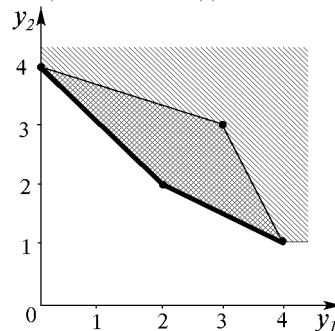


Рис. 2.6

Конечно, опытный и настойчивый исследователь, имеющий хорошее пространственное воображение, сможет обнаружить и изучить недоминируемое множество на основе рис. 2.4 или рис. 2.5. Нам, однако, это не может устроить, поскольку наша задача – дать наглядное представление о недоминируемых достижимых целях любому заинтересованному пользователю. Поэтому вместо наборов сечений множества достижимых целей рассмотрим наборы сечений так называемой оболочки Эджворта–Парето множества достижимых целей.

**Оболочка Эджворта–Парето и ее сечения.** Вернемся к модели с двумя критериями (1.4) – (1.6). Рассмотрим заштрихованное множество на рис. 2.6. Оно отличается от четырехугольника множества достижимых целей на рис. 1.10 тем, что этот четырехугольник пополнен теми точками пространства критериев, которые доминируются точками четырехугольника. Ясно, что хотя множество на рис. 2.6 шире множества достижимых целей, оно имеет ту же недоминируемую границу.

В общем случае произвольного числа критериев оболочкой Эджворта–Парето (ОЭП) множества достижимых целей принято называть сово-



купность достижимых целей, пополненную всеми доминируемыми ими критериальными точками. Оно названо так в честь математиков, разработавших основные понятия многокритериального принятия решений – понятия недоминируемости критериальных точек и эффективности решений.

В общем случае также имеет место упоминавшееся свойство оболочки ОЭП: *недоминируемые границы множества достижимых точек и ее ОЭП совпадают.*

Глядя на рис. 2.6, нельзя понять, чем изображение ОЭП предпочтительнее изображения множества достижимых целей. Хотя в ОЭП исчезла доминируемая граница множества достижимых целей, благодаря чему человеку легче сконцентрироваться на анализе его недоминируемой границы, это преимущество при двух критериях не является серьезным. Иное дело, если число критериев больше двух.

На рис. 2.7 приведена серия рисунков, на каждом из которых изображено одно сечение ОЭП для рассматриваемой нами задачи с четырьмя технологиями и тремя критериями. Сечения ОЭП изображены в координатах критериев  $y_1$  и  $y_2$  при том же наборе значений  $y_3$ , что и на рис. 2.4. На рис. 2.7 также хорошо видны “юго-западные” границы.

Одно свойство сечений заметно сразу – при улучшении (в нашем случае уменьшении) величины третьего показателя сечения ОЭП могут лишь сужаться, вкладываясь одно в другое. Так, сечение для  $y_3 = 4$  не шире сечения для  $y_3 = 5$ . Далее, сечение для  $y_3 = 3$  не шире сечения для  $y_3 = 5$ , и т.д.

Это свойство связано со смыслом сечений ОЭП: двумерное сечение ОЭП, полученное при фиксированном значении третьего критерия, содержит все такие пары значений двух критериев, которые достижимы при некотором значении третьего критерия, не худшего, чем фиксированный.

Сказанное объясняет смысл “юго-западной” границы сечений ОЭП: любая точка, лежащая на “юго-западной” границе сечения, порождена некоторой недоминируемой целью, значения первых двух критериев в которой совпадают с координатами точки, а третий критерий имеет значение, не худшее, чем фиксированное. Благодаря этому, двумерное сечение ОЭП имеет замечательное свойство: единственное сечение позволяет увидеть связь недоминируемых сочетаний  $y_1$  и  $y_2$  при заданном ограничении на величину  $y_3$ . Этим сечения ОЭП принципиально отличаются от сечений множества достижимых целей. Так, точка  $(y_1^*, y_2^*)$  на “юго-западной” границе сечения  $y_3 = 3$  на рис. 2.7 порождена некоторой недоминируемой целью  $(y_1^*, y_2^*, y_3)$  с  $y_3$ , не большим (т.е. не худшем) чем 3.

Таким образом, изучение одного сечения ОЭП позволяет отвлечься от воздействия третьего критерия и сосредоточиться на изучении объективного замещения первых двух критериев. В данном

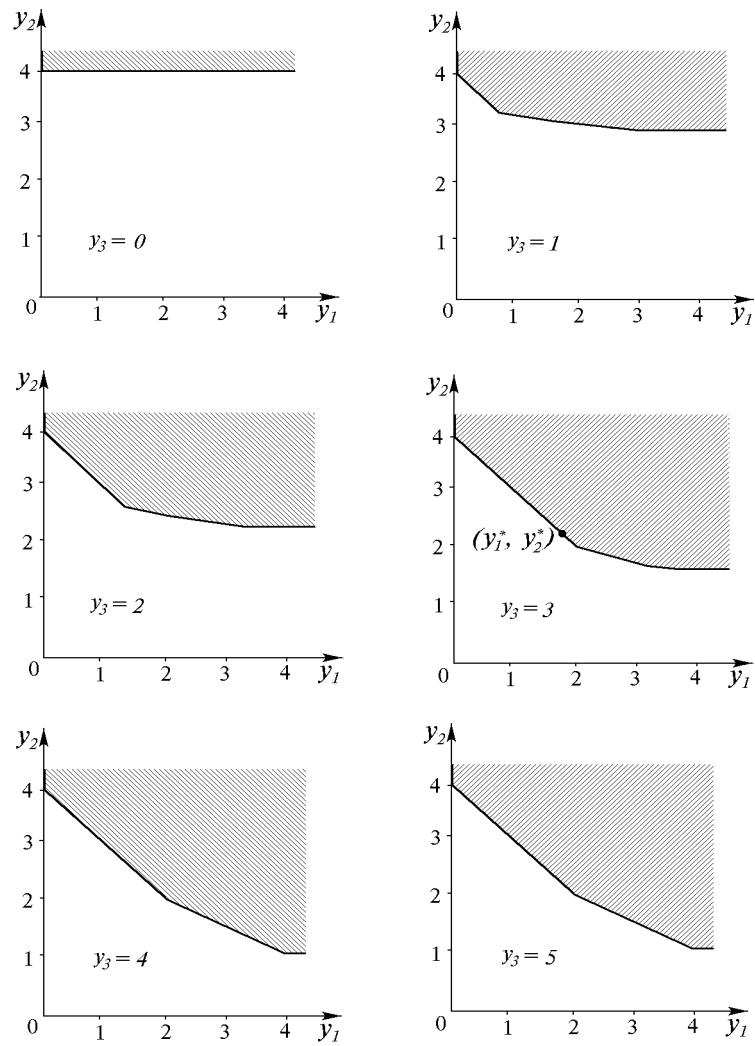


Рис. 2.7

случае, положив  $y_3 = 3$ , на основе рассмотрения границы соответствующего сечения ОЭП можно проанализировать разумный компромисс между  $y_1$  и  $y_2$  при  $y_3$ , не большем, чем 3. Переход от одного сечения к другому показывает, как ужесточение требований к  $y_3$  сокращает множество достижимых сочетаний  $y_1$  и  $y_2$ .

**Кривые объективного замещения для трех критериев.** Поскольку “юго-западная” граница сечения позволяет увидеть связь недоминируемых сочетаний  $y_1$  и  $y_2$  для заданного ограничения на  $y_3$ , то ее можно назвать кривой объективного замещения между двумя критериями для заданного ограничения на значение третьего. Рассмотрим кривые объективного замещения на рис. 2.7.

При  $y_3 = 0$  сечение ОЭП имеет единственную “юго-западную” точку  $(0, \beta_0)$ , т.е. для этого значения  $y_3$  кривая объективного замещения стянулась в единственную точку. Заметим, что точка  $(0, \beta_0)$  уже встречалась нам как недоминируемая точка в задаче с двумя критериями. Как видно, введение третьего критерия не повлияло на ее недоминируемость: при некотором значении третьего критерия (ясно, что это  $y_3 = 0$ ) сочетание  $(0, \beta_0)$  описывает недоминируемую цель. Имеет место общее правило: при введении нового критерия “старые” (двумерные в данном случае) недоминируемые точки порождают недоминируемые цели.

При ослаблении ограничения на значение третьего критерия до единицы сечение расширяется. При этом кривая объективного замещения становится ломаной кривой. При дальнейшем ослаблении ограничения на значение третьего критерия до двух, трех и четырех сечение ОЭП расширяется, а кривая объективного замещения меняет вид. Дальнейшее снижение требований к выбросу нового загрязнителя, т.е. увеличение значения  $y_3$  до пяти, не приводит, однако, к увеличению возможностей, что выражается в отсутствии расширения сечения ОЭП и сохранении прежней кривой объективного замещения. Таким образом, ограничение на третий критерий перестает оказывать влияние.

Сразу же возникает вопрос: как найти недоминируемую цель, соответствующую недоминируемой паре значений двух критериев? Это можно сделать, если наложить сечения ОЭП одно на другое по аналогии с наложением сечений множества достижимых целей на рис. 2.5.

**Карты решений.** Сечения ОЭП, изображенные по отдельности на рис. 2.7, наложены одно на другое на рис. 2.8. Для этого они предварительно заштрихованы различными штриховками. Соотношение между

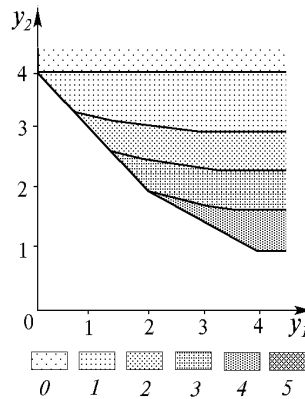


Рис. 2.8

штриховкой и величиной третьего критерия дано в диаграмме под рисунком. На цветном мониторе компьютера имеется возможность закрасить сечения различными цветами. Отметим, что, в отличие от рис. 2.5, на котором сечения пересекались, здесь сечения вкладываются одно в другое (это является следствием нерасширения сечений при улучшении значения третьего критерия). Поскольку границы сечений не пересекаются, то при желании можно не использовать штриховку, а изобразить только их границы. При этом можно изобразить их разными цветами или линиями разных типов либо надписать на линиях значения третьего критерия.

Самое широкое сечение из рассмотренных на рис. 2.7 – это сечение для  $y_3 = 5$ , т.е. для худшего значения третьего критерия из приведенных на рисунке. На это максимальное сечение сверху наложено другое сечение, соответствующее  $y_3 = 4$ . Поскольку эти сечения совпадают, то сечение при  $y_3 = 5$  не видно под сечением, соответствующим  $y_3 = 4$ . В свою очередь, на сечение при  $y_3 = 4$  наложено сечение, соответствующее  $y_3 = 3$ . Сечение при  $y_3 = 4$  более широкое, чем сечение при  $y_3 = 3$ , поэтому оно выглядывает из под сечения, соответствующего  $y_3 = 3$ . Сечения при  $y_3 = 2$  и при  $y_3 = 1$  еще уже, и, наконец, сечение, соответствующее  $y_3 = 0$  – самое узкое.

Поскольку “юго-западные” границы сечений на рис. 2.8 не пересекаются и в то же время их легко сравнивать между собой, можно оценить и третью координату недоминируемой цели, соответствующей любой точке кривой объективного замещения между двумя критериями, в частности недоминируемой паре  $(y_1^*, y_2^*)$  на рис. 2.7. Прежде всего заметим, что все точки  $(y_1, y_2)$  координатной плоскости  $y_1$  и  $y_2$  можно разбить на три типа:

- 1) недостижимые недоминируемые точки – они лежат вне максимального сечения на рис. 2.8,
- 2) достижимые недоминируемые точки – через каждую такую точку проходит кривая объективного замещения между двумя критериями (“юго-западная” граница сечения) по крайней мере при одном значении  $y_3$ ,
- 3) доминируемые точки (недостижимые и достижимые – они не различаются в ОЭП), через которые не проходит ни одна кривая объективного замещения.

Для того чтобы разбить точки плоскости на три типа, достаточно взглянуть на рис. 2.8. К интересующему нас второму типу принадлежат те точки, через которые прошла “юго-западная” граница сечения в процессе его расширения. На рис. 2.9 для точек второго типа штриховка снята, а на рис. 2.10 они изображены в отдельности. Для того чтобы для некоторой точки второго типа найти то значение третьего критерия, которое соответствует недоминируемой цели, достаточно определить, при каком значении  $y_3$  эта точка впервые в процессе ослабления ограничения на значение  $y_3$  оказывается в сечении.

Вернемся к рис. 2.8. Поскольку ноль является самым лучшим значением  $y_3$ , точке  $(0, 4)$  соответствует недоминируемая цель  $(0, 4, 0)$ . Для оценки величины третьего критерия для остальных точек второго типа достаточно понять, как расширяется сечение с ухудшением значения  $y_3$ . Так, точка  $(2, 2)$  впервые попадает в сечение при  $y_3 = 3$ . Поэтому она соответствует достижимой недоминируемой цели  $(2, 2, 3)$ . Точка  $(4, 1)$  по аналогичной причине соответствует достижимой недоминируемой цели  $(4, 1, 4)$ . Для цели  $(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  можно утверждать, что значение  $y_3^*$  лежит где-то между  $y_3 = 2$  и  $y_3 = 3$ , так как при  $y_3 = 2$  точка  $(y_1^*, y_2^*)$  еще не принадлежит сечению, а при  $y_3 = 3$  – уже принадлежит.

Более точно значение  $y_3^*$  (а также значение третьего критерия для других достижимых недоминируемых целей) можно определить, взяв до-

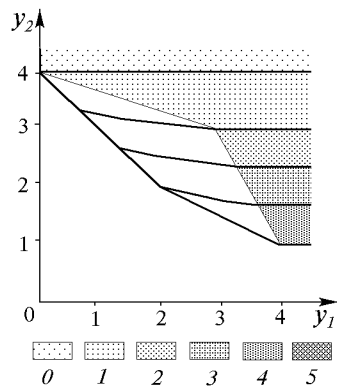


Рис. 2.9

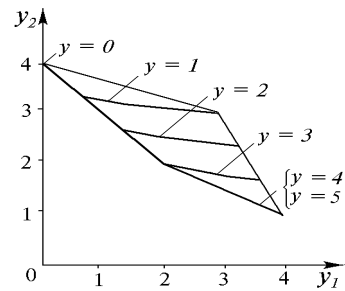


Рис. 2.10

статочно мелкое разбиение по критерию  $y_3$ . Мы рассмотрим его через несколько страниц, сейчас же введем понятие карты решений для многокритериальных задач с тремя критериями.

До сих пор мы говорили об объективном замещении между двумя критериями, в координатах которых изображаются сечения. Заметим, что рисунок типа рис. 2.8 позволяет также оценить объективное замещение между этими двумя критериями и третьим критерием.

Для того чтобы осознать этот факт, достаточно заметить, что рис. 2.8 напоминает географическую карту, изображающую склон холма. Линии, которые приведены на рис. 2.8, можно сопоставить линиям уровня высот географической карты. Третий критерий показывает, насколько данное сечение ниже вершины, поэтому его влияние оценивается подобно тому, как это делается на географической карте. Близость между линиями означает очень крутой склон, а их наложение – обрыв.

Рисунки типа рис. 2.8 будем называть картами решений. Точнее говоря, под картой решений традиционно принято понимать совокупность сечений недоминируемой границы множества достижимых целей плоскостями, характеризуемыми постоянным значением  $y_3$ . Эти сечения изображают на плоскости  $(y_1, y_2)$ . Традиционная карта решений для рассматриваемой нами задачи приведена на рис. 2.10. Традиционное понимание карты сечений связано с ее существенным недостатком – карта может резко меняться при малом изменении параметров задачи. Соответствующий пример резкого изменения недоминируемой границы приводился в предыдущем параграфе для задачи с двумя критериями  $y_1$  и  $y_2$  (см. рис. 1.11). На рис. 2.11 изображены ОЭП для этой же задачи, когда  $\beta_1 = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малое положительное число, и когда  $\beta_1 = \beta_2$ . Хотя недоминируемые множества резко отличаются друг от друга, ОЭП близки! Таким образом, ОЭП устойчива (т.е. меняется мало) при малых возмущениях параметров задачи.

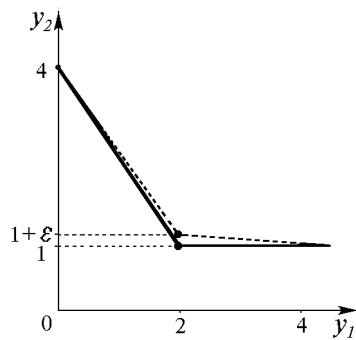


Рис. 2.11

Именно поэтому мы предпочитаем изображать карты решений в виде границ сечений ОЭП (типа рис. 2.8) – такие изображения содержат те же кривые объективного замещения, но устойчивы к малым возмущениям. Кроме того, их линии могут иметь разрывы, которые затрудняют анализ. Штриховка сечений ОЭП позволяет делать карты более наглядными. Поэтому в дальнейшем под картами решений будут пониматься изображения типа

рис. 2.8, которые представляют собой совокупности сечений ОЭП.

Отметим, что термин “карта решений” довольно неудачен, так как на самом деле изображаются не сами решения, а достижимые недоминируемые сочетания значений критериев. Конечно, совокупность достижимых недоминируемых целей представляет в агрегированном виде совокупность эффективных решений, но только косвенным образом. И все же, поскольку термин “карта решений” общепринят, мы будем пользоваться им в дальнейшем.

**Диалоговые карты решений.** Анализ карты решений на рис. 2.8 привел нас к мысли о необходимости построения другой карты решений, отличающейся от исходной лишь тем, что шаг разбиения по  $y_3$  более мелок.

На рис. 2.12 диапазон значений  $y_3$  разбит на десять интервалов точками  $y_3 = 0, 0.5, \dots, 5$ . Подробное разбиение позволяет более точно определить, какие значения третьего критерия составляют недоминируемую цель вместе с недоминируемыми точками  $(y_1, y_2)$ . В частности, удается

установить, что точке  $(y_1^*, y_2^*)$  соответствует достижимая недоминируемая цель с  $y_3^* = 2.5$ . В то же время, для определения значения  $y_3$  для других достижимых недоминируемых точек может понадобиться еще более подробное разбиение  $y_3$ . Например, на рис. 2.13 сечения даны с шагом, равным 0.1.

Можно точно найти соответствующее значение  $y_3$  для любой из точек  $(y_1, y_2)$ , если продемонстрировать мультфильм, в котором последовательно сменяются кадры, изображающие расширение сечения при ухудшении значения  $y_3$  с очень мелким шагом.

Заметим, что пользователь может захотеть взглянуть на задачу с иной точки зрения, например, с точки зрения влияния затрат на уменьшение выброса обоих загрязнителей. Для этого требуется рассмотреть сечения ОЭП в координатах  $y_2$  и  $y_3$  при изменении значений  $y_1$  (см. рис. 2.14).

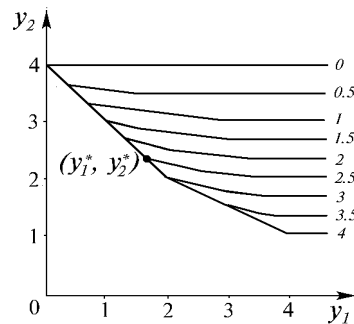


Рис. 2.12

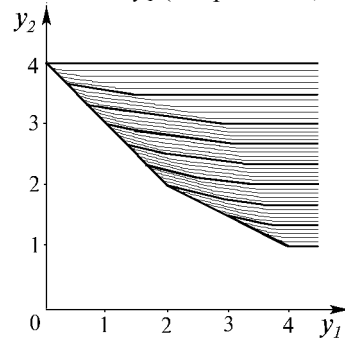


Рис. 2.13

На этом рисунке приведены сечения ОЭП для одиннадцати значений критерия  $y_1$  из интервала от нуля до десяти. Сразу видно, что в сечении  $y_1 = 0$  имеем единственную “юго-западную” точку  $(0, 4)$ , которая соответствует недоминируемой цели  $(0, 4, 0)$ . При росте  $y_1$  появляются все новые точки кривой объективного замещения, причем значение затрат для соответствующих недоминируемых целей определяется значением  $y_1$ , при котором эта точка впервые появилась в сечении.

Начиная с  $y_1 = 4$  сечение перестает расти, что показывает неразумность дальнейшего увеличения затрат. Информация, полученная на основе сечений рис. 2.14, существенно дополняет рис. 2.8.

Зададимся вопросом, как можно получить этот рисунок, а также многие другие, которые могут понадобиться при исследовании ОЭП? Известный подход к изучению взаимосвязи трех критериев состоит в том, что предлагается заранее строить карты решений [48]. Такой подход не нашел широкого практического применения, поскольку заранее построенные карты не могут дать полного представления о недоминируемом множестве. Действительно, для того чтобы изучить недоминируемое

множество в простом примере, рассмотренном в данном параграфе, нам пришлось рассмотреть сечения ОЭП с разными шагами по третьему критерию, а также взглянуть на него с разных сторон. Более того, хотелось бы показать мультипликационный фильм. Таким образом, для эффективного применения концепции карт решений требуется предоставить средство, с помощью которого можно было бы получить любые сечения ОЭП (и фильмы!) по своему заказу. Таким средством являются Диалоговые Карты Решений (ДКР) – программное обеспечение компьютеров, разработанное на основе метода достижимых целей.

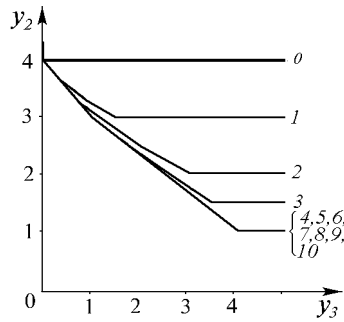


Рис. 2.14

Итак, демонстрация Диалоговых Карт Решений базируется на предварительном построении ОЭП. Построение ОЭП для прикладных моделей может иногда занимать многие часы (все зависит от сложности модели и мощности компьютера). После этого можно получить любую карту решений (или набор карт решений, если число критериев больше трех) всего за несколько секунд даже на маломощных персональных компьютерах. В то же время, демонстрация фильмов уже

требует большей мощности компьютера (например, процессор Pentium).

Итак, пользователь изучает ОЭП в диалоге человек – компьютер. При этом он получает различные карты решений и фильмы по своему усмотрению. Это значительно облегчает понимание структуры замещений и позволяет делать осознанный выбор достижимой цели. Использование мультфильмов для демонстрации зависимости сечений от величины третьего критерия может быть весьма эффективно. Еще более полезно использование мультфильмов в случае большего числа критериев, который будет рассмотрен в следующей главе.

**Заключение.** Итак, двумерные сечения ОЭП имеют замечательные свойства. Главное состоит в том, что единственное сечение позволяет увидеть кривую объективного замещения для пары критериев при ограничении на значение третьего. Благодаря этому сечения ОЭП предпочтительнее сечений множества достижимых целей. Поэтому в дальнейшем для визуализации недоминируемого множества будут использоваться в основном сечения ОЭП. В то же время, в задачах, в которых наборы сечений множества достижимых целей достаточно информативны, мы будем демонстрировать такие наборы.

Обратимся теперь к задаче принятия решения, близкой к реальности – к задаче выбора специализации некоторого условного региона.



### 1.3. Компромиссные стратегии специализации региона

**Описание проблемы.** Представим себе регион, расположенный в бассейне Реки, которая протекает через Озеро и впадает в Море (карта региона приведена на рис. 3.1). Озеро используется как источник питьевой воды для жителей Города, расположенного недалеко от Озера, а также является популярным местом отдыха и туризма. Попуск воды из Озера в Реку регулируется плотиной. Кроме Реки, в Озеро впадает еще одна небольшая река. Ниже Озера в Реку впадают два притока<sup>7</sup>.



Рис. 3.1

В бассейне Реки расположены две зоны сельскохозяйственного производства: одна – выше Озера, другая – ниже. Основное место в производстве занимает растениеводство, а именно, выращивание зерновых культур. В течение долгого времени сельскохозяйственное производство мирно сосуществовало с рекреационным бизнесом, освоившим побережье озера, а также с потребностями коммунального хозяйства Города в питьевой воде. Однако с течением времени производители зерна разработали проект развития интенсивного земледелия, основанного на использовании интенсивных технологий выращивания зерновых. Это привело к возникновению конфликта с бизнесменами и горожанами, поскольку применение интенсивных технологий требует больших объемов воды для орошения, а также химических удобрений. Вода для орошения должна браться из Реки, и часть этой воды будет возвращаться обратно в Реку в загрязненном состоянии, так как будет содержать некоторую долю удобрений. Поэтому в результате использования интенсивных технологий в верхней сельскохозяйственной зоне горожанам пришлось бы пить загрязненную воду.

<sup>7</sup> Рассматриваемая проблема – упрощенный вариант задачи, изучавшейся в [65].

Нижняя сельскохозяйственная зона, хотя и не воздействует на Озеро непосредственно, также оказывает влияние на жизнь горожан. Дело в том, что при впадении Реки в Море расположены виллы богатых бизнесменов, высокопоставленных чиновников и других влиятельных лиц, которые уже давно добились организации в устье Реки станции наблюдения за количеством и качеством воды (контрольный пункт А). Поэтому при использовании интенсивных технологий потребуется осуществлять дополнительный попуск воды через плотину для того, чтобы выполнить ограничения на количество воды в Реке и разбавить загрязнение. Дополнительный попуск воды через плотину вызовет падение уровня в Озере. Ухудшатся условия отдыха на Озере, из-за чего упадут доходы собственников курортов, пансионатов и других рекреационных заведений, расположенных на берегу.

Таким образом, конфликт возник между интересами тех, кто получает доход от сельскохозяйственного производства, от рекреационного бизнеса, и простыми жителями города, интересующимися в основном качеством питьевой воды. Перед депутатами Областной Думы встал вопрос о том, следует ли разрешить забор воды для орошения и выброс загрязнителей, т.е. речь шла о специализации сельскохозяйственного производства с учетом экономических и социальных последствий.

Предположим, что после предварительного обсуждения представители различных комитетов и комиссий Думы договорились использовать три критерия, выражающих меру удовлетворения главных интересов трех групп населения: фермеров, владельцев рекреационного бизнеса и простых горожан. Интересам первой группы соответствует увеличение чистого дохода от растениеводства (он измеряется в процентах от его максимально возможной величины в регионе). Интересам второй группы отвечает увеличение прибыли от рекреационного бизнеса (она также измеряется в процентах от максимально возможной величины). Интересы третьей группы состоят в том, чтобы уменьшить число заболевших из-за загрязнения питьевой воды, которое измеряется числом заболевших в расчете на 10 тысяч жителей.

Варианты специализации сельскохозяйственного производства, один из которых должна рекомендовать Дума, описываются распределением площадей в обеих сельскохозяйственных зонах между различными технологиями выращивания зерновых. Отметим, что с вопросом о развитии сельскохозяйственного производства тесно связан вопрос о попусках воды в Реку из Озера. Решение по нему тоже включается в вариант проекта, рассматриваемого Думой.

**Математическая модель.** Математическая модель базируется на понятии технологии сельскохозяйственного производства. Понятие производственной технологии широко используется при качественном и количественном анализе экономических проблем. Рассмотрим это понятие.

Пусть известно, что рациональное использование 240 куб.м воды и 40 кг удобрений в расчете на 1 га приводит к сбору зерновых в 24 ц. Естественно ожидать, что на 10 га при рациональном использовании 2400 куб.м воды и 400 кг удобрений будет собрано 240 ц зерна. Таким образом, при увеличении в 10 раз масштаба производства (в соответствии с увеличением используемой площади) соотношение между затратами и сбором урожая не меняется. В этом случае для описания производства достаточно указать затраты и выпуск продукции в расчете на 1 га, которые будут описывать некоторую технологию земледелия. Технологии производства – упрощенное описание производственных процессов, результат их математического моделирования и натуральных экспериментов.

Таблица 1

Номер технологии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Производство зерновых, ц</i>	6	12	16	20	24	24	32	36	44
<i>Затраты воды, м<sup>3</sup></i>	0	120	240	120	240	120	240	240	360
<i>Затраты удобрений, кг</i>	0	0	0	40	40	80	80	120	120
<i>Возврат воды, м<sup>3</sup></i>	0	24	48	24	48	24	48	48	72
<i>Загрязнение, кг</i>	0	0	0	6	6	12	12	18	18

Побочные эффекты производства также могут быть включены в технологию. Пусть при использовании описанной технологии с одного гектара обратно в Реку возвращается 48 куб.м воды, унося с собой 6 кг удобрений в качестве загрязнения. Тогда можно рассмотреть расширенную технологию, включающую в себя и побочные эффекты производства.

Мы не будем рассматривать вопросы построения технологий. Отметим лишь, что в рассматриваемой модели производство описывается конечным числом технологий. В верхней зоне можно использовать девять технологий, приведенных в табл. 1 (параметры даны в расчете на 1 га в единицах, указанных выше).

Как видно, первая технология не использует ни воды, ни удобрений, но имеет низкую продуктивность. Вторая и третья технологии используют воду, но не удобрения. Их продуктивность выше, чем у первой технологии. Следующие технологии характеризуются повышающейся продуктивностью (и затратами ресурсов). Наиболее продуктивна девятая технология, но она требует больших затрат воды и вызывает сильное

загрязнение. Использование каждой из технологий приносит производителю определенный чистый доход, также пропорциональный площади, на которой данная технология используется.

В нижней зоне можно использовать девять технологий, приведенных далее в табл. 2. Как видно, урожайность здесь несколько ниже, чем в верхней зоне.

Человек, искушенный в моделировании сельскохозяйственного производства, заметил бы, что в реальной жизни сельскохозяйственная технология обычно связывается с севооборотом, т.е. с целым набором культур. В данном исследовании это не учитывается, чтобы не усложнять описание.

Связь между распределением площадей под технологии сельскохозяйственного производства и значениями критериев, которые дают меры учета интересов различных групп населения, задается математической моделью, описывающей связь производственной

Таблица 2

Номер технологии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Производство зерновых, ц</i>	6	12	14	20	22	24	32	34	40
<i>Затраты воды, м<sup>3</sup></i>	0	120	240	120	240	120	240	240	360
<i>Затраты удобрений, кг</i>	0	0	0	40	40	80	80	120	120
<i>Возврат воды, м<sup>3</sup></i>	0	24	48	24	48	24	48	48	72
<i>Загрязнение, кг</i>	0	0	0	6	6	12	12	18	18

деятельности с экономическими и социальными результатами. Мы не будем останавливаться на этой модели подробно, заметим лишь, что в ней также используются балансы воды и загрязнителей. Кроме того, в математической модели описывается множество допустимых решений (т.е. возможные распределения площадей между технологиями и объемы попуска воды через плотину). Хотя модель<sup>8</sup> довольно проста, члены Думы не должны заниматься вопросами моделирования – для этого есть соответствующие эксперты. Задача политиков – найти разумный компромисс, который в методе достижимых целей может быть получен без анализа уравнений модели, только на основе использования ОЭП

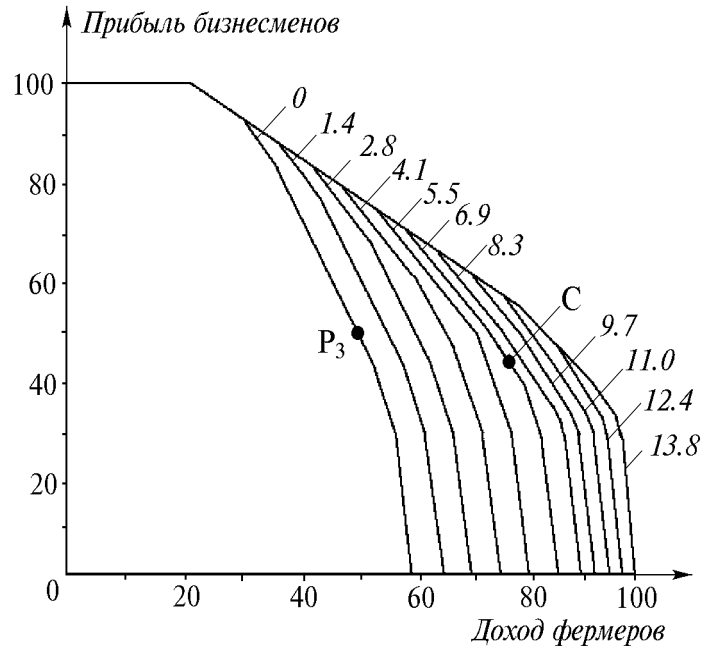
<sup>8</sup> Она описана в книге [37], с. 228 – 230.

множества достижимых целей. Далее мы будем полагать, что ОЭП уже построена и ее можно использовать для поддержки переговоров между членами Областной Думы.

Заметим, что среди компьютерных систем поддержки переговоров принято выделять два основных типа:

- системы для поддержки предварительного этапа переговоров, состоящего в разработке каждой из сторон своей стратегии проведения переговоров,
- системы для поддержки собственно переговоров.

МДЦ применяется в этой главе в системах первого типа. Вопрос о



том, как МДЦ может быть использован для поддержки собственно переговоров, рассматривается в гл. 4, где описывается система поддержки переговоров, проводимых с использованием компьютерных сетей.

**Поддержка предварительного этапа переговоров.** Нам уже приходилось изучать ОЭП в случае трех критериев. Напомним, что для этого требуется выделить два критерия, в координатах которых будут изображаться двумерные сечения ОЭП, а затем выбрать серию значений третьего критерия. После этого строятся двумерные сечения ОЭП, которые изображаются в виде карт решений.

На рис. 3.2 в качестве координатных критериев выбраны чистый доход фермеров и прибыль рекреационного бизнеса. Значения третьего критерия (дополнительной заболеваемости) принимают на недоминируе-

мом множестве значения от 0 до 13.8 чел. на 10 тыс. жителей. Диапазон значений заболеваемости был разбит на десять равных интервалов с шагом в 1.38 чел. Желательно увеличение значений обоих критериев, отложенных на координатных осях, поэтому недоминируемыми являются “северо-восточные” границы этих сечений.

Самое широкое сечение соответствует максимальной заболеваемости. Его недоминируемая граница (кривая объективного замещения) состоит из трех частей (значения даны приближенно):

- почти линейной зависимости, отражающей постепенное падение прибыли рекреационного бизнеса от 100 до 60% с одновременным ростом чистых доходов фермеров от 20 до 80%;
- почти линейной, несколько более крутой зависимости, на которой прибыль рекреационного бизнеса падает с 60 до 30% при росте доходов фермеров с 80 до 95%;
- кривой резкого падения прибыли рекреационного бизнеса от 30% до нуля с одновременным ростом чистых доходов фермеров от 95 до 100%.

Таким образом, недоминируемая граница по своему характеру похожа на границы, рассмотренные ранее, только здесь она более гладкая (сказывается усложнение модели). Недоминируемая граница дает полную информацию о разумных компромиссах между бизнесменами и фермерами (если не принимать во внимание интересы жителей города). Учет интересов жителей выражается в переходе на другое сечение.

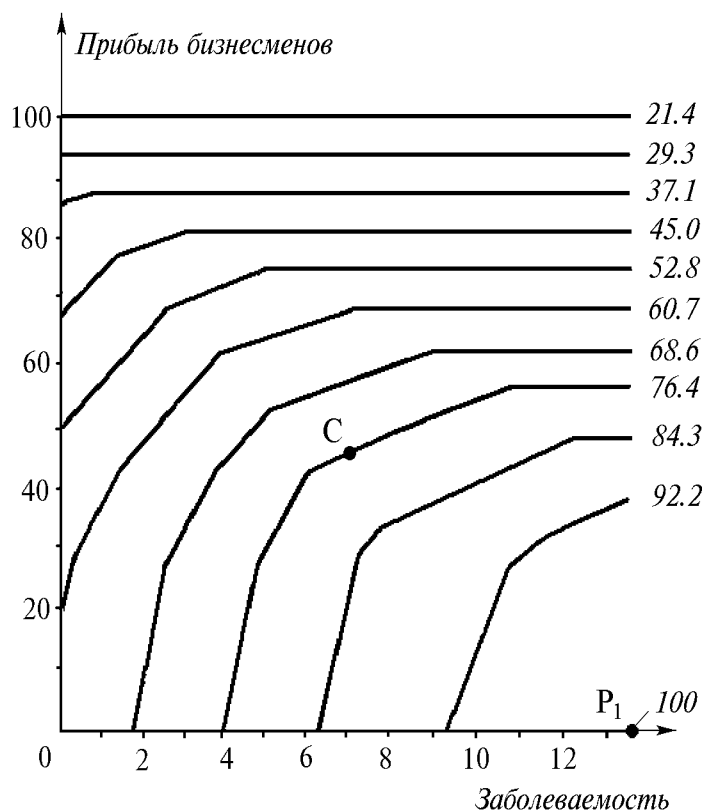
Следующее сечение ОЭП на рис. 3.2 соответствует заболеваемости не более 12.4 чел. на 10 тыс. жителей. Его недоминируемая граница имеет ту же форму, что и для заболеваемости не более 13.8 чел., только смещена в сторону меньших значений дохода. Заметим, что при доходах фермеров до 90% граница нового сечения совпадает со старым. Это означает, что в данном диапазоне нет противоречий между жителями города и бизнесменами – при фиксированном доходе фермеров некоторое уменьшение заболеваемости не приводит к потерям в прибыли бизнесменов.

При переходе на сечения с меньшей величиной заболеваемости происходит дальнейшее сжатие сечения с сохранением характерной формы его недоминируемой границы. Интересно, что доход фермеров, при котором возникают противоречия между интересами бизнесменов и жителей, сдвигается в сторону меньших значений, достигая при нулевой заболеваемости около 30%.

Рассмотрим минимальное сечение, соответствующее нулевой дополнительной заболеваемости. Его недоминируемую границу также можно разбить на три части:

- кривую постепенного падения прибыли рекреационного бизнеса от 100 до 90% с одновременным ростом чистых доходов фермеров от 20 до 30%,

- кривую более резкого падения прибыли рекреационного бизнеса от 90 до 30% с одновременным ростом чистых доходов фермеров от 30 до 55%,
- кривую очень резкого падения прибыли рекреационного бизнеса от 30% до нуля с одновременным ростом чистых доходов фермеров всего на несколько процентов.



..... за-  
 интересованы в развитии интенсивного сельскохозяйственного производ-  
 ства, поэтому можно ожидать создания блока их представителей в Думе,  
 старающихся под лозунгом охраны окружающей среды ограничить раз-  
 витие интенсивного растениеводства. Это тем более вероятно, что горо-  
 жане могут быть заинтересованы в увеличении занятости за счет турист-  
 ского бизнеса. Положение представителей фермеров в Думе будет до-  
 вольно шатким, если они не найдут способа расколоть этот блок.

Вопрос об устойчивости блока представителей бизнесменов и горо-  
 жан можно проанализировать, рассмотрев сечения ОЭП в других коорди-  
 натах. На рис. 3.3 в качестве критериев, в координатах которых будут  
 изображаться сечения, выбраны прибыль рекреационного бизнеса и забо-

леваемость из-за загрязнения воды. Третий критерий – чистый доход фермеров – принимает 11 значений в диапазоне от 21.4 до 100%.

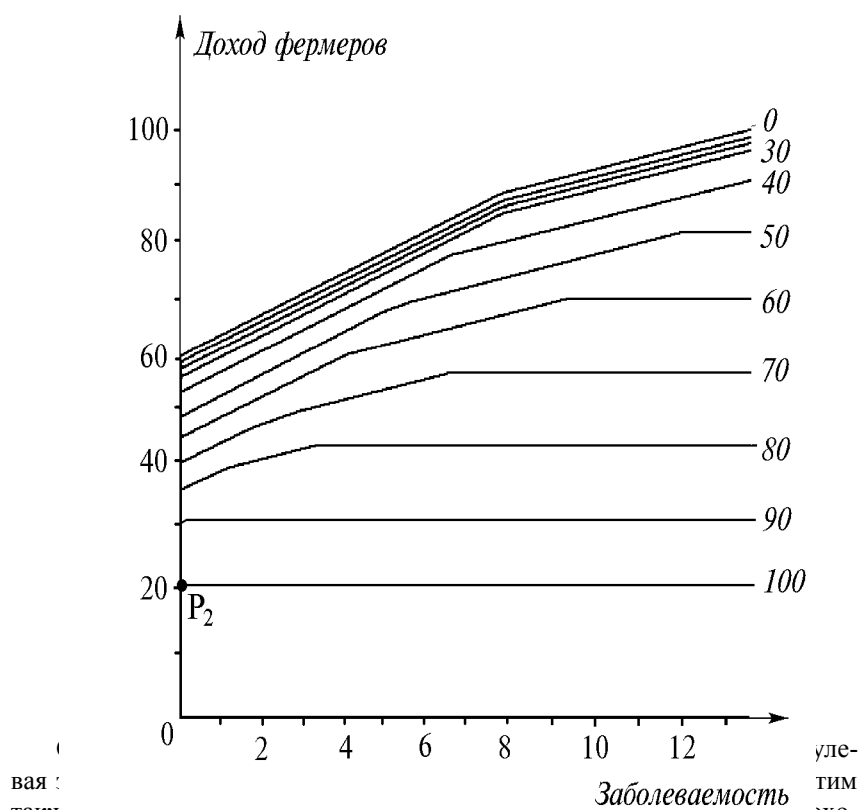
Поскольку желательно увеличение значения первого из критериев, отложенного на горизонтальной оси, и уменьшение значения второго, отложенного на вертикальной оси, недоминируемыми границами этих сечений являются их “северо-западные” границы.

Самое широкое сечение соответствует наихудшему значению третьего критерия, т.е. минимальному чистому доходу фермеров, равному 21.4%. Недоминируемая граница этого сечения состоит из одной точки – 100% прибыли бизнесменов и нулевой заболеваемости. То же верно и для следующего сечения (чистый доход фермеров принимает значение 29.3%), только в недоминируемой точке величина прибыли бизнесменов меньше – около 95%. Наличие единственной недоминируемой точки означает, что в данном диапазоне значений дохода нет противоречий между бизнесменами и горожанами.

Начиная с дохода фермеров в 37.1%, недоминируемая граница представлена уже кривой объективного замещения, т.е. возникает потенциальный конфликт интересов бизнесменов и горожан. При дальнейшем увеличении дохода фермеров граница сечения сдвигается вправо и вниз. При этом кривая объективного замещения расширяется, т.е. диапазон несогласия бизнесменов с горожанами растет. При доходе фермеров в 100% сечение состоит из единственной точки, соответствующей максимальной заболеваемости и минимальному доходу бизнесменов. Заметим, что в диапазоне от нуля до 60% максимального дохода фермеров нулевое значение заболеваемости принадлежит недоминируемой границе. Это означает, что фермеры могут заключить союз с горожанами, если заранее ограничат свои требования. Кроме того, у фермеров имеется возможность расколоть блок бизнесменов и горожан – для этого им нужно добиться того, чтобы обсуждение началось с больших доходов фермеров (более 45%). В то же время они не могут совместить требования интенсивного производства с высоким качеством воды.

Рассмотрим теперь рис. 3.4, на котором ОЭП представлена с третьей точки зрения – в качестве критериев, в координатах которых изображены сечения, выбраны заболеваемость из-за загрязнения воды и доход фермеров. Третий критерий (прибыль бизнесменов) принимает 11 значений в диапазоне от 0 до 100%. Поскольку желательно уменьшение значения первого из критериев, отложенного на горизонтальной оси, и увеличение значения второго из критериев, отложенного на вертикальной оси, недоминируемыми границами этих сечений являются “северо-западные” границы.





влияет на доход фермеров, в то время как на рис 3.4 – большим значениям прибыли бизнесменов. Сечения, соответствующие малой прибыли бизнесменов, представляют собой наклонные линии. Это подтверждает наше наблюдение о том, что при условии малой прибыли бизнесменов интересы жителей города и фермеров не совпадают во всем диапазоне. При прибыли более 50% от максимальной появляется зона нечувствительности, когда уменьшение заболеваемости не приводит к падению доходов фермеров. При дальнейшем росте прибыли эта зона расширяется, занимая при максимальной прибыли практически весь диапазон. Это подчеркивает уже отмечавшуюся нами заинтересованность горожан в увеличении прибыли бизнесменов – при большой прибыли нет опасности того, что фермеры захотят увеличить свои доходы за счет роста заболеваемости.

Заметим, что хотя все свойства конфликта (в том числе и множество разумных компромиссов) могли бы быть получены на основе рассмотрения только одной карты решений (скажем, рис. 3.2), на каждой из карт какое-то из свойств проявляется наиболее ярко. Анализ нескольких карт решений позволяет найти наиболее выразительные. В этом состоит одно

из преимуществ ДКР перед обычными в случае трех критериев. Другое преимущество состоит в возможности получить более детальное изображение части карты. Это также может понадобиться при выявлении свойств ситуации (как это было в § 1.2). Преимущества ДКР особенно заметны в тех случаях, когда число критериев больше трех (такие задачи рассматриваются в следующей главе).

Есть еще одна возможность анализа ситуации на основе ДКР – сопоставление недоминируемым точкам их прообразов, т.е. эффективных решений. Предположение о том, что рассматриваемые критерии полностью отражают интересы участников переговоров, – всего лишь полезная абстракция. Так как само решение содержит значительно больше информации, чем его сжатый образ в виде совокупности значений критериев, выбор тех или иных недоминируемых точек разумно дополнить рассмотрением соответствующих эффективных решений.

Вернемся к рис. 3.2. Буква С отмечает некоторую недоминируемую точку на сечении, соответствующем заболеваемости 6.9 чел. на 10 тыс. населения. Этой точке соответствуют следующие значения двух первых критериев: доход фермеров – 76.8%, прибыль бизнесменов – 44.3%. Если выбрать точку С в качестве компромиссной достижимой цели, то компьютером может быть найдено соответствующее решение, показывающее распределение площадей между технологиями, а также значения других показателей модели. Оно представлено в первой колонке табл. 3.

Как видно из таблицы, в верхней зоне используются четвертая и шестая технологии, а в нижней зоне еще и седьмая. Попуск воды через плотину составляет 5 куб.м в секунду. В верхней зоне четвертая технология занимает 25.5 тыс.га, а шестая технология – 4.5 тыс.га. В нижней зоне четвертая технология занимает 5.5 тыс.га, шестая технология занимает 1.2 тыс.га, а седьмая технология – 3.3 тыс.га. Напомним, что четвертая и шестая технологии характеризуются умеренным потреблением воды (120 куб.м воды на гектар) и отличаются относительно высокими затратами удобрений (40 и 80 кг в расчете на гектар). Седьмая технология характеризуется значительно большим потреблением воды, которое оказывается возможным только в нижней зоне.

Полученное решение соответствует недоминируемой цели, которая была выбрана достаточно произвольно. Можно было бы рассмотреть решения, соответствующие и другим достижимым целям, скажем, отвечающие интересам одной из сторон. Например, максимальному значению дохода фермеров (точка Р<sub>1</sub> на рис. 3.3) соответствует решение, представленное во втором столбце таблицы. Сравним это решение с выбранным выше. Прежде всего, попуск воды через плотину значительно увеличился. Далее, в верхней зоне значительную часть площади (8.9 тыс.га) стала занимать интенсивная (с относительно низким потреблением воды) восьмая технология, а остальное – шестая. В нижней зоне площадь обрабатывается в основном по седьмой технологии и немного по третьей.

Таблица 3

Достижимые цели	1	2	3	4
Доход фермеров	76.79	100.00	21.42	51.17
Прибыль бизнесменов	44.30	0.00	99.95	51.18
Заболеваемость в городе	6.91	13.77	0.00	0.01
Попуск воды через плотину	5.00	5.95	4.50	5.04
<i>Верхняя зона:</i>				
Сбор зерна	61.81	82.62	18.00	32.15
Продуктивность	2.06	2.75	0.60	1.07
Вода для орошения	3.60	4.66	0.00	2.83
Вносимые удобрения	1381.43	2754.00	0.00	0.99
Распределение площадей:				
Технология 1	0.00	0.00	30.00	6.46
Технология 2	0.00	0.00	0.00	23.52
Технология 3	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 4	25.46	0.00	0.00	0.02
Технология 5	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 6	4.54	21.15	0.00	0.00
Технология 7	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 8	0.00	8.85	0.00	0.00
Технология 9	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Нижняя зона:</i>				
Сбор зерна	24.48	29.76	6.07	25.36
Продуктивность	2.45	2.98	0.61	2.54
Вода для орошения	1.60	2.40	0.00	1.74
Вносимые удобрения	578.58	700.23	3.05	578.58
Распределение площадей				
Технология 1	0.00	0.00	9.96	0.00
Технология 2	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 3	0.00	1.25	0.00	0.00
Технология 4	5.54	0.00	0.00	5.54
Технология 5	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 6	1.10	0.00	0.04	0.00
Технология 7	3.37	8.75	0.00	4.46
Технология 8	0.00	0.00	0.00	0.00
Технология 9	0.00	0.00	0.00	0.00

Может возникнуть вопрос, почему в этом решении не используется наиболее продуктивная, девятая технология? Ответ прост – для нее физически не хватает воды. Поэтому в верхней зоне используется (насколько возможно) восьмая технология, а остальную площадь занимает относительно маловодная шестая технология. В нижней зоне приходится думать и о воде, и о загрязнении (ведь в точке А сток и качество воды Реки контролируются!). Это приводит к использованию седьмой и даже третьей технологии, в которой удобрения не применяются вообще!

Давайте рассмотрим теперь достижимую цель, в наибольшей степени соответствующую интересам рекреационного бизнеса. Для этого на рис. 3.4 анализируем сечение с максимальной прибылью и выберем на нем точку  $P_2$  с нулевой заболеваемостью. Решение, соответствующее

выбранной достижимой цели, приведено в таблице в третьем столбце. Согласно нему, в верхней зоне используется исключительно первая технология (орошение и химические удобрения не используются вовсе), а в нижней зоне, кроме первой технологии, также используется шестая, но на очень малой площади.

Теперь выберем достижимую цель, наиболее соответствующую интересам жителей города. Рассмотрим на рис. 3.2 сечение с минимальной заболеваемостью. Обратите внимание на то, что в данном случае имеется явно выраженная кривая объективного замещения между доходом фермеров и прибылью рекреационного бизнеса. Выберем такое сочетание этих показателей (точка  $P_3$ ), чтобы их величины были равны (скажем, и доход фермеров и прибыль бизнесменов равны 51%). Соответствующее решение приведено в четвертом столбце таблицы. В верхней зоне используются первая, вторая и (совсем немного) четвертая технологии. В нижней зоне площади поделены почти поровну между четвертой и седьмой технологиями. Смысл этих решений ясен – использование удобрений не допускается в верхней зоне. Впрочем, жители города могли бы согласиться с любой другой целью на рассмотренной кривой замещения. Это открывает дополнительные возможности для фермеров, которые стремятся разрушить блок бизнесменов и горожан.

**Заключение.** В этом параграфе было рассмотрено использование ДКР на предварительном этапе переговоров при планировании стратегии их проведения. Представим себе, что только одна из сторон имеет возможность использовать ДКР. Ясно, что она получит большие преимущества в проведении переговоров. Во-первых, эта сторона заранее будет знать, какие величины интересующих ее критериев достижимы, и поэтому будет ставить перед собой реальные цели. Во-вторых, эта сторона сможет заранее оценить возможные конфликты и компромиссы. Так, например, в рассматриваемом конфликте фермеры, выявив возможность противоречий между своими оппонентами, могут с успехом использовать эту информацию, если оппоненты будут ее лишены. Даже если бы фермеры не обнаружили конфликта интересов своих противников, они были бы предупреждены о возможности возникновения блока горожан и бизнесменов, так что смогли бы заранее попытаться предотвратить его возникновение (например, договорившись с горожанами или бизнесменами об уступках по каким-либо посторонним вопросам)<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup> Читатель может изучить эту проблему и выработать решение самостоятельно, обратившись по сети ИНТЕРНЕТ к WWW-серверу, адрес которого указан в предисловии.

## 1.4. Использование метода достижимых целей

Теперь, когда мы рассмотрели несколько примеров использования метода достижимых целей, сформулируем его концепцию в общем виде и сделаем несколько предварительных замечаний о способах его практического применения.

**Схема метода достижимых целей.** Итак, МДЦ дает возможность изучать разумные компромиссы на основе исследования взаимозависимостей (кривых объективного замещения) между недоминируемыми сочетаниями значений критериев, используемых для оценки качества решения. Основными шагами МДЦ являются:

- 1) построение множества достижимых целей (или его ОЭП) в пространстве критериев,
- 2) визуальное представление кривых объективного замещения между различными парами критериев,
- 3) выбор компромиссной достижимой цели,
- 4) расчет решения, приводящего к выбранной цели.

Упрощенная схема МДЦ была приведена на рис. 1.7. Более детальная схема, иллюстрирующая четыре описанных шага, изображена на рис. 4.1. В этой схеме шаги представлены прямоугольниками, внутри которых наряду с номером шага указан его исполнитель: компьютер (К) или человек – лицо, принимающее решение (ЛПР). Около стрелок указан результат этапа.

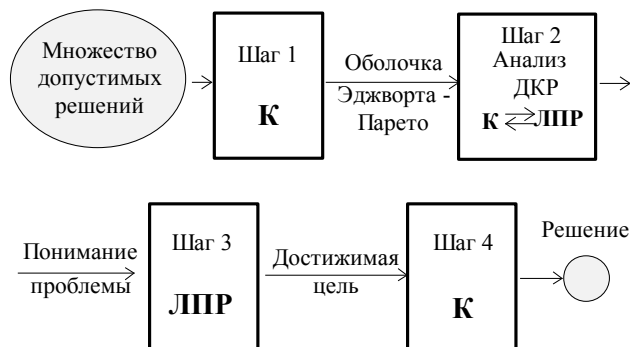


Рис. 4.1

Первый шаг выполняется автоматически, без участия человека, поэтому на нем выдвигаются требования эффективности и надежности алгоритмов. Второй шаг является существенно интерактивным (человеко-машинным), и поэтому на нем выдвигаются жесткие требования к удобству и скорости получения изображения. Этот этап обычно реализуется на персональном компьютере или на графической станции. Выбор цели

основывается на неформальных дискуссиях или переговорах, а расчет решения осуществляется автоматически.

В первых двух параграфах мы рассмотрели несколько простых примеров, в которых задача построения множества достижимых целей могла быть решена достаточно просто – находились вершины множества допустимых решений, рассчитывались значения критериев в этих вершинах, а затем строился и визуализировался выпуклый многогранник – множество достижимых целей. Такой подход может быть использован только в простейших задачах, поскольку число вершин даже в относительно простых случаях может достигать многих тысяч, а в моделях, используемых на практике – многих миллионов и даже миллиардов. Поэтому ранее мы не стали обсуждать методы, с помощью которых удалось построить ОЭП и изобразить ее в виде различных карт решений. Таким же образом мы будем поступать и в трех следующих главах нашей книги. Методы построения множеств достижимых целей и их ОЭП описаны в упрощенной форме в последней, пятой главе. Теперь сделаем несколько замечаний для того, чтобы читатель мог осознать сложности, возникающие при построении множеств достижимых целей и их ОЭП.

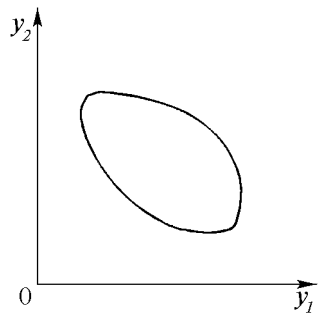


Рис. 4.2

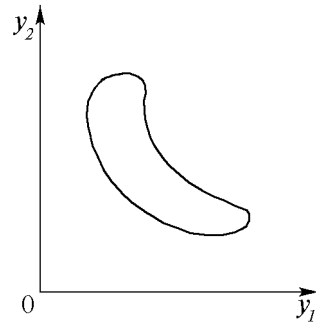


Рис. 4.3

**Множества достижимых целей и их построение.** Прежде всего отметим, что множество достижимых целей является многогранным для линейной модели. Если же модель включает нелинейные зависимости, то множество достижимых целей может иметь весьма сложную структуру. В то же время, встречаются нелинейные модели, для которых множество достижимых целей достаточно просто и напоминает выпуклый многогранник – это ограниченное выпуклое множество. Ограниченность множества достижимых целей естественна в большинстве задач, а под выпуклостью множества понимается следующее его свойство – вместе с любыми двумя своими точками множество целиком содержит отрезок, их соединяющий.

На рис. 4.2 приведен пример выпуклого множества, не являющегося многогранником. На рис. 4.3 приведен пример невыпуклого множества.

Для нелинейных моделей с выпуклым множеством достижимых целей это множество может быть приближенно представлено в виде выпуклого многогранника (см. рис 4.4). Более того, множество достижимых целей для сложной линейной модели, которое с самого начала является многогранником с большим числом вершин, разумно аппроксимировать более простым многогранником.

Для нелинейных моделей с невыпуклым множеством достижимых целей это множество можно приближенно представить в виде объединения простых выпуклых фигур – прямоугольников, шаров и т.д. (см. рис. 4.5). В большинстве задач, которые будут рассмотрены в дальнейшем, множества достижимых целей выпуклы, так что их можно аппроксимировать выпуклыми многогранниками и изображать в виде, рассмотренном ранее. В тех же случаях, когда встретятся невыпуклые множества достижимых целей, методы их визуализации мы опишем в процессе анализа конкретных задач. Сразу отметим, что в обоих случаях визуализация может быть осуществлена достаточно быстро, что и обеспечивает интерактивность процедур анализа множеств достижимых целей. Подчеркнем еще раз, что в данной книге мы приводим черно-белые аналоги цветного

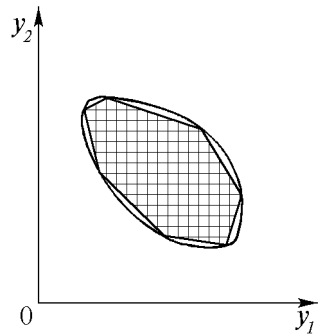


Рис. 4.4

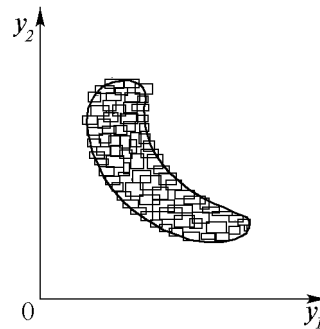


Рис. 4.5

экрана компьютера, так что в реальности изображаемые карты решений куда более красивы и наглядны, чем рисунки, данные в книге.

В примерах, рассмотренных в данной главе, число критериев не превышало трех. Мы видели, как тяжело дался переход от двух критериев к трем. В связи с этим можно ожидать резкого усложнения ситуации при переходе к случаю четырех, пяти, шести и т.д. критериев. На самом деле, если использовать разумные приемы визуализации, анализ множеств можно сделать достаточно простым для пользователя. Как легко догадаться, наиболее просто могут быть представлены совокупности сечений ОЭП. Мы не станем здесь углубляться в эти проблемы, а просто продемонстрируем имеющиеся возможности на одной из прикладных задач в

следующей главе, целиком посвященной приложениям МДЦ к экологическим проблемам.

Процесс построения множеств достижимых целей и их ОЭП в зависимости от сложности моделей может требовать от нескольких секунд до многих часов или даже суток расчетов на мощных вычислительных машинах. При этом существенную роль играет линейность модели – нам приходилось строить ОЭП для линейных моделей с несколькими тысячами переменных. В то же время, в нелинейных моделях даже на мощных компьютерах приходится ограничиваться несколькими (не более десяти) управляющими параметрами. Поэтому МДЦ используется для анализа:

- исходных моделей изучаемых систем, если эти модели линейны,
- исходных моделей изучаемых систем, если это достаточно простые нелинейные модели,
- упрощенных (линейных и нелинейных) моделей, которые, тем не менее, позволяют получить общее (целостное) представление об анализируемой проблеме и найти разумные компромиссы и согласованные стратегии.

**Об упрощении задач с невыпуклыми множествами достижимых целей.** Поскольку метод аппроксимации системами кубов, используемый при реализации идей МДЦ в проблемах с невыпуклыми множествами достижимых целей, может применяться лишь тогда, когда совокупность

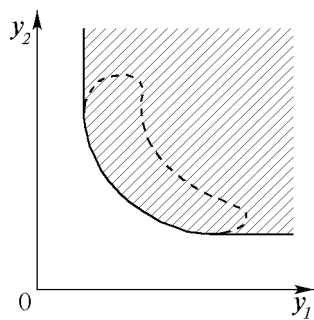


Рис. 4.6

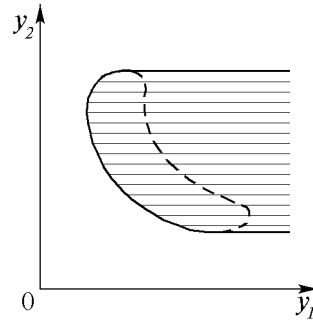


Рис. 4.7

решений описывается небольшим числом параметров, то желательно каким-либо образом свести эти проблемы к рассмотрению задач с выпуклым множеством достижимых целей или его ОЭП.

Один из приемов такого рода связан с построением ОЭП. Пусть в некоторой задаче, ОЭП для которой приведена на рис. 4.3, заранее ясно, что предпочтительно уменьшать значения величин обоих критериев  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда ОЭП этого множества будет иметь вид, приведенный на рис. 4.6, т.е. будет выпуклой. Таким образом, за счет перехода к ОЭП задача с невыпуклым множеством достижимых целей оказалась заменена на зада-



чу с выпуклой ОЭП, которая может быть аппроксимирована многогранным множеством в случае моделей со значительным числом переменных.

Предположим теперь, что мы заведомо знаем, что значение  $y_1$  следует уменьшать, но относительно  $y_2$  такой информации нет. Тогда можно рассмотреть множество, изображенное на рис. 4.7. Это множество содержит, наряду с точками множества достижимых целей, все такие точки пространства критериев, для которых найдется хотя бы одна более предпочтительная достижимая точка с меньшим значением  $y_1$ . Это множество также оказалось выпуклым. Таким образом, такое расширение множества достижимых целей также может привести к упрощению задачи аппроксимации. Множества, аналогичные изображенному на рис. 4.7, в которых к множествам достижимых целей присоединены точки, доминируемые только по части критериев, будем называть частичной оболочкой Эджворта–Парето (ЧОЭП).

Заметим, что использование ЧОЭП вместо ОЭП может быть вызвано не только тем, что не известно направление улучшения какого-либо из показателей, но и просто из-за желания видеть настоящую границу множества достижимых целей, пусть даже доминируемую. Такое желание вполне естественно если, конечно, это не мешает исследованию (не вызывает пересечения границ и т.д.). Примеры использования ЧОЭП приведены в двух следующих главах.

Рассмотрим теперь еще один подход, пригодный в тех случаях, когда ОЭП оказывается невыпуклой. В таком случае можно построить выпуклую оболочку ОЭП, которая называется выпуклой оболочкой Эджворта–Парето (ВОЭП). Это множество визуализируется как обычная выпуклая ОЭП. Пользователь получает представление о связи между критериями, но в “усредненном” виде. Выбрав цель на ВОЭП, он выражает тем самым свое предпочтение. Эта цель (изображенная на рис. 4.8 точкой), конечно же, не обяза-

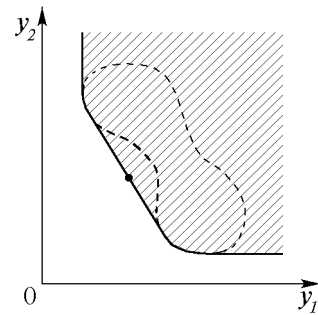


Рис. 4.8

тельно достижима, но она близка к ОЭП и потому достаточно разумна. Далее, находится несколько достижимых сочетаний значений критериев, которые являются ближайшими к выбранной разумной цели, а также и решения, их реализующие. Пользователь должен сам выбрать единственное решение из малого их числа, что, конечно же, является более простой задачей, чем анализ исходной проблемы. Более того, некоторые из полу-

ченных эффективных решений (или даже все) могут стать предметом детального анализа<sup>10</sup>.

Теперь рассмотрим в первом приближении вопрос об использовании математических моделей для целостного анализа экологических проблем.

**Использование МДЦ для целостного рассмотрения экологических проблем.** Прежде всего необходимо договориться о том, что мы будем иметь в виду под экологическими проблемами. Под ними будут пониматься проблемы взаимодействия цивилизации с окружающей средой. Мы будем изучать их определенный аспект – разработку разумных стратегий взаимодействия с окружающей средой. Такие проблемы рассматриваются науками, в англоязычных странах называемыми *environmental sciences*. В русском языке иногда встречается такой термин, как “теория рационального природопользования”, но в силу своей явной неуклюжести он широкого распространения не получил. Вместо него используют термин “экологический”, хотя к науке экологии, занимающейся изучением взаимодействия популяции различных организмов между собой и с окружающей их средой, методы поиска разумных стратегий непосредственного отношения не имеют.

Мы будем также говорить, что изучаем “эколого-экономические проблемы” для того, чтобы подчеркнуть, что в рассматриваемых нами проблемах воздействие на биосферу осуществляется производственными, транспортными, коммунальными и другими подобными системами, связанными с экономической деятельностью. Более того, сами “экологические” проблемы являются, по существу, экономическими, поскольку могли бы быть решены при наличии достаточных средств. Поэтому вопрос о построении стратегий, позволяющих за счет ограниченных средств решить наиболее острые экологические проблемы, является одновременно и экономической задачей.

При целостном рассмотрении экологических проблем используются результаты изучения процессов различной природы (экономических, социальных, физических, биологических и т.д.). Требуется построить их упрощенную интегрированную модель. Интегрированная модель должна быть упрощенной потому, что практически невозможно соединить вместе разнородные исходные математические модели, адекватно описывающие процессы различной природы. Такие модели обычно разрабатываются исследователями из различных областей науки, которым трудно найти общий язык. Кроме того, может оказаться, что для части подсистем изучаемой системы пока не существуют надежные математические модели и приходится пользоваться экспериментальными данными или экспертными оценками. Методика целостного рассмотрения сложных систем должна в какой-то мере помочь преодолеть перечисленные выше трудности.

---

<sup>10</sup> Некоторые аспекты этого метода, получившего название метода разумных целей, обсуждаются в [4].

Дадим краткое изложение методики целостного рассмотрения экологических проблем (ее подробное описание дано в гл. 4). Начнем с построения упрощенных описаний подсистем. Такие описания можно найти на основе параметризации этих подсистем, т.е. на основе построения упрощенных зависимостей, связывающих выходы подсистем с их входами, а также области применимости этих зависимостей. Упрощенные описания и условия их применимости могут быть получены на основе изучения свойств моделей или обработки результатов имитационных экспериментов с исходными моделями подсистем. В том случае, когда модели подсистем отсутствуют, можно использовать результаты натуральных экспериментов или экспертные оценки.

Далее, упрощенные описания подсистем и ограничения на их входы, а также другая информация объединяются в виде единой интегрированной модели, для анализа которой предлагается применять МДЦ. В результате ее анализа должны быть выработаны компромиссные стратегии решения экологических проблем. Хотя эти стратегии будут получены с использованием упрощенных моделей, их можно будет уточнить в имитационных экспериментах, проводимых на основе подробных моделей подсистем. Как уже говорилось, в рамках имитационных экспериментов проверяются следствия различных стратегий, причем недостатком имитации является отсутствие способов формирования разумных, согласованных стратегий. Методика целостного рассмотрения, основанная на использовании МДЦ, позволяет сформулировать такие стратегии, дополняя тем самым имитационный эксперимент.

**Опыт использования МДЦ.** Завершим главу кратким обсуждением опыта и возможностей использования МДЦ. Применение МДЦ в экономических задачах началось еще в семидесятых годах. В то время авторы метода использовали ЭВМ БЭСМ-6, которая не предоставляла возможностей диалога, в связи с чем множества достижимых целей рисовались заранее и передавались пользователям в виде альбомов, содержащих рисунки, изображающие множества достижимых целей. Рассматривались в основном задачи планирования и анализа экономики на основе балансовых экономических моделей. Вершиной этих исследований было участие в разработке автоматизированной системы плановых расчетов Госплана СССР. Полученный опыт описан в § 3.2 и § 3.3.

В восьмидесятых годах началось применение МДЦ для выработки стратегий решения экологических проблем: локальных, региональных, межстрановых и глобальных. Опыт этих исследований описан в гл. 2. В начале девяностых годов, когда возник интерес к проблемам регулирования рыночной экономики, были разработаны методы использования МДЦ для выработки стратегий государственного регулирования экономики (см. § 3.4 и § 3.5).

В данной книге мы ограничились в основном применением МДЦ в экономических и экологических проблемах. Есть, однако, и другие важ-

ные области применения МДЦ. Одна из них – изучение возможных вариантов технических систем на предпроектной стадии процесса проектирования. Этот вопрос затронут в § 4.3. Другая важная область применения МДЦ — анализ задач бизнеса, в том числе разработка стратегии развития фирм, финансовое планирование и т.д., не нашел отражения в данной книге из-за ограниченности ее объема.

Близкие к МДЦ методы могут быть использованы для анализа содержимого больших баз данных, в том числе для извлечения из них малого числа наиболее интересных записей. Для этого был разработан специальный метод, родственник МДЦ и названный методом разумных целей, кратко охарактеризованный выше. Этот метод позволяет изучать базы данных любой природы, так что он может быть использован для изучения весьма широкого класса задач, связанных с анализом экономической, финансовой, маркетинговой, медицинской, технической и другой информации. В частности, нами были рассмотрены такие разнообразные задачи, как торговля домами, покупка компьютера, выбор варианта прямых инвестиций или портфеля акций, постановка медицинского диагноза, выбор коробки передач для вертолета и т.д. Все это также осталось за пределами книги, в которой авторы ограничились применением МДЦ в экологических и экономических проблемах.

## **Глава 2.**

### **КОМПРОМИССНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

В данной главе рассматриваются примеры использования метода достижимых целей (в том числе и диалоговых карт решений) при разработке экологических стратегий. Многокритериальный подход вполне естественен в задачах охраны окружающей среды, которые отличаются сложной структурой и требованием того, чтобы решения учитывали интересы различных социальных и политических групп. Таким образом, эти задачи являются характерным примером проблем, требующих многостороннего анализа.

Основное внимание уделяется компьютерным системам, помогающим найти разумные стратегии в процессе переговоров о различных экологических проблемах, начиная от региональных и кончая межстрановыми и глобальными. В тех случаях, когда описываются уже реализованные компьютерные системы, приводятся основные черты этих систем и обсуждается опыт их применения. В тех же случаях, когда проводятся методологические исследования, мы демонстрируем возможности использования метода достижимых целей в рассматриваемых задачах.

При описании компьютерных систем мы старались обращать внимание на принципиальные вопросы визуализации разумных компромиссов и выработки стратегий, не затрагивая технические проблемы реализации этих систем. Более того, для упрощения изложения мы, как правило, не приводим описания математических моделей, а лишь кратко характеризуем их.

#### **2.1. Анализ проблем загрязнения океанического залива**

В данном параграфе описывается использование МДЦ для выработки стратегий уменьшения загрязнения морского или океанического залива. Рассматривается вопрос о загрязнении, возникающем в результате сброса в воды залива твердых отходов (илов), возникающих в результате очистки стоков коммунальных водохозяйственных систем. Как известно, сточные воды проходят механическую, а затем и биологическую очистку. Осадок отстойников, являющийся одним из средств механической очистки стоков, и избыточный активный ил, возникающий в процессе биологи-

ческой очистки, обрабатываются и частично обеззараживаются, после чего они должны быть размещены в каком-то месте. Имеются две основные возможности складирования илов: закапывание на суше и сбрасывание в моря или океаны. Оба способа порождают экологические проблемы: в первом случае загрязняются подземные воды, а во втором – моря и океаны.

В данном параграфе мы ограничиваемся конкретной проблемой, связанной с выбором мест сброса илов в океан, а именно задачей размещения илов, накапливающихся в системах водоочистки Нью-Йорка и его окрестностей. С давних пор проблема вывоза илов из густонаселенных районов атлантического побережья США решалась путем их сброса в океан. В течение долгих лет влияние этого сброса на состояние вод вблизи побережья было умеренным и не вызывало опасений. В последнее время, однако, встал вопрос о переносе сброса в более отдаленные от берега места. Поэтому возникла задача выбора надлежащих мест сброса для достижения разумного компромисса между состоянием прибрежных вод и стоимостью транспортировки илов. Для анализа этой проблемы и выработки разумных стратегий предлагается использовать МДЦ<sup>11</sup>.

Задача состоит в следующем: требуется выбрать такие пункты сброса илов и определить для каждого пункта такой объем сброса в единицу времени, чтобы концентрация загрязнителей в точках мониторинга, расположенных в важнейших зонах залива, не была слишком высока. При этом следует учитывать затраты на транспортировку илов, а также экономические и социальные факторы, связанные с изменением качества воды.

Таким образом, проблема выбора стратегии сброса является характерным примером задачи, требующей системного подхода. Она связана с существенными затратами, сложной структурой, многими показателями оценки результатов решения. При оценке стратегий решения этой проблемы требуется учитывать интересы государства и различных политических групп, а также и общественное мнение. По этой причине многокритериальный анализ задачи сброса илов должен быть направлен не на автоматический выбор стратегии, а на выработку такой информации о проблеме, которая поможет всем, кто интересуется решением этой проблемы, лучше понять ситуацию и найти компромиссную стратегию.

**Постановка задачи и описание математической модели.** Проблема загрязнения Нью-Йоркского залива стоит довольно давно, обществен-

---

<sup>11</sup> Данное исследование выполнено в рамках деятельности Российско-финской технической рабочей группы по исследованию операций, которая финансировалась Академиями наук обеих стран. С финской стороны в исследовании участвовали проф. Ю.Валлениус и проф. Х.Валлениус из Экономической школы г.Хельсинки.

ное мнение особенно волнует влияние пункта сброса илов, расположенного в 12 милях от берега (см. рис. 1.1).

В 80-е годы публику будоражили различные истории, связанные с сильным загрязнением в районе этого пункта. Это были, в частности, массовая гибель рыбы из-за недостатка растворенного в воде кислорода, смыкание створок раковин моллюсков из-за сильного бактериального загрязнения, периодические выбросы загрязнения на пляжи Лонг-Айленда и т.д. Попытки разработать другие стратегии обезвреживания илов наталкивались на экономические и организационные сложности. В частности, альтернативные предложения по утилизации илов на суше вызывали возражение населения, проживающего на территории, где предполагалось разместить необходимое оборудование.

Обеспокоенное все увеличивающимся загрязнением, Агентство по охране окружающей среды США в 1985 г. обязало власти Нью-Йорка и других пользователей 12-мильного пункта начать работу по переносу места сброса илов в 106-мильный пункт. Это, однако, превышало возможности местных властей. В данном исследовании делаются попытки разработать стратегии, альтернативные полному переносу места сброса в 106-мильный пункт, на основе распределения мест сброса по нескольким пунктам. Рассматриваются четыре альтернативных пункта сброса илов: 12-мильный пункт, два пункта на расстоянии 60 миль от берега (северный и южный) и пункт в 106 милях от берега. Предполагается, что все эти четыре пункта могут использоваться одновременно. Предполагается также, что илы вывозятся из Нью-Йорка (52% от общего объема), Нью-Джерси (41%) и Лонг-Айленда (7%). Объем вывоза илов считается постоянным. Для вывоза илов используется два вида судов: буксируемые баржи (всего 9 барж) и самоходные баржи (4 баржи). Предполагается, что все суда ходят к местам сброса с полной загрузкой.

Ранее была разработана стохастическая многослойная модель распространения загрязнения в водной среде. Эта модель позволила осуществить анализ последствий отдельных вариантов распределения илов между пунктами сброса, т.е. рассчитывать средние концентрации

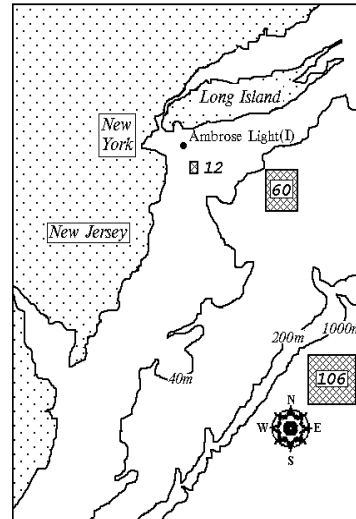


Рис. 1.1

загрязнения в точках мониторинга. Для того чтобы проанализировать проблему выбора распределения илов между пунктами сброса, была разработана упрощенная интегрированная модель. Эта модель включала в себя, в частности, матрицу переноса загрязнения, построенную на основе анализа стохастической модели распространения загрязнения. Коэффициент этой матрицы показывает, какая средняя концентрация загрязнения реализуется в заданной точке залива, если интенсивность сброса илов в определенном пункте сброса будет единичной. В целом эта матрица позволяет достаточно быстро и просто рассчитать среднее загрязнение в любой точке мониторинга при заданной интенсивности сброса. Матрица переноса оказывается особенно удобной в том случае, когда интенсивность сброса не задана, что требуется при выработке разумной стратегии сброса илов.

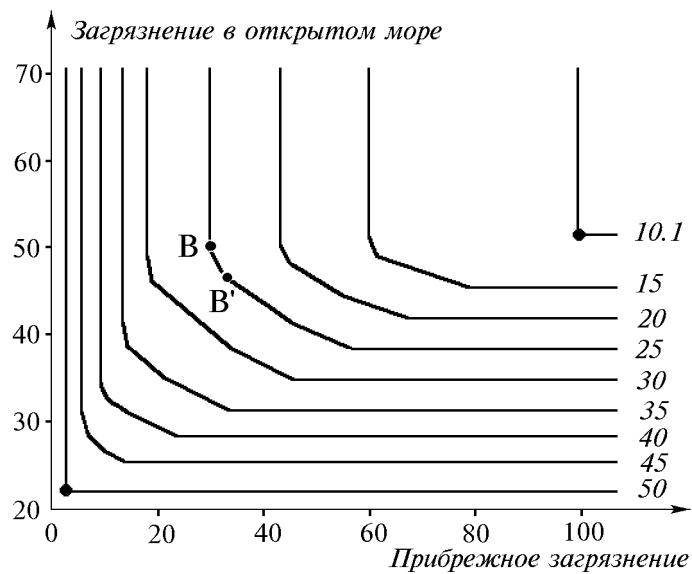


Рис. 1.2

В интегрированной модели матрица распространения загрязнения дополняется:

- ограничениями, гарантирующими, что все илы будут вывезены;
- ограничениями, связанными с объемом барж;
- соотношениями для расчета количества илов, сброшенных в каждом из пунктов;
- соотношениями для расчета стоимости операции.

В исследовании было использовано три критерия:



- a) общая стоимость операции (измеряется в миллионах долларов США);
- b) уровень загрязненности в точке мониторинга, расположенной вблизи побережья (концентрация загрязнения в процентах от заданного уровня);
- c) уровень загрязненности в точке мониторинга, расположенной на шельфе вдали от побережья (концентрация загрязнения в процентах от заданного уровня).

**Результаты исследования.** Для рассматриваемой задачи была построена и рассмотрена ОЭП множества достижимых целей. На рис. 1.2 и 1.3 изображены границы двумерных сечений ОЭП, т.е. карты решений. Недоминируемые границы сечений показаны жирными линиями. Напомним, что для любой точки ее недоминируемой границы существует по

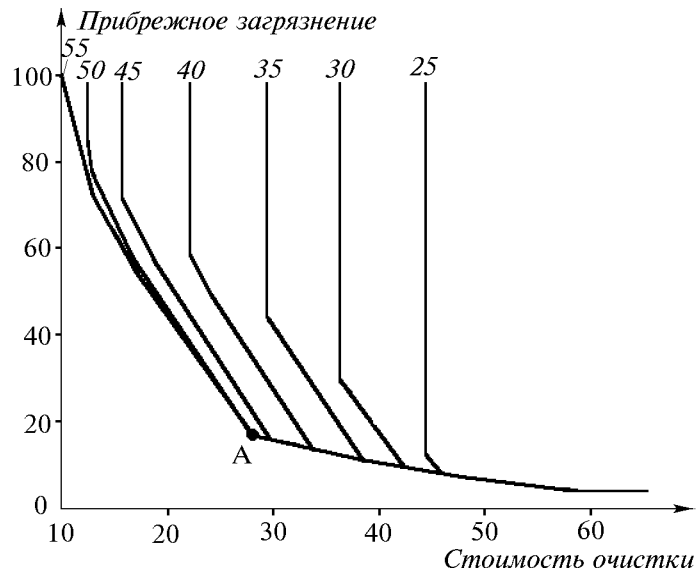


Рис 1.3

крайней мере один вариант движения барж, использование которого приводит к достижению этой точки.

На рис. 1.2 изображены карты решений в координатах двух загрязнений – загрязнения в прибрежной полосе и вдали от побережья при различных значениях стоимости, меняющейся от минимально возможного значения 10.1 млн. долларов до максимально возможного значения 50 млн. долларов. Интересно, что при крайних значениях стоимости недоминируемая граница состоит из единственной точки, в то время как в

промежуточных случаях заметны кривые объективного замещения между загрязнениями. При этом форма кривой зависит от стоимости.

Сравним расстояния между границами, соответствующими соседним значениям стоимости, выбранным с одинаковым шагом в 5 млн. долларов. Расстояние между границами для 10.1 и 15 млн. относительно велико, в то время как расстояние между границами для 15 и 20 млн. заметно меньше. Это означает, что первые дополнительные 5 млн. приводят в целом к более значительному уменьшению загрязнения, чем следующие 5 млн. Этот факт соответствует широко известному явлению уменьшения эффективности дополнительных затрат. На изображениях сечений данное свойство проявляется наглядно. Значительное уменьшение эффективности затрат обнаруживается при приближении к максимальному значению стоимости в 50 млн.

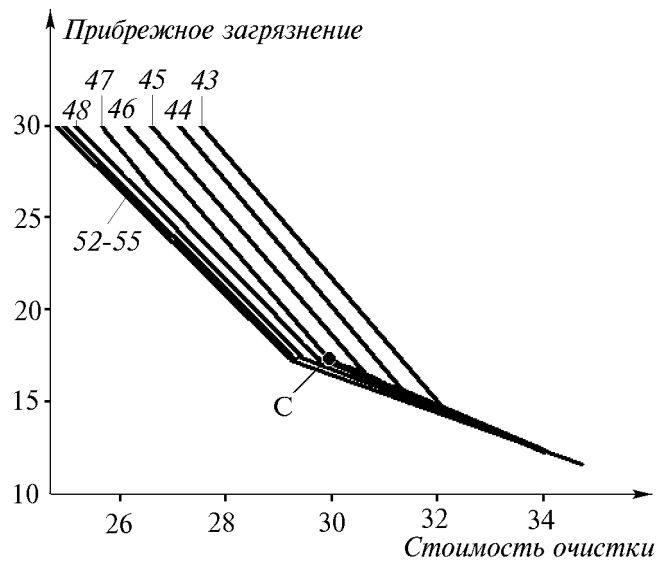


Рис 1.4

Более точно определить степень уменьшения предельной эффективности затрат можно по рис. 1.3, где сечения ОЭП того же множества достижимых целей даны в другом ракурсе. Здесь изображена карта решений в координатах стоимости и загрязнения в точке мониторинга, расположенной вблизи побережья (при различных значениях загрязнения в точке мониторинга, расположенной вдали от побережья). Значения загрязнения вдали от побережья обозначены около каждой границы. Они изменяются от 25 до 55%. Этот диапазон был выбран на основе изучения рис. 1.2, из которого ясно, что

недоминируемые значения загрязнения вдали от побережья требуется брать именно в этом диапазоне.

При взгляде на рис.1.3 сразу видно, что каждая кривая объективного замещения между стоимостью и прибрежным загрязнением имеет излом, в котором резко меняется характер зависимости между этими критериями. На сечении, соответствующем 55% загрязнения вдали от побережья, на месте излома поставлена точка А.

Как и следовало ожидать, при увеличении загрязнения вдали от побережья кривая сдвигается влево, в сторону уменьшения стоимости. При этом также заметно уменьшение “эффективности” роста загрязнения вдали от берега: если его рост с 25 до 30% приводит к уменьшению стоимости примерно на 10 млн., то рост с 50 до 55% к уменьшению затрат не приводит. Так, точка А также принадлежит сечению, соответствующему значению загрязнения вдали от побережья в 50%. Заметим, что она уже не принадлежит сечению, соответствующему 45%. Это означает, что загрязнение вдали от побережья может быть снижено с 55 до 50% без дополнительных затрат. Из карты решений видно, что это примерно верно для всех стоимостей и загрязнений около побережья.

Для исследования кривых объективного замещения вблизи точки А можно изобразить часть рис. 1.3 в укрупненном виде (см. рис. 1.4). На рис. 1.4 границы сечений ОЭП изображены более подробно. Значения загрязнения вдали от побережья меняются от сечения к сечению от 43 до 55% с шагом в 1%. На этом рисунке уменьшение “эффективности” роста загрязнения вдали от берега особенно заметно: при его росте от 52 до 55% недоминируемые границы для сечений ОЭП практически совпадают. Поэтому может представлять интерес, например, достижимая цель, характеризующаяся следующим сочетанием значений критериев: стоимостью в 30 млн., загрязнением около побережья – 17.5%, загрязнением вдали от побережья – 46% (точка С). Маршруты движения барж, приводящие к этой цели, автоматически рассчитываются компьютером: решение состоит в том, что все илы следует сбрасывать на расстоянии 60 миль от берега. Конечно, реальный пользователь может выбрать другую цель, в этом случае он получит другую стратегию.

## **2.2. Разработка стратегий развития сельскохозяйственного региона с учетом экологических факторов**

В этом параграфе описано исследование стратегий развития сельскохозяйственного региона с использованием довольно сложной эколого-экономической модели. Это исследование является практическим вопло-

щением идей, изложенных в при анализе условного региона в предыдущей главе<sup>12</sup>.

**Описание проблемы.** Рассматривается небольшая область (область Пиил в Нидерландах) площадью около 30 тыс. гектаров. Выбор этого региона был обусловлен наличием информации, подготовленной в форме, пригодной для применения МДЦ.

На территории области расположено несколько крупных населенных пунктов, а также скотоводческие и растениеводческие хозяйства. Ландшафт области разнообразен, в нем чередуются возвышенные территории и низменности, различающиеся качеством почвы. Территория области покрыта сетью дорог и оросительных каналов. Сельское хозяйство специализируется на выращивании мясного скота, свиней и птицы. Растениеводство служит в основном для обеспечения животноводства кормами. Кроме того, в области распространено товарное овощеводство. На полях и пастбищах при интенсивном орошении водой применяются органические и минеральные удобрения. Вода для хозяйственных нужд поступает как из поверхностных водоемов, так и из скважин. Для обеспечения питьевой водой населения используются глубокие слои грунтовых вод, доступные через артезианские колодцы.

Интенсификация хозяйственной деятельности людей может привести к нежелательным последствиям: падению уровня грунтовых вод и к ухудшению качества питьевой воды. Существенное понижение уровня грунтовых вод может нарушить устойчивость экосистем в нескольких заповедных природных зонах, расположенных на территории области, а загрязнение вод удобрениями и отходами сельскохозяйственной деятельности может отрицательно повлиять на экологическую обстановку в области. Кроме того, просачивание загрязненных нитратами вод в глубокие слои почвы может привести к ухудшению качества питьевой воды.

В настоящее время экологическая обстановка в области не является критической ни с точки зрения устойчивости природных экосистем, ни с точки зрения качества питьевой воды. Однако при расширении хозяйственной деятельности экологические проблемы неизбежно возникнут. Поэтому необходимо регулировать экономическую деятельность таким образом, чтобы обеспечить эффективность производства и в то же время не нарушать экологическое равновесие в заповедных зонах, а также обеспечить высокое качество воды, используемой для коммунальных и сельскохозяйственных нужд. Это требует тщательного изучения эколого-экономической ситуации при выборе проектов развития производства.

---

<sup>12</sup> Работа выполнена в рамках проекта “Региональные водохозяйственные стратегии” Международного института прикладного системного анализа (Лаксембург, Австрия) [74]. Авторы хотели бы выразить благодарность С.А.Орловскому, который руководил этим проектом МИПСА.

Для решения указанной проблемы Институтом земельных и водных ресурсов (Нидерланды) была разработана подробная нелинейная математическая модель динамики грунтовых вод в области Пиил. Из-за сложности этой модели, расчеты падения уровня грунтовых вод и их загрязнения оказалось возможным провести лишь при ограниченном числе вариантов забора воды и интенсивности выброса загрязнителей. Для того чтобы связать эту модель с моделью сельскохозяйственного производства и получить полную информацию о возможностях выбора разумных стратегий развития региона, исходная модель динамики грунтовых вод была линеаризована. При этом были построены матрицы влияния, показывающие, как заборы грунтовых вод влияют на их уровень, а выбросы загрязнителя – на качество грунтовых вод. В МИПСА эта упрощенная модель динамики грунтовых вод была объединена с довольно подробной линейной моделью сельскохозяйственного производства. На основе такой интегрированной модели были проведены оптимизационные эксперименты, в которых в качестве критериев использовались различные экономические показатели, а решения исследовались на их экологическую приемлемость. Более глубокое изучение взаимосвязи экономических и экологических показателей было решено провести с использованием МДЦ.

**Описание модели.** Исследуемая область была разбита на пять районов (см. рис. 2.1). Три из них – заповедные природные зоны, и их экологические характеристики особенно важны (на рисунке они помечены буквой N). Производство в модели описывается набором технологий. Каждая из них отражает определенный вид растениеводства или животноводства. Урожайность культур зависит от влажности почвы, ее качества и количества вносимых удобрений. Содержание воды в почве определяется капиллярным подъемом влаги из грунтовых вод, орошением из поверхностных и грунтовых вод, а также атмосферными осадками. В модели учитывается просачивание поверхностных вод в землю, изменение уровней грунтовых вод в зависимости от их заборов. Животноводство в области подразделяется на привязное, пастбищное и птицеводство. Каждый вид животноводства описывается набором технологий, характеризующимся доходностью, интенсивностью потребления воды, а также количеством, загрязненностью и местом хранения отходов. В модели учитываются ограниченность трудовых ресурсов, затраты на изменение структуры размещения производства, а также транспортные затраты внутри области. Выбор стратегии развития региона состоит в определении предпочтительного набора технологий растениеводства и животноводства. В дальнейшем региональные

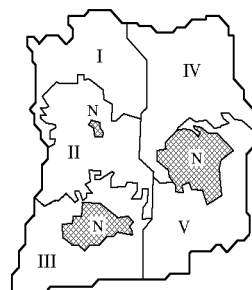


Рис. 2.1

власти предполагают стимулировать производителей, придерживающихся указанных технологий, через налоговые льготы.

При поиске разумных стратегий развития региона рассматривались две группы критериев – экономические и экологические. Один из экономических критериев – объем инвестиций ( $I$ ), направляемых на расширение сельскохозяйственного производства и изменения его структуры, второй – изменение чистого дохода ( $W$ ) в результате осуществления инвестиций. Напомним, что под чистым доходом имеется в виду разность между доходом и производственным потреблением. Представляет интерес увеличение значения чистого дохода при данном объеме инвестиций и эффективное использование инвестиций – уменьшение их объема при заданных значениях остальных показателей. Оба экономических показателя

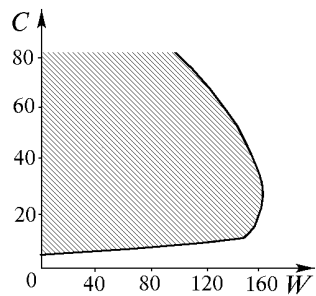


Рис. 2.2

измеряются в миллионах флоринов, 1 доллар США примерно соответствует 1.7 флорина.

Один из экологических критериев – показатель падения уровня грунтовых вод ( $h$ ), измеряемый в сантиметрах. В качестве этого критерия взята максимальная из величин падения уровня грунтовых вод относительно исходного уровня в трех природных зонах области. Эта величина рассчитывается для конца летнего периода, во время которого хозяйственная деятельность наиболее интенсивна, а падение уровня грунтовых вод наиболее значи-

тельно. Другим экологическим критерием является показатель концентрации нитратов в глубоких слоях грунтовых вод ( $C$ ), измеряемый в миллиграммах на литр. Ясно, что значения обоих экологических критериев надо стараться уменьшить.

Мы дали беглое описание модели, которая более подробно описана в [74]. В целом модель была довольно громоздка: в ней насчитывалось 460 переменных и 672 ограничения. Величина инвестиций была ограничена сверху величиной  $I_{\max}$  в 250 млн. флоринов, величина падения уровня грунтовых вод – значением  $h_{\max}$ , равным 20 см.

**Исследование компромиссов и поиск стратегий.** Рассмотрим результаты исследования множества достижимых целей. Поскольку падение уровня грунтовых вод предпочтительно уменьшать, была рассмотрена частичная оболочка Эджворта–Парето по этому критерию. Благодаря этому модели удалось сделать линейной и построить ЧОЭП достаточно просто.

До сих пор мы рассматривали не более чем три критерия. В данной задаче рассматриваются четыре критерия. В этом случае, для того чтобы

получить сечение в координатах некоторой пары критериев, требуется зафиксировать значения двух других критериев.

На рис. 2.2 изображено сечение ЧОЭП в координатах увеличения дохода  $W$  и загрязнения воды  $C$ . Для двух других критериев взяты их максимальные значения  $I = I_{\max}$ ,  $h = h_{\max}$ . Поскольку предпочтительны увеличение дохода и уменьшение загрязнения, то разумно рассмотреть “юго-восточную” границу сечения. Когда прирост дохода отсутствует, то уже имеется исходная концентрация нитратов в 8 мг/л. Сначала при увеличении дохода рост загрязнения на “юго-восточной” границе не очень велик. Затем, при приближении к 164 млн. флоринов, имеется излом границы, в котором зависимость загрязнения от дохода резко меняется. При приближении к максимально достижимому значению дохода в 164 млн. флоринов концентрация нитратов достигает величины 25 мг/л. Другая (“северо-восточная”) граница не представляет интереса – она показывает лишь, что наши возможности загрязнить воду также ограничены.

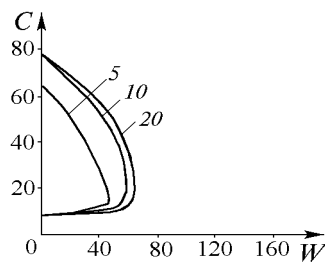


Рис. 2.3

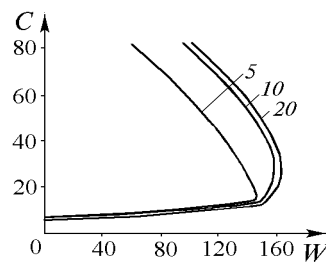


Рис.2.4

Как уже говорилось в гл. 1, единственное сечение множества достижимых целей не дает представления о том, проходит сечение через его недоминируемую границу или нет. То же самое верно для ЧОЭП. Для ответа на вопрос недоминируемости границы требуется рассматривать целый набор сечений ЧОЭП. Именно так мы поступаем на рис. 2.3 – 2.7. Рассмотрим рис. 2.3 и 2.4. На них изображены границы сечений ЧОЭП в тех же координатах, что и на рис.2.2. Падение грунтовых вод  $h$  принимает несколько значений. На рис. 2.3 инвестиции нулевые, а на рис. 2.4 имеем  $I = I_{\max}$ . Заметим, что наиболее широкое из этих сечений уже было изображено ранее на рис. 2.2.

Как видим, качественно границы сечений имеют одну и ту же форму. Более того, при изменении значений  $h$  и  $I$  границы сечений (как недоминируемые, так и доминируемые) как бы сдвигаются. Поскольку они не пересекаются, то проанализировать рассматриваемую совокупность сечений можно довольно легко. Прежде всего отметим, что осуществление инвестиций приводит к росту дохода для всех значений загрязнения. С ростом дохода связано и падение уровня грунтовых вод. Это позволяет

предположить, что рассматриваются сечения ЧОЭП, проходящие через недоминируемую границу этого множества. Так же как и на рис. 2.2, границы характеризуются наличием излома, зависящего от объема инвестиций и падения грунтовых вод.

На основе этих рисунков можно сделать следующий качественный вывод: рост дохода до определенного уровня не должен приводить (при разумном выборе проектов) к резкому увеличению загрязнения; только при превышении этого уровня начинается резкий рост загрязнения. Для специалиста по региональному планированию будет ясен и смысл абсолютных величин критериев, которые могут быть получены в результате развития сельского хозяйства в регионе. На основе рис. 2.3 и 2.4 можно оценить объективное замещение не только между доходом и загрязнением, но и между этими величинами и уровнем грунтовых вод. Так, с увеличением падения грунтовых вод с 5 до 10 см возможности производства резко растут. В то же время, дополнительный рост этой величины с 10 до 20 см практически никакой пользы не приносит. Отметим также, что даже при нулевых инвестициях имеется выбор между величинами трех критериев – он может быть осуществлен за счет изменения использования существующих фондов.

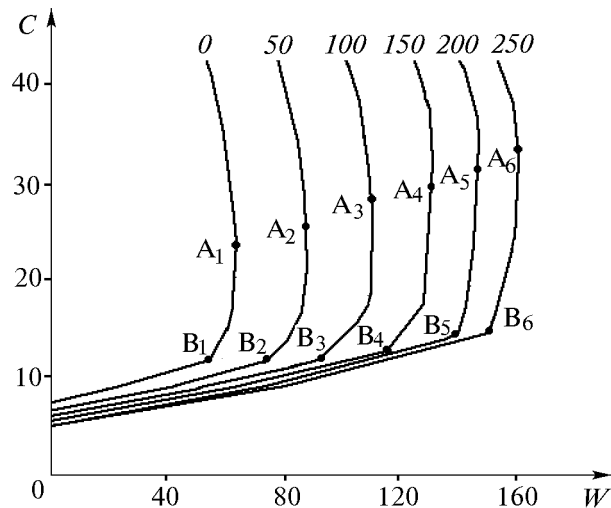


Рис. 2.5

Рассмотрим теперь более подробно влияние инвестиций на разумные компромиссы между доходом и загрязнением. На рис. 2.5 приведены части границ сечений в тех же координатах, что и ранее, но при различных объемах инвестиций для максимального значения критерия уровня



грунтовых вод в 20 см. Как видно, форма сечения не зависит от объема инвестиций, но границы изменяются. В частности, сдвигается излом границы.

Рассмотрим точки излома границы  $B_1, B_2, \dots, B_6$ , в которых имеет место переход от медленного к резкому росту загрязнения при относительно небольшом росте дохода. Сравним эти точки с точками максимального дохода на каждой из границ – с точками  $A_1, A_2, \dots, A_6$ . Прежде всего отметим, что положение точек максимального дохода (крайних точек “юго-восточной” границы сечения) неустойчиво: небольшое изменение в параметрах модели может изменить наклон границы, вследствие чего точка максимального дохода сильно сместится параллельно вертикальной оси. В параграфе 1.1 уже обсуждался вопрос о неустойчивости недоминируемой границы. Здесь мы получили пример такой неустойчивости. Заметим, что подобная ситуация встречается в прикладных задачах довольно часто. Именно поэтому надо не ограничиваться недоминируемой границей, а показать все сечение множества достижимых целей (или его частичной или полной оболочки Эджворта–Парето).

Только взглянув на рис. 2.5, пользователь сразу поймет, что превышать уровень загрязнения выше точек излома попросту неразумно. Поэтому неустойчивость точек максимального дохода никакого практического значения не имеет. Рис. 2.3 и 2.4 показывают, что такое утверждение верно для различных величин критерия падения уровня грунтовых вод. Таким образом, стремление к максимальному доходу при фиксиро-

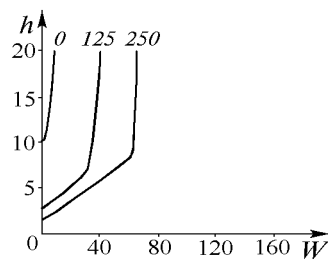


Рис. 2.6

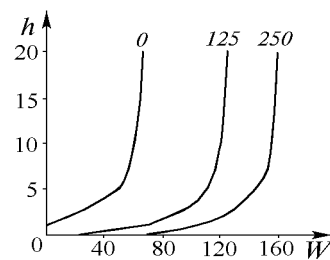


Рис. 2.7

ванных инвестициях неразумно: оно приводит к резкому росту загрязнения. Относительно небольшие уступки по величине дохода позволяют решить эту проблему.

Подчеркнем, что мы здесь не настаиваем на выборе одной из точек излома – может быть, загрязнение следует еще уменьшить. Рис. 2.5 только информирует о том, как два рассматриваемых критерия связаны между собой, т.е. выбор цели на границе с доходом большим, чем в точке излома, нецелесообразен.

На рис. 2.6 изображены сечения ЧОЭП в других координатах: на горизонтальной оси отложен дополнительный чистый доход  $W$ , а на вертикальной – падение уровня грунтовых вод  $h$ . Для каждой серии выбраны три уровня инвестиций, указанные на рисунке. На рис. 2.6 загрязнение минимально и равно 8 мг/л, а на рис. 2.7 оно равно 25 мг/л.

Сразу видно, что сечения рис. 2.6 не касаются горизонтальной оси, т.е. требование минимального загрязнения влечет падение уровня грунтовых вод при любых инвестициях и любом доходе. Кроме того, сечения с нулевыми инвестициями на обоих рисунках не касаются горизонтальной оси, т.е. при отсутствии инвестиций нельзя обеспечить сохранения уровня грунтовых вод на естественном уровне (только за счет варьирования способов использования имеющихся основных фондов). Таким образом, только существенный объем инвестиций позволяет сохранить природные зоны неповрежденными.

Можно было бы рассмотреть и другие сечения ЧОЭП для этой системы. Кроме того, для различных сочетаний критериев (например, для точек  $B_1, B_2, \dots, B_6$  на рис. 2.5) можно было бы рассчитать стратегии, приводящие к этим результатам, и обсудить их. Это дало бы новый материал для размышлений и переговоров о развитии сельского хозяйства в регионе. Мы здесь этого делать не станем из-за недостатка места и сложности описания стратегий (см. [74]).

**Заключение.** Указанные выше зависимости характеризуют наиболее существенные взаимосвязи показателей экономического развития и экологической обстановки. Главный вывод, который может быть сделан при этом, заключается в следующем. За счет небольших дополнительных инвестиций и разумного размещения хозяйства уровень дохода, близкий к максимальному, может быть достигнут при сохранении природы. Это позволяет охарактеризовать экосистему области как устойчивую. Таким образом, она отличается от системы, рассмотренной в главе 1, где при полном развитии ирригации уровень озера снижался настолько сильно, что оно уже не могло быть использовано для отдыха.

### **2.3. Система поддержки проектирования качества воды в реках России**

В данном параграфе описывается компьютерная система, предназначенная для разработки проектов улучшения качества воды в реках России и для поддержки переговоров по проблемам финансирования этих проектов. Система основана на построении и визуализации диалоговых карт решений, используемых для того, чтобы изучить объективное замещение между стоимостью проектов и критериями качества воды. Эта информация способствует лучшему пониманию проблемы и помогает выработать разумные стратегии размещения очистных сооружений и выбор техноло-

гии очистки стоков, позволяющие значительно улучшить состояние окружающей среды, используя приемлемый объем капиталовложений.

**Введение.** Проблемы очистки воды от загрязнений жизненно важны для большинства рек России. При этом необходимо эффективно использовать капиталовложения, выделяемые на охрану природы. Более того, чтобы получить даже небольшое количество средств на эти цели, специалистам в области охраны окружающей среды требуется аргументированно продемонстрировать потенциальным инвесторам (а в их число в настоящее время могут входить как федеральные, так и региональные органы власти, а также руководители или собственники предприятий), что эти средства помогут значительно улучшить состояние окружающей среды.

В рассматриваемой проблеме планирование мероприятий по улучшению качества воды в реке фактически сводится к выработке рекомендаций по размещению оборудования, предназначенного для очистки стоков промышленности и жилищно-коммунального хозяйства, расположенных вдоль рассматриваемой реки, и по выбору технологии очистки. Такая работа постоянно осуществлялась специалистами по качеству воды в Российском государственном институте по проектированию водохозяйственного строительства (Росгипроводхоз).

Обычно при решении задач подобного типа принято использовать оптимизационный подход, в рамках которого применяются компьютерные процедуры для поиска единственной наилучшей стратегии распределения капиталовложений и выбора технологий. В рассматриваемом нами случае методы оптимизации применялись для того, чтобы на основе математических моделей очистки сточных вод и переноса загрязнения найти план мероприятий, имеющий минимальную стоимость при условии удовлетворения заранее заданных медицинских и экологических требований. Трудность состояла в том, что проекты, найденные на основе оптимизационной технологии, были очень дороги даже для ситуации 80-х годов и, тем более, не могут быть реализованы в настоящее время. Кроме того, зачастую просто не существовало решения, удовлетворяющего всем ограничениям. Поэтому специалистам по качеству воды приходилось на основе собственного опыта корректировать оптимальные проекты, исключая из них часть намечавшихся мероприятий. Разрабатывавшиеся таким образом стратегии были неэффективны и подвергались резкой критике. Эти обстоятельства привели к тому, что традиционная технология планирования мероприятий по улучшению качества воды стала неприемлемой. Потребовалось разработать новый подход к проблеме проектирования водоохранных мероприятий, излагаемый далее в данном параграфе<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> В разработке способов использования МДЦ в рассматриваемых задачах активное участие принимала инженер института Росгипроводхоз А.П.Норкина.

В рамках нового подхода мероприятия, направленные на улучшение качества воды, разбиваются на две фазы:

- а) на первой фазе планируется резкое уменьшение загрязнения за счет эффективного использования капиталовложений, которые удастся получить в процессе переговоров с потенциальными инвесторами;
- б) на второй фазе предполагается окончательно решить проблемы качества воды в реке.

МДЦ используется в рамках первой фазы, состоящей в многокритериальном исследовании проблемы. Наряду с критерием минимизации затрат, рассматриваются несколько критериев качества воды. Многокритериальный анализ основан на использовании ДКР.

**Описание модели.** Адекватная математическая модель, которая могла бы полностью описать изучаемую проблему, должна была бы включать подробное описание технологий очистки стоков предприятий различных типов, а также детальное описание переноса различных типов загрязнения вдоль реки с учетом особенностей рельефа русла реки, различных режимов стока и т.д. Такие модели разрабатываются исследователями, но, как обычно, они пригодны лишь для вариантных расчетов, когда при различных режимах стока изучаются последствия некоторого заданного варианта размещения капиталовложений и выбора технологий очистки. Более того, данные, необходимые для подробных моделей, не надежны или их вообще не удается собрать. Поэтому подробные модели не могут быть использованы для целостного рассмотрения проблемы, в том числе для поддержки переговоров о выделении капиталовложений и о выборе разумных вариантов проекта из огромного числа возможных.

В рамках целостного рассмотрения проблемы используется упрощенная модель. Рассматриваемая река разбивается на конечное число участков (створов). В нижней части каждого створа находится гидрологический пункт, в котором измеряются, в частности, концентрации загрязняющих веществ. Промышленные предприятия сгруппированы в отрасли, объединяющие предприятия с близкими структурами технологий и составом загрязнителей в сточных водах. Аналогично в отрасли сгруппированы и жилищно-коммунальные службы. Обычно рассматривается около 20 отраслей промышленности и жилищно-коммунального хозяйства. Кроме того, предприятия сгруппированы по створам, в которых они находятся.

Математическая модель состоит из двух частей:

- а) модель переноса загрязнения, дающая возможность вычислять концентрации загрязнителей в створах при заданных выбросах предприятий;
- б) модель очистки стоков, связывающая уменьшение выбросов загрязнителей с объемом капиталовложений в очистное оборудование.

Модель переноса загрязнения представляет собой линейную модель (матрицу влияния), связывающую выброс загрязнителей в каждом из

створов и концентрацию загрязнителей в гидрологических пунктах. Эта модель не учитывает, например, запаздывания при распространении загрязнителя и описывает некоторую установившуюся ситуацию в среднем за длительный период времени.

В исследовании использовались несколько вариантов модели очистки стоков. Наиболее пригодной оказалась модель, в которой рассматривалась совокупность возможных технологий очистки, а задача состояла в выборе долей стоков, которые будут очищены по той или иной технологии.

Выбор проекта, т.е. принимаемое решение, в модели описывается переменными, характеризующими распределение капиталовложений между створами, между отраслями внутри каждого створа, а также между различными технологиями очистки для каждой отрасли. Одним из критериев выбора решения является общая стоимость проекта, остальные критерии характеризуют загрязненность воды в реке.

Обычно рассматривается более 20 типов загрязняющих веществ, поэтому приходится применять агрегированные показатели загрязнения. Агрегирование основывается на использовании понятия предельно допустимой концентрации загрязнителя, которая определяется исходя из медицинских или экологических требований (предельно допустимая концентрация использовалась в качестве основы для ограничений в оптимизационном подходе). Понятие предельно допустимой концентрации позволяет ввести понятие относительной концентрации загрязнителя, определяемой как отношение имеющейся концентрации к предельно допустимой.

Для построения агрегированного показателя загрязнения загрязнители разбиваются на группы. Показатель равняется сумме относительных концентраций загрязнителей, входящих в группу. Такой показатель среди специалистов по качеству воды принято называть лимитирующим показателем вредности для группы загрязнителей. В настоящее время в системе рассматриваются четыре группы загрязнителей, разработанные специалистами института Росгипроводхоз. В связи с этим, в качестве характеристик загрязненности воды используются четыре лимитирующих показателя вредности, которые имеют следующие условные названия:

- \* санитарный,
- \* токсикологический,
- \* рыбохозяйственный,
- \* общий.

Требуется уменьшать значения лимитирующих показателей вредности, причем идеальным значением показателя является единица. В качестве критериев качества воды выбраны максимальные значения лимитирующих показателей вредности среди всех гидрологических пунктов. Таким образом, сейчас в системе рассматриваются четыре экологи-

ческих критерия: санитарный, токсикологический, рыбохозяйственный и общий.

Важно подчеркнуть, что модель, реализованная в системе в настоящее время, отражает пожелания и возможности специалистов по качеству воды института Росгипроводхоз. В частности, эти специалисты готовили данные по матрице влияния и технологиям очистки стоков. Эта модель является одним из возможных примеров моделей, которые могут быть использованы в системе. Нетрудно заменить эту модель любой другой линейной моделью. Более того, имеется возможность использовать также и нелинейные модели с конечным числом альтернатив.

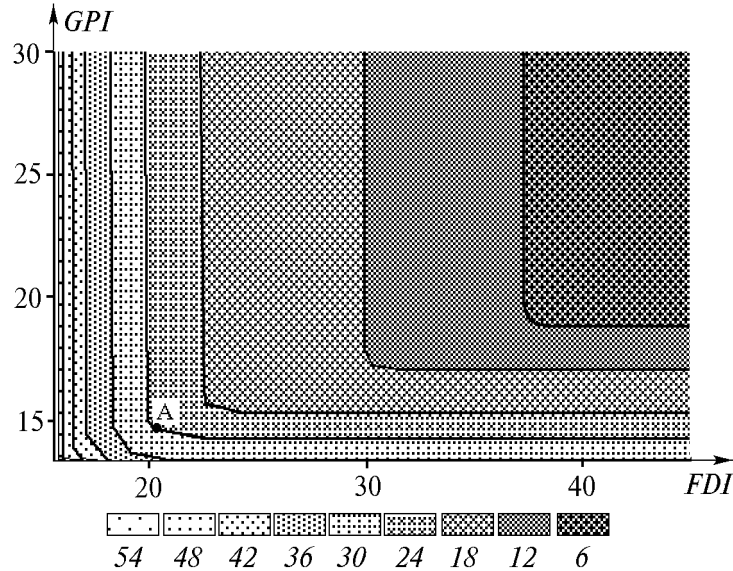


Рис. 3.1

**Анализ ДКР в случае трех критериев.** Итак, в нашем исследовании рассматривается пять критериев: стоимость проекта и четыре экологических критерия, перечисленных выше. Начнем анализ с уже привычного случая трех критериев: стоимости проекта, а также рыбохозяйственного и общего показателей загрязнения. При этом будем предполагать, что на значения двух оставшихся критериев (санитарного и токсикологического) наложены некоторые разумные ограничения.

Рассмотрим карту решений (рис. 3.1) в координатах рыбохозяйственного показателя (*FDI*) и общего показателя (*GPI*) при нескольких фиксированных значениях стоимости проекта (в миллионах рублей 1988 г.). Соответствие стоимости и штриховки приведено под картой решений. Ясно, что представляет интерес уменьшение значений обоих показателей загрязнения. Мы видим, что кривая объективного замещения занимает

лишь малую часть границы сечения, так что в первом приближении наибольший интерес представляют уровни каждого из показателей загрязнения, достижимые при данных затратах. Так, за 6 млн. рублей рыбохозяйственный показатель может быть уменьшен примерно до 37 единиц, а общий показатель – до 19 единиц. Если же затраты увеличить до 12 млн. рублей, то показатели могут быть уменьшены примерно до 28 и 17 единиц соответственно. Далее, увеличивая затраты до 18 млн. рублей, мы имеем уже 23 и 15 единиц. В дальнейшем эффективность дополнительных капиталовложений резко падает: при затратах в 24 млн. рублей име-

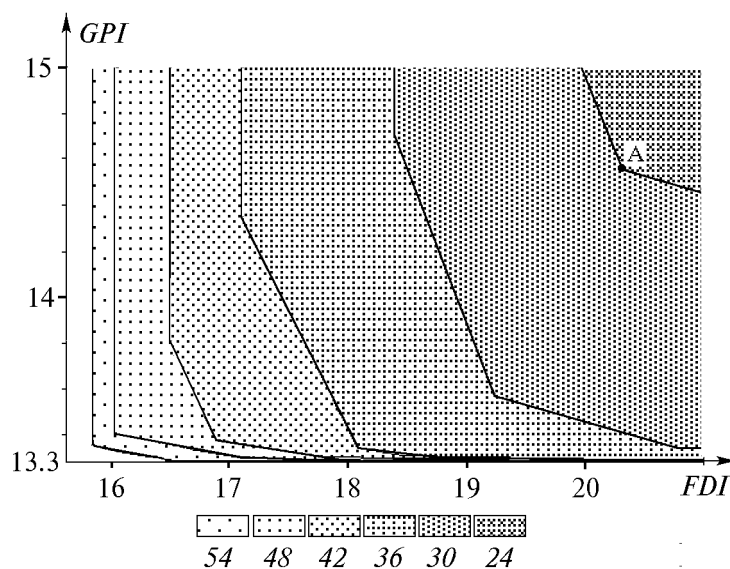


Рис. 3.2

ем минимальную величину рыбохозяйственного показателя около 20 единиц, а общего показателя – около 14 единиц. При дальнейшем росте затрат загрязнение падает еще медленнее.

Начиная с затрат в 24 млн. рублей становится заметной кривая замещения между двумя показателями загрязнения. Поскольку на рис. 3.1 кривые замещения видны недостаточно хорошо, покажем часть карты в увеличенном виде, выбрав диапазон рыбохозяйственного показателя от минимума до 21 единицы, а общего показателя – от минимума до 15 единиц (с помощью ДКР это можно сделать моментально).

Новая карта изображена на рис. 3.2. Последствия увеличения затрат показаны в подробностях. В частности, выбранные значения показателей достижимы при затратах не менее 24 млн. рублей. При этом отчетливо видно объективное замещение между показателями загрязнения, едва

заметное на исходной карте решений. Интересно, что уже при затратах в 30 млн. рублей почти достигается минимальное значение общего показателя. При дальнейшем увеличении затрат удается уменьшать только значения рыбохозяйственного показателя, причем наглядно видно, как падает эффективность роста затрат – границы сечений становятся все ближе и ближе одна к другой. Объективное замещение одного критерия другим также заметно на рис. 3.2 в деталях. Так, хорошо заметен излом замещения в точке А, мало заметный на рис. 3.1.

**Анализ ДКР для пяти критериев.** До сих пор мы рассматривали карты решений только для трех критериев. Что же можно предпринять, если число критериев равно четырем, пяти и т.д.?

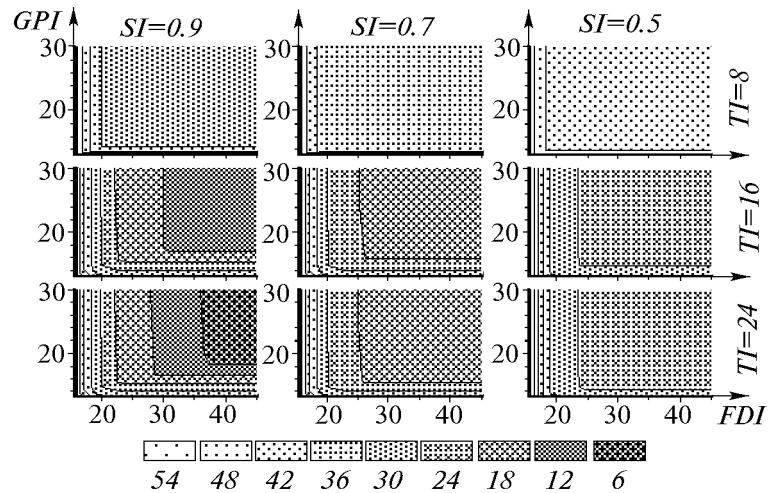


Рис. 3.3

Пусть для начала число критериев равно четырем (например, мы включили в рассмотрение санитарный показатель  $SI$ ). Задав ограничение на значение четвертого показателя, получаем обычную карту решений, приведенную, например, на рис. 3.1. При монотонном усилении или ослаблении этого ограничения мы получим последовательность карт решений, которую можно представить исследователю, расположив карты на экране одну рядом с другой в виде строки. Число карт в строке зависит от интересов исследователя и разрешающей способности монитора. При этом ограничения, накладываемые на значение четвертого критерия, могут выбираться автоматически либо пользователем.

Один из вариантов анализа состоит в изменении карты во времени, т.е. компьютерной анимации карты решений (в виде мультипликации). При этом последовательность рисунков, создающих фильм, не запомина-



ется заранее, а генерируется из построенной ОЭП по заказу исследователя. Мы лишены возможности продемонстрировать такую анимацию на страницах книги.

В случае пяти критериев (например, добавляется токсикологический показатель  $TI$ ) для того, чтобы получить одну карту решений, требуется задать ограничения на значения четвертого и пятого показателей. Задав совокупность ограничений на значения этих показателей, можно получить и изобразить целую матрицу карт решений (см. рис. 3.3).

В этой матрице для каждого вертикального столбца зафиксировано ограничение на значение  $SI$  (его значение дано над столбцом), а для каждого горизонтального ряда зафиксировано ограничение на значение  $TI$  (его значение дано справа от строки). Сравнивая карты решений, скомпонованные в матрицу, исследователь имеет возможность понять, как значения четвертого и пятого критериев влияют на характер кривых замещения между первыми тремя критериями. Конечно, для этого ограничения на значения четвертого и пятого критериев должны быть выбраны надлежащим образом.

Рассмотрим рис. 3.3 подробнее. Начнем с карты в левом нижнем углу. Здесь значение  $TI$  не больше 24 единиц, а значение  $SI$  не больше 0.9 единиц. Как видно, эти значения показателей  $TI$  и  $SI$  могут быть достигнуты уже при затратах в 6 млн. рублей (самая темная штриховка), но при этом величина рыбохозяйственного показателя будет не менее 37 единиц, а общего показателя – не менее 18 единиц. По этой карте легко понять, как увеличение дохода влияет на снижение значений рыбохозяйственного и общего показателей – этот вопрос мы уже обсуждали.

Сравним эту карту с другими картами в том же столбце. Ограничение на величину  $TI$  усиливается при движении по столбцу вверх. На верхнем рисунке, где значение  $TI$  не превосходит 8 единиц, минимально возможные затраты уже составляют 30 млн. рублей (и это при высоких значениях показателей, представленных на осях:  $FDI$  – 20 единиц и  $GPI$  – 14.5). На средней карте, где значение  $TI$  не превышает 16 единиц, достаточно уже 20 млн. рублей для того, чтобы уменьшить рыбохозяйственный показатель  $FDI$  до 16 единиц. Многие другие знания о ситуации могут быть получены из сравнения карт этого столбца.

Теперь сравним карты решений в верхней строке. Все они соответствуют ограничению на показатель  $TI$  в 8 единиц, а ограничение на  $SI$  усиливается при движении слева направо. Сравним минимально возможные затраты на этих картах:

- для значения  $SI$  не более 0.9 – затраты не менее 30 млн. рублей,
- для значения  $SI$  не более 0.7 – затраты не менее 36 млн. рублей,
- для значения  $SI$  не более 0.5 – затраты не менее 42 млн. рублей.

Поскольку величина  $SI=0.9$  вполне удовлетворительна, не имеет смысла делать дополнительные затраты для перехода из крайнего левого столбца в другие.

Можно было бы очень долго обсуждать свойства ситуации, представленные на рис. 3.3. Мы не станем этого делать, заметим лишь, что значения  $TI$  и  $SI$  в данной матрице были выбраны компьютером автоматически, чтобы представить весь диапазон значений этих показателей. Исследователь может легко выбрать другие значения. Далее, число карт решений в матрице было выбрано равным девяти исходя только из возможностей полиграфии. Даже на персональном компьютере с монитором VGA можно было взять матрицу карт решений размером, скажем, одиннадцать на одиннадцать. В любом случае, исследователь легко обнаруживает влияние ограничений, накладываемых на значения четвертого и пятого критериев, на структуру карты решений. Более того, в качестве четвертого или пятого критерия можно было бы выбрать любой из первых трех критериев и рассмотреть соответствующие матрицы карт решений. Эта новая матрица карт строится за несколько секунд в связи с тем, что ОЭП была построена заранее.

Проанализировав матрицу карт решений, исследователь может выбрать одну из карт (например, левую нижнюю карту матрицы на рис. 3.3, которая изображена на рис. 3.1). При этом он фиксирует ограничения на значения четвертого и пятого критериев. Далее работа исследователя совпадает с работой с картой для случая трех критериев: изучив объективное замещение, он выбирает допустимую целевую точку, а далее автоматически рассчитывается план мероприятий, приводящий к выбранной целевой точке, т.е. имеющий выбранную стоимость и приводящий к тому, что значения показателей загрязнения во всех створах реки не превышают зафиксированные пользователем значения.

**Описание системы.** Рассматриваемая компьютерная система состоит из шести основных подсистем:

- подсистемы подготовки исходных данных,
- подсистемы построения ОЭП,
- подсистемы визуального исследования ДКР,
- подсистемы расчета решения,
- подсистемы визуализации решения,
- подсистемы подготовки выходной информации.

Прежде всего, пользователь системы подготавливает исходные данные для исследования: информацию о водном балансе реки и ее притоков, о концентрациях загрязняющих веществ, о возможных параметрах очистных сооружений и т.д. Данные должны быть представлены в виде совокупности файлов, которые подготавливаются в любом текстовом редакторе. Такая форма представления данных в файлах выбрана в соответствии с пожеланиями специалистов, которые использовали систему. Подсистема подготовки данных проводит простейшие тесты на согласованность и, в случае отсутствия ошибок, подготавливает файлы, необходимые для запуска остальных подсистем. В настоящее время разрабатывается усовершенствованный вариант этой подсистемы, основанный на

использовании данных непосредственно из географической информационной системы (ГИС).

В подсистеме построения ОЭП вся работа происходит автоматически. В тоже время, специалист имеет возможность прервать процесс вычислений до того, как будет достигнута желаемая точность аппроксимации ОЭП. Эта возможность используется на начальном этапе исследования, когда еще нет уверенности в том, что исходные данные не содержат ошибок. Визуальный анализ даже весьма грубой аппроксимации ОЭП позволяет проконтролировать наличие ошибок в исходных данных.

Основные возможности подсистемы визуального исследования ДКР были описаны в предыдущем разделе, поэтому здесь мы на них останавливаться не будем. Скажем лишь, что пользователь имеет возможность при помощи простых манипуляций выбрать координатные и цветовой критерии, а также ограничения на значения остальных критериев. Кроме того, он имеет возможность сузить исходный диапазон значений любого из критериев.

В результате исследования ОЭП специалист выбирает одну из достижимых целей, и система автоматически входит в подсистему расчета решения. Расчет решения, реализующего выбранную целевую точку, обычно занимает не более нескольких минут. Подсистема визуализации решения изображает решение, полученное в предыдущем блоке, в виде обычных столбчатых диаграмм. В таком виде представляется распределение капиталовложений, а также концентрации загрязняющих веществ по створам. Эти диаграммы могут быть наложены на карту бассейна реки и отрисованы для тех створов, которые укажет пользователь. Более того, здесь же может быть отображена и другая информация, относящаяся к данной реке. Таким образом, эту подсистему можно рассматривать как ГИС специального назначения. Поскольку исходные данные для описываемой системы могут быть получены из ГИС, возникает проблема построения многоцелевой компьютерной системы анализа речного бассейна, состоящей из ГИС, имитационной системы моделирования реки как физического объекта и системы поддержки переговоров и принятия решений.

Подсистема подготовки выходной информации дает возможность представить решение в виде таблиц, традиционно используемых при планировании природоохранных мероприятий. Кроме того, с помощью снятия копий с экрана компьютера, имеется возможность получить копии некоторых характерных кривых объективного замещения, полученных в процессе анализа ДКР. Эти копии, наряду с таблицами и диаграммами, характеризующими несколько вариантов проекта, представляются для обсуждения лицам, принимающим решения о выделении капиталовложений. Специалисты по качеству воды в процессе такого обсуждения пытаются доказать практическую эффективность предлагаемых вариантов и надеются получить финансовые средства, достаточные для заметного

улучшения качества воды. В такой ситуации, специалисты играют роль экспертов, отбирающих из большого числа возможных конечных результатов их небольшое число. Метод достижимых целей позволяет сделать это на основе полной информации о возможностях выбора решения (см. [76]).

В процессе опытной эксплуатации системы были разработаны несколько проектов. Данные, представленные на рис. 3.1 – 3.3, соответствуют подмосковной реке Нара.

**Заключение.** Поскольку рассмотренная здесь система оказалась удобным средством анализа проблем выбора проекта улучшения качества воды в бассейнах рек, недавно была начата работа по созданию интегрированной системы поддержки различных решений бассейновыми управлениями. В рамках интегрированной системы, описанная здесь система поддержки принятия решений и переговоров об улучшении качества воды должна базироваться на информации, содержащейся в географической информационной системе, и возвращать результаты решений в эту же ГИС. Заметим, что обычно в ГИС присутствуют не все данные, необходимые для работы описываемой компьютерной системы. В частности, нет матриц переноса загрязнения вдоль реки. Предполагается, что вместо экспертных оценок, используемых в настоящее время, для построения этих матриц будут проводиться имитационные эксперименты с подробной моделью распространения загрязнения в реке. Данные для такой модели предполагается получать непосредственно из ГИС. Данные о параметрах типовых очистных сооружений предполагается получить при помощи специальной системы агрегирования обширной базы данных, содержащей исходную информацию об имеющихся в настоящее время технологиях очистки сточных вод различного состава.

## **2.4. Разработка стратегий уменьшения загрязнения атмосферы**

Кислотные дожди являются одной из главных экологических проблем развитых стран. В результате выпадения кислотных осадков гибнут леса, угнетаются озерные экосистемы, снижается продуктивность сельскохозяйственного производства и т.д. Повышенная концентрация в воздухе окислов серы и азота, а также некоторых других веществ приводит к увеличению заболеваемости. Окислы серы и азота сохраняются в атмосфере в течение нескольких дней и переносятся атмосферными потоками на расстояние до нескольких тысяч километров. В связи с этим проблема кислотных дождей становится межстрановой. Выработка группой стран совместных стратегий решения этой проблемы представляется естествен-

ным способом повышения эффективности борьбы с загрязнением атмосферы<sup>14</sup>.

В процессе выработки совместных стратегий борьбы с загрязнением атмосферы основной является проблема рационального использования финансовых ресурсов, направляемых на уменьшение выбросов в атмосферу. Затраты, необходимые для уменьшения эмиссии загрязнителей, крайне велики, они составляют миллиарды долларов, поэтому эффективное использование этих средств крайне важно. С другой стороны, эффективная кооперация стран может потребовать безвозмездной передачи части средств от одной страны к другой. Ясно, что это не только уменьшает занятость населения в стране-доноре, но и может быть сопряжено с риском потери контроля над данными средствами. Где и как использовать ограниченные ресурсы для того, чтобы был достигнут максимальный эффект, и в то же время выбранный вариант был приемлемым с политической и организационной точек зрения?

Подобные вопросы заслуживают детального анализа, в том числе и с использованием компьютерных средств. В данном параграфе описывается компьютерная система поддержки переговоров между представителями нескольких стран, разрабатывающих совместные стратегии борьбы с атмосферным загрязнением. Система должна помочь найти выгодные для всех сторон стратегии, в рамках которых финансовые ресурсы одних стран используются для природоохранных мероприятий в других странах.

Компьютерная система была адаптирована для поддержки переговоров между представителями России и Финляндии по проблеме кислотных дождей. Кроме того, в исследование включена Эстония в связи с тем, что выбросы в Эстонии играют существенную роль в загрязнении воздушной среды Финляндии. Система была адаптирована к проблемам межстранового переноса загрязнения в масштабах Европы в целом. Эта тема осталась за пределами данной книги.

**Описание проблемы.** В 1992 г. было подписано соглашение между Россией и Финляндией о сотрудничестве в области экологических проблем (в том числе и проблем охраны воздушной среды). В рамках этого соглашения должны быть разработаны стратегии совместных действий в различных областях охраны окружающей среды. Аналогичные соглашения о сотрудничестве заключены между Финляндией и Эстонией.

В Финляндии в конце 80-х годов была разработана программа поддержки инвестиций в странах Восточной Европы, направляемых на уменьшение выбросов загрязнителей на тех объектах, которые оказывают влияние на состояние атмосферы в Финляндии. Вопрос об объеме такой

---

<sup>14</sup> Данный параграф базируется на совместной работе российских и финских ученых, более подробно описанной в статье [76]. Эта работа проводилась в рамках Российско-финской технической рабочей группы по исследованию операций.

поддержки и о стратегиях ее использования должен быть решен в процессе переговоров между представителями заинтересованных стран. Ясно, что применение методов компьютерной визуализации компромиссов может помочь проведению переговоров. Если эксперты соответствующих министерств Финляндии и России смогут с помощью компьютерной системы выработать разумные компромиссы между различными интересами этих стран, то это позволит улучшить понимание ситуации политиками и другими заинтересованными лицами и поможет им найти приемлемые решения. При этом представители министерств, регионов и заинтересованных предприятий также должны иметь возможность использовать данную компьютерную систему, а не только обсуждать компромиссы, выработанные экспертами.

**Математическая модель и исходные данные.** В исследованиях по загрязнению атмосферы Финляндии и приграничных областей России традиционно выделяются следующие регионы (см. карту на рис. 4.1):

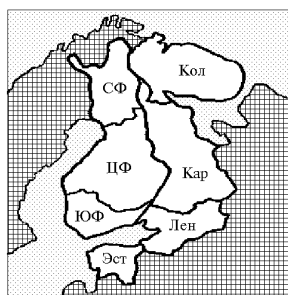


Рис. 4.1

- 1) территория Финляндии делится на три региона: Северная, Центральная и Южная Финляндия;
- 2) в России выделяются три приграничных региона: Кольский полуостров, Карелия и Ленинградская область.
- 3) в качестве отдельного региона рассматривается Эстония.

При разработке компьютерной системы было решено сохранить это деление, что позволило использовать имеющиеся данные об уровне загрязнения, о переносе

загрязнения и о возможных затратах на уменьшение выброса загрязнения. В данном исследовании было решено ограничиться единственным типом загрязнителя – окислами серы.

Математическая модель, используемая в компьютерной системе, представляет собой типичную интегрированную модель, предназначенную для целостного рассмотрения экологической проблемы. Модель состоит из двух блоков: 1) модели переноса окислов серы между рассматриваемыми регионами, 2) моделей региональных затрат на уменьшение выброса окислов серы.

Оба блока интегрированной модели были построены как упрощенное описание двух рассматриваемых подсистем. Модель переноса основывается на использовании матрицы переноса серы между рассматриваемыми регионами России и Финляндии, а также Эстонией. Загрязнение в каждом регионе равно сумме выпадения экзогенного загрязнения, т.е. поступающего из регионов за пределами рассматриваемого района, и эндогенного загрязнения, т.е. являющегося следствием выброса внутри рассматриваемого

мого района. Изменения экзогенного загрязнения во времени заданы, а последствия выброса внутри региона могут быть рассчитаны на основе матрицы переноса и эмиссии загрязнения в рассматриваемых регионах. Точнее говоря, эндогенное загрязнение получается путем суммирования по всем рассматриваемым регионам получаемых из них загрязнений. При этом загрязнение, получаемое из некоторого региона при заданной эмиссии, можно подсчитать, умножив эмиссию на соответствующие коэффициенты матрицы переноса. Таким образом, используется линейная модель выпадения загрязнения. Эта модель является приближенной, она отражает результаты моделирования процессов переноса на сложных нелинейных моделях. В России такое моделирование осуществляется, например, в находящемся в Москве Восточном метеорологическом центре Европейской программы по мониторингу и оценке загрязнения атмосферы.

Таблица 3.1

<i>Регионы-эмиттеры</i>	<i>СФ</i>	<i>ЦФ</i>	<i>ЮФ</i>	<i>Кол</i>	<i>Кар</i>	<i>Лен</i>	<i>Эст</i>
<i>Регионы-рецепторы:</i>							
Северная Финляндия (СФ)	.200	.017	.010	.046	.012	.000	.000
Центральная Финляндия (ЦФ)	.000	.300	.062	.011	.047	.036	.029
Южная Финляндия (ЮФ)	.000	.017	.227	.003	.000	.027	.038
Кольский п-ов (Кол)	.000	.017	.000	.286	.023	.009	.000
Карелия (Кар)	.000	.033	.031	.017	.318	.045	.019
Ленинградская обл. (Лен)	.000	.017	.031	.003	.012	.268	.058
Эстония (Эст)	.000	.000	.031	.000	.000	.018	.221

Матрица переноса была получена в результате выполнения совместной программы по оценке потоков загрязнителей между этими странами, разработанной в 1988 г. Советско-финской комиссией по охране окружающей среды. Исследование состояло в оценке эмиссии, создании модели переноса загрязнения, анализе эмпирических данных и в формулировке предложений по уменьшению эмиссии. Изучались эмиссия и перенос окислов серы и азота, а также тяжелых металлов. В частности, была получена и опубликована информация о выпадении окислов серы в виде осадков в Финляндии, Эстонии и приграничных районах России в 1980 и 1987 годах. Эти величины были подсчитаны на основе использования модели переноса окислов серы, разработанной в рамках Европейской программы по мониторингу и оценке загрязнения атмосферы Западным метеорологическим центром (Осло, Норвегия). Были также собраны данные по эмиссии окислов серы, которые были утверждены представителями упомянутой комиссии. На основе баланса окислов серы за 1987 г. была оценена матрица переноса окислов серы, описывающая связь между эмиссией и выпадением кислотных осадков в регионах рассматриваемого района (эта матрица приведена в таблице 3.1).

Для того чтобы использовать эту модель в рассматриваемой нами задаче рационального распределения затрат, требуется связать уменьшение

эмиссии окислов серы с затратами на проведение этой операции. Функции затрат были рассчитаны на основе изучения возможных технологий очистки выбросов предприятий. Эта работа была осуществлена Техническим Исследовательским Центром (VTT) Финляндии. В этой же работе дана оценка экзогенного загрязнения. Полученные результаты позволяют связать уровень выпадения загрязнения с затратами на уменьшение эмиссии.

На рис. 4.2 приведены зависимости затрат, необходимых для уменьшения эмиссии серы в трех регионах Финляндии. По горизонтальной оси отложены величины эмиссий (в тыс. тонн), а по вертикальной оси – затраты (в млрд. финских марок, 1 доллар США соответствует примерно пяти финским маркам). Пересечение графиков с горизонтальной осью (нулевые затраты) соответствует уровню эмиссии в конце 80-х годов. Удельные затраты характеризуются наклоном кривой. Как видно, в Северной Финляндии эмиссия мала, причем требуются достаточно большие удельные затраты для дальнейшего уменьшения эмиссии. Наоборот, в Центральной и Южной Финляндии эмиссии значительно выше, но в то же время, удельные затраты в этих регионах меньше (если уменьшение эмиссии не слишком велико). При увеличении масштабов мероприятий, связанных с уменьшением эмиссии, удельные затраты растут до уровней, характерных для Северной Финляндии.

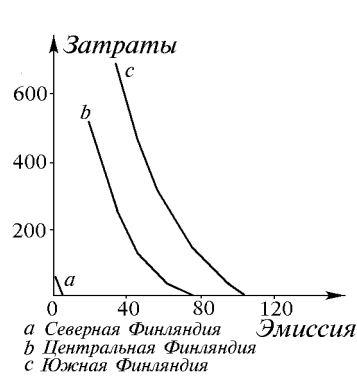


Рис. 4.2

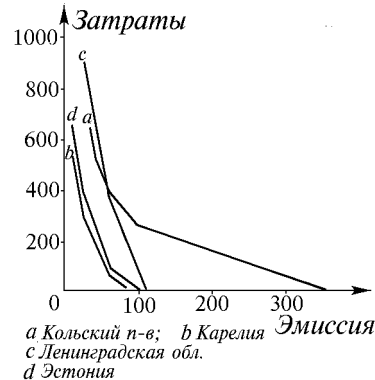


Рис. 4.3

На рис. 4.3 приведены зависимости затрат от эмиссии серы для России и Эстонии. Эти кривые имеют качественно тот же вид, отличаясь лишь величинами наклонов кривых. Особенно выделяется зависимость для Кольского полуострова, которая характеризуется большими эмиссиями и относительно низкими удельными затратами.

В данной модели допустимыми являются неотрицательные затраты, а в качестве показателей, отражающих интересы сторон, участвующих в переговорах, были взяты экологические показатели, характеризующие



годовые выпадения кислотных осадков в различных регионах, и экономические показатели: затраты на уменьшение выброса загрязнителя в том или ином регионе. Описанная модель позволяет оценить значения показателей для каждого допустимого варианта затрат.

**Анализ компромиссов и построение стратегий.** Поскольку система предназначена для различных пользователей, было решено не фиксировать заранее набор критериев выбора решения, а наоборот, предоставить пользователю возможность сформулировать интересующий его набор критериев, взяв их из некоторого достаточно представительного списка показателей. В связи с этим в системе была реализована диалоговая подсистема формирования набора критериев, интересующих пользователя. Кроме того, оказалось полезным позволить исследователю накладывать ограничения на значения показателей.

Перечислим возможные критерии выбора решения в системе:

- 1) затраты на уменьшение эмиссии в каждом из регионов;
- 2) затраты на территории Финляндии в целом и России в целом;
- 3) общие затраты;
- 4) удельное (на единицу площади) выпадение кислотных осадков в каждом из регионов;
- 5) максимальное (по регионам) удельное выпадение осадков в каждой из стран;
- 6) максимальное удельное выпадение осадков на всей территории.

Исследователь начинает свою работу с выбора тех критериев модели, взаимосвязь между которыми он хотел бы изучить. Число критериев, выбираемых для одновременного исследования, не должно превосходить пяти. Исследователь имеет возможность наложить ограничения на значения всех показателей (выбранных и не выбранных в качестве критериев для текущего исследования).

Напомним, что для построения ОЭП исследователь должен определить направление улучшения для каждого из выбранных критериев. Это может оказаться неудобным в ситуациях, когда пользователь затрудняется задать направление улучшения некоторого критерия (или хотел бы изучить проблему вне зависимости от направления улучшения значения этого критерия). Поэтому в системе имеется возможность использовать ЧОЭП или множество достижимых целей непосредственно. Пример использования ЧОЭП приведен далее в данном параграфе.

После выбора набора критериев и задания ограничений программа проверяет ограничения на совместность. Если ограничения несовместны, то пользователь должен изменить их. В случае их совместности программа переходит к построению множества достижимых целей, ЧОЭП или ОЭП. Визуальное исследование, пример которого описан в следующем разделе, завершается выбором компромиссной цели. Далее автоматически отыскивается эффективная стратегия, соответствующая выбранной

цели. Она может быть представлена на дисплее не только в табличном виде или в виде диаграмм, но и на географической карте.

Опишем простой пример использования системы. Предположим, что выбраны три критерия:

- 1) затраты на уменьшение эмиссии на территории Финляндии (CF), в миллионах финских марок,
- 2) затраты на уменьшение эмиссии во всех странах, рассматриваемых в модели (CT), в миллиардах финских марок,
- 3) максимальное удельное выпадение загрязнения в Финляндии (PF), в граммах на квадратный метр за год.

Предполагается, что значения второго и третьего критериев следует уменьшать, а для первого критерия это направление не определено иссле-

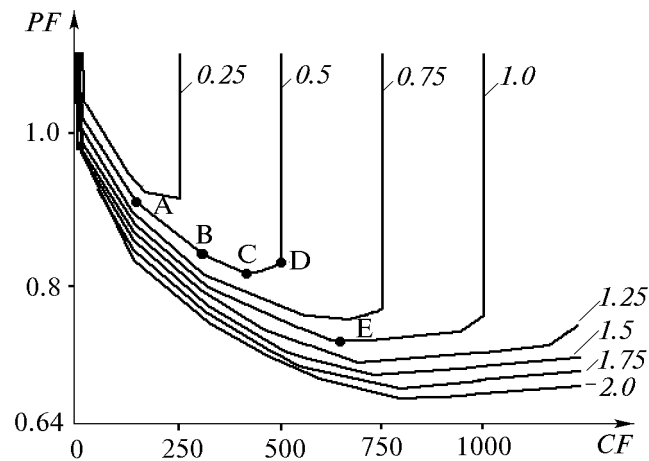


Рис. 4.4

дователями. Пусть наложены следующие ограничения: удельное выпадение осадков в Северной Финляндии не должно превышать 0,4 г/кв.м; удельное выпадение осадков в Центральной Финляндии не должно превосходить 0,5 г/кв.м. Читатель не должен удивляться такой постановке – исследование было проведено финскими специалистами, поэтому ограничения отражают интересы Финляндии. Мы считаем, что анализ интересов Финляндии любопытен и для российского читателя, особенно если учитывать тот факт, что в данной ситуации именно Финляндия должна играть роль страны-донора.

Проверка показывает, что ограничения модели оказываются совместными. Поскольку не для всех критериев определено направление их улучшения, в данном случае строится ЧОЭП по второму и третьему критериям. На рис. 4.4 приведена серия двумерных сечений этого множества

в координатах критериев CF (затраты на территории Финляндии) и PF (загрязнения в Финляндии) при восьми значениях критерия СТ (суммарные затраты), равных 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.50, 1.75 и 2.0 миллиардов финских марок.

Рассмотрим более внимательно сечение, соответствующее суммарным затратам в 0.5 млрд. финских марок. Как видно, при увеличении затрат на территории Финляндии CF от нуля до 400 млн. марок (точка C) загрязнение в Финляндии падает, а затем, при росте CF до 500 млн. марок (точка D), начинает медленно расти. Действительно, точка A означает, что удельное выпадение загрязнения составит 0.9 г/кв.м, если только 140 млн. марок из общей суммы будут истрачены на территории Финляндии. Движение вдоль кривой, означающее увеличение затрат на территории Финляндии при постоянных общих затратах, приводит к уменьшению выпадения загрязнения (в точке C загрязнение составит 0.8 г/кв.м при затратах в 400 млн. марок на территории Финляндии), а затем и к его росту (точка D). Это означает, что при фиксированных общих затратах в 500 млн. марок имеется наиболее рациональное для Финляндии (если учитывать только три рассматриваемых критерия) распределение затрат между очисткой источников на территории и вне Финляндии, задаваемое точкой C. Это 400 млн. марок на территории Финляндии и 100 миллионов марок – вне ее. Ясно, что 400 млн. марок должны быть инвестированы Финляндией. Вопрос о том, какая часть из 100 млн. марок будет предоставлена Финляндией, а какая – страной-партнером, должен быть рассмотрен во время переговоров. При этом важно понимать, что в таком распределении общих затрат между территорией Финляндии и вне ее заинтересована финская сторона. Рассчитав стратегию, соответствующую этой цели, можно найти распределение затрат по регионам, выгодное для Финляндии.

А что произойдет, если общие затраты будут выше или ниже? Это видно из соседних кривых на рассматриваемом рисунке. При общих затратах в 250 млн. марок (см. кривую выше рассмотренной ранее) Финляндия заинтересована в полном использовании их на своей территории, т.е. при малых общих затратах для Финляндии не имеет смысла связывать свои затраты с развитием совместных проектов. Если же общие затраты составляют 1 млрд. финских марок, для Финляндии разумно выбрать точку E на соответствующей кривой, в которой затраты на территории Финляндии составляют 650 млн. марок, а удельное выпадение осадков – 0.74 г/кв.м.

Остальные инвестиции должны делаться в других регионах. Интересно отметить общую тенденцию – увеличение общих затрат при фиксированных затратах на территории Финляндии приводит лишь к незначительному уменьшению загрязнения в Финляндии (сравните, например, точку A и точку, лежащую прямо под ней на кривой с общими затратами в 0.75 млрд. марок). Увеличение общих затрат приводит к значительному

уменьшению загрязнения лишь при движении по кривой, т.е. тогда, когда одновременно увеличиваются затраты на территории Финляндии. В то же время, с увеличением общих затрат выгодно увеличивать затраты вне Финляндии (например, в точке Е такие затраты составляют уже 350 млн. марок).

Решение, соответствующее точке Е, приведено на рис. 4.5 – 4.7. На рис. 4.5 показано распределение затрат между регионами, а на рис. 4.6 – эмиссия серы по регионам до и после выполнения проекта. На рис. 4.7 изображено выпадение серы до и после осуществления проекта. Рис. 4.5 показывает, что на территории Финляндии все затраты разумно сделать в Южной Финляндии. В связи с тем, что Эстония интенсивно загрязняет атмосферу Южной Финляндии, значительную часть зарубежных затрат (270 млн. марок) выгодно сделать именно в Эстонии, а 90 млн. марок – в Ленинградской области. Уменьшение выпадения серы в основном приходится на Южную Финляндию и Эстонию, однако в Ленинградской области, Карелии и Центральной Финляндии уменьшение также заметно.

Подчеркнем, что здесь анализ проводился финскими специалистами с точки зрения выгоды финской стороны, причем при выбранных заранее ограничениях на выпадение загрязнения в Северной и Центральной Финляндии. Иные априорные ограничения на эти величины могли бы привести к иным результатам. Поэтому было бы разумно провести анализ сразу пяти критериев, включив в их число выпадение загрязнения в Северной и в Центральной Финляндии.

Можно было бы рассмотреть и другие критерии, другие кривые и другие точки. Мы здесь не делаем этого, поскольку данная система – только один из многих примеров использования МДЦ для поддержки переговоров, и мы не можем останавливаться на ней более подробно. Подчеркнем лишь, что понимание интересов партнеров по переговорам – важнейший фактор их успешного проведения. Именно информирование об интересах, а не навязывание каких-либо априорных решений, является задачей описанной здесь системы и МДЦ в целом.

Описанная система стала прототипом других компьютерных систем, предназначенных для выработки эффективных стратегий уменьшения загрязнения атмосферы. В частности, была разработана компьютерная система, позволяющая вырабатывать совместные стратегии уменьшения загрязнения атмосферы в Европе.

## 2.5. Поиск компромиссных стратегий устойчивого глобального экологического развития

Поиск разумных стратегий стабильного развития цивилизации в рамках тех границ изменения параметров биосферы, нарушение которых грозит

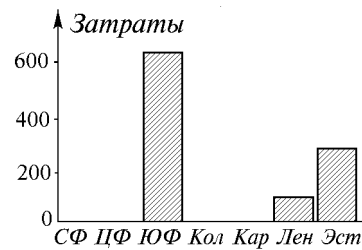


Рис. 4.5

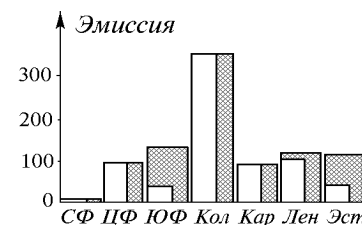


Рис. 4.6

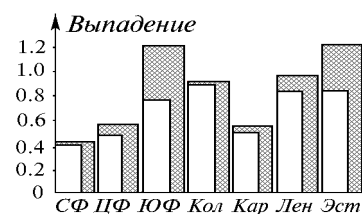


Рис. 4.7

человечеству потерей возможности его существования, является одним из важнейших вопросов. Это связано с резким увеличением антропогенной нагрузки, которая в настоящее время способна привести к глобальной перестройке биосферы. Изучение этого вопроса требует прежде всего целостного рассмотрения процессов общепланетарного масштаба: требуется проанализировать взаимодействие человечества и биосферы и выработать разумные стратегии такого взаимодействия.

**Об анализе глобальных эколого-экономических систем.** В первой главе уже говорилось о сложности изучения систем, состоящих из подсистем различной природы. Система “человек–биосфера” является характерным примером таких систем. Действительно, достаточно вспомнить, что эта система должна включать, по крайней мере, три блока: блок климата, блок эволюции биоты и блок человеческой активности, каждый из которых является сложнейшим объектом математического моделирования. Поэтому изучение этой системы традиционно осуществляется различными научными дисциплинами, каждая из которых имеет свой язык и свою систему понятий. Объединение знаний специалистов, принадлежащих к различным научным направлениям, может быть осуществлено на основе универсального метода математического моделирования. Следует, однако, отдавать себе отчет в том, что в каждой научной дисциплине существуют собственные принципы построения математических моделей. Поэтому математические модели, используемые различными дисциплинами, могут качественно различаться между собой, что отражает тот факт, что они описывают разнородные объекты.

При разработке методов математического исследования глобальных проблем возникают два основных вопроса: построение достаточно надежных моделей изучаемых процессов и разработка методики совместного анализа моделей различной природы. МДЦ может служить основой методики анализа системы моделей. Эта методика принципиально отличается от методики вариантных расчетов, традиционно используемой при исследовании глобальных проблем, отсутствием требования заранее формулировать сценарии антропогенного воздействия, последствия которых изучаются в имитационных экспериментах<sup>15</sup>.

Как мы уже говорили, вариантные расчеты не дают возможности найти разумные стратегии взаимодействия с биосферой. Более того, они ориентируют на организацию переговоров на основе заранее сформулированных стратегий (позиций), а не на принципиальные переговоры. В отличие от вариантных расчетов, МДЦ применяется для выработки разумных стратегий поведения человечества в системе “человек–биосфера”. Выработка стратегий обычно осуществляется на основе анализа интегрированной модели, которая строится на основе упрощения исходных мо-

---

<sup>15</sup> Широкое распространение имитационные исследования получили после книги Дж. Форрестера “Мировая динамика” [54].

делей основных подсистем глобальной системы (подробности этой методики рассмотрены в гл. 4). В качестве примера реализации методики рассмотрим прототип компьютерной системы, предназначенной для выработки компромиссных стратегий решения важной глобальной экологической проблемы – проблемы глобального изменения климата (парникового эффекта).

**О парниковом эффекте.** В последнее время резко возросло содержание в атмосфере некоторых газов, а именно углекислого газа, закиси азота, метана и хлорфторуглеводородов и т.д. Эти газы практически прозрачны для коротковолновой солнечной радиации, но поглощают и испускают длинноволновое (тепловое) излучение и, таким образом, могут оказывать влияние на климат Земли. Особенно важна роль углекислого газа, но и другие газы, вызывающие парниковый эффект, играют теперь почти такую же важную роль в изменении климата. Если существующие тенденции сохранятся, то совместное увеличение содержания в атмосфере углекислого газа и других газов, вызывающих парниковый эффект, по своему радиационному воздействию станет эквивалентным удвоению концентрации углекислого газа (по сравнению с доиндустриальным уровнем), возможно, уже к началу 20-30-х годов следующего века.

Эксперименты, проводимые с моделями климатической системы, показывают, что удвоение концентрации углекислого газа в атмосфере ведет к повышению глобальной средней равновесной температуры у земной поверхности на 1.5 – 4.5 градуса. Однако, учитывая сложность климатической системы и несовершенство ее моделей, нельзя исключить значеня, выходящие за пределы данного диапазона. С другой стороны, тепловая инерция океанов будет замедлять такие изменения; ожидается, что средние равновесные температуры, соответствующие удвоенным концентрациям газов, вызывающих парниковый эффект, будут достигнуты лишь через несколько десятков лет. Хотя такие факторы, как изменения концентрации аэрозолей, притока солнечной энергии и растительного покрова, также могут оказывать влияние на климат, наиболее важной причиной климатических изменений в следующем столетии явятся, по-видимому, изменения концентрации газов, вызывающих парниковый эффект.

Моделирование региональных изменений климата пока еще не дает надежных результатов, однако можно утверждать, что в высоких широтах поздней осенью и зимой повышение температур может быть больше, чем в тропиках; средний годовой сток может увеличиваться в высоких широтах, а в средних широтах северного полушария засушливое лето на континентах может стать более частым явлением. Хотя ожидается, что повышение температуры в тропиках будет меньшим, чем в среднем для всего земного шара, однако его воздействие на экосистемы и условия жизни человека в тропиках может иметь далеко идущие последствия: повсюду увеличится испарение, а во влажных тропических областях количество осадков может возрасти.

Исходя из данных наблюдений, можно полагать, что глобальное потепление в пределах 1.5 – 4.5 градусов приведет к повышению уровня океана на 20 – 140 см. Если будет достигнут верхний предел указанного диапазона, это может непосредственно оказать сильное воздействие на прибрежные районы. Если исходить из данных, свидетельствующих о последствиях изменения климата в далеком прошлом, то нет ни малейшего сомнения в том, что будущие климатические изменения, которые получаются в моделях климата для удвоенной концентрации углекислого газа в атмосфере, могут оказать глубокое воздействие на экосистемы, сельское хозяйство, водные ресурсы и морские льды.

Постоянно принимается много дорогостоящих решений по долгосрочным проектам, например, о крупномасштабных работах, направленных на использование водных ресурсов (например, развитие ирригации и гидроэнергетики), о строительстве инженерных сооружений в прибрежной зоне и т.д. Все эти решения основаны на предположении о том, что ранее полученные климатические данные могут быть использованы без каких-либо изменений в качестве надежной основы для планирования на будущее. Однако такое предположение сейчас уже не оправдывается, поскольку, как ожидается, рост концентрации газов, вызывающих парниковый эффект, приведет к существенному потеплению глобального климата в следующем столетии.

Проблемы изменения климата и повышения уровня моря в результате действия газов, вызывающих парниковый эффект, тесно связаны с другими крупными проблемами, касающимися окружающей среды, такими, как кислотные осадки и опасность разрушения защитного озонового слоя Земли, которые возникают главным образом вследствие изменения состава атмосферы в результате деятельности человека. Так, сокращение потребления угля и нефти вместе с принятием мер по сокращению потребления энергии с целью уменьшения кислотных осадков приведут также к снижению выбросов газов, вызывающих парниковый эффект.

Несмотря на то, что некоторое потепление климата вследствие деятельности человечества в недавнем прошлом представляется в настоящее время уже неизбежным, сбережение энергии, уменьшение использования ископаемого топлива и снижение выбросов газов, вызывающих парниковый эффект, могли бы оказать существенное влияние на скорость и степень потепления в будущем. В связи с этим, вопрос о методах поиска компромиссных стратегий противодействия возможным изменениям климата представляет огромный интерес.

Очевидно, что разработка разумных стратегий, связанных с парниковым эффектом – конечная цель проводимых в настоящее время широко-масштабных исследований, концентрирующихся вокруг проблемы глобального потепления. Однако, в силу традиции, самой методике поиска разумных стратегий внимания до сих пор уделялось крайне мало. Между тем, проблема поиска разумных решений в области уменьшения масшта-



бов изменения климата далеко не тривиальна. Даже если бы удалось выработать удовлетворяющую всех модель природных процессов, связанных с парниковым эффектом, и собрать все необходимые данные, остались бы трудности, определяемые наличием разных интересов у представителей различных стран и различных слоев общества.

Уже сейчас ясно, что глобальное изменение климата в разной степени скажется на экономике различных стран. Это приведет к тому, что страны в разной степени будут заинтересованы в ограничении выброса парниковых газов. Далее, уменьшение таких выбросов связано с достаточно крупными затратами и, более того, эти затраты могут иметь разный эффект в различных странах. Поэтому вряд ли удастся найти простое “справедливое” правило, позволяющее назначить уменьшение выброса парниковых газов каждой из стран – скорее всего эти проблемы будут решаться в процессе сложных и долгих переговоров, направленных на поиск разумного компромисса.

В связи со сказанным основной вопрос, стоящий при разработке процедур компьютерной поддержки переговоров, связанных с парниковым эффектом – это выработка такой методики, которая могла бы свести воедино результаты всех (модельных, экспертных и эмпирических) исследований проблемы парникового эффекта и реально помочь в выработке разумных компромиссных решений.

**Математическая модель глобальной системы.** Математическая модель, использовавшаяся в демонстрационной системе, предназначена для того, чтобы продемонстрировать возможности предлагаемой методики исследования. Отсутствие достаточно надежных моделей и данных заставляет рассматривать результаты исследования как чисто методологические. В модели, использованной в данном исследовании, многие аспекты проблемы игнорируются или описываются чересчур упрощенно – так, суша земного шара была разбита на малое число регионов по политико-экономическому принципу. Исходные данные, используемые в модели, зачастую лишь правдоподобны. Тем не менее, эта модель позволяет подойти к процессам изменения глобального климата как к единому целому.

Модель включает четыре основных блока:

- блок антропогенной эмиссии углекислого газа, в котором описываются возможные варианты эмиссии по группам стран и оцениваются затраты, связанные с их реализацией;
- блок глобального углеродного цикла, который позволяет связать увеличение концентрации углекислого газа с ее антропогенными выбросами на основе использования динамических моделей биоты и океана;
- блок климата, в котором описывается связь изменений климатических условий в различных регионах земного шара с вызывающим эти изменения увеличением концентрации углекислого газа;

– блок влияния изменений климата на экономику различных стран.

Модель антропогенной эмиссии углекислого газа представляет собой совокупность соотношений, связывающих выброс углекислого газа с экономическим развитием региона, уровнем энергопотребления и уровнем технологии потребления энергии. Предполагается, что относительное уменьшение эмиссии связано исключительно со снижением энергоёмкости производства. Считается, что изменение удельных энергозатрат (и, следовательно, эмиссии углекислого газа) зависит от средств, направляемых на эти цели.

Для описания связи эмиссии и концентрации углекислого газа используется простейшая линейная модель изменения относительной концентрации углекислого газа. В этой связи коэффициент рассчитан на основе обработки экспериментальных данных о концентрации углекислого газа и оценок его эмиссии.

В данном исследовании используется достаточно адекватная модель климата, разработанная в Вычислительном Центре РАН. Исследования этой модели, проводившиеся в последние годы, позволили оценить влияние удвоения концентрации углекислого газа на изменение зональных температур, величин солнечной радиации и осадков (см. [43, 79]). Было также показано, что в определенном интервале зависимость климата от концентрации углекислого газа можно аппроксимировать линейной зависимостью, т.е. использовать линейную параметризацию этой модели.

В модели влияния климата рассматриваются потери в сельскохозяйственном производстве. Эти потери моделируются на основе использования экспертной информации. Точнее говоря, для каждой зоны экспертом определяются потери, происходящие при удвоении средней глобальной температуры. На основе полученных величин определяются коэффициенты, которые используются в соотношениях, предназначенных для расчета величин потерь.

**Демонстрационная система.** В демонстрационной системе анализируется взаимозависимость затрат, направленных в различных регионах мира на уменьшение антропогенной эмиссии углекислого газа, и потерь от изменений глобального климата. Сначала на основе математической модели глобальной системы строится базовый вариант развития системы, который характеризуется отсутствием мер, направленных на уменьшение антропогенного выброса углекислого газа. После этого на основе МДЦ осуществляется многокритериальный анализ связи затрат и потерь и строятся разумные стратегии уменьшения эмиссии.

Для построения базового варианта развития глобальной системы используется сценарий развития мировой экономики и энергетики, в котором прогнозируются темпы изменения основных макроэкономических показателей и некоторых структурных параметров модели. В частности, прогноз производства основан на прогнозе региональных темпов роста населения и темпов роста производства на душу населения. Прогноз

эмиссии углекислого газа основан на предположении о существовании двух условных технологий использования энергии – прогрессивной (энергосберегающей) и более старой. Каждая из технологий характеризуется удельной эмиссией углекислого газа на единицу произведенной продукции. Прогресс в использовании энергии может происходить по двум направлениям – уменьшения удельной эмиссии в каждой из технологий и уменьшения доли старой технологии. Полученный прогноз используется в качестве исходной информации для модели, в которой рассчитывается концентрация углекислого газа в атмосфере для всего изучаемого промежутка времени. Модель глобального климата позволяет рассчитать связь температур, осадков и солнечной радиации с концентрацией углекислого газа. Благодаря этому рассчитываются базовые потери от изменения климата для всех рассматриваемых зон земного шара, которые пересчитываются в потери регионов.

Разработка стратегий, направленных на уменьшение выброса углекислого газа, основывается на использовании нескольких критериев выбора решений. Модель, применяемая в процессе многокритериального исследования, является многошаговой. Точнее говоря, период с 1990 по 2050 годы разбивается на конечное число временных интервалов, каждый продолжительностью в десять лет. Переменные модели изменяются с шагом в десять лет. Уменьшение антропогенной эмиссии углекислого газа (по сравнению с базовой траекторией) происходит благодаря инвестициям в энергосберегающие технологии, что, в свою очередь, приводит к уменьшению его концентрации по сравнению с базовой траекторией.

Линейные параметризации модели отклонения от базовой траектории для блока изменения климата и для блока влияния изменений климата на экономику в данном исследовании были объединены. По данным, полученным в результате расчетов по модели изменения климата, был определен характер изменения климата при удвоении концентрации углекислого газа для каждого региона. По полученным результатам эксперты предложили относительные значения коэффициентов, связывающих потери в каждом из мировых регионов с увеличением концентрации углекислого газа в атмосфере. Таким образом, была построена упрощенная модель влияния затрат, связанных с уменьшением энергопотребления, на уменьшение потерь от изменений климата.

Рассматривались две группы критериев: критерии, связанные с инвестициями, и критерии, связанные с уменьшением потерь от изменения климата. Критерии формировались на основе суммирования затрат или потерь с разными коэффициентами для различных интервалов времени (так называемое дисконтирование во времени). Ясно, что значения инвестиционных критериев желательно уменьшать, а критериев, связанных с уменьшением потерь – увеличивать.

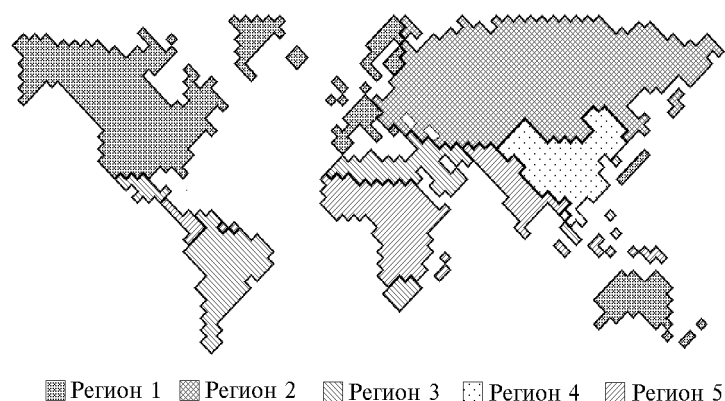


Рис. 5.1

В реализованном в настоящее время демонстрационном варианте системы поддержки переговоров рассматривалось пять условных регионов (см. рис. 5.1):

- 1) развитые капиталистические страны;
- 2) постсоциалистические страны;
- 3) новые индустриальные страны;
- 4) азиатские коммунистические страны;
- 5) развивающиеся страны.

Работа с системой состоит в следующем. Сначала исследователь должен выбрать от двух до пяти критериев, которые будут рассматриваться в дальнейшем. Далее, компьютер строит ОЭП, и исследователь изучает различные карты решений. Далее, как обычно в МДЦ, он выбирает некоторую достижимую цель, после чего компьютер находит стратегию, приводящую к выбранной цели.

В качестве примера рассмотрим вариант исследования, в котором было выбрано пять критериев, измеряемых в миллиардах долларов:

- $L_s$  – уменьшение глобальных потерь за весь рассматриваемый период времени,
- $I_1, I_2, I_3$  – инвестиции на уменьшение энергопотребления за весь рассматриваемый период в первом, втором и третьем регионах соответственно,
- $I_4$  – то же для четвертого и пятого регионов совместно.

На рис. 5.2 изображены сечения ОЭП, описывающие возможные инвестиции в первом ( $I_1$  – по горизонтальной оси) и во втором ( $I_2$  – по вертикальной оси) регионах. Инвестиции в остальных регионах не превышают некоторых значений, на которых мы временно не станем останавливаться. Мы выбрали первый и второй регионы, так как именно в

них возможны наибольшие инвестиции по сравнению с другими регионами. Сечения соответствуют различным уменьшениям потерь  $L_s$ .

Как видно, каждый из уровней потерь может быть достигнут при весьма различных инвестициях в первом и втором регионах. Рассмотрим точку А на кривой  $L_s = 180$  млрд. В этой точке  $I_1 = 38$  млрд., а  $I_2 = 34$  млрд. Сравним эту точку с точкой В, которая расположена на той же кривой, но соответствует максимальным разумным инвестициям в первом регионе ( $I_1 = 630$  млрд., а  $I_2 = 12$  млрд.). При переходе из точки В в точку А (что может быть интерпретировано как передача части средств первого региона на энергосберегающие инвестиции во втором регионе) суммарные инвестиции могут быть сокращены почти в девять раз. Это показывает, как выгодно международное сотрудничество при решении глобальных проблем: за счет увеличения инвестиций во втором регионе на 22 млрд. удастся сократить инвестиции в первом регионе почти на 600 млрд. Заметим, что при меньших потерях от изменения климата объем требуемых инвестиций увеличивается, а возможности замещения сужаются, но все же остаются очень широкими.

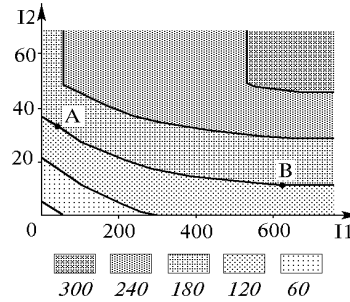


Рис. 5.2

Теперь рассмотрим вопрос о влиянии инвестиций в других регионах. На рис. 5.3 изображена матрица карт решений. Рис. 5.2 является одной из карт этой матрицы:

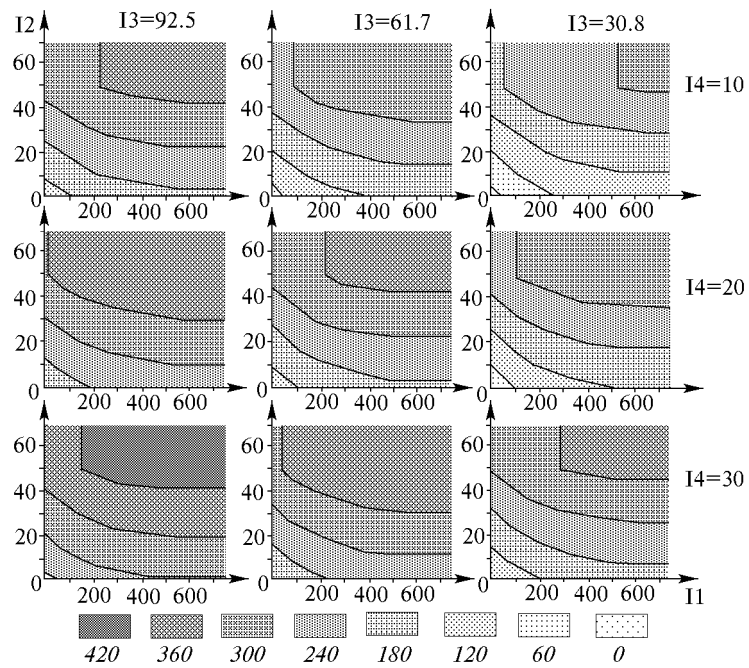


Рис. 5.3

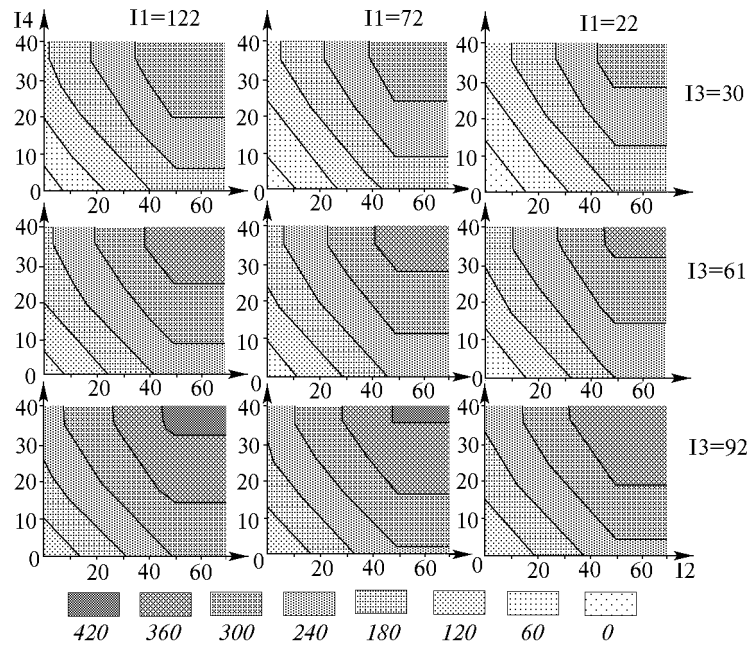


Рис. 5.4

на всех картах матрицы по горизонтальной оси отложены дисконтированные инвестиции в первом регионе, по вертикальной оси – во втором, а уменьшение потерь дается штриховкой. Имеется по три варианта ограничений снизу на величины  $I_3$  и  $I_4$ , т.е. всего рассматривается девять карт.

Эти ограничения указаны у строк и столбцов. Поскольку матрица карт решений аналогична рассмотренной при анализе качества воды в реках, мы не станем объяснять ее. Отметим лишь, что увеличение инвестиций  $I_3$  и  $I_4$  позволяет существенно уменьшить потери от изменения климата, а форма замещения между инвестициями в первом и втором регионах имеет качественно тот же вид при всех вариантах инвестиций  $I_3$  и  $I_4$ .

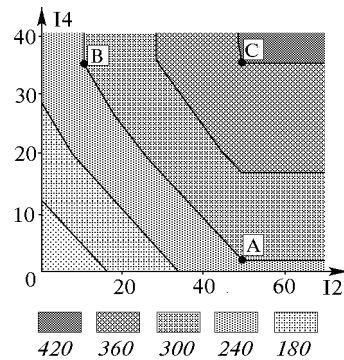


Рис. 5.5

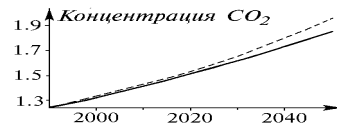


Рис. 5.6

Теперь познакомимся с той же ОЭП с другой точки зрения. На рис. 5.4 изображена матрица карт решений, на которых по горизонтальной оси отложены инвестиции во втором регионе, а по вертикальной оси – в четвертом и пятом. Уменьшение потерь задается той же штриховкой, что и на рис. 5.3.

Имеется по три варианта ограничений на величины  $I_1$  и  $I_3$ , т.е. опять рассматриваются девять карт. Сразу видно, что кривые объективных замещений на этой картине принципиально отличаются от кривых на рис. 5.3: добиться существенного уменьшения инвестиций в одном регионе удастся только при существенном их увеличении в другом. Влияние инвестиций  $I_1$  и  $I_3$  на величину потерь ясно из сопоставления карт решений. Рассмотрим более детально одну из карт – среднюю в нижнем ряду ( $I_1$  не более 72 млрд. и  $I_3$  не более 92 млрд.). Она изображена на рис. 5.5.

Рассмотрим сечение, соответствующее уменьшению потерь  $L_5$  не менее 300 млрд. На границе этого сечения указаны две точки. Точка А соответствует максимальным разумным инвестициям во втором регионе ( $I_2 = 50$  млрд.,  $I_4 = 3$  млрд.). Точка В соответствует максимальным разумным инвестициям в четвертом и пятом регионах ( $I_1 = 11$  млрд.,  $I_3 = 36$  млрд.).

Как видим, в рассматриваемом диапазоне инвестиций суммарная их величина остается почти неизменной (инвестиции в четвертом и пятом регионах несколько более эффективны), поэтому ответ на вопрос о том, где должны быть вложены деньги, приобретает более политический характер. Этим ситуация принципиально отличается от объективного замещения между инвестициями в первом и втором регионах, когда макси-

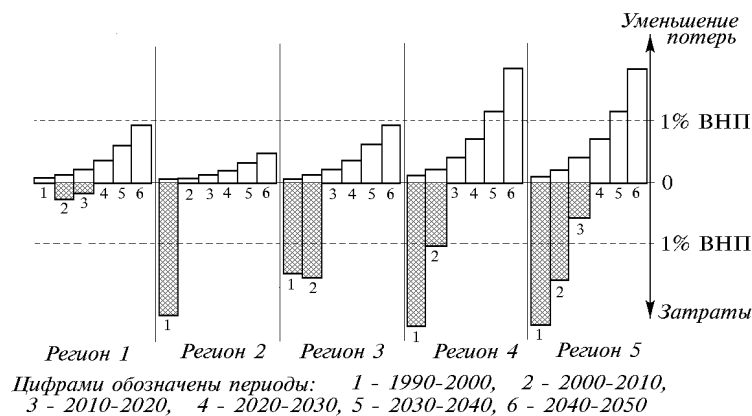


Рис 5.7

мальные инвестиции в первом регионе выглядели бы как экономическое безумие.

Заметим, что объективное замещение между инвестициями во втором и четвертом регионах имеет такой характер лишь в некоторой области, которая сужается при уменьшении потерь. При уменьшении потерь не менее чем в 420 млрд., имеется единственное разумное сочетание инвестиций во втором и четвертом (совместно с пятым) регионах – точка С ( $I_2 = 11$  млрд.,  $I_4 = 36$  млрд.). Рассмотрим стратегию, соответствующую этой точке. Она представлена на рис. 5.6 и 5.7.

На рис. 5.6 изображены базовый (штриховая кривая) и расчетный (сплошная кривая) графики изменения концентрации углекислого газа, которая измеряется в относительных единицах – концентрациях 1860 г. Как видно, с помощью инвестиций в энергосберегающие технологии удастся добиться определенного уменьшения концентрации углекислого газа в атмосфере.

На рис. 5.7 изображена зависимость от времени затрат и уменьшения потерь для каждого из регионов (по отношению к его ВВП). Пунктирной горизонтальной линией представлен уровень в 1% ВВП.



Из рис. 5.7 видно, что, как и следовало ожидать, воздействие инвестиций сказывается только со временем. Для достижения выбранного сочетания значений критериев инвестиции следует вкладывать только в течение первых трех периодов (1990-2020), так как при этом их влияние на потери будет наибольшим. В первом периоде (1990-2000) следует вкладывать инвестиции во всех регионах, кроме первого, во втором периоде (2000-2010) – во всех регионах, кроме второго, а в третьем периоде (2010-2020) – только в первом и пятом регионах.

## **Глава 3.**

### **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КОМПРОМИССОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ**

Эта глава посвящена использованию метода достижимых целей для поиска компромиссных стратегий развития экономических систем. Кратко (а где-то и схематично) показывается, как метод может быть использован для анализа разнообразных экономических моделей – от агрегированных моделей роста до балансовых моделей и эконометрических моделей. Во всех случаях компромиссы изучаются на основе демонстрации сечений множества достижимых целей либо оболочки Эджворта–Парето, после чего находятся эффективные стратегии экономического развития.

В § 3.1 анализируются возможные стратегии долгосрочного развития народного хозяйства с учетом экономических и социальных факторов. Это исследование проводится на основе модели долгосрочного экономического роста. В § 3.2 описывается компьютерная система, предназначенная для выбора среднесрочных целей развития экономики страны, а § 3.3 посвящен поиску разумных стратегий экономического взаимодействия между странами и регионами. Эти два исследования базируются на использовании балансовых экономических моделей. В § 3.4 на основе эконометрической модели строятся стратегии государственного регулирования национальной экономики. Наконец, в § 3.5 описывается система поддержки дискуссий о стратегиях экономической реформы в России, основанная на использовании структурной макроэкономической модели.

#### **3.1. Анализ долгосрочного развития экономики страны**

Модели экономического роста обычно используются для изучения принципиальных проблем долгосрочного развития экономических систем. Особое внимание в таких моделях уделяется проблеме распределения национального дохода между потреблением и накоплением. Изучается сбалансированный рост, анализ которого позволяет найти стратегии, оптимальные с точки зрения экономического развития.

В данном параграфе рассматривается многокритериальная постановка, которая позволяет расширить диапазон исследования, включив в рас-

смотрение социальные и экологические критерии<sup>16</sup>. При этом одновременно рассматриваются несколько типов основных фондов, отличающихся экономической эффективностью и воздействием на окружающую среду. Данное исследование, как и большинство работ по моделям роста, не имеет конкретного приложения и служит для улучшения понимания проблем долгосрочного развития. Внимательный читатель заметит некоторое методическое сходство этого исследования с описанной ранее работой по проблемам глобального изменения климата.

**Описание модели.** В модели рассматривается несколько типов основных производственных фондов, отличающихся своими параметрами, но выпускающих один и тот же универсальный продукт – внутренний валовой продукт (ВВП) экономики. ВВП используется на потребление населения, на компенсацию износа основных фондов и на их расширение. Как уже говорилось, фонды различаются эффективностью и степенью воздействия на окружающую среду.

Считается, что выпуск продукции фондами каждого из типов ограничен их мощностями, которые, однако, могут использоваться неполностью. Кроме того, накладывается общее ограничение на выпуск продукции – ограничение по трудовым ресурсам, объем которых задан. Если трудовые ресурсы используются неполностью, то имеет место безработица. Загрязнение окружающей среды возникает в результате производственной деятельности. Предполагается, что распадение загрязнителя пропорционально его количеству. В начальный момент времени заданы мощности фондов и начальный уровень загрязнения. Предполагается достаточно продолжительный период времени (порядка 50 лет).

В исследовании рассматриваются три критерия: показатели потребления  $C^*$ , безработицы  $U^*$  и загрязнения  $Z^*$ . В качестве показателей безработицы и загрязнения берутся максимальные значения этих величин за рассматриваемый период времени, а показатель потребления – это отклонение потребления от заданного базового экспоненциального роста. Безработица измеряется в долях трудовых ресурсов, а потребление и загрязнение – в единицах, определяемых их исходными величинами.

**Исследование модели.** Исследование было проведено в предположении, что имеются всего два типа фондов – старые, “загрязняющие” и новые, “чистые”. Кроме того, новые фонды требуют меньше трудовых затрат на производство продукции, но стоят дороже. Трудоемкости производства на фондах обоих типов со временем падают.

В исследовании представляет интерес увеличение значения показателя потребления  $C^*$  и уменьшение значений показателей безработицы  $U^*$  и загрязнения  $Z^*$ .

---

<sup>16</sup> Эта работа также выполнена в рамках Российско-финской технической рабочей группы по исследованию операций [78].

На рис. 1.1 изображено трехмерное ОЭП для этой задачи с выделенным на нем недоминируемым множеством, а на рис. 1.2 – серия двумерных сечений ОЭП (карта решений) в координатах загрязнения и потребления при нескольких ограничениях на уровень безработицы. Сразу видно, что набор сечений удобнее трехмерного рисунка для анализа объективных замещений между критериями.

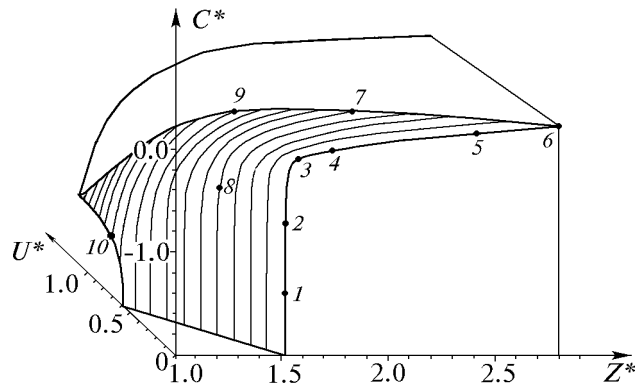


Рис. 1.1

Карта решений на рис. 1.2 очень проста. На каждой из кривых объективного замещения имеются три ярко выраженные зоны:

- а) зона, в которой небольшое увеличение загрязнения приводит к резкому росту потребления,
- б) зона, в которой рост потребления связан с существенным ростом загрязнения,
- с) переходная зона между первыми двумя.

Промежуточная зона мала на сечении, соответствующем 10%-ой безработице, но расширяется с ростом безработицы до 50%.

На трехмерном рисунке 1.1 и на карте решений 1.2 изображены точки, пронумерованные числами от 1 до 10. Для всех этих точек были построены соответствующие стратегии развития экономики. Рассмотрим некоторые из них.

На рис. 1.2 видно, что в зоне малых отклонений потребления от базовой траектории ( $C^*$  около нуля) кривые объективного замещения близки одна к другой. Это означает, что снятие ограничения на уровень безработицы мало влияет на отношение между загрязнением и потреблением, если потребление близко к базовому. В то же время, при низком уровне потребления ( $C^*$  между -0.5 и -2.0) можно заплатить безработицей за улучшение окружающей среды. Так, при  $C^* = -1$  (достаточно большое

отклонение от базовой траектории в сторону уменьшения потребления) для того, чтобы уменьшить загрязнение с 1.5 до 1.3, требуется увеличить максимальную безработицу с 10 до 30%. Это, конечно, слишком большая

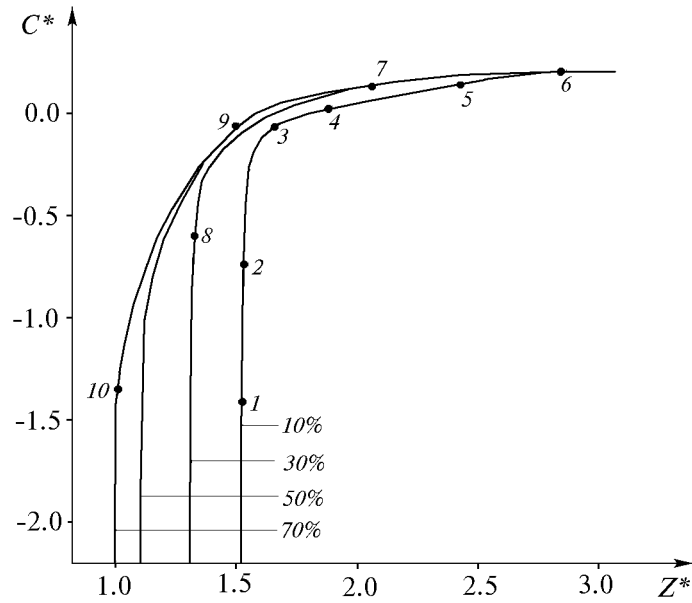


Рис. 1.2

цена за не слишком существенное уменьшение загрязнения. В других случаях экологический выигрыш еще меньше. Поэтому естественным образом возникает интерес к кривой объективного замещения между потреблением и загрязнением с минимально возможной безработицей, которая в модели равна 10%. Рассмотрим эту кривую.

На кривой имеется крутой изгиб, в области которого поставлена точка 3. Она соответствует небольшому отклонению от базовой траектории потребления ( $C^*$  около -0.1), а критерий загрязнения составляет около 1.7. При меньшем значении загрязнения потребление на этой кривой резко падает (до -0.7 в точке 2), а при росте загрязнения оно растет довольно медленно (до 0.05 при загрязнении в 2.5 в точке 5). Поэтому точка 3 представляется вполне разумной. Стратегия развития, соответствующая точке 3, приведена на рис. 1.3, где изображены пять графиков, представляющих зависимость от времени безработицы  $U$ , загрязнения  $Z$ , мощностей старых фондов  $M_1$ , мощностей новых фондов  $M_2$ , а также выпуска

продукции  $X_1$  на фондах старого типа. Выпуск продукции на фондах нового типа совпадает с их мощностью.

Мы видим, что в конце периода новые фонды замещают старые. При этом замещение осуществляется не сразу, за счет полного прекращения капиталовложений в фонды старого типа, а постепенно – первое время мощности фондов старого типа растут и только затем начинают падать, а

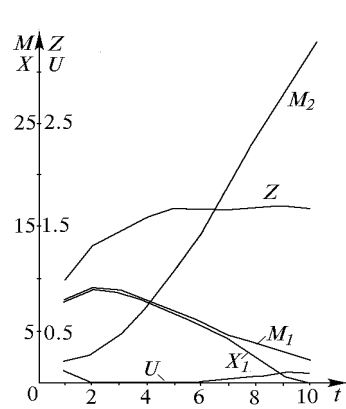


Рис. 1.3

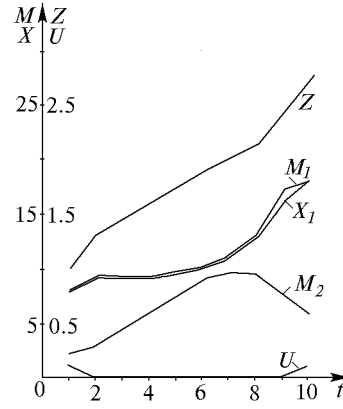


Рис. 1.4

их использование прекращается лишь в конце периода. Таким образом, перестройка экономики в модели заняла около 50 лет.

Обратим внимание на то, что безработица, существовавшая в начале периода, затем исчезла и появилась снова только в конце периода, по-видимому, из-за большой эффективности фондов нового типа. Загрязнение растет до уровня в 1.7 единиц, характерного при использовании второй технологии.

Сравним найденную стратегию развития со стратегией, соответствующей точке 6, в которой достигается максимальное потребление (см. рис. 1.4). На этом рисунке, так же как и на рис. 1.3, изображены пять графиков, представляющих зависимость тех же величин от времени. Отметим главную особенность графиков, соответствующих точке 6: здесь не происходит замещения фондов старого типа фондами нового типа. При этом мощности фондов нового типа сначала растут, а затем начинают уменьшаться. В связи с этим наблюдается постоянный резкий рост загрязнения. Таким образом, из-за небольшого увеличения потребления (здесь  $C^* = 0.1$  вместо  $C^* = -0.1$  в точке 3) страна доведена до катастрофического экологического и бесперспективного экономического состояния.

**Заключение.** Думается, этот пример будет поучителен для тех, кто считает, что простая однокритериальная оптимизация (например, макси-

мизация потребления) достаточна для анализа проблем долгосрочного развития. Более подробно эта модель исследована в работе [78], где описаны и другие эффекты, обнаруженные с помощью МДЦ.

### **3.2. Выбор среднесрочных целей развития народного хозяйства**

В отличие от предыдущего параграфа, в котором описано исследование, имеющее скорее познавательное, чем прикладное значение, в данном параграфе рассматривается практическое применение МДЦ при выборе среднесрочных (на срок 10-15 лет) социально-экономических целей развития народного хозяйства. Результатом этого исследования стала компьютерная система, прошедшая экспериментальную проверку в 1984-1986 годах. Предполагалось, что система будет включена в центральный комплекс задач автоматизированной системы плановых расчетов (ЦКЗ АСПР) Госплана СССР после завершения экспериментальных исследований, однако перестройка и последовавший затем развал системы планирования не позволили реализовать эту идею. В настоящее время система централизованного планирования в России отсутствует, а ее возрождение в прежнем виде не представляется возможным. В то же время, разработка среднесрочных социально-экономических целей не только полезна, но и необходима. Опыт Японии, например, показывает, насколько разработка целей способствует экономическому развитию страны.

**Описание проблемы.** При разработке основных направлений развития экономики на срок 10-15 лет в 80-х годах было решено использовать так называемый программно-целевой подход к среднесрочному планированию народного хозяйства. В рамках этого подхода вопрос о том, как сочетать противоречивые требования к социально-экономическому развитию страны решался на основе формирования программ достижения некоторых желаемых уровней в различных областях, в частности, материального потребления, обеспечения жильем, здравоохранения, образования и науки, обороны, внешней торговли и т.д. Уровень выполнения каждой из программ трактовался в виде частной цели (частного показателя удовлетворения какой-либо потребности), а полный набор частных целей составлял так называемую генеральную цель среднесрочного развития экономики страны. Поскольку программы формировались независимо, совместное выполнение разработанных программ было невозможно: оно значительно превышало возможности экономики страны. Требовалось уменьшить запросы и требования каждой из программ, чтобы они могли быть реализованы в совокупности. Но как определить разумный достижимый уровень выполнения программ, т.е. как определить предпочтительную реализуемую генеральную цель среднесрочного развития экономики? Ясно, что выбор среднесрочной цели развития народного

хозяйства предопределял в значительной степени цели пятилетнего развития, которые в дальнейшем должны были оказать влияние на пятилетние планы. Поэтому вокруг выбора уровней достижения частных целей и расходов на различные программы велась борьба как в виде открытых дискуссий, так и конфиденциальных переговоров.

В ЦКЗ АСПР выбор вариантов генеральной достижимой цели развития народного хозяйства основывался на использовании опыта специалистов. Точнее говоря, экспертам, в роли которых выступали ведущие сотрудники Госплана, предлагалось сформулировать среднесрочные цели социально-экономического развития народного хозяйства. При этом эксперты не получали какой-либо информации, которая могла бы помочь им в выборе реализуемых вариантов целей. На основе набора частных целей, предложенного некоторым экспертам, решалась задача, обычная в целевом программировании: с помощью математической модели народного хозяйства рассчитывался вариант его развития, который позволял бы “возможно близко” подойти к указанной цели. Поскольку выбираемые экспертами наборы целей были далеки от реальности, получаемые их достижимые сочетания обескураживали экспертов и вызывали желание отказаться от использования процедуры. Важно также, что получаемая таким образом информация об отдельных достижимых социально-экономических целях народного хозяйства не позволяла организовать переговоры о разумных компромиссах. Действительно, существовавшая процедура предлагала, по-существу, позиционный подход к переговорам, о недостатках которого уже говорилось во введении.

Для того чтобы избежать описанного недостатка процедуры выбора генеральной цели среднесрочного развития народного хозяйства, было предложено использовать МДЦ<sup>17</sup>. Точнее говоря, было предложено продемонстрировать экспертам множество достижимых наборов целей социально-экономического развития народного хозяйства. На основе изучения достижимых наборов целей и недоминируемых сочетаний частных целей (т.е. кривых объективного замещения между частными целями) эксперт мог предложить наиболее предпочтительное (с его точки зрения) сочетание частных целей и обсудить с другими экспертами возможности выбора компромиссных достижимых наборов частных целей.

**Математическая модель.** В исходной процедуре построения варианта развития народного хозяйства, основанной на выборе произвольного набора частных целей социально-экономического развития и на его дальнейшем корректировании с целью нахождения достижимого набора, использовалась укрупненная линейная динамическая модель межотраслевых связей, описывавшая развитие экономики на 15-летний период.

---

<sup>17</sup> Инициатором использования МДЦ в этой задаче был замечательный экономист, заведующий отделом Центрального экономико-математического института Академии наук СССР, ныне покойный И.С.Матлин.



Экономика страны была разбита на 17 отраслей, каждая из которых выпускала однородный продукт. Объемы валового выпуска продукции в отраслях за год были ограничены мощностями отраслей, которые рассчитывались через объемы основных производственных фондов. Кроме того, имелось общее (для всех отраслей) ограничение по трудовым ресурсам.

Основным элементом модели были балансы продукции. Валовый выпуск каждой из отраслей (дополненный импортом соответствующего продукта) мог использоваться на производственное потребление, капиталовложения и непроизводственное потребление. Производственное потребление описывалось на основе так называемых матриц прямых затрат, т.е. считалось пропорциональным валовому выпуску отраслей. Структура капиталовложений в каждую из отраслей также задавалась параметрами.

Балансовые соотношения были сформированы для каждого из рассматриваемых лет. Связь между годами устанавливалась на основе соотношений, описывающих увеличение основных фондов в результате капиталовложений (при этом учитывалось запаздывание во введении фондов). Коэффициенты модели (в том числе коэффициенты фондоемкости, трудоемкости и прямых затрат) зависели от времени.

При реализации процедуры на основе МДЦ была использована несколько упрощенная модель, что было связано с недостаточной в то время эффективностью алгоритмов построения множеств достижимых целей<sup>18</sup>.

**Выбор социально-экономических целей.** Было рассмотрено 10 следующих социально-экономических целей:

- 1) достижение некоторых уровней среднемесячной зарплаты и выплат на одного занятого в народном хозяйстве;
- 2) достижение некоторых уровней выплат и льгот из общественных фондов на душу населения в год;
- 3) достижение некоторых уровней прочих денежных доходов на душу населения в год;
- 4) обеспечение жильем на одного человека;
- 5) обеспечение учебными местами;
- 6) обеспечение медицинским обслуживанием;
- 7) достижение некоторых уровней текущих расходов прочих отраслей непроизводительной сферы на душу населения;
- 8) достижение некоторых уровней экспорта;
- 9) достижение некоторых уровней импорта;
- 10) достижение некоторых уровней текущих затрат на науку, управление, оборону.

Первые три цели и седьмая цель отражали те денежные доходы населения, которые могли быть обеспечены производимой продукцией. В

---

<sup>18</sup> Математическая модель, использовавшаяся в исследовании, описана в книге [37, гл. 5 §4].

нашем исследовании в качестве критериев были выбраны первые семь целей, величины же последних трех были фиксированы заранее. Критерии выполнения социально-экономических программ представляли собой уровни, достигнутые в конце планового периода, они измерялись в относительных величинах. Рост уровней во времени (например, линейный или экспоненциальный) мог задаваться. В качестве единичных значений брались уровни потребления, достигнутые в начале рассматриваемого периода.

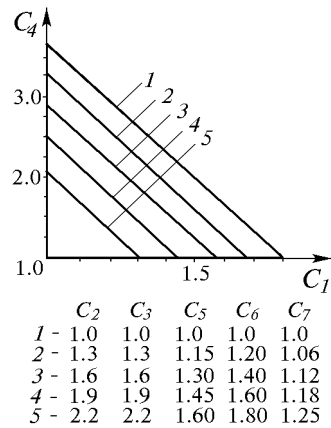


Рис. 2.1

Во время экспериментального использования описываемой системы персональные компьютеры в СССР практически отсутствовали, поэтому система была реализована на вычислительных машинах серии ЕС. Так как непосредственный диалог эксперта с машиной был невозможен,

пришлось заранее подготовить альбом различных наборов двумерных сечений множества достижимых целей, демонстрирующих связи между отдельными критериями. На рис. 2.1 приведен один из таких наборов сечений в координатах двух критериев:

- $C_1$  – среднемесячная заработная плата и выплаты на одного работающего,
- $C_4$  – обеспеченность жильем на одного человека.

Значения остальных критериев приведены под рисунком. Этот набор сечений отличается от обычной карты решений тем, что при переходе от одного сечения к другому меняются значения всех некоординатных критериев в определенной пропорции.

Анализ набора сечений на рис. 2.1 показывает, что значения критериев могут быть значительно увеличены к концу планового периода. Так, значение критерия  $C_1$  может возрасти в 1.8 раза, а значение критерия  $C_4$  – в 3.5 раза. Конечно, максимальное значение каждого критерия может быть получено лишь при условии сохранения значений других критериев на исходном уровне.

В альбоме наборов сечений имелось несколько десятков рисунков типа 2.1. Как показал опыт, это число достаточно для того, чтобы эксперт получил хорошее представление об этом простом множестве. От эксперта требовалось предложить некоторую компромиссную точку, принадлежащую недоминируемой границе множества. Выбрав достижимое сочетание критериев, эксперт определял таким образом среднесрочную цель и получал вариант развития экономики, в том числе динамику всех характеристик.

Отметим, что в приведенном примере построенное множество имеет достаточно простую форму. Это указывает на наличие в модели некоторого единственного дефицитного ресурса, одинаково важного для выполнения всех целевых программ. Конечно, в случае более сложного множества потребовалось бы использовать ДКР.

**Заключение.** Как видим, альбомы сечений оказались достаточно удобным средством для информирования специалистов об объективной ситуации. Нынешний уровень развития компьютеров позволяет продемонстрировать возможности выбора куда более наглядно. Конечно, в настоящее время говорить о подобных исследованиях и компьютерных системах не приходится, так как невозможно построить балансовую многоотраслевую модель в связи с процессом качественных изменений в экономике (сейчас более подходят системы, рассмотренные далее в § 3.5). Можно ожидать, что процедуры поддержки выбора среднесрочных целей развития народного хозяйства потребуются после стабилизации экономики.

### **3.3. Анализ модели межрегионального экономического взаимодействия**

В данном параграфе демонстрируются возможности МДЦ при анализе проблем межрегионального экономического взаимодействия. Для изучения была выбрана широко известная модель мировой экономики, разработанная группой экспертов ООН под руководством В. Леонтьева.

Эксперты ООН предложили восемь возможных сценариев развития мировой торговли. Сценарии различаются целями развития, а также факторами, влияющими на этот процесс. Каждый сценарий дает один вариант расчета по модели, а в совокупности расчеты представляют собой имитационный эксперимент с моделью мировой торговли. Как уже говорилось, недостаток метода имитации состоит в том, что удастся рассмотреть лишь небольшое число возможных вариантов. Поэтому исследование не может быть полным, особенно когда варианты выбираются без предварительного анализа системы.

Отыскание эффективных вариантов развития является одной из важнейших целей исследования моделей мировой экономики. Один из возможных путей решения этой задачи применительно к модели ООН состоит в том, что вместо жестких связей между переменными модели, предусматриваемых сценариями, предлагается наложить ограничения на возможные стратегии и в явном виде сформулировать критерии, характеризующие развитие регионов. Исследователь получает возможность при этом наиболее полно представить себе потенциал мировой экономики и связь между интересами различных регионов. После этого может быть

поставлена задача отыскания эффективных вариантов развития мировой экономики.

**Описание модели.** Рассматривается упрощенная версия модели мировой экономики ООН (исходный вариант был недоступен для авторов). Модель, разработанная экспертами ООН, является объединением балансовых многоотраслевых моделей экономики отдельных стран и построена на основе матриц затрат-выпуска (матриц прямых затрат) и балансов продукции отраслей. Эти черты сохранены и в упрощенной региональной модели мировой экономики.

В упрощенной модели весь мир представлен в виде совокупности регионов. Экономика регионов разбита на одинаковое число отраслей, выпускающих однородный продукт. Как обычно в балансовых моделях, основным блоком уравнений модели являются балансы продуктов. Рассматриваются балансы продуктов в каждом из регионов и глобальные балансы, описывающие законы сохранения для мировой экономики в целом. В балансах отдельных стран учитываются расход каждого продукта на производственное потребление, использование его на капиталовложения, экспорт и непроизводственное потребление. Расход не должен превышать его валового производства плюс импорта. Производственное потребление описывается на основе использования коэффициентов прямых затрат, структура капиталовложений также задается коэффициентами. Объем непроизводственного потребления для каждого региона характеризуется некоторым единственным показателем, а структура потребления задана заранее.

На валовые выпуски отраслей наложены ограничения по основным фондам (при этом учитываются текущие капиталовложения), а также ограничения на трудовые ресурсы. Неиспользование трудовых ресурсов рассматривается как безработица. В модели учитываются экологические факторы: рассматриваются два типа загрязнения окружающей среды:

- устранимое загрязнение, объем которого может быть уменьшен в результате использования очистных сооружений,
- неустраняемое загрязнение, которое при нынешнем уровне технологии очистке не поддается.

Эмиссия загрязнения пропорциональна валовому выпуску отраслей, а для уменьшения эмиссии устранимого загрязнения требуются затраты в заданной структуре.

В качестве критериев выбора решения рассматривались:

- показатели конечного потребления в регионах,
- уровни безработицы в регионах,
- уровни загрязнения в регионах,
- сальдо внешней торговли для каждого из регионов,
- экспорт отдельных видов продукции.

Для расчета сальдо внешней торговли использовались некоторые цены, общие для всех регионов. В этом варианте модели все страны были разбиты на четыре условных региона. Данные были также условными, поэтому сопоставлять эти регионы с реальными группами стран не имеет смысла.

**Исследование множества достижимых целей.** Как видно, список рассматриваемых критериев достаточно велик, поэтому строились множества достижимых целей для различных сочетаний критериев. Прежде всего, мы задались вопросом о роли загрязнения окружающей среды в модели.

*1. Анализ роли экологических факторов в модели.*

Рассмотрим рис. 3.1, на котором в координатах конечного потребления  $C$  и загрязнения  $F$  изображены сечения множества достижимых целей при нескольких значениях сальдо внешней торговли для одного из регионов модели. Потребление и загрязнение измеряются в некоторых условных единицах. Поскольку пока рассматривается только один регион, мы опускаем его номер.

Самое широкое сечение – при отрицательном сальдо внешней торговли. На него сверху наложено меньшее сечение с нулевым сальдо, для которого максимальное потребление примерно на 10% меньше. Для сечения с положительным сальдо максимальное потребление еще на 10% меньше.

Ясно, что представляет интерес увеличение потребления и уменьшение загрязнения, поэтому недоминируемой является “северо-западная” граница сечения.

Как видно на рис. 3.1, при росте потребления от 0 до почти максимального значения загрязнение растет почти линейно (и не очень быстро). Затем наступает перелом, и небольшой прирост потребления до его максимального значения требует значительного увеличения загрязнения.

Тот же самый эффект наблюдается, если в качестве критериев взять потребление, загрязнение и экспорт одного из видов продукции. На рис. 3.2 изображены сечения множества достижимых целей при трех

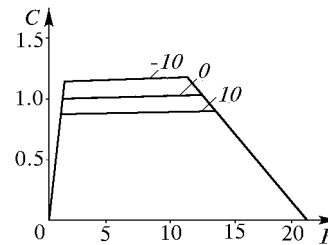


Рис. 3.1

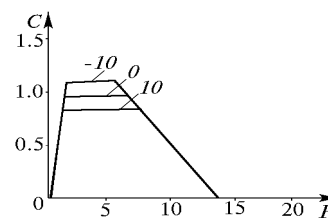


Рис. 3.2

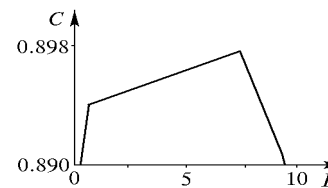


Рис. 3.3

значениях экспорта. При отрицательном экспорте (т.е. чистом импорте продукции) получаем самое большое сечение, при нулевом экспорте — меньшее, а при экспорте, равном импорту в первом сечении — самое узкое. Как видим, картина качественно осталась прежней, лишь величина максимального потребления меняется от сечения к сечению.

На рис. 3.3 приведена увеличенная часть сечения множества достижимых критериев загрязнения и потребления при заданных значениях сальдо внешней торговли и безработицы для того же региона. Как видно, наблюдается тот же эффект, что и на рис. 3.1 и 3.2 — рост потребления от 0.894 до 0.898 (т.е. примерно на 0.4%) связан с увеличением загрязнения примерно в 20 раз.

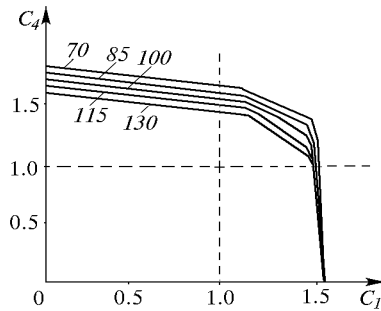


Рис. 3.4

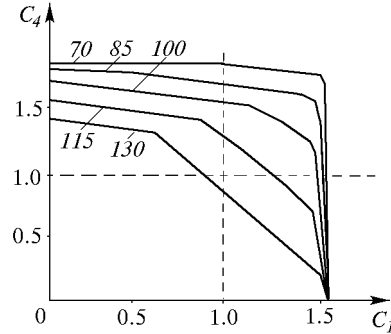


Рис. 3.5

Те же самые свойства наблюдались и для других регионов: достаточно использовать ничтожную долю потребления для решения значительной части экологических проблем, в то время как дальнейшее улучшение состояния окружающей среды связано с резким падением уровня потребления. Поскольку описание этих проблем в модели оказалось слишком упрощенным, ее использование для изучения связи экономики и загрязнения не имеет большого смысла. Поэтому в дальнейшем мы не станем рассматривать проблемы загрязнения и обратимся к анализу экономического взаимодействия между регионами на основе этой модели.

## 2. Анализ экономического взаимодействия между регионами.

Выберем в качестве критериев показатели потребления в четырех изучаемых регионах и построим ОЭП множества достижимых целей.

На рис. 3.4 представлена карта решений, на которой на осях координат отложены показатели потребления в первом и четвертом регионах при неизменном значении потребления во втором и меняющемся потреблении в третьем регионе. На карте изображены также вспомогательные штриховые прямые — автаркические уровни потребления, т.е. такие уровни, которые достижимы в отсутствие внешней торговли. Потребление во

втором регионе выбрано на автаркическом уровне, а потребление в третьем изменяется от 70% автаркического уровня до 130%. Поскольку вариант обмена продукцией между регионами приемлем только тогда, когда соответствующие уровни потребления превышают автаркические уровни. Как мы видим на рис. 3.4, при всех рассматриваемых уровнях потребления в третьем регионе имеются такие варианты обмена товарами.

Рассмотрим теперь рис. 3.5. На нем, как и на рис. 3.4, на осях координат отложены показатели потребления в первом и четвертом регионах, но двумерные сечения ОЭП выбраны иным способом: на каждом из сечений величины потребления во втором и третьем регионах, измеренные в процентах от автаркического уровня, равны. Эти величины указаны на рисунке. Сечение, соответствующее 100%, совпадает с аналогичным сечением рис. 3.4. Как видно, сечения рис. 3.5 сильно меняют свою форму при изменении уровней потребления во втором и третьем регионах. При 70% уровне сечение имеет практически единственно разумную точку – излом границы. При больших уровнях возникает заметное замещение между потреблением в первом и четвертом регионах, что может вызвать конфликт между ними. Заметим, что при 130% уровне оба региона не могут одновременно достичь автаркического уровня.

Изучив абсолютные величины потребления и объективные замещения между ними на рис. 3.4 (или аналогичных картах решений, характеризующих проблему с точки зрения потребления в других регионах), можно рассмотреть некоторые интересные недоминируемые сочетания уровней потребления и найти эффективные варианты экономического взаимодействия между регионами, соответствующие выбранному достижимым целям<sup>19</sup>.

### **3.4. Анализ модели государственного регулирования экономики**

Далее рассмотрен пример использования МДЦ в задаче государственного регулирования стабильной рыночной экономики. Для прогнозирования последствий того или иного воздействия на стабильную экономику часто используются эконометрические модели, в которых взаимосвязи между основными переменными описываются эмпирическими зависимостями, получаемыми на основе анализа реального поведения экономических показателей с помощью методов математической статистики.

**Постановка проблемы.** Государственное регулирование рыночной экономики представляет собой совокупность косвенных воздействий (в основном, финансово-кредитных рычагов) на экономику страны. Оно направлено, во-первых, на сглаживание экономических колебаний, естественных для процессов рыночного саморегулирования экономики, и, во-

---

<sup>19</sup> Более подробно исследование модели приведено в [8, 79].

вторых, на достижение целей государства – пополнение бюджета, увеличение производства, уменьшение безработицы и т. д. Большинство мероприятий сводится к варьированию прямых и косвенных налогов, облегчению или затруднению доступа к кредитам, изменению норм резервирования коммерческих банков и государственных расходов. С помощью этих рычагов государство воздействует на динамику цен, заработную плату, производственное потребление, инвестиции и т.д.

Воздействие регулирующих параметров противоречиво, оно способствует улучшению значений одних показателей функционирования и ухудшению значений других, так что выбор разумной политики регулирования представляет собой непростую задачу. Поскольку те или иные стратегии регулирования в разной степени отражают интересы различных слоев общества, такая задача является не только экономической, но и политической. МДЦ может быть использован в системе поддержки принятия решений о выборе стратегии регулирования. Так как выбор стратегии должен основываться на поиске компромиссных сочетаний интересов, скорее приходится говорить о системе поддержки переговоров.

В данном параграфе методика использования МДЦ демонстрируется на примере разработки стратегий регулирования экономики Финляндии. Эконометрическая модель экономики Финляндии была разработана специалистами Центрального банка Финляндии для периода 1988-1991 годов. В 1992-1994 годах экономика Финляндии прошла через период резких изменений, поэтому модель в настоящее время уже не отражает реальную ситуацию, в связи с чем описываемые результаты имеют исключительно методическое значение<sup>20</sup>.

**Модель.** Рассматривается нелинейная эконометрическая модель, в которой используется значительное число соотношений. Эти соотношения в совокупности определяют связь значений макроэкономических показателей с параметрами государственного регулирования. Модель является динамической с шагом по времени в один квартал и может быть использована для изучения различных аспектов государственного регулирования экономики. Далее рассмотрим анализ частного, но очень важного вопроса – о влиянии баланса бюджета на функционирование экономики.

В данном исследовании государственное регулирование описывается следующими параметрами:

- относительной (в 1983 г. – 100%) величиной годовых государственных расходов, обозначенных далее через  $g$ ;
- ставкой подоходного налога  $p$ ;

---

<sup>20</sup> Работа была выполнена в рамках исследований, проводимых Российско-финской технической рабочей группой по исследованию операций. Авторы благодарны специалистам отдела экономики ЦБ Финляндии, предоставившим модель, а также А.П.Кругову, помогавшему авторам разобраться в ней.



- ставкой рефинансирования Центрального Банка  $s$ .

Результаты регулирования оцениваются на основе следующих макроэкономических показателей:

- валового внутреннего продукта (ВВП);
- объема негосударственного потребления;
- баланса государственного бюджета.

На основе показателей были построены критерии, используемые при выборе компромиссных вариантов регулирования. Для первых двух показателей были взяты индексы, которые строятся как отношение средней величины показателя за рассматриваемый период к значению этого показателя в базовом году. В качестве критерия, связанного с балансом государственного бюджета, бралось суммарное превышение доходов над расходами за рассматриваемый период времени,  $B$ , – сальдо платежей, измеряемое в миллионах финских марок (ФМ).

Целью государственного регулирования является увеличение индекса ВВП, далее обозначаемого через  $Y$ , и индекса конечного потребления,  $C$ . В бюджетной области предпочтительным является государственный бюджет, близкий к сбалансированному (бездефицитному), т.е. не слишком отклоняющийся от нулевого сальдо платежей. Поскольку в реальности практически всегда имеет место дефицит, будем далее предполагать, что представляет интерес увеличение сальдо платежей госбюджета.

**Анализ влияния сальдо бюджета.** Дефицит (или положительное сальдо) бюджета является результатом применения той или иной стратегии государственного регулирования. Возникает вопрос о том, нельзя ли выбрать такие стратегии регулирования, которые, с одной стороны, не приводили бы к дефициту бюджета, и, с другой стороны, обеспечивали бы поступательное развитие экономики. Возникает также вопрос о том, нельзя ли получить положительное сальдо бюджета и использовать эти средства для погашения государственного долга, не помешав экономическому развитию. Этот вопрос рассмотрен в данном разделе.

Множество допустимых решений, т.е. параметров государственного регулирования, определялось с учетом прошлого опыта. Параметры регулирования в 1983-1991 годах находились в следующих пределах:

- 1)  $g$  – от 100% в начале периода до 135% в его конце;
- 2)  $n$  – от 29% до 36%;
- 3)  $s$  – от 7% до 10%.

Для исследования дополнительных возможностей государственного регулирования этот диапазон был расширен:

- 1)  $g$  – от 85% до 135%;
- 2)  $n$  – от 10% до 40%;
- 3)  $s$  – от 3% до 20%.

Моделирование проводилось на периоде времени с 1984 по 1991 годы. Индексы рассчитывались по отношению к 1983 г. Найденные стратегии развития сравнивались с тем результатом развития экономики, который

имел место в действительности. В соответствии с целью исследования, начнем анализ с множества достижимых значений индекса ВВП и сальдо платежей госбюджета (рис. 4.1).

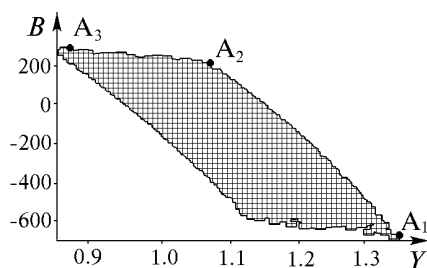


Рис. 4.1

Неровная граница множества достижимых целей объясняется тем, что изучаемая модель нелинейна, и поэтому множество было аппроксимировано совокупностью кубов (этот вопрос уже был рассмотрен в гл. 1). В случае двух критериев кубы являются квадратами, а выбор удобного масштаба осей превратил их на рис. 4.1 в прямоугольники. Заметим, что

множество близко к выпуклому, что в нелинейных моделях встречается довольно редко.

Максимальное значение ВВП достигается в точке  $A_1$ , характеризующей существенным увеличением ВВП (индекс ВВП около 1.35), но большим дефицитом бюджета. С другой стороны, максимальное значение сальдо бюджета (точка  $A_3$ ) связано с существенным падением ВВП. Интересующая нас “северо-восточная” недоминируемая граница множества имеет простую структуру: сначала близкий к отрезку прямой участок от точки  $A_1$  до точки  $A_2$ , характеризующий малым уменьшением положительного сальдо бюджета при росте ВВП, а затем резкое изменение объективного замещения между ВВП и сальдо бюджета при переходе от  $A_2$  к  $A_3$ .

Рассмотрим цель, соответствующую точке излома замещения  $A_2$ . В этой точке индекс ВВП равен 1.07 (т.е. очень медленный рост экономики), а сальдо платежей госбюджета положительно и близко к 200 млн. ФМ. Для этой цели была найдена соответствующая стратегии регулирования. Параметры этой стратегии, а также величина не рассматриваемого на рис. 4.1 критерия развития экономики – индекса потребления, приведены в табл. 4.1. Наряду со значениями параметров регулирования и критериев для цели  $A_2$ , в таблице даны значения параметров и критериев для стратегии, реализовавшейся в действительности (вариант **R** – первая строка таблицы), а также для стратегии, соответствующей некоторой цели  $A_4$ , которая будет рассмотрена позже.

Сравним параметры регулирования вариантов  $A_2$  и **R**. Государственные расходы в варианте  $A_2$  находятся почти на верхней границе диапазона реального изменения, налог превосходит реализовавшийся в реальности на два процентных пункта, а ставка рефинансирования возрастает в два раза, с 10 до 20%. Сравним величины индекса потребления. Потребление катастрофически упало – вместо значения 1.15, реализовавшегося в

течение этих лет, мы получили 0.86, т.е. падение примерно на 30%. Конечно, это недопустимо в условиях Финляндии. Поэтому для поиска более разумного выбора варианта развития экономики рассмотрим множество достижимых целей для трех критериев: индекса ВВП, сальдо бюджета и индекса потребления. Это множество представлено на рис 4.2.

По горизонтальной оси отложена величина индекса ВВП, по вертикальной оси – сальдо бюджета, а величина индекса потребления характеризуется штриховкой. Обратим внимание на особенности визуализации многомерного множества, аппроксимированного системой кубов: изоб-

Таблица 4.1

<i>Вариант</i>	<i>g</i>	<i>n</i>	<i>s</i>	<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
<i>R</i>	100-135%	30-36%	7-10%	1.14	1.15	-100
<i>A<sub>2</sub></i>	134%	38%	20%	1.07	0.86	200
<i>A<sub>4</sub></i>	135%	35%	14%	1.13	1.00	41

ражаются не сечения множеств, а их слои. Под слоем в случае трех критериев имеется в виду совокупность точек, которые лежат в определенном диапазоне значений третьего критерия. Соответствие штриховки и диапазонов значений третьей координаты дано в шкале, которая представлена под рисунком. Для каждого конкретного слоя предпочтительной является его “северо-восточная” граница.

Заметим, что слои множества достижимых целей перекрывают друг друга. Это означает, что существуют достижимые цели с одним и тем же сочетанием ВВП и сальдо бюджета, но разными значениями индекса потребления, попадающими, к тому же, в диапазоны различных слоев. Поскольку при прочих равных условиях нас интересуют достижимые цели с большим значением индекса потребления, то на рассматриваемом рисунке слои с большим значением индекса потребления наложены на слои с меньшим значением. Таким образом, при наложении слоев скрываются достижимые цели, не эффективные с точки зрения потребления.

На рис. 4.2 ясно видно, что рост потребления тесно связан с ростом бюджетного дефицита. Так, максимальному значению индекса потребления (слой между 1.6 и 1.7) соответствует дефицит бюджета между 500 и 700 млн. ФМ. Наоборот, рассмотренное ранее положительное сальдо, равное 200 млн., возможно только при низком потреблении (индекс потребления *C* не более 0.9). Небольшой рост потребления (*C* между 1 и 1.1) уже приводит к тому, что сальдо бюджета не может превышать 100 млн.

Выберем на рис. 4.2 достижимую недоминируемую цель *A<sub>4</sub>* на слое с потреблением между 1 и 1.1. Точнее говоря, зафиксируем величины

$Y=1.13$  и  $B=40$  млн. и положим  $C \geq 1$ . Эта цель отличается от точки  $A_2$  большим значением индексов потребления и ВВП. Соответствующие параметры стратегии регулирования и вычисленные уточненные значения критериев приведены в табл. 4.1. Заметим, что компьютер нашел вариант несколько лучший, чем заданная цель.

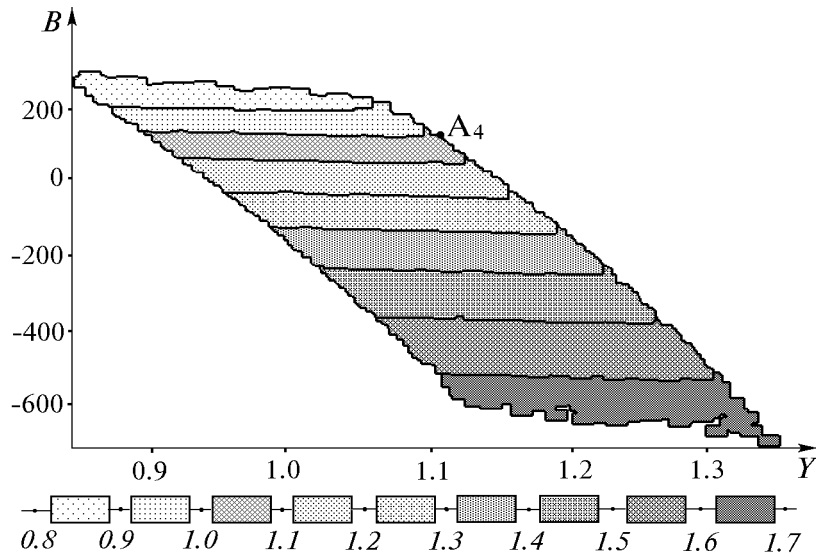


Рис. 4.2

Сравнивая вариант  $A_4$  с вариантом  $A_2$ , видим, что в соответствии с выбором цели, ВВП и потребление увеличились, а сальдо платежей уменьшилось. Для этого потребовалось уменьшить налоги, которые оказались в обычном диапазоне. В то же время, сравнивая полученную ставку рефинансирования со ставкой варианта  $R$ , мы видим, что она, хотя и понизилась, остается за пределами реализовавшегося диапазона. Продолжая сравнение, заметим, что хотя ВВП почти сравнялся с ВВП для варианта  $R$ , потребление теперь стало значительно ниже реализовавшегося – это и есть плата за устранение дефицита государственного бюджета. Анализ рис. 4.2 показывает, что такая плата неизбежна.

**Заключение.** Исследование показало, что согласно этой модели устранение дефицита госбюджета влечет падение производства и потребления. Мы не будем обсуждать вопрос о том, в какой мере такой вывод соответствует особенностям экономики Финляндии, в какой – свойствам модели, поскольку это не входит в круг вопросов, рассматриваемых в данной книге. Важно, что использование МДЦ позволило легко обнаружить такой интересный эффект.

Обратим внимание на выпуклость множества достижимых целей. Этот факт наводит на мысль о том, что соотношения модели могут продемонстрировать только тенденции изменений показателей, но не могут уловить возможных качественных особенностей ситуации. Это общее свойство моделей, параметры которых получены на основе простой статистической обработки наблюдений. Поэтому при анализе решений о существенном изменении экономической политики следует использовать модели, учитывающие реальные связи между основными экономическими агентами. Пример такого исследования рассмотрен в следующем параграфе.

### **3.5. Система поддержки дискуссий о стратегиях экономической реформы**

Модель, рассматриваемая в настоящем параграфе, принципиально отличается от эконометрической модели, рассмотренной в § 3.4. Это отличие проявляется в том, что в ней явно описывается сущность структурных изменений, происходящих в экономике. Мы не станем останавливаться на особенностях таких моделей, отослав заинтересованного читателя к книге А.А.Петрова [46].

Прежде чем переходить к описанию системы поддержки дискуссий о стратегиях реформы, рассмотрим результат исследования, с которого началось создание системы. Это исследование было осуществлено в 1990-1991 годах, т.е. перед началом экономической реформы в России, и продемонстрировало эффективность предложенного подхода. Исследование было посвящено изучению последствий широко обсуждавшейся в то время так называемой “шоковой терапии”, т.е. резкого перехода от плановой экономики с фиксированными ценами к свободному ценообразованию и выбору предприятиями поставщиков сырья и потребителей продукции. Как известно, такой переход был осуществлен в начале 1992 г. Он привел к огромной инфляции (рост цен более чем в сто раз за 1991-1992 годы) и к значительному обеднению той части населения, доходы которой были связаны с бюджетными выплатами. В 1990-1991 годах, когда проводилось описываемое исследование, эти последствия еще не были ясны.

Перед началом реформы многие эксперты предполагали, что цены увеличатся в два-три раза. Более того, рост цен в десять раз представлялся немалым. Поэтому результаты данного исследования многими считались фантастическими. Сейчас, когда начало реформы стало историей, можно утверждать, что результаты исследования достаточно хорошо предсказали реальное развитие событий. Вместе с тем, в ходе исследования были обнаружены возможные варианты экономической рефор-

мы, которые свидетельствовали о возможности более сбалансированных решений<sup>21</sup>.

**Модель “шоковой терапии”.** Модель экономики описывала соотношения между такими экономическими показателями, как суммарный валовый продукт, суммарное потребление, фонд заработной платы, общий индекс цен и т.д. В модели учитывались как натуральный баланс производства и распределения продукции, так и основные финансовые балансы:

- суммарных депозитов населения в банке;
- наличности у населения;
- краткосрочной задолженности предприятий банку;
- государственного долга.

Население было разбито на две большие группы: лица, существующие на средства бюджета (бюджетники), и лица, занятые на небюджетных предприятиях. Доходы первой группы составляют выплаты из государственного бюджета (служащим, пенсионерам и т.п.) и процентов по депозитам. Доходы второй группы складываются из заработной платы занятых на небюджетных предприятиях и выплат по процентам.

В модели рассматривались условия равновесия на рынке товаров (из него определялся индекс цен) и на рынке краткосрочных ссуд и депозитов. Система соотношений модели замыкалась уравнением, описывающим процесс изменения государственного потребления, которое уменьшалось от начального уровня до заданного конечного уровня. Начальное состояние экономики оценивалось по информации органов государственной статистики по состоянию на 1988 г. Опубликованные данные были приведены авторами модели в систему путем использования основных материальных и финансовых балансов.

Предполагалось, что реформа представляет собой пакет законопроектов, которые одновременно вводятся в действие. В результате:

- полностью отменяется централизованное планирование, предприятия получают право продавать продукцию по свободно складывающимся ценам;
- после уплаты налога на добавленную стоимость предприятия свободно распоряжаются своим доходом.
- Были также сделаны следующие предположения:
- в экономических условиях переходного периода предприятия не склонны использовать доход для инвестиций и используют его для оплаты труда;
- государственный банк устанавливает процент за кредит и процент по депозитам на равновесном уровне, однако не стремится к максимальной прибыли;

---

<sup>21</sup> Более подробно это исследование описано в [18].

- доходы государственного бюджета поступают в виде налогов на добавленную стоимость предприятий (налогообложение населения в расчет не принимается);
- расходы бюджета состоят из прямых выплат населению (зарплата служащих, разного рода пособия) и закупок на рынке продукта (государственные программы, в том числе инвестиции) на равных правах с другими потребителями (предприятиями, населением).

Варианты реформы различались выбором управляющих параметров, характеризующих экономическую и социальную политику правительства. Рассматривались:

- ставка налога  $n$  на добавленную стоимость;
- размер компенсации  $k$  роста цен в доходах населения, живущего на выплаты из государственного бюджета; компенсация осуществлялась в расчетах в виде увеличения в  $k$  раз фиксированной ставки заработной платы;
- характерное время снижения государственного потребления до заданного конечного уровня,  $T$  (государственное потребление снижается за характерное время в 1.5 раза).

**Имитационный анализ модели.** В исследовании для каждого варианта реформ (т.е. сочетания управляющих параметров) изучались зависимость от времени следующих характеристик:

- индекса цен  $p$ , т.е. отношения текущих цен к ценам 1988 г.;
- относительного уровня реальных доходов (т.е. текущих доходов в постоянных ценах, отнесенных к доходу в 1988 г.) населения, живущего за счет выплат из бюджета ( $CZ$ , млрд. руб.);
- относительного уровня реальных доходов населения, занятого на небюджетных предприятиях ( $CS$ , млрд. руб.).

Традиционная имитационная методология исследования сложных макроэкономических моделей состоит в том, что задаются сочетания управляемых параметров и изучается соответствующее им поведение макроэкономических характеристик. Зададим некоторый, на первый взгляд разумный, вариант управляющих параметров:

$$n=28\%, k=50\%, T=1 \text{ год.}$$

Рассмотрим поведение макроэкономических характеристик (рис. 5.1). В первой части рисунка представлена зависимость от времени (месяцы) индекса цен  $p$ , во второй части рисунка – график относительного уровня  $cs$  реальных (т.е. в ценах 1988 г.) доходов населения, занятого на небюджетных предприятиях, и в третьей части – график относительного уровня  $cz$  реальных доходов населения, живущего за счет бюджета. На графиках  $cs$  и  $cz$  горизонтальной линией представлены соответствующие уровни доходов этих двух групп населения в 1988 г. Из рисунка видно, что выбранный вариант реформы характеризуется:

- существенным ростом реальных доходов населения, занятого на небюджетных предприятиях;
- значительным (более чем в два раза) падением реальных доходов бюджетников;
- взрывным ростом индекса цен (в триллионы раз) к концу периода.

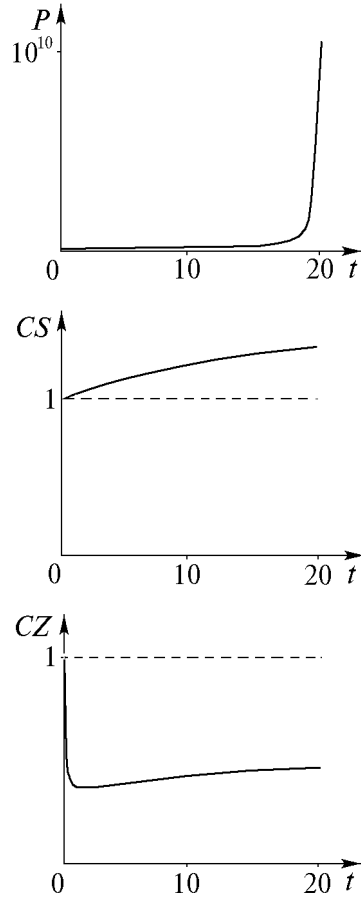


Рис. 5.1

Последнее означает, что при выбранном варианте реформы неизбежно разрушение финансового механизма государства.

Будем оценивать каждый вариант с помощью совокупности показателей, представляющих собой значения, наихудшие за рассматриваемый период:

$P$  – максимального значения индекса цен;

$Cz$  – минимального относительного уровня реальных доходов  $cz$ ;

$Cs$  – минимального относительного уровня реальных доходов  $cs$ .

Варианту управляющих параметров, рассмотренному выше, соответствует следующий набор значений показателей:

$$P=26 \text{ трилл.}, Cs=1, Cz=0.37.$$

Рассмотрим теперь стратегию, направленную на то, чтобы избежать гиперинфляции за счет уменьшения компенсационных выплат населению:

$$n=28\%, k=0, T=1 \text{ год.}$$

Соответствующий вариант процесса реформы, рассчитанный по модели, будет характеризоваться следующим набором значений показателей:

$$P=1 \text{ млн.}, Cs=1.1, Cz=0.00001.$$

Итак, гиперинфляции избежать не удалось, и кроме того, практически до нуля падают реальные доходы населения, живущего на доходы из госбюджета. Таким образом, согласно исследуемой модели, рассматриваемый вариант реформы характеризуется как разрушением финансового механизма, так и серьезными социальными потрясениями.

**Исследование модели на основе МДЦ.** Ограничим дальнейшее исследование следующей областью допустимых параметров:



- 1)  $n$  – от 15 до 70%;
- 2)  $k$  – от 0 до 100%;
- 3)  $T$  – от 3 мес. до 1 года.

Кроме того, потребуем, чтобы индекс цен не превышал 1000.

На рис. 5.2 представлена полная информация о взаимосвязи показателей доходов основных групп населения и роста цен для всех вариантов реформы, удовлетворяющих сформулированным выше ограничениям. Изображена серия слоев множества достижимых целей, различающихся значением индекса цен  $P$ . Каждый слой характеризуется своим типом штриховки (соответствие между типом штриховки и величиной индекса цен приводится на шкале под рисунком)<sup>22</sup>. По оси абсцисс на этом рисунке отложен показатель доходов бюджетников, по оси ординат – показатель доходов лиц, работающих на небюджетных предприятиях.

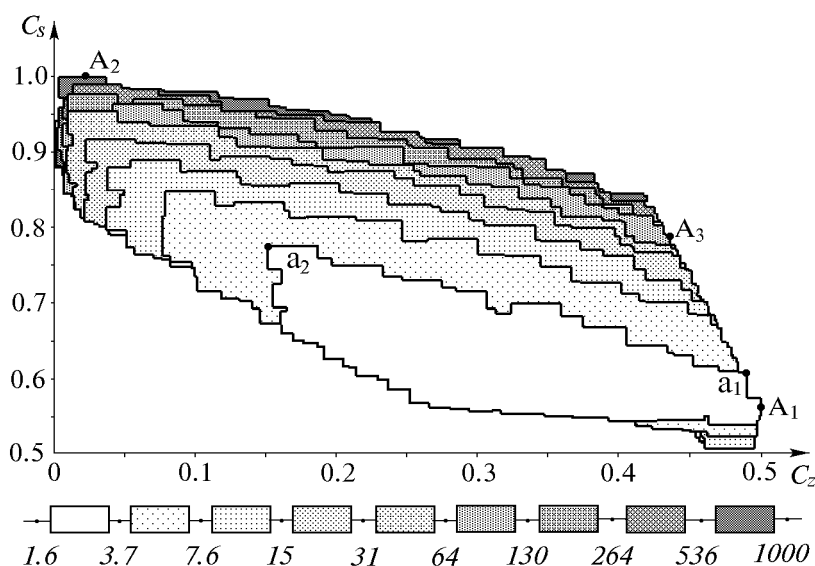


Рис. 5.2

Рассмотрим, например, самый светлый слой на рисунке (он не загромождается другими слоями и соответствует минимальным значениям индекса цен). Этот слой содержит те достижимые сочетания показателей  $C_z$  и  $C_s$ , для которых значения индекса цен находятся в диапазоне от 1.6 до 3.7. Так же как и в предыдущем параграфе, исследуемая модель не является линейной и для построения приближенного описания этого

<sup>22</sup> Для наглядного представления зависимостей пришлось выбрать для величины  $P$  неравномерную (логарифмическую) шкалу.

множества используются методы покрытия системами кубов. Поэтому рассматриваемый слой имеет неровную границу. Тем же свойством обладают и другие слои, изображенные на рисунке.

Слои множества достижимых целей перекрывают друг друга. В рассматриваемом случае это означает, что существуют достижимые цели с одним и тем же сочетанием показателей  $C_z$  и  $C_s$ , но разными значениями. Поскольку при прочих равных условиях нас интересуют достижимые цели с меньшим  $P$ , то на рассматриваемом рисунке слои с меньшим значением этого показателя наложены на слои с большим значением. Поскольку преимущество отдается вариантам с большими значениями показателей  $C_z$  и  $C_s$ , то для каждого конкретного сечения предпочтительной является его “северо-восточная” граница. Наложение сечений позволяет скрыть достижимые цели, неразумные с точки зрения показателя  $P$ .

Рассмотрим рис. 5.2 подробнее. Начнем с уже упоминавшегося слоя с минимальным диапазоном индекса цен (от 1.6 до 3.7). На этом слое расположена точка  $A_1$  с максимальной величиной показателя потребления бюджетников. При движении вдоль “северо-восточной” границы слоя от точки  $A_1$ , т.е. при уменьшении значения этого показателя, показатель потребления занятых на небюджетных предприятиях сначала резко, а затем, после точки излома  $a_1$ , более постепенно растет до своего максимального значения на этом слое, достигаемого в точке  $a_2$ . Как видно, остальные слои имеют аналогичную структуру. При этом с увеличением индекса цен “северо-восточная” граница смещается вверх, т.е. в сторону увеличения показателя потребления занятых на небюджетных предприятиях. Максимальное значение показателя  $C_s$  достигается при максимальной инфляции (между 536 и 1000).

Заметим, однако, что при увеличении индекса цен сдвиг “северо-восточной” границы становится все меньше и меньше. Благодаря этому, достаточно близко к точкам слоя с максимальной инфляцией имеются достижимые точки слоя со значительно меньшей инфляцией! Так, “северо-восточная” граница слоя с индексом цен от 64 до 130 не слишком отдалена от границы слоя с максимальной инфляцией. Ясно, что индекс цен в 100 и 1000 – это две различные экономические ситуации, поэтому представляется разумным ограничиться рассмотрением вариантов реформы, соответствующих слою с индексом цен, не превышающим 130. Рассмотрим точку  $A_3$ , расположенную на изломе “северо-восточной” границы этого слоя. Рассчитаем варианты реформы, приводящие к точкам  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  (табл. 5.1).

Для реализации точки  $A_1$ , наиболее благоприятной для бюджетников, требуется выбрать стратегию реформы с большой ставкой налога и компенсацией. Наоборот, точка  $A_2$  связана с разумной величиной налога и почти нулевой компенсацией. Компромиссный вариант  $A_3$  реализуется при средней (хотя и достаточно высокой) ставке налога и компенсации, практически той же, что и для точки  $A_1$ . За это приходится платить ин-

фляцией, которая значительно выше, чем в точке  $A_1$ . Заметим, что во всех трех случаях имеем  $T = 3$  месяца.

Таблица 5.1

Вариант	$n$	$k$	$T$	$P$	$C_s$	$C_z$
$A_2$	23%	0.4%	3 мес.	763	1.0	0.03
$A_3$	43%	81%	3 мес.	123	0.81	0.43
$A_1$	70%	82%	3 мес.	3	0.57	0.5

**Описание системы.** На основе опыта, полученного при изучении модели шоковой терапии, была реализована компьютерная система, предназначенная для поддержки дискуссий о вариантах экономической реформы и построении разумных экономических стратегий. При этом может изучаться широкий класс моделей экономической реформы, учитывающих, кроме рассмотренных выше, другие переменные и показатели. Обычно рассматриваются макроэкономические модели, достаточно сложные и нелинейные. В системе поддерживается как традиционный имитационный подход, так и МДЦ.

Функционально система состоит из шести основных подсистем:

- 1) подсистемы подготовки исходных данных;
- 2) подсистемы имитационного эксперимента;
- 3) подсистемы построения МДЦ;
- 4) подсистемы визуального исследования МДЦ и выбора достижимой цели;
- 5) подсистемы расчета стратегий;
- 6) подсистемы визуализации стратегий;
- 7) подсистемы подготовки выходной информации;
- 8) подсистемы работы с библиотекой вариантов.

Прежде всего, пользователь системы подготавливает исходные данные для исследования. Исходными данными для системы являются описание модели и множества допустимых вариантов реформы. При описании этого множества пользователь имеет возможность указать диапазоны изменения управляющих параметров, таких как ставки налогов, величина государственного потребления, процентные ставки по кредитам и депозитам и др., а также зафиксировать значения некоторых параметров на одном или нескольких уровнях значений. Кроме того, множество допустимых вариантов реформы может быть задано неявным образом – через указание диапазона допустимых значений некоторых макроэкономических показателей, таких как индекс цен, курс рубля, доходы различных слоев населения и т.п.

Пользователь должен указать, какие переменные модели являются целевыми. Именно в пространстве целевых переменных будет построено множество достижимых целей. Следует отметить, что наряду с макроэко-

номическими показателями пользователи часто включают в число целевых переменных также некоторые управляющие параметры для исследования их влияния на достижимые сочетания макроэкономических показателей. Ввод данных в подсистеме осуществляется через заполнение стандартной формы в обычном текстовом редакторе. Подсистема подготовки данных проводит простейшие тесты на согласованность и, в случае отсутствия ошибок, подготавливает файлы, необходимые для запуска остальных подсистем.

В подсистеме имитационного эксперимента пользователь имеет возможность рассчитать последствия одного варианта реформы. В диалоге пользователь задает управляющие параметры, характеризующие интересующий его вариант реформы. При этом можно подробно изучить поведение макроэкономических характеристик во времени с помощью системы визуализации стратегий, а также сохранить результат расчета в библиотеке вариантов.

В подсистеме построения множества достижимых целей вся работа происходит автоматически. Имеется два режима работы подсистемы – прямой и удаленный. В прямом режиме процесс построения происходит на персональном компьютере и специалист может прервать процесс вычислений до того, как будет достигнута желаемая точность аппроксимации множества достижимых целей. Эта возможность используется на начальном этапе исследования, когда еще нет уверенности в том, что исходные данные не содержат ошибок. Визуальный анализ даже весьма грубой аппроксимации множества достижимых целей позволяет установить наличие или отсутствие грубых ошибок в исходных данных. Удаленный режим используется в том случае, когда расчеты по модели трудоемки. В этом случае управление передается более мощному компьютеру, с которым персональный компьютер пользователя связан по сети. Результатом работы большого компьютера является в этом случае база данных, содержащая десятки или сотни тысяч вариантов реформы. Эта база данных используется далее для построения множества достижимых целей.

Основные возможности подсистемы визуального исследования множества достижимых целей аналогичны возможностям, описанным ранее, поэтому мы на них останавливаться не будем. В результате исследования множества достижимых целей специалист выбирает одну из достижимых целей, и система автоматически входит в подсистему расчета стратегии. Подсистема визуализации стратегии представляет ее в виде графиков поведения макроэкономических показателей.

Подсистема подготовки выходной информации дает возможность представить стратегию в виде временных рядов. Кроме того, с помощью снятия копий с экрана компьютера имеется возможность получить копии множества достижимых целей, интересующие специалиста. Эти копии, наряду с временными рядами и графиками поведения макроэкономиче-

ских показателей, представляются лицам, принимающим участие в обсуждении варианта реформы.

Подсистема работы с библиотекой вариантов позволяет просматривать сохраненные варианты стратегий и их последствия, а также запускать для этих стратегий подсистему подготовки выходной информации. Эта библиотека особенно важна, если процесс расчета отдельного варианта является трудоемким.

## **Глава 4.**

### **НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ МДЦ**

Данная глава посвящена обобщению результатов предыдущих глав и обсуждению методических вопросов, возникающих при применении МДЦ. В первом параграфе описывается методика представления множеств достижимых целей и их ОЭП наборами двумерных сечений. При этом, по существу, обобщаются примеры, которые были рассмотрены в предыдущих главах. Показывается, что такие методы визуализации идейно близки к средствам мультимедиа.

Во втором параграфе описаны используемые в книге сведения о психологии принятия решений человеком и вытекающие из них соображения о месте МДЦ в новых компьютерных технологиях поиска эффективных стратегий.

В третьем параграфе рассматривается компьютерная технология проектирования технических систем, основанная на использовании МДЦ. Особое внимание уделяется использованию метода на предпроектной стадии формирования технического задания и облика объекта проектирования. Приводится пример – анализ возможных проектов сверхзвукового самолета.

В четвертом параграфе методика поиска эффективных стратегий, основанная на использовании МДЦ, конкретизируется для случая эколого-экономических проблем – излагается методика целостного рассмотрения этих проблем.

В пятом параграфе показывается, как метод может быть использован в переговорах.

Шестой параграф посвящен важной специальной задаче принятия решений – идентификации систем на основе МДЦ.

В заключительном, седьмом параграфе описывается методика использования МДЦ в рамках компьютерных сетей ИНТЕРНЕТ.

#### 4.1. Методы визуализации множеств достижимых целей и их ОЭП

Напомним, что в наших исследованиях визуализация множества достижимых целей или его ОЭП осуществляется на основе демонстрации их двумерных сечений. На этом, в частности, основаны Диалоговые Карты Решений, являющиеся в настоящее время основным средством визуализации в МДЦ. Для того чтобы задать двумерное сечение некоторого многомерного множества, надо выбрать те два критерия, достижимые значения которых будут демонстрироваться на дисплее компьютера (так называемые координатные критерии). Далее, надо задать набор значений остальных (некоординатных) критериев. После этого, для изображения границ двумерного сечения многогранного множества, аппроксимирующего множество достижимых целей (или его ОЭП), требуется рассчитать вершины сечения, а затем соединить их ребрами. Эта задача не представляет особой сложности и может быть решена достаточно быстро.

Для визуализации множества достижимых целей требуется рассчитать и изобразить целую совокупность двумерных сечений. Визуализацию ОЭП также разумно основывать на использовании совокупности сечений. Для этого требуется задать совокупность значений некоординатных критериев, а затем изобразить соответствующую совокупность сечений. Были разработаны алгоритмы, позволяющие изображать совокупности двумерных сечений многогранных множеств на дисплее персонального компьютера достаточно быстро. В случае невыпуклых множеств, которые аппроксимируются системами простых фигур, могут быть использованы быстрые алгоритмы построения контура объединения прямоугольников (см. § 5.5). Таким образом, вычислительные проблемы расчета сечений в целом решены.

В процессе визуализации множеств достижимых целей и их ОЭП возникают два вопроса: задача выбора совокупности наборов значений некоординатных критериев, порождающей совокупность двумерных сечений, и задача расположения получаемых сечений на дисплее.

**Визуализация в случае трех критериев.** Начнем с самого простого случая – с трех критериев, когда имеется лишь один некоординатный критерий. Требуется задать совокупность значений этого критерия. При первом ознакомлении с множеством значения некоординатного критерия удобно распределить равномерно, что может быть сделано автоматически. На последующих стадиях анализа пользователь может задать и другую совокупность интересных для него значений некоординатного критерия.

Рассмотрим вопрос о расположении сечений трехмерного множества на дисплее. В зависимости от цели исследования, сечения могут быть расположены одно рядом с другим или наложены одно на другое. Наложение

жение сечений позволяет легко сравнивать их между собой. Напомним, что сечения на цветном дисплее изображаются различными цветами, а на монохромном – различными штриховками. Это позволяет легко понять, какому значению некоординатного критерия соответствует каждое сечение. Примеры такого изображения совокупности наложенных одно на другое сечений трехмерного множества были многократно представлены в нашей книге. В то же время, при наложении сечений множества достижимых целей (но не его ОЭП!) одни сечения обычно загораживают другие, т.е. их границы пересекаются, что затрудняет анализ.

Расположение двумерных сечений в ряд (без наложения друг на друга) удобно при изучении множеств достижимых целей в том случае, когда границы двумерных сечений пересекаются. Кроме того, расположение сечений в ряд представляется целесообразным, когда возникает необходимость изобразить на одном рисунке внешнюю и внутреннюю аппроксимации множества достижимых целей. Наконец, расположение сечений в ряд разумно использовать в задаче сравнения нескольких многомерных множеств, рассмотренной более подробно в конце параграфа. В то же время, наложение сечений ОЭП явно предпочтительнее расположения их в ряд, поскольку позволяет легко понять связь трех критериев.

В случае трех критериев разбиение на координатные и некоординатный критерии не столь существенно: достаточно одного нажатия на клавишу компьютера, чтобы практически мгновенно на дисплее была изображена серия сечений для другого разбиения на координатные и некоординатный критерии. Именно поэтому можно говорить не столько об изображении двумерных сечений трехмерного множества, сколько о визуализации этого множества в целом.

Часто возникает вопрос о том, почему бы с помощью современных методов компьютерной графики не представить исследователю трехмерное изображение множества. Действительно, предварительная аппроксимация множества значительно упрощает решение этой задачи. Тем не менее, наш опыт (связанный, впрочем, только с задачами принятия решений) показывает, что совокупность наложенных двумерных сечений является достаточно наглядной и информативной, поскольку позволяет не только определить координаты любой точки на поверхности сечения, но и легко оценить влияние третьей переменной на геометрию сечения. Этого нет в трехмерной картине. В то же время, трехмерное изображение может быть использовано как вспомогательное, для общей ориентации исследователя (это было продемонстрировано в § 3.1). В связи со сказанным, трехмерные изображения впредь рассматриваться не будут, а под трехмерным рисунком будем понимать совокупность наложенных одно на другое двумерных сечений множества достижимых целей (или его ОЭП), соответствующих различным значениям некоординатного критерия, который в случае трехмерного рисунка будем называть цветовым



критерием. При изучении ОЭП трехмерный рисунок – это не что иное как карта решений.

**Визуализация в случае четырех и пяти критериев.** Рассмотрим случай четырех критериев. К некоординатным критериям теперь относятся два из них, и для того чтобы дать представление о визуализируемом множестве, требуется задать совокупность их значений. Совокупность значений некоординатных критериев задает сетку в пространстве значений этих критериев. Число узлов этой сетки равно произведению числа выбранных значений каждого из некоординатных критериев. Каждому узлу этой сетки соответствует одно двумерное сечение. Выбор значений, так же как и в случае трех критериев, может быть осуществлен как автоматически, так и пользователем.

Как и в случае трех критериев, двумерные сечения можно наложить одно на другое. Такая картина, однако, обычно является очень сложной и мало информативной (впрочем, иногда такое наложение оказывается полезным). Можно, наоборот, расположить сечения в виде двумерной матрицы, соответствующей узлам сетки значений некоординатных критериев. Самым удобным способом расположения сечений, однако, является расположение в ряд трехмерных рисунков, каждый из которых соответствует некоторому фиксированному значению одного из некоординатных критериев (скажем, четвертого). При этом трехмерный рисунок соответствует двум координатным критериям и одному из некоординатных (скажем, третьему). Именно такой подход обычно использовался в нашей книге в случае четырех критериев. Поскольку, как уже говорилось выше, достаточно одного нажатия на клавишу для того, чтобы на дисплее практически мгновенно был изображен трехмерный рисунок, в котором координатные и третий некоординатный критерии поменялись местами, при выбранном нами подходе к расположению сечений деление критериев на координатные и некоординатные теряет смысл: полезнее говорить о рисуночных и нерисуночных критериях. Это особенно удобно для случая пяти и большего числа критериев.

Действительно, в случае пяти критериев приходится рассматривать трехмерную сетку, соответствующую трем некоординатным критериям. Если же рассмотреть рисуночные и нерисуночные критерии, то число нерисуночных критериев равно двум и требуется рассмотреть лишь двумерную сетку. Каждому узлу такой сетки соответствует один трехмерный рисунок, а в целом сетка порождает матрицу рисунков (пример приведен в главе 2). Число трехмерных рисунков в матрице на дисплее определяется пользователем и зависит от его интересов (а также и от качества монитора). Пользователь имеет возможность при помощи простых манипуляций изменить разбиение критериев на рисуночные и нерисуночные, изменить значения в узлах или число узлов. Имеется также возможность сузить исходный диапазон значений любого из критериев. Поскольку множество достижимых целей (или его ОЭП) аппроксимировано заранее,

то для построения новой матрицы рисунков требуется всего несколько секунд. Заметим, что исследователь может обратиться к анализу одного трехмерного рисунка, выбрав его в матрице. При этом соответствующие нерисуночные критерии принимают значения, связанные с выбранным узлом.

**Случай более пяти критериев.** Если число критериев больше пяти, то совокупность сочетаний значений нерисуночных критериев уже не может быть представлена двумерной сеткой, а совокупность трехмерных рисунков – матрицей. Для того чтобы преодолеть это затруднение, разобьем нерисуночные критерии на два типа: матричные критерии и критерии прокрутки (scroll-bar). Число матричных критериев, значения которых соответствуют строкам и столбцам матрицы рисунков, не превышает двух. Работа с ними описана для случая пяти критериев. Значения критериев прокрутки варьируются пользователем с помощью стандартного ныне элемента программного обеспечения – прокрутки. Пользователь задает значение такого критерия, передвигая движок (thumb) соответствующей прокрутки. Таким образом, совокупность значений критерия прокрутки заранее не задается. Если же такую совокупность значений задать заранее (например, расположить их равномерно), то этот процесс перебора значений можно автоматизировать – значения могут последовательно перебираться компьютером, причем скорость перебора может быть выбрана пользователем. Если число заданных значений критерия прокрутки велико и они распределены равномерно, то последовательная смена рисунков может создать иллюзию движения – мультипликационный эффект.

**Динамическая визуализация.** Рассмотрим возможности использования мультипликационного эффекта более подробно. Начнем с того, что этот эффект можно использовать уже при трех критериях: двух координатных критериях и одном некоординатном. Зададим большое число равномерно расположенных значений критерия прокрутки и станем последовательно сменять двумерные сечения множества достижимых целей (или его ОЭП). Если совокупность значений критерия прокрутки и скорость смены сечений выбрана разумно, то возникнет мультипликационный эффект, который позволит пользователю изучить воздействие критерия прокрутки на достижимые значения координатных критериев. Назовем такой способ визуализации совокупности сечений динамической визуализацией.

Пользователь имеет возможность зафиксировать тот “кадр” (т.е. значение автоматически перебираемого критерия прокрутки), когда на экране изображено некоторое интересное для него сечение. Выбрав не слишком большое число таких кадров, можно получить ряд двумерных сечений, рассмотренный ранее. При этом выбор кадров уже будет отражать интересы пользователя.

Аналогичным образом можно реализовать динамическую визуализацию трехмерного рисунка, матрицы двумерных сечений или трехмерных рисунков и т.д. Вопрос состоит только в том, за сколькими сечениями и рисунками способен одновременно следить пользователь. Напрашивается сравнение динамической визуализации с видеомэгнитофоном, с помощью которого исследователь просматривает заранее снятый фильм об изучаемом множестве, выбирая попутно наиболее понравившиеся ему кадры. Хотя с точки зрения пользователя такая аналогия вполне уместна, предлагаемая нами методика отличается тем, что кадры не отрисованы заранее, они быстро рассчитываются в процессе просмотра на основе заранее проведенной предобработки – аппроксимации множества. Благодаря такой черте МДЦ, пользователь имеет свободный доступ к информации: в любой момент он может переключиться с какого-либо определенного фильма (скажем, о динамике данного двумерного сечения при изменении некоторой третьей переменной) на изучение связей других переменных, т.е. на другой фильм. Более того, ему оказывается легко доступен любой потенциально возможный фильм, который может быть реализован на основе заранее построенной аппроксимации множества достижимых целей (или его ОЭП).

**Проекция ОЭП в подпространства критериев.** В случае большого числа критериев часто возникает следующая идея: а что если временно отвлечься от части критериев и рассмотреть взаимоотношения нескольких (скажем, трех) оставшихся. Это можно сделать для уже аппроксимированных множеств достижимых целей и их ОЭП. Если аппроксимация задается системой простых фигур, построение проекций которых осуществляется элементарно, то проблема вообще не возникает, поэтому рассмотрим случай аппроксимации выпуклым многогранным множеством.

Проекция многогранника, аппроксимирующего множества достижимых целей, может быть построена на основе специальных алгоритмов, описанных в § 5.1. Применение этих алгоритмов может быть связано с определенными затруднениями, обсуждаемыми в § 5.1, поэтому в реализованных ныне системах этот подход не используется. Для ОЭП дело обстоит значительно проще.

В главе 1 мы уже обсуждали свойства ОЭП. Самое важное из них – постепенное расширение сечения множества при ослаблении ограничений на некоординатные критерии. Если же взять такие ограничения на некоординатные критерии, которые на недоминируемом множестве выполняются автоматически, то дальнейшее ослабление этих ограничений к расширению проекции не приведет. Построенное максимальное сечение и будет двумерной проекцией ОЭП на плоскость двух координатных критериев. Таким образом, задача может быть легко решена.

Пусть теперь критерии разбиты на рисуночные и нерисуночные. Выберем самые слабые ограничения на прокрутках и рассмотрим рисунок с

самым широким множеством. Это – проекция ОЭП в пространство рисуночных критериев. Ясно, что максимальное из изображенных сечений является проекцией ОЭП в пространство координатных критериев. Описанное свойство является еще одним преимуществом ОЭП и стимулом их использования в случае трех критериев и более.

**Визуальное сравнение нескольких множеств.** Перейдем теперь к рассмотрению упоминавшейся ранее задачи визуального сравнения нескольких, скажем, двух множеств. Подобная задача достаточно распространена при исследовании математических моделей и возникает, например, если исследуется устойчивость возможностей системы по отношению к некоторым параметрам модели. При этом требуется изучить разности множеств, т.е. совокупность точек первого множества, не принадлежащих второму, и совокупность точек второго, не принадлежащих первому. При числе критериев большем двух, единственным эффективным средством является визуальный анализ: можно изобразить на дисплее ряд рисунков, каждый из которых представляет собой наложение двумерных сечений этих множеств при одних и тех же значениях некоординатных критериев.

Рассмотрим теперь вопрос о сходстве и различии между методом достижимых целей и мультимедиа – современным компьютерным средством представления информации.

**Средства мультимедиа и визуализация в МДЦ.** Напомним, что мультимедиа (ММ) – это использование набора различных выразительных и информационных компьютерных средств для решения определенной задачи: развлечения, обучения, поддержки принятия решений и переговоров и т.д. Выделяют следующие основные признаки ММ:

- 1) использование цифровой технологии;
- 2) интеграция нескольких средств (по крайней мере одно из них должно быть динамическим);
- 3) активное участие человека в процессе выбора той информации, которая ему требуется в данный момент, и форм ее предоставления;
- 4) ассоциативный подход к выбору информации и форм ее представления с использованием специального средства – гипермедиа.

Использование цифровой технологии – основа компьютеров, поэтому данный пункт не нуждается в обсуждении. Отметим лишь, что наиболее распространенная в настоящее время форма – на компакт-дисках (CD-ROM), не является единственно возможной. Уже сейчас ММ становится, например, доступно по компьютерным сетям. Интеграция нескольких средств – основная идея ММ. Среди средств ММ можно выделить: динамические – видеофильмы, анимация, речь, музыка, другие акустические средства, статические – картины, фотографии, текст, статическая графика и т.д. Отметим, что в настоящее время используются лишь акустические и визуальные средства, действующие на слух и зрение. В то же время в

рамках средств виртуальной реальности, которые вскоре также станут одним из доступных средств ММ, возможно воздействие и на другие чувства – осязание и обоняние.

Активное участие человека в выборе информации и форм ее представления предопределяет такую организацию систем, при которой информация и средства были бы легко доступны при достаточно произвольном запросе. В отличие от обычного фильма, в котором последовательность изображения событий задана заранее, в средствах ММ человек сам должен решать, какую информацию, в каком объеме и в каком виде требуется предоставить.

Для реализации удобного доступа к информации в ММ обычно используется специальное средство – гипермедиа (ГМ). Оно предоставляет возможность легко обратиться к некоторому ограниченному набору единиц информации из ее общей совокупности. Состав набора зависит от состояния системы и диалога пользователя с ЭВМ. При этом заранее определяется, к какой информации можно обратиться из любого данного состояния диалога человека с компьютером. С помощью ГМ делается попытка реализовать ассоциативный подход к выбору информации.

Заметим, что хотя ГМ является весьма удобным средством навигации в море информации, оно имеет существенные недостатки. Самый главный из них – пользователь должен основываться на ассоциативных связях, заданных разработчиком. Между тем, у каждого человека возникают свои ассоциативные связи, определяемые его знаниями, опытом и интересами.

Перейдем к оценке МДЦ с точки зрения концепции мультимедиа. МДЦ является компьютерным средством анализа, поэтому первый признак средств ММ очевидным образом присутствует. Интеграция нескольких средств достигается в МДЦ наличием двух основных способов визуализации множества достижимых целей и его ОЭП – статическими изображениями карт решений и их анимацией.

Заметим, что хотя акустические средства в настоящее время используются в МДЦ лишь спорадически (например, раздается сигнал при выборе целевой точки), возможно систематическое использование речевых комментариев (не говоря уже о музыке и других звуках). Отметим, что акустические средства используются при построении множеств достижимых целей для информирования о точности аппроксимации – чем выше точность, тем выше частота звука.

Рассмотрим вопрос о легком доступе к информации и о ее ассоциативной организации. Как видно из данного параграфа, в программном обеспечении, реализованном в настоящее время, осуществлен полностью свободный доступ к информации, содержащейся в множестве достижимых целей (или его ОЭП). По существу, реализована единственная ассоциативная связь – после выбора целевой точки строится и демонстрируется решение, соответствующее этой цели. (Заметим, что в системе, опи-

санной в § 2.2, использован другой подход – инженер может сначала указать несколько целевых точек и лишь потом найти соответствующие им решения.)

Таким образом, при выборе информации в МДЦ пользователь должен опираться на собственные ассоциации, которые мы заранее предсказать не беремся. В то же время, можно предложить некоторые хорошо организованные (как принято говорить, структуризованные) процедуры анализа множества достижимых целей или его ОЭП. Это облегчает анализ за счет упрощения диалога. Конечно, приходится жертвовать свободой анализа.

**Структуризованная диалоговая процедура выбора достижимой цели.** Многокритериальные структуризованные диалоговые процедуры представляют собой процесс многошагового взаимодействия человека с компьютером [13]. В рамках этих процедур пользователь должен отвечать на вопросы о своих предпочтениях. Эти вопросы формулируются компьютером с учетом ответов, данных пользователем на предыдущих шагах процедуры. Для того чтобы сформировать новый вопрос пользователю, обычно приходится решать некоторые задачи оптимизации. В результате многошагового взаимодействия с компьютером пользователь должен прийти к некоторой эффективной стратегии, являющейся наилучшей с точки зрения интересов, проявившихся в ответах на вопросы, поставленные компьютером.

Основной проблемой, возникающей при разработке структуризованных диалоговых процедур, является следующая: достаточно ли просты вопросы, задаваемые компьютером. Если эти вопросы непросты для пользователя, то он будет давать на них противоречивые ответы либо прекратит диалог до того, как разумное решение будет найдено. Эта проблема рассмотрена в книге [27]. В частности, в ней показано, что достаточно простым является следующий вопрос: выбрать из недоминируемого набора значений критериев такую пару критериев, что значение одного из них следует улучшить, а по второму можно уступить. Далее, в той же работе показано, что выбор по двум критериям является достаточно простой задачей. На упомянутых фактах основывается предлагаемая далее процедура выбора достижимой цели в рамках МДЦ.

На предварительном этапе процедуры строится ОЭП множества достижимых целей и находится некоторая недоминируемая целевая точка (т.е. набор значений критериев)<sup>23</sup>. Далее реализуется последовательность одинаковых шагов взаимодействия пользователя с компьютером, состоящих из следующих двух этапов.

---

<sup>23</sup> Эта точка может быть найдена на основе использования некоторого “справедливого” правила или на основе приемов, предложенных в рамках процедуры STEM (см. [27]).

Этап 1. Человек получает набор значений критериев, найденный на предыдущих шагах, и выбирает те два критерия, значения которых он хотел бы изменить.

Этап 2. Человек получает на мониторе компьютера сечение ОЭП, в качестве координатных критериев для которого взяты два выбранных критерия, а значения некоординатных критериев взяты из набора значений, найденного на предыдущем шаге. При этом на сечении значком отмечено “исходное” сочетание значений двух координатных критериев (см. рис. 1.1). Человек должен указать на этом сечении новое, более предпочтительное сочетание значений этих двух критериев. Найденное сочетание критериев (новые значения координатных критериев и прежние значения остальных) является исходным для следующего шага процедуры, на котором человеку предлагается улучшить недоминируемое сочетание значений критериев за счет другой пары критериев.

Процедура завершается, когда человек отказывается менять текущую критериальную точку. В завершение (а при желании и на любом шаге) компьютер рассчитывает соответствующую стратегию.

Отметим особенности рассмотренной процедуры. Во-первых, ее большим преимуществом является быстрота изображения сечений даже в задачах большой размерности за счет предварительного построения ОЭП. Во-вторых, информация об объективной зависимости между недоминируемыми значениями двух критериев дается в наглядной форме, позволяющей легко указать их предпочтительное сочетание. В-третьих, человек имеет право на ошибку: если на каком-то шаге выбор был осуществлен неверно, всегда можно исправить эту ошибку в дальнейшем. Наконец, имеется математическое обоснование процедуры<sup>24</sup>.

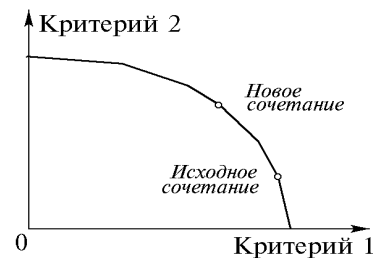


Рис. 1.1

Недостаток процедуры заключается в том, что требуется проделать значительное число шагов в случае достаточно большого числа критериев (скажем, пяти). Чтобы уменьшить число шагов, можно рассматривать не двумерные сечения, а карты решений. В этом случае человек указывает наиболее предпочтительную точку на карте решений, т.е. решает задачу сразу с тремя критериями. Хотя эта задача сложнее, чем выбор только по двум критериям, она может быть легко решена пользователями, внимательно изучившими метод достижимых целей.

<sup>24</sup> Процедура предложена и исследована в [73].

**Модифицированная структуризованная процедура.** В структуризованной процедуре, рассмотренной выше, выбор двух (или трех) критериев, которые будут рассматриваться на втором этапе процедуры, основывался на анализе текущей недоминируемой точки, т.е. совокупности значений критериев, без учета объективных замещений между критериями. Может создаться такая ситуация, что пользователь, выбрав пару критериев и взглянув на кривую объективных замещений, увидит, что желаемое улучшение значения одного критерия приводит к слишком большому ухудшению значения второго. Поэтому он будет вынужден отказаться от предполагаемого изменения и постараться найти другую, более подходящую пару критериев. Если число критериев в задаче велико, то процесс выбора подходящей пары может затянуться и стать очень утомительным. Чтобы помочь пользователю в выборе подходящей пары критериев, модифицируем процедуру, добавив возможность сравнения объективных замещений для различных пар.

Перед началом многошаговой процедуры пользователь получает на экране дисплея информацию о диапазоне недоминируемых значений для каждого критерия. Такая информация рассчитывается в процессе построения ОЭП. Пользователь имеет возможность сузить диапазоны и выделить приемлемые для него значения каждого из критериев. Компьютер следит за тем, чтобы отсекаемая ограничениями часть ОЭП не стала пустой. Если это произошло, то пользователь должен расширить какие-то из диапазонов.

В дальнейшем в ходе процедуры, наряду с исходными единицами измерения, для каждого критерия мы будем использовать условные единицы, связанные с выбранными диапазонами, так что значения критериев в пределах диапазона будут изменяться от нуля до единицы (или от нуля до ста).

Как и ранее, предположим, что в начале работы процедуры каким-либо образом находится некоторая недоминируемая целевая точка, принадлежащая выбранным диапазонам значений критериев. Точки, которые будут строиться в процессе работы процедуры, также будут удовлетворять этим ограничениям.

В модифицированной процедуре для выбора подходящей пары критериев используется рисунок, являющийся наложением нескольких кривых объективного замещения. Собственно говоря, именно для получения этого рисунка все критерии на предварительном этапе процедуры были приведены к единым безразмерным единицам измерения – долям (процентам) выбранного диапазона.

Выберем один из критериев и назовем его ведущим. Будем откладывать значения этого критерия по горизонтальной оси. На вертикальной оси откладываются значения всех остальных критериев. В таких осях можно наложить кривые объективного замещения, получаемые в обычной структуризованной процедуре на различных рисунках, соответству-



ющих различным парам координат. Каждая кривая – это граница двумерного сечения, проходящего через целевую точку. Этот рисунок принципиально отличается от карты решений тем, что является изображением замещений одновременно в различных координатах. Поэтому эти кривые могут пересекаться. Рисунок описанного вида будем называть комплексом кривых замещения.

Проведем вертикальную линию через текущее значение ведущего критерия. Точки пересечения этой линии и кривых соответствуют значениям соответствующих критериев в текущей целевой точке. Кривые дают наглядное представление о влиянии изменения величины ведущего критерия на значения других критериев. Сравнивая кривые между собой, можно выбрать ту из них, перемещаясь по которой можно улучшить значение ведущего критерия с минимальными потерями. Этой кривой и будет соответствовать тот второй критерий, за счет которого разумно улучшить значение ведущего критерия.

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи выбора специализации региона (см. § 1.3). Возьмем исходные (максимальные) диапазоны изменения критериев. В качестве текущей целевой точки возьмем точку С на рис 3.2 главы 1. Предположим, что на данном шаге процедуры представляется разумным улучшить значение критерия заболеваемости. Возьмем этот критерий в качестве ведущего. На рис. 1.2 изображен комплекс кривых замещения. Текущей целевой точке на нем соответствуют две точки – 1 и 2, находящиеся соответственно на кривых замещения для пар критериев “Заболеваемость – Прибыль бизнесменов” и “Заболеваемость – Доход фермеров”. Точки с лучшими, чем в текущей целевой точке, значениями критерия заболеваемости лежат на кривых замещения слева от вертикальной линии.

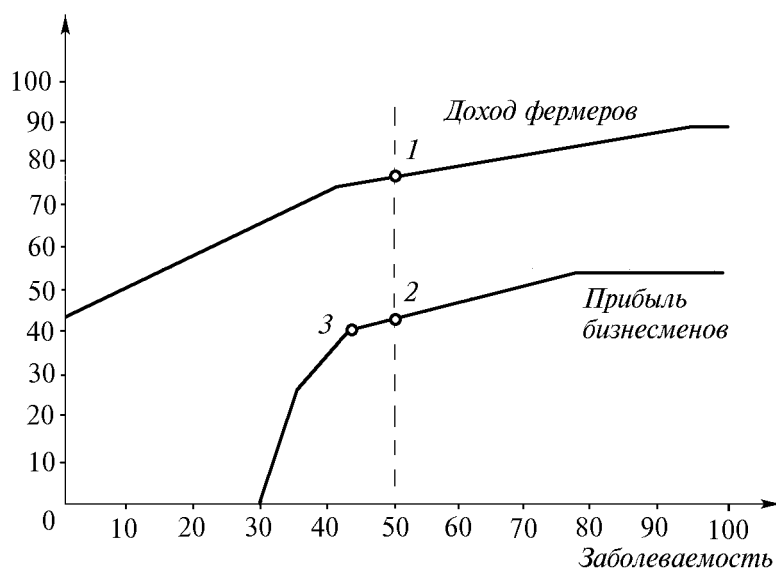


Рис. 1.2

Сравнивая две кривые замещения между собой, мы видим, что кривая для пары “Заболеваемость – Доход фермеров” имеет меньший наклон, чем для пары “Заболеваемость – Прибыль бизнесменов”. Это, скорее всего, говорит о том, что улучшать показатель “Заболеваемость” предпочтительнее за счет уменьшения дохода фермеров, поскольку относительное ухудшение этого критерия будет меньше, чем критерия “Прибыль бизнесменов”. В качестве новой точки можно взять точку 3 на кривой замещения “Заболеваемость – Доход фермеров”.

Заранее хотим предупредить возможную ошибку – каждая кривая на рис 1.2 показывает замещение только для одной пары критериев. При движении вдоль каждой из этих кривых значения других критериев, не входящих в эту пару, не изменяются. В частности, после выбора точки 3 в качестве текущей, значение прибыли бизнесменов остается прежним, т.е. таким же, как и в точке 1. Другими словами, после перемещения текущей точки по одной из кривых замещения другие кривые замещения, вообще говоря, изменят свою форму. Поэтому по рисунку 1.2 нельзя оценить результат одновременного изменения трех и более критериев.

Удобство представления замещений в виде, приведенном на рис. 1.2, состоит в том, что одновременно можно рассматривать большое число кривых объективного замещения (скажем, шесть в случае семи критериев). Однако сравнивать замещения приходится в относительных, условных единицах, что далеко не всегда удобно. Введение условных единиц связано главным образом с необходимостью сравнения значений критериев.

риев совершенно различной природы. Но в тех случаях, когда все критерии имеют одинаковые единицы измерения и примерно одинаковый порядок величины, вместо условных относительных единиц на вертикальной оси на рис 1.2 можно использовать исходные единицы измерения. Кроме того, в качестве альтернативы условным единицам можно предложить одновременное изображение нескольких вариантов вертикальной оси, расположенных рядом друг с другом и оцифрованных для различных единиц измерения.

Теперь опишем очередной шаг модифицированной процедуры. Он также состоит из двух этапов.

Этап 1. Человек получает набор значений критериев в текущей целевой точке и выбирает тот критерий, значение которого он хотел бы улучшить. На экране появляется комплекс кривых замещения, где в качестве ведущего взят выбранный критерий. Человек изучает комплекс кривых и выбирает ту кривую, с которой он желает работать далее.

Этап 2. Указав кривую, человек определил пару критериев, один из которых следует улучшить за счет другого.

Мы находимся в той же ситуации, что и на этапе 2 процедуры из предыдущего раздела, и действуем таким же образом.

**Заключение.** Итак, единственное принципиальное отличие программного обеспечения, реализующего визуализацию множеств в МДЦ, от средств ММ – это отсутствие ассоциативных связей, зафиксированных заранее. Целесообразность включения средств ГМ в МДЦ требует дополнительного анализа и экспериментов. В частности, средства ГМ могли бы с успехом использоваться при обучении работы с программным обеспечением, реализующим МДЦ.

В связи со сказанным выше можно считать, что МДЦ (и особенно Диалоговые Карты Решений) является средством, лежащим в русле ММ, и поэтому способным оказаться одним из составляющих систем ММ, предназначенных для поддержки принятия решений и переговоров. Кроме того, МДЦ может быть естественным образом интегрирован в различные мультимедийные СППР как средство, помогающее выбрать небольшое число вариантов из большой (или бесконечной) исходной совокупности для последующего анализа на основе средств ММ.

## **4.2. О психологии принятия решений человеком и поддержке принятия решений на основе МДЦ**

При обсуждении вопроса о том, как компьютерные системы могут повлиять на решения, принимаемые людьми, важно учитывать особенности человеческого мышления. Всякая человеческая деятельность, в том числе и принятие решения, регулируется психическим отражением действительности, представлениями человека об окружающем его мире. Эти

представления формируются на базе опыта, накопленного человеком, и в силу этого являются субъективными и изменчивыми. Субъективность представлений, имеющих у того или иного человека, определяется также зависимостью этих представлений от потребностей, мотивов, целей, установок и эмоций этого человека.

**О структуре психического отражения окружающего мира.** В психическом отражении действительности принято выделять три уровня (см., например, [28]). Первый уровень – уровень ощущений и восприятия – является базовым. Эти формы психического отражения возникают при непосредственном воздействии окружающего мира на органы чувств. Второй уровень – это уровень представлений, образов. То, что человек воспринимал в ощущениях последовательно, превращается в целостную картину. Третий, высший уровень психического отражения – уровень логического мышления. Это уровень рационального познания. Решая ту или иную задачу на этом уровне, человек оперирует понятиями и логическими приемами, сложившимися в историческом развитии человечества. Понятия, которыми человек оперирует в процессе понятийного логического мышления, зафиксированы в знаковых системах. Всеобщей знаковой системой является язык. В процессе понятийного мышления используются и другие исторически сложившиеся знаковые системы: математические, графические и т.д.

Итак, математические модели являются частным случаем абстракций и обобщений, используемых человеком в процессе логического понятийного мышления. От моделей, сформулированных на естественном языке (вербальных моделей), математические модели отличаются тем, что в естественных языках в более или менее явной форме существуют лишь правила грамматики (да и то лишь фрагментарные), а правила употребления знаков обычно существуют в очень нечеткой, неявной форме. Напротив, в математическом языке знаки задаются вместе с правилами логического преобразования их совокупностей (формул).

Важнейшим достижением современной теоретической и экспериментальной психологии является доказательство того, что представления, регулирующие целенаправленную деятельность человека, включают так или иначе все три уровня психического отражения. Более того, отсутствие какого-либо из уровней обедняет представления и может привести к ошибочным решениям.

Чтобы выделить способ описания окружающего мира при осуществлении человеком целенаправленной деятельности, психологи стали использовать понятие комплексной целостной совокупности представлений об объекте действий, существующей у отдельного человека. В дальнейшем эту совокупность представлений будем называть ментальной моделью ситуации.

**Ментальные модели и их корректировка.** Итак, ментальная модель – это целостная совокупность представлений о ситуации, определяющая

действия людей, в том числе и принятие решений. В частности, ментальная модель должна обладать способностью предсказывать последствия тех или иных действий. Конечно, эта модель бывает груба и не точна, однако она дает человеку целостную картину, позволяющую ему ориентироваться при выборе тех или иных действий. Ментальная модель включает жизненный опыт человека и полученные им знания. Таким образом, она может содержать и результаты научных исследований, если эти результаты осознаны человеком, в том числе и результаты исследований на основе математических моделей. Более того, и сама математическая модель у достаточно подготовленного человека может оказаться частью ментальной модели.

В то же время, ментальные модели обычно содержат представления, не укладывающиеся в логическое мышление. Поэтому выводы из ментальных моделей (в том числе и выбор решений) оказываются под воздействием других уровней отражения. Это приводит к тому, что не всегда решения и действия имеют под собой логическую основу. Поскольку для обоснования своих выводов о необходимости предпринять те или иные действия человек обычно использует естественный язык, в общении между людьми большую роль играют вербальные (словесные) модели. Эти модели являются, по существу, интерпретациями ментальных моделей. Поскольку вербальные модели являются представителями ментальных моделей, то они не всегда полностью логичны, часто включают в себя в неявном виде неосознанные представления и предположения. Поэтому поиск согласованного мнения (или хотя бы взаимопонимания) на основе сопоставления вербальных моделей оказывается весьма затруднительным в тех случаях, когда ментальные модели сильно различаются между собой. В качестве иллюстрации этого утверждения достаточно вспомнить многочисленные экономические дискуссии, в которых в соответствии с особенностями личного понимания ситуации (т.е. особенностями ментальных моделей) специалисты делают различные (и даже прямо противоположные) выводы об обсуждаемых экономических проблемах и путях их решения.

Вопрос о согласованности ментальных (и вербальных) моделей, принадлежащих различным индивидуумам, тесно связан с вопросом о наличии общепризнанных математических моделей. В тех отраслях науки и практики, в которых математическое моделирование развито достаточно хорошо (например, в механике или в других разделах физики), ментальные модели базируются на общепринятых математических моделях. Этим обусловлена, например, возможность взаимного понимания физиков при обсуждении результатов мысленных экспериментов, т.е. экспериментов с использованием ментальных моделей. В других же случаях, когда ментальные модели базируются, в основном, на личном опыте, используемые в них понятия столь субъективны и расплывчаты, что оценить качество ментальных моделей и логичность их анализа практически невозможно.

Этим, в частности, в значительной степени объясняется спорность и неоднозначность выводов вербальных экономических исследований.

Наличие противоречий в ментальных моделях, принадлежащих разным индивидуумам, означает, что, по крайней мере, часть из них неполна или попросту не верна. Причиной этого может быть как исходное неправильное формирование ментальной модели, так и ее непропорциональный перенос на изменившуюся ситуацию. Источником совершенствования ментальных моделей является осознание новой информации, полученной в разнообразной форме – как в виде несоответствия реальности ожиданиям, так и в других, менее болезненных формах. Научное исследование также может быть использовано для формирования или корректировки ментальных моделей.

Один из путей совершенствования ментальных моделей – использование информации, полученной в результате математического моделирования ситуации. Мы не станем здесь касаться вопроса адекватности математических моделей – это отдельная сложная тема. Если же модель описывает реальность достаточно правильно, то для осознания результатов ее исследования должна быть решена проблема представления этих результатов в форме, доступной для человека. Если этот человек не является квалифицированным специалистом в области математического моделирования (а обычно это именно так), представлять результаты моделирования следует в простом наглядном, образном виде. Только в этом случае модельная информация имеет шанс быть осознанной человеком и стать частью ментальной модели. Для решения этой проблемы в задачах поддержки принятия решений и переговоров мы предлагаем использовать МДЦ.

Напомним, что в МДЦ визуализация множеств достижимых целей и их ОЭП, рассмотренная в предыдущем параграфе, дополняется построением и анализом эффективных решений. Для нахождения эффективного решения пользователю достаточно указать достижимую цель. Далее решение будет построено компьютером в течение нескольких минут.

Указать достижимую цель пользователь может, например, следующим образом. Пусть, для определенности, число критериев больше пяти и при анализе множества достижимых целей (или его ОЭП) используются матрицы трехмерных рисунков и прокрутки. Рассмотрев различные матрицы трехмерных рисунков при разнообразных разбиениях критериев на рисуночные, матричные и критерии прокрутки, а также при различных наборах значений матричных критериев, пользователь получает представление о взаимосвязи критериев и останавливается на определенной матрице трехмерных рисунков. Далее, он должен указать один из трехмерных рисунков матрицы. При этом фиксируются значения всех нерисуночных критериев, т.е. матричных критериев и критериев прокрутки. Далее, на трехмерном рисунке пользователь выбирает одно из сечений, фиксируя тем самым значение цветового критерия. Далее, анализируя

предельные значения двух координатных критериев, пользователь указывает их достижимое сочетание, подведя маркер к интересующей его точке. По выбранной точке автоматически рассчитывается такая эффективная стратегия, что значения критериев на ней близки (или совпадают) с выбранными пользователем.

Описанная процедура доступна человеку, не имеющему математического или компьютерного образования. В то же время для анализа и интерпретации полученного решения, заданного в виде таблиц и номограмм, обычно требуется иметь знания, выходящие за пределы того, что можно требовать от неспециалиста. Поскольку в анализе эколого-экономических проблем участвуют и политики, и представители общественного мнения, то требуется использовать средства, которые сделают анализ решений общедоступным. Такими средствами являются средства мультимедиа, виртуальной реальности и географических информационных систем. Рассмотрим вкратце вопрос о представлении стратегий с помощью этих средств. Вообще говоря, этот вопрос выходит за рамки МДЦ, однако мы кратко коснемся его здесь для того, чтобы читатель имел представление о воздействии на ментальные модели систем поддержки принятия решений и переговоров, использующих МДЦ, в целом.

**О представлении стратегий с помощью современных компьютерных технологий.** В системах поддержки принятия решений, основанных на сопоставлении малого числа решений, эти решения всегда старались представить в достаточно наглядной форме. Для этого использовались различные диаграммы: столбчатые, круговые и т.д. Диаграммы также использовались для сравнения небольшого числа вариантов. В последние годы получили распространение новые средства визуализации отдельных решений – географические информационные системы (ГИС), системы мультимедиа (ММ) и системы виртуальной реальности (ВР). В предыдущем параграфе мы уже рассматривали системы ММ, поэтому кратко здесь остановимся на ГИС и ВР.

ГИС – удобное средство анализа пространственной информации. ГИС позволяют хранить, редактировать, преобразовывать и изображать ее в виде карт. С помощью ГИС может быть сведена воедино информация из таких различных источников, как космическая и авиационная фотосъемка, наземные измерения, картографическая информация и т.д. Очень важно, что в рамках ГИС обычно имеется средство преобразования данных из одних форм в другие. Благодаря этому данные из различных источников становятся сопоставимыми. Огромный интерес представляет сопоставление различных типов данных – например, демографических данных и данных о загрязнении, данных о хозяйственной деятельности и подземных структурах (например, наложение карт использования земель и водоносных слоев) и т.д. Подчеркнем, что формы сопоставления не задаются заранее – они выбираются пользователем в процессе анализа проблемы.

Ясно, что небольшое число вариантов решения также может быть изучено с помощью ГИС. Для этого обычно используется имитационное моделирование, на основе которого строятся последствия некоторого числа вариантов решения. Далее, эти результаты представляются в различных аспектах на картах в сопоставлении с разнообразной базовой информацией. Все это делает ГИС удобным средством поддержки принятия решений и переговоров, доступным широкому кругу лиц с различными типами образования в тех случаях, когда число вариантов мало.

Теперь остановимся на виртуальной реальности. ВР – это погружение человека в виртуальный (мнимый) мир при помощи специальных средств воздействия на зрение и слух (а в будущем – также на осязание и обоняние). Это погружение основывается на использовании технических средств — дисплеев, надеваемых на голову, и т.д. При этом у пользователя создается впечатление, что он может действовать в этом мире и получать ответную реакцию. В частности, он может осмотреться, задать вопросы и получить ответы, взять “в руки” и рассмотреть некоторые предметы и т.д.

Средства ВР в настоящее время разработаны в значительно меньшей степени, чем средства ММ и ГИС. Это связано как с тем, что мощности современных персональных компьютеров попросту не хватает для реализации ВР, так и с относительной новизной идеи. Сейчас реализовано и получило широкое распространение применение ВР в компьютерных играх. Вопрос использования ВР в СППР довольно сложен. Поэтому представляют особый интерес конкретные реализации ВР в этой области. Рассмотрим, например, систему BITS (Browsing in time and space — просмотр во времени и пространстве), разрабатываемую в Португалии в Новом университете Лиссабона группой под руководством А.Камара [67]. Система предназначена для демонстрации последствий решений, оказывающих влияние на состояние окружающей среды. Изучая определенное решение, пользователь может путешествовать по пространству и времени, выбирая момент и положение с помощью прокруток. Состояние среды в выбранной точке пространства-времени рассчитывается на основе математической модели. Попав в определенное место и время, пользователь может оглядеться. В системе имеются средства для того, чтобы зафиксировать интересные наблюдения. В принципе, должны иметься возможности для манипулирования объектами. Эта система предназначена для изучения вариантов состояния воды и животного мира в Тежу – самой крупной реке Португалии.

В предыдущем параграфе мы уже говорили о сути средств ММ. Если не рассматривать развлечения, то в настоящее время, в основном, средства ММ применяются для обучения. В то же время очевидно, что потенциал этих средств очень велик и их использование для поддержки принятия решений – весьма перспективное дело. Главное – найти разумный подход к решению этой задачи.



Теперь, рассмотрев по отдельности возможности средств ММ, ВР и ГИС, опишем одну уже реализованную компьютерную систему, позволяющую достаточно ярко воспринять отдельные варианты решений. Эта система разработана в отделе городского планирования Массачусетского технологического института в США под руководством Ф.Ферейра и М.Шиффера и была использована для планирования развития центра города Вашингтона. В системе варианты развития города представляются на картах различного типа и масштаба, а также с помощью диаграмм и синтезированных фотографий. Особенно интересен показ синтезированных фильмов на дисплее компьютера. Эта одна из форм ВР, которая не требует специального оборудования, но в то же время, как и другие системы ВР, позволяет переместиться в заданное время и точку пространства и посмотреть, как будет выглядеть город при выбранном варианте решения в выбранное время (скажем, в июне около восьми часов вечера). Для фильма синтезируется звук. ВР реализуется без использования специальных дисплеев, поэтому системой может воспользоваться любой пользователь компьютерной сети ИНТЕРНЕТ, что особенно важно.

**Заключение.** Подведем итоги. Современные компьютерные средства позволяют представить варианты решения в разнообразных формах, воздействующих на различные уровни ментальной модели. Совместно с МДЦ, позволяющим в наглядной форме представить совокупность возможных вариантов и выделить малое число наиболее интересных из них, эти средства являются мощным компьютерным средством, позволяющим корректировать ментальные модели.

Итак, благодаря использованию МДЦ, лица, участвующие в обсуждении и принятии решения, получают информацию о проблеме в концентрированной форме, в виде взаимосвязей различных критериев выбора решения, и могут построить эффективные стратегии, указав на некоторое сочетание критериев – достижимую цель. Эта информация предоставляется в достаточно простой красочной форме трехмерных рисунков, самым простым из которых является карта решений. Все это может быть дополнено анимацией изображений. При этом вовсе не обязательно использовать все имеющиеся возможности – можно выбрать ограниченный набор методов визуализации, соответствующий рассматриваемой задаче и квалификации лиц, принимающих решение. Так, в примерах, приведенных в главах 2 и 3, использовались лишь некоторые возможности визуализации. Ясно, что такая доступная информация способствует пониманию достижимых целей, т.е. корректировке логического уровня ментальных моделей. Образность и красочность представления информации позволяют надеяться, что образный уровень ментальных моделей также повернется модификации, например, будут исключены представления о возможности решить рассматриваемые проблемы, получив наилучшие значения по всем критериям сразу (если такие возможности действительно отсутствуют).

Эффективные стратегии, представленные с помощью средств ММ, ГИС и ВР, также воздействуют на логический и образный уровни ментальных моделей. Таким образом, эти два уровня оказываются объектом воздействия МДЦ, сопряженного с представлением эффективных стратегий. Вопрос о воздействии на базовый уровень мы оставляем без обсуждения – он требует специального исследования, которое, может быть, будет проведено после того, как будут разработаны компьютерные средства, воздействующие на обоняние и осязание.

### 4.3. Использование МДЦ в проектировании

Рассмотрев методы представления информации в МДЦ и воздействие этой информации на процесс принятия решений, обсудим перспективы использования МДЦ в процессе проектирования сложных систем. В этом параграфе основное внимание уделим конструированию технических систем, а особенности проектирования в задачах, связанных с решением экологических проблем, рассмотрим в следующем параграфе. Сначала обсудим традиционную технологию, которая была выработана за последнее столетие при проектировании технических и других систем. Далее, более детально рассмотрим предпроектную стадию процесса проектирования, а уже затем перейдем к описанию возможностей применения МДЦ и приведем соответствующий пример.

**Традиционная технология проектирования и ее предпроектная стадия.** Традиционная технология предназначена для проектирования сложных систем без применения ЭВМ на основе разбиения общей задачи составления проекта на относительно простые локальные задачи. Решение отдельной локальной задачи осуществляется небольшой группой или отдельным человеком, так что реализация традиционной технологии проектирования требует привлечения десятков, сотен или даже тысяч специалистов. Специалист по локальным задачам определенного типа принимает решения по своей части общей задачи проектирования, руководствуясь инструкциями, нормативами и постановлениями, указаниями руководителя, а также собственными опытом, знаниями, интуицией и представлениями о том, что предпочтительно в той или иной ситуации. Такой специалист рассматривает свою часть проблемы во всей ее полноте и несет ответственность за обоснованность предложенного им решения.

Совокупность решений локальных задач, проходящая длительный процесс взаимных увязок и согласований, дает в итоге некоторый проект. В связи с большой трудоемкостью такого процесса, обычно разрабатывается единственный вариант проекта. Другие, альтернативные варианты в традиционной технологии остаются лишь в виде идей и предложений, отброшенных на предпроектной стадии. Таким образом, на предпроектной стадии осуществляется выбор проекта, который будет разрабатываться в дальнейшем.

Отсутствие возможности разработать на стадии собственно проектирования многочисленные варианты проекта делает предпроектную стадию решающей в выборе проекта. Действительно, принципиальные ошибки, допущенные на предпроектной стадии, уже не могут быть исправлены в процессе собственно проектирования, когда осуществляется решение локальных задач, т.е., по существу, происходит уточнение решения, принятого ранее. Отбрасывание альтернативных вариантов на предпроектной стадии традиционной технологии осуществляется руководителями процесса проектирования на основе опыта. Варианты, лежащие за пределами этого опыта, дополненного некоторыми интуитивными догадками, остаются без рассмотрения.

В связи со сказанным можно легко понять, почему традиционная технология проектирования показала себя достаточно эффективным средством в тех случаях, когда ситуация, в которой приходится принимать решения, качественно не отличается от ситуации, существовавшей при разработке предыдущих проектов. В тех же случаях, когда обстановка резко меняется, в частности, расширяются возможности и повышаются требования к проекту, т.е. требуется находить, анализировать и сравнивать между собой нестандартные варианты решений, традиционная технология, опирающаяся почти исключительно на одаренность руководителей процесса проектирования, часто оказывается недостаточно эффективной.

Попытки усовершенствовать процедуры проектирования в последнее время все в большей степени связываются с возможностями использования вычислительной техники. С момента своего создания вычислительные машины применяются для расчета тех или иных характеристик проектируемых объектов. При этом используется способность вычислительной техники осуществлять громоздкие расчеты быстро и безошибочно, т.е. вычислительная машина применяется в качестве суперарифмометра, позволяющего многократно увеличить скорость и точность проведения расчетов. В последние десятилетия появилась возможность с ее помощью хранить в электронной форме и воспроизводить информацию, а также представлять ее в удобном наглядном виде, в частности, получать чертежи и схемы прямо из компьютера. Были разработаны многочисленные системы автоматизации проектирования (САПР).

Такое использование ЭВМ означает, по существу, включение вычислительной техники в традиционную технологию проектирования, модернизацию этой технологии, а не переход к новой. Все это экономит время специалистов, освобождает их от рутинной работы (особенно чертежной при проектировании технических систем), однако не позволяет получить принципиально новые решения, которые могли бы привести к качественному улучшению проектов. Самое главное, не снимаются проблемы априорного отбрасывания альтернативных вариантов на предпроектном этапе.

Альтернативное направление совершенствования процессов проектирования состоит в их качественной перестройке на основе использования ЭВМ уже не только как средства простой обработки данных, а в роли технической основы новых технологий проектирования [24, 25]. При этом главное внимание должно быть уделено предпроектной стадии, играющей решающую роль в процессе разработки проекта. Рассмотрим предпроектную стадию более внимательно.

**Предпроектная стадия и ее совершенствование.** При проектировании сложных технических систем предпроектную стадию принято разбивать на два этапа: 1) внешнее проектирование, целью которого является разработка совокупности требований к проектируемому объекту (разработка технического задания); 2) формирование облика объекта, когда происходит предварительная увязка требований технического задания с возможностями, находящимися в распоряжении конструкторов.

В процессе внешнего проектирования решаются вопросы, связанные с постановкой целей, которые должны быть реализованы в процессе проектирования. При этом большую роль играет заказчик проекта, который, в сущности, и определяет (совместно с представителями проектирующей организации) те цели, которые должны быть достигнуты при проектировании. При формировании облика объекта должны быть приняты решения о выборе варианта проектируемого объекта в целом, без лишних подробностей. Понятно, что процесс формирования облика объекта может проходить в соответствии с техническим заданием только тогда, когда техническое задание правильно отражает реальные возможности. Таким образом, внешнее проектирование и формирование облика объекта являются, по существу, двумя сторонами одного этапа, результатом которого должен быть предварительный проект, используемый в процессе собственно проектирования объекта.

В традиционной технологии имеется трудно разрешимая проблема: каким образом помочь конструкторам выбрать разумный облик объекта. Заметим, что участие заказчика в процессе проектирования не может принципиально изменить ситуацию – назначение требований к проектируемому объекту осуществляется заказчиком в значительной степени на основе информации, представляемой организацией, осуществляющей проектирование. Поэтому варианты технического задания и облика объекта, отброшенные руководителем процесса проектирования, остаются также и вне анализа заказчика. Заказчик не может даже оценить разумность представленных требований к проекту и облик объекта – ведь альтернативные варианты не были проработаны и сравнивать предложения не с чем. Конечно, после завершения собственно проектирования заказчик может отправить некачественный проект на доработку или полностью отвергнуть его, но только при наличии вопиющих недостатков.

Имеется и другой существенный недостаток традиционной технологии проектирования: разработанный вариант проекта отражает не только

представления, но и интересы проектирующей организации. Это также связано с тем, что предпроектное обсуждение ведется в условиях отсутствия у заказчика объективной информации о всех потенциально возможных вариантах проекта. Волевое решение заказчика об ужесточении требований может привести к тому, что эти требования будут превышать реальные возможности. В этом случае, так же как и при занижении требований, проектирующая организация получает определенную свободу действий, позволяющую ей преследовать собственные цели, а не разрабатывать проект, наиболее соответствующий интересам заказчика. Неразвитость предпроектных процедур в традиционной технологии, невозможность организовать объективное обсуждение проектов уже на ранних, предпроектных стадиях их формирования приводит к монополии проектировщика, отрицательные последствия которой не нуждаются в комментариях.

**Оптимизация в проектировании.** Очевидным средством борьбы с монополией на выработку проектов является конкурсный подход, т.е. одновременная разработка нескольких проектов различными организациями и дальнейшее сравнение этих проектов с целью выбора наиболее подходящего. Это, однако, стоит довольно дорого, поэтому число конкурирующих проектов не может быть велико. Кроме того, конкурсный подход сам по себе не гарантирует того, что среди разработанных проектов будут достаточно эффективные, если они будут разрабатываться на основе традиционной технологии проектирования.

Один из первых подходов к построению новых компьютерных технологий проектирования был основан на уже упоминавшийся ранее концепции оптимизации, в рамках которой выбор облика объекта базируется на использовании единственного критерия качества проекта. В оптимизационной технологии роль человека состоит в построении математической модели проектируемой системы, формировании множества возможных вариантов и формулировке критерия качества проекта. Далее, решение задачи выбора облика объекта должно находиться вычислительной машиной: используя математическую модель, она находит “наилучший проект”.

Таким образом, оптимизационная технология основана на предположении о том, что человек на предпроектной стадии задачи проектирования может быть заменен вычислительной техникой так же, как летчик автопилотом. Такое представление было широко распространено среди специалистов по ЭВМ в начале 60-х годов и отражало успехи использования вычислительной техники в задачах управления техническими системами, а также недостаточность опыта ее использования в практике проектирования. В то время многими считалось, что оптимизационная технология выбора решения целиком и полностью отражает единственный “научно обоснованный” подход к принятию решений и что ее внедрение является наиболее эффективным способом решения инженерных и

многих других проблем. Эти надежды оказались беспочвенными, а оптимизационная технология выбора решения не оказала достаточного воздействия на практику проектирования по многим причинам.

Одной из причин является невозможность достаточно точно описать на математическом языке задачу проектирования, в том числе задачу выбора облика объекта на предпроектной стадии. Далее, возникает вопрос о выборе единственного критерия качества объекта. В оптимизационной технологии принято считать, что критерий выбора объекта будет сформулирован заказчиком проектируемого объекта. Однако, как показывает практика, обычно заказчик оказывается не в состоянии сделать это. Описание совокупности возможных вариантов проекта также вызывает затруднения у инженеров, работающих в рамках САПР. Поэтому, сравнивая результаты применения традиционной и оптимизационной технологий, проектировщик сразу же почувствует преимущество решения, полученного традиционным путем: оно учитывает трудно формализуемые требования, понятные конструкторам, но отсутствующие в математических моделях; легко объяснимы те или иные аспекты традиционного решения, что выгодно отличает его от оптимального; при разработке решения традиционным способом не требуется участвовать в непривычных и непонятных процедурах, как, например, формулировка критерия оптимальности. Эти, а также многие другие причины привели к тому, что технология выбора проектных решений на основе оптимизационной схемы хотя и используется для решения отдельных задач в рамках процесса проектирования, она не смогла конкурировать с традиционной технологией.

Анализ недостатков оптимизационной технологии привел к пониманию того, что необходима разработка таких человеко-машинных систем, в которых человек занимал бы центральное место, причем его творческие возможности и интуиция дополнялись бы анализом математических моделей, основанным на использовании вычислительной техники. В этом случае уже не компьютер, а человек был бы ведущим звеном процесса выработки проектов. Это означает, что решение должно было бы приниматься именно так, как это умеют делать люди, т.е. на основе своих ментальных моделей. В свою очередь, это означает, что вычислительная техника и математические модели должны быть использованы прежде всего для формирования (или корректировки, если они уже сформированы) ментальных моделей, имеющихся в сознании лиц, участвующих в процессе принятия решений.

**Компьютерные методы на предпроектной стадии.** Особенность предпроектной стадии заключается в том, что на этой стадии требуется рассмотреть объект как единое целое и всесторонне. При этом по возможности все альтернативные варианты решения должны быть проанализированы хотя бы приближенно. Важной особенностью этой стадии является также отсутствие жесткой регламентации и наличие довольно значи-

тельного времени для проведения исследований. Этим она принципиально отличается от стадии собственно проектирования.

В настоящее время наиболее распространенным способом компьютерной поддержки принятия решений на предпроектной стадии является имитационный эксперимент. Задав некоторый вариант облика объекта, конструктор может проверить непротиворечивость выдвигаемых предложений и рассчитать технические характеристики объекта. Системы поддержки принятия решений могут быть снабжены своеобразной виртуальной реальностью, которая позволяет провести компьютерные “полевые испытания” рассматриваемого изделия и не только осознать достоинства и недостатки предлагаемого варианта изделия, но и прочувствовать их.

С помощью описанных средств можно рассмотреть очень небольшое число вариантов облика объекта. Возникает вопрос о том, каким образом можно выбрать то небольшое число вариантов облика объекта, которые будут тщательно изучены в имитационных экспериментах (в том числе на основе применения виртуальной реальности). В настоящее время эта задача возложена на пользователей систем поддержки принятия решений, т.е. конструкторов. Мы предлагаем использовать для решения этой задачи средства МДЦ, которые помогут в решении этой задачи. Они позволят создать у участников процесса формирования технического задания и облика объекта, в том числе и у представителей заказчика, хотя и грубое, но ясное представление о потенциальных возможностях, имеющихся в их распоряжении на предпроектной стадии. Это знание должно стать частью их ментальных моделей, благодаря чему они смогут сформулировать обоснованные требования к проекту и выбрать несколько реализуемых вариантов облика объекта, которые будут далее уточнены в имитационных экспериментах. Все это должно сделать возможной дальнейшую увязку облика проектируемого объекта с той “жизненной правдой”, которая выявится в процессе собственно проектирования.

МДЦ предлагается использовать на самом начальном этапе предпроектных дискуссий – при формулировке основных целей и технических характеристик проекта. Для математической модели, описывающей изучаемую стадию в целом (хотя, может быть, и грубо), строится множество достижимых значений характеристик, которое рассматривается участниками процесса формирования технического задания и облика объекта (по отдельности или совместно). Указав несколько достижимых целей, они могут найти варианты облика проектируемого объекта, соответствующие выбранным значениям технических характеристик проекта. Далее вступают в действие средства имитации и ВР, которые используются для уточнения и наглядного представления найденных вариантов и отбора среди них наиболее перспективных — тех, которые будут разрабатываться в процессе собственно проектирования.

В качестве примера рассмотрим применение МДЦ для анализа целостной модели самолета.

**Анализ целостной модели самолета.** Рассматривается проблема конструирования самолета. Качество конструкции оценивается на основе нескольких характеристик полета. Удовлетворительные значения технических характеристик должны быть сформированы и достигнуты в результате выбора соответствующих параметров конструкции самолета.

В данном исследовании используется нелинейная модель, грубо описывающая связь характеристик полета с параметрами конструкции. Эта модель<sup>25</sup> позволяет связать значения параметров конструкции с летно-техническими характеристиками и предназначена для использования в процессах обсуждения технического задания на проектирование и выбора облика объекта. Выбор значений характеристик – это выбор технического задания, а выбор параметров конструкции – выбор облика объекта.

Вариант самолета задавался следующим набором параметров конструкции:

- тяговооруженностью;
- коэффициентом лобового сопротивления;
- коэффициентом индуктивного сопротивления;
- коэффициентом подъемной силы.

Предполагалось, что пользователем наложены некоторые ограничения на диапазоны варьирования параметров конструкции. Здесь эти ограничения уточняться не будут.

Летательный аппарат характеризовался следующими набором характеристик:

- минимальным радиусом разворота у поверхности Земли;
- максимальной перегрузкой по вертикали на высоте 5000 м;
- максимальной угловой скоростью разворота на высоте 5000 м;
- временем набора высоты;
- временем набора максимальной скорости.

Требовалось, чтобы значения характеристик также удовлетворяли некоторым ограничениям.

---

<sup>25</sup> Модель разработана сотрудником ВЦ РАН Л.Вышинским.



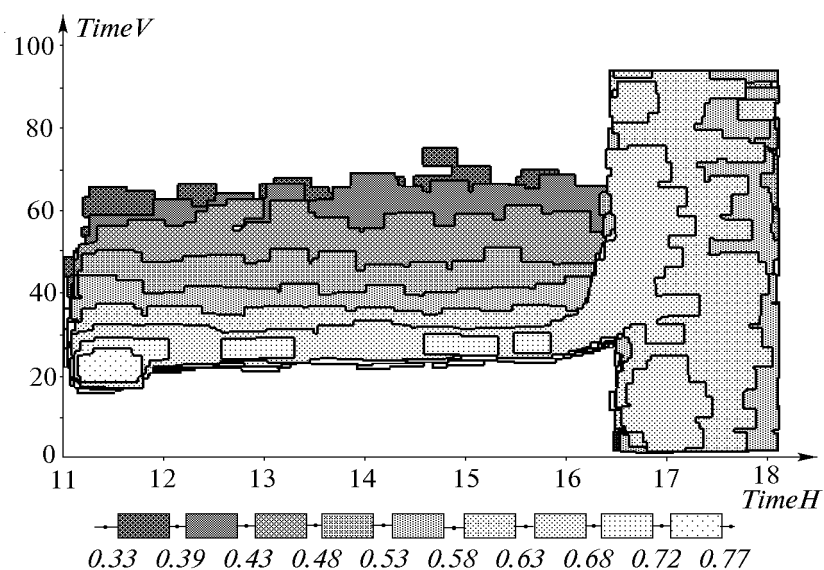


Рис. 3.1

Все возможные параметры конструкции (т.е. все возможные варианты самолета) на основе МДЦ удалось представить в виде множества достижимых наборов характеристик. Для построения МДЦ был использован метод аппроксимации системой простых фигур, уже применявшийся в § 3.4 и 3.5 для изучения экономических систем. Поэтому мы не станем обсуждать здесь особенностей демонстрации МДЦ в этом случае и сразу приступим к рассмотрению рисунков.

Характерный пример МДЦ приведен на рис. 3.1 (единицы измерения – условные). На этом рисунке изображено множество достижимых комбинаций значений трех характеристик: времени подъема ( $TimeH$ ); времени набора скорости ( $TimeV$ ); скорости разворота ( $W$ ). Значения первых двух характеристик (их значения желательно уменьшать) даны на осях, а интервалы третьей характеристики (ее значение желательно увеличить) заданы штриховкой. На рисунке ясно видно, что конструкции с наибольшей скоростью разворота (порядка 0.75 единиц) соответствуют малым временам набора высоты и средним временам набора скорости. Снижение требований к скорости разворота (соответствует более плотной штриховке) позволяет уменьшить время набора скорости, но не постепенно, а скачком. Так, только при уменьшении скорости разворота до 0.6 единиц появляется возможность резко уменьшить время набора скорости. При этом, однако, придется смириться с увеличением времени подъема с 11-12 до 17 единиц.

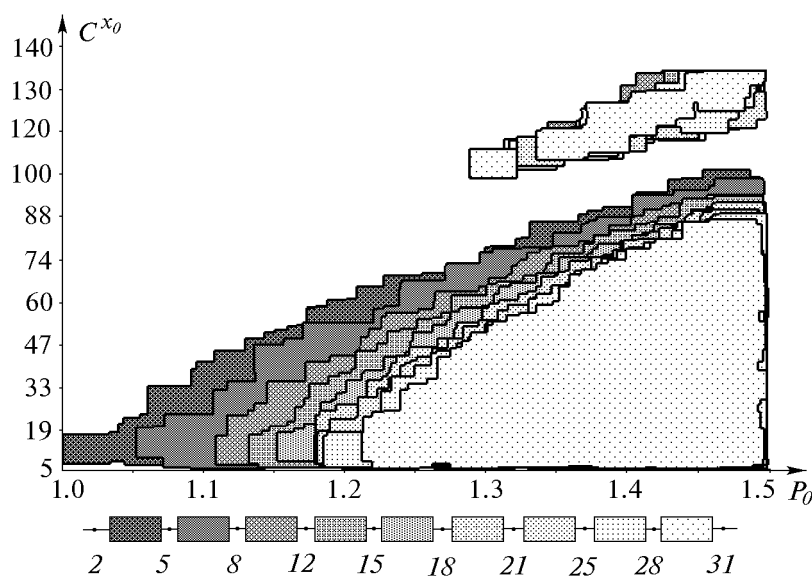


Рис. 3.2

Наложив ограничения на значения характеристик (т.е., сформулировав техническое задание), можно рассмотреть совокупность параметров конструкции, при которых выполняются эти ограничения. Так, например, на рис. 3.2 изображена возможная совокупность значений удельной тяги ( $P$ ) и коэффициента лобового сопротивления ( $C^{x0}$ ) при различных значениях параметра подъемной силы ( $C_y$ ), заданных штриховкой.

Можно было бы также рассмотреть влияние малых изменений технического задания на эти изображения и влияние ограничений, накладываемых на конструкционные параметры объекта, с его техническими характеристиками. Последняя возможность позволяет решить сложную проблему формирования множества допустимых значений параметров. В целом, описываемая система позволяет:

- 1) визуально изучить множество возможных сочетаний значений характеристик;
- 2) выбрать достижимые цели, т.е. достижимые сочетания значений характеристик, и решать обратную задачу конструирования, т.е. находить значения параметров конструкции, приводящие к выбранной цели;
- 3) визуально изучить влияние ограничений, накладываемых на значения параметров конструкции, на достижимые характеристики;

- 4) визуально изучить устойчивость области возможных параметров по отношению к варьированию ограничений на значения характеристик.

Эта информация должна позволить конструкторам и представителям заказчика грубо оценить возможности выбора конструкции самолета и правильно сформулировать техническое задание на проектирование, которое должно отражать интересы заказчика и возможности конструктора. Дополнив проведенный анализ детальным рассмотрением отдельных вариантов, конструкторы уже на предпроектной стадии смогут оценить особенности выбранного варианта самолета, а также объяснить его преимущества по сравнению с отброшенными вариантами.

#### **4.4. Целостное рассмотрение экологических проблем**

В предыдущем параграфе обсуждались компьютерные технологии проектирования сложных технических систем, основанные на использовании МДЦ на предпроектной стадии. В данном параграфе технологии проектирования, использующие МДЦ, конкретизируются для случая экологических проблем. По существу, обсуждается методика, использовавшаяся нами во второй главе книги, где были описаны примеры применения МДЦ для разработки стратегий решения различных задач сохранения среды обитания. Необходимость их специального рассмотрения связана с несколькими особенностями экологических проблем.

При обсуждении процесса проектирования мы рассматривали взаимодействие проектирующей организации с единственной внешней организацией – с заказчиком. В процессе разработки природоохранных мероприятий или при проектировании производственно-экономических систем с учетом экологических факторов может участвовать большое число других внешних организаций. В качестве примера назовем государственную или независимую экологическую экспертизу, представителей политических партий и общественных движений. Участие этих групп в процессе принятия решения означает, что информация должна быть представлена в виде, доступном для понимания широкого круга заинтересованных лиц. При этом у представителей внешних организаций должно быть создано ясное представление о потенциальных возможностях, имеющихся в их распоряжении в момент принятия решения – оно должно стать частью их ментальных моделей. Заметим, кстати, что участие внешних организаций (особенно представителей общественности) часто стараются ограничить в обсуждении, указывая на их некомпетентность в рассматриваемом вопросе. Правильная организация предпроектной стадии как раз и должна обеспечить понимание проблемы всеми участниками обсуждения.

В рамках традиционной технологии проектирования внешние организации отстранены от процесса выбора решения на предпроектной стадии. Даже при полном несогласии с разработанным проектом эти организа-

ции, будучи привлеченными к обсуждению уже после завершения проектирования, оказываются не в состоянии повлиять на него, и им остается лишь выразить свое недовольство. Чтобы избежать этого, иногда предлагается вовлечь внешние организации в процесс проектирования. В связи со сложностью собственно проектирования, в том числе его расчлененностью на отдельные задачи, это представляется трудно осуществимым, в то время как привлечение таких организаций на предпроектной стадии вполне возможно. Поэтому мы по-прежнему будем рассматривать предпроектную стадию, не вдаваясь в детали процесса собственно проектирования.

Обычно при изучении экологических проблем основное внимание исследователей уделяется описанию и моделированию отдельных аспектов этих проблем. Сотни лабораторий изучают, например, влияние изменения глобального климата на растительность, производство и условия жизни людей в различных регионах планеты, технологические возможности уменьшения выброса парниковых газов, строятся модели глобального цикла углерода и других элементов и т.д. При этом зачастую забывается, что конечная цель всех таких исследований состоит в выработке разумных стратегий, позволяющих решить рассматриваемую проблему.

Из-за отсутствия методики поиска разумных стратегий решения экологических проблем знания, полученные в различных научных дисциплинах, не могут быть использованы в полной мере, поскольку переговоры и принятие решений в области охраны окружающей среды не могут опираться непосредственно на результаты изучения отдельных подсистем. В связи с этим в последнее время все большее внимание уделяется разработке методики целостного рассмотрения проблемы, направленного на выработку разумных стратегий ее решения. Далее описывается методика целостного рассмотрения экологических проблем, основанная на использовании МДЦ.

**Методика целостного рассмотрения.** В параграфе 1.4 уже были перечислены основные принципы используемого нами подхода к целостному рассмотрению проблем охраны окружающей среды. Они состоят в применении МДЦ для анализа единой интегрированной модели, построенной на основе объединения упрощенных описаний отдельных подсистем и включающей в себя несколько критериев выбора.

Вопрос о необходимости рассмотрения нескольких критериев уже достаточно подробно обсуждался ранее, так что мы не станем останавливаться на нем. Отметим лишь, что использование однокритериальной оптимизационной технологии не облегчает решение вопроса о привлечении внешних организаций к процессу проектирования. Более того, оптимизационная технология позволяет отклонять претензии внешних организаций с помощью ссылок на “объективное” решение, полученное компьютером.

Необходимость использовать единую интегрированную модель связана с тем, что при рассмотрении вопросов охраны окружающей среды приходится использовать модели подсистем различной природы. Наличие разнородных подсистем (блоков) приводит к тому, что изучение сложных систем осуществляется различными научными дисциплинами, каждая из которых имеет свой язык и свой набор понятий. Хотя объединение знаний, полученных в различных дисциплинах, может быть, в принципе, осуществлено на основе универсального метода математического моделирования, следует отдавать себе отчет в том, что такая задача не проста и требует развития специальной методики.

Упрощенные описания подсистем (блоков) некоторой эколого-экономической системы предлагается находить на основе параметризации моделей этих подсистем, т.е. на основе построения упрощенных зависимостей, связывающих выходы этих подсистем с их входами. При этом требуется также оценивать области применимости этих зависимостей. Построение приближенных зависимостей выходов подсистем от входов может основываться как на анализе подробной математической модели описываемого блока, так и на экспертных суждениях или эмпирических данных.

**Матрицы влияния для линейных систем.** Прежде чем переходить к описанию метода параметризации моделей подсистем общего вида, рассмотрим вопрос о построении зависимостей выходов от входов для линейных моделей, в которых эти зависимости описываются точно. В качестве примера рассмотрим вопрос о расчете концентрации некоторого загрязнителя, выбрасываемого несколькими источниками с заданной интенсивностью. Для решения этой задачи можно рассмотреть линейную систему дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что рассматриваемый процесс не зависит от времени. Тогда, если задача поставлена правильно (корректно), при заданной интенсивности выброса загрязнителя существует единственное решение – распределение концентрации загрязнителя в среде. Это распределение можно найти, решив краевую задачу в частных производных.

В тех случаях, когда выброс загрязнителя заранее не задан, часто используют метод точечных источников, который состоит в построении так называемых функций источников. Каждая такая функция описывает загрязнение во всех точках среды при единичном выбросе загрязнителя в некотором источнике. Поскольку рассматриваемая модель линейна, то загрязнение от каждого из источников пропорционально выбросу загрязнителя в нем. Из линейности модели также следует, что загрязнение в любой точке среды равно сумме воздействий всех источников. Поэтому для каждой точки среды связь концентрации загрязнителя с интенсивностями источников будет задана набором коэффициентов (значений функций источников в этой точке среды). Эти коэффициенты можно представить в виде "вектор-строки". Представим интенсивности выброса загряз-

нителя в источниках в виде "вектор-столбца". Тогда для того чтобы рассчитать загрязнение в выбранной точке при заданном наборе интенсивностей выброса, достаточно умножить упомянутую вектор-строку на этот вектор-столбец.

Такая процедура расчета загрязнения может быть использована для любой точки. Если же взять конечное число точек, в которых изучается уровень загрязнения, то требуется рассмотреть матрицу, состоящую из этих вектор-строк. Для расчета загрязнения во всех рассматриваемых точках достаточно умножить матрицу на вектор-столбец интенсивностей выброса. Это значительно проще, чем каждый раз решать краевую задачу с самого начала. Такие матрицы коэффициентов принято называть матрицами влияния (или переноса). Ясно, что использование матриц влияния в задачах выбора решения значительно облегчает поиск разумных стратегий уменьшения выброса.

**Методы параметризации нелинейных моделей.** В отличие от линейного случая, когда матрицы влияния точно описывают зависимости выходов модели от ее входов, в нелинейных моделях матрицы влияния описывают такие зависимости (скажем, зависимость загрязнения в точках мониторинга от интенсивностей выброса загрязнителя) лишь приближенно. Параметризация состоит в построении матриц влияния в нелинейных случаях. Сразу же отметим, что матрицы влияния аппроксимируют зависимость выходов подсистемы от ее входов только в некоторых диапазонах изменения значений входных переменных. Поэтому иногда приходится строить несколько матриц влияния для различных диапазонов входных переменных.

Методы параметризации моделей зависят от области науки и от конкретных свойств изучаемых моделей. Универсальным способом является проведение вычислительных экспериментов с рассматриваемой моделью. При этом должны варьироваться значения входных переменных и изучаться влияние такого варьирования на выходные переменные модели. Для изучения результатов экспериментов разумно использовать методы регрессионного анализа, позволяющего найти как сами линейные зависимости выходов от входов, так и области, где линейная зависимость выходов от входов аппроксимирует отклик модели достаточно точно. Большую помощь в осуществлении параметризации могут оказать и аналитические исследования модели, если такие исследования удастся осуществить.

В том случае, когда нет надежной математической модели изучаемого блока, матрицу влияния приходится основывать на эмпирических данных или экспертных заключениях. В первом случае для построения матрицы влияния и области ее применимости также может быть использован регрессионный анализ зависимости входов от выходов, полученных в результате наблюдений или натуральных экспериментов. Во втором случае матрица и область применимости задаются экспертами. В качестве при-

мера линейной параметризации, основанной на результатах обработки эмпирических данных в экономических исследованиях, назовем матрицы затрат-выпуска для экономики некоторой страны или региона, рассматривавшиеся в главе 3. Экспертные заключения часто используются, например, при построении матриц переноса загрязнения в атмосфере или в воде рек и морей.

Наряду с линейной параметризацией математических моделей может быть использована и их нелинейная параметризация, т.е. построение упрощенных нелинейных зависимостей выходных переменных модели от входных. Но этот вопрос выходит за пределы нашей книги.

**Интегрированная модель.** Интегрированная модель составляется из линейных параметризаций моделей отдельных подсистем, ограничений на диапазоны входных переменных, соотношений, связывающих подсистемы между собой, а также ограничений на возможные стратегии решения рассматриваемых экологических проблем.

Заметим, что часто представляется целесообразным сохранить существующий режим функционирования некоторой подсистемы. Это естественно в экологических исследованиях, поскольку изменение режима функционирования блока (климата, биоты или экономики) может привести к непредсказуемой перестройке изучаемой системы. Так, точки границ могут оказаться точками бифуркации математических моделей, поэтому нарушение таких границ может привести к неожиданным последствиям (как в поведении модели, так и в реальности) [43]. Поэтому границы параметризуемости связей входов и выходов около существующего состояния могут оказаться границами, внутри которых возможно развитие в прежнем виде и нарушение которых может привести к тому, что существование системы в прежнем виде станет вообще невозможным. Поэтому заранее имеется некоторая “естественная” область, к которой принадлежат некоторые “базовые” значения входных переменных блока, описывающие, например, текущую ситуацию.

**Основные этапы целостного рассмотрения экологических проблем.** Перейдем к формулировке основных этапов используемой методики целостного рассмотрения проблем охраны окружающей среды для случая, когда представляется целесообразным сохранение базового режима существования системы. Предполагается, что возможна линейная параметризация всех блоков. Тогда эти этапы таковы.

1. Осуществляется качественный анализ проблемы; составляется список подсистем (блоков), описание которых должно быть включено в математическую модель изучаемой системы. Составляется список критериев, которые будут приниматься во внимание в процессе исследования.
2. Анализируется опыт изучения (в том числе математического моделирования) подсистем и их взаимодействия. Выделяются пере-

- менные, которые должны описывать взаимодействие между блоками системы.
3. Определяются диапазоны отклонения входных переменных блоков от базовых значений.
  4. Строятся (или адаптируются ранее разработанные) математические модели подсистем.
  5. В случае необходимости, находят эксперты, способные оценить коэффициенты матриц влияния.
  6. Осуществляется параметризация отдельных блоков либо на основе подробных математических моделей этих блоков, либо на основе эмпирической и экспертной информации. Эта работа может осуществляться различными группами специалистов независимо друг от друга. Если окажется, что в выбранных диапазонах значений входных переменных зависимость не может быть аппроксимирована единственной матрицей влияния, то либо пересматриваются (сужаются) диапазоны отклонения входных переменных от базовых значений, либо строятся несколько матриц.
  7. Матрицы влияния отдельных блоков, описание областей их применимости и другие соотношения объединяются в единую интегрированную модель.
  8. Формируются ограничения на возможные стратегии.
  9. Интегрированная модель, которая в данном случае является согласованной, изучается с помощью МДЦ. Точнее говоря, строится множество достижимых целей или его ОЭП.
  10. Лица участвующие в принятии решения, анализируют (по одиночке или в группах) графическую информацию о возможных сочетаниях значений критериев и об их объективных замещениях. Каждый может выбрать удовлетворяющую его достижимую цель и найти соответствующую стратегию. Этот анализ позволяет ему аргументированно защищать свою точку зрения в дискуссиях или переговорах.
  11. Найденные стратегии изображаются с помощью современных компьютерных средств типа мультимедиа, географических информационных систем, виртуальной реальности и т.д. Одна или несколько стратегий выбираются для дальнейшей разработки.
  12. Выбранные стратегии используются как основа для построения подробных планов и проектов; при этом применяются имитационные эксперименты с адекватными моделями подсистем, натурные эксперименты и другие средства анализа.

Данная схема является крайне упрощенной. В реальности возможен, например, возврат к переформулировке блока упрощенных моделей в случае обнаруженных несоответствий (об этом см. далее). Кроме того, как уже говорилось ранее, иногда при параметризации исходных моделей приходится строить несколько упрощенных моделей, каждая из которых



хорошо описывает связь между выходами и входами в определенном диапазоне значений переменных. В этом случае множество достижимых целей приходится строить для целого набора интегрированных моделей.

В качестве примеров применения этой методики можно привести исследования, описанные в главах 2 и 3. Конечно, далеко не во всех исследованиях эта методика была описана полностью, но вместе собранные, они позволяют оценить ее возможности.

Отметим, что грубость интегрированных моделей не так уж страшна, поскольку ментальные модели, корректируемые в процессе ее анализа, по своей природе не могут быть точными. Ведь задача состоит не в построении окончательного варианта решения, а в формировании представлений о системе, которые помогут в формировании основных показателей разрабатываемого объекта. Рассмотрим теперь вопрос о том, какое воздействие на ментальные модели могут оказать неполные и недостаточно обоснованные модели.

**Роль неполных моделей.** Теперь остановимся на вопросе о том, каковы будут последствия использования математических моделей, если эти модели описывают процессы, связанные с принятием решений, далеко не полностью. Возможна ли коррекция ментальных моделей на основе изучения математических моделей, описывающих лишь отдельные аспекты сложных явлений или даже основанных на относительно произвольных гипотезах?

В первом случае, когда математические модели точно описывают отдельные важные аспекты сложных явлений, строгие выводы, полученные на их основе (например, на основе законов сохранения), позволяют выявить свойства объектов исследования. Например, в экономических исследованиях балансовые модели, базирующиеся на законах сохранения, позволяют оценить влияние материальных ограничений на потенциальные возможности производства и развития экономических систем.

Заметим, что математические модели такого типа являются средством проверки отдельных решений, предложенных людьми на основе интуиции и опыта, а также выработанных другими путями. Хотя при этом удается проверить эти решения не в полной мере, но зато с точки зрения точно установленных закономерностей. Такая проверка позволяет сразу обнаружить нереалистичные решения и тем самым скорректировать ментальные модели людей, считавших эти решения вполне реализуемыми. Это оказывается чрезвычайно полезным в связи со способностью человеческой фантазии предлагать проекты, построенные исключительно на желании достичь тех или иных результатов.

Ситуация усложняется при использовании математических моделей, основанных на недостаточно проверенных или даже относительно произвольных предпосылках. В качестве примера рассмотрим известное исследование модели мировой динамики, осуществленное в конце 60-х годов Дж.Форрестером [54]. Основная идея его книги состоит в том, чтобы

связать основные экономические и демографические характеристики с помощью простых соотношений для того, чтобы затем изучить в динамике взаимное влияние этих характеристик и получить некий вариант развития мировой экономики. На основе достаточно произвольных гипотез о динамике населения, капитала в различных отраслях экономики и природных ресурсов делаются выводы о проблемах, которые могут возникнуть в процессе развития цивилизации. В силу произвольности гипотез, исследование этой модели дает не прогноз, а знание типа “если верна выбранная совокупность гипотез, то ...”<sup>26</sup>. Несмотря на произвольность многих допущений, исследование смогло предсказать проблемы, возникшие в последующие годы: о подорожании некоторых видов ресурсов, о нарастающем загрязнении окружающей среды, о нехватке сельскохозяйственной продукции и т.д. Самое главное, исследование Форрестера помогло преодолеть заблуждения, характерные для футурологических моделей 60-х годов, в которых человечеству сулилось безоблачное будущее с непрерывным ростом уровня жизни<sup>27</sup>. Таким образом, книга оказала огромное воздействие на мышление всего человечества и породила мощное движение, имеющее своей целью охрану среды обитания. Помимо этого, книга имела большое научное значение: она возбудила интерес к математическому моделированию глобальных процессов, поскольку показала, что экспертные сценарии часто оказываются неверны в связи с “антиинтуитивным” поведением сложных систем.

С другой стороны, эта книга имела негативные последствия. Она породила иллюзии, что предсказание развития экономики – дело совсем простое: достаточно собрать информацию, описать связи между переменными и проверить их на каком-то уже прожитом отрезке времени – и вопрос будет исследован. На самом деле, адекватные математические модели мало изученных систем создаются в процессе продолжительных исследований, а не по заказу. Таким образом, хотя модели, основанные на относительно произвольных гипотезах, могут принести пользу при правильном понимании их роли как средства коррекции человеческих представлений, имеется определенная опасность переоценить результаты их анализа.

**Об использовании конечного числа критериев.** К проблеме недостаточной точности изучаемых моделей примыкает вопрос о том, в достаточной ли степени выбранные критерии качества решения учитывают интересы лиц, участвующих в принятии решений. Действительно, если

---

<sup>26</sup> На это свойство модели обращает внимание и сам автор.

<sup>27</sup> В качестве наиболее известного примера ошибочного сценария развития мировой экономики можно назвать известный в свое время, а ныне забытый прогноз до 2000 г., сделанный в середине 60-х годов американским футурологом Г. Каном. В этом прогнозе не нашли отражения, например, проблемы роста населения, нехватки ресурсов и продуктов питания, истощения почв, разрушения окружающей среды.

набор критериев не полон, то выбранные целевые точки и найденные эффективные решения могут не отражать полноты проблемы. Ответ на этот вопрос может быть следующим.

Во-первых, множество достижимых целей и его ОЭП можно рассматривать как проекции в пространство неполного набора рассматриваемых критериев из некоторого пространства всех возможных критериев. Благодаря этому для всякой рассматриваемой нами недоминируемой цели найдется по крайней мере одна недоминируемая цель в пространстве полного набора критериев, не худшая ее по рассмотренным нами критериям. Поэтому всякое эффективное решение по неполному набору критериев остается разумным в некотором смысле (слабо эффективным [47]) и при учете всех критериев.

Поскольку целью использования МДЦ в экологических задачах является уточнение ментальных моделей, то и множества достижимых целей (или их ОЭП) по неполному набору критериев оказываются ценной информацией, позволяющей понять связь между рассматриваемыми критериями. Найденные эффективные компромиссные стратегии могут стать той "точкой отсчета", с которой будут сравниваться остальные стратегии. Высокое качество найденных стратегий (ведь используемые критерии были выбраны пользователем, и поэтому они важнее нерассмотренных) обеспечивает качество окончательных решений, которые будут разработаны в дальнейшем.

**Усложненная схема целостного рассмотрения.** Теперь рассмотрим одну возможную модификацию схемы целостного рассмотрения экологических проблем для того случая, когда на первом этапе в список критериев включено лишь несколько наиболее важных из большого числа показателей, представляющих интерес при разработке стратегий. Модификация состоит в том, что на этапе 11 схемы целостного рассмотрения построенные стратегии оцениваются на основе всех показателей, в том числе и оставшихся за рамками рассмотрения. Если оказалось, что стратегия характеризуется недопустимо плохими значениями по некоторым из показателей, можно наложить ограничения по ним и вернуться к построению ОЭП на этапе 9 с учетом наложенных ограничений. Завершив этап 9, можно переходить к анализу ОЭП и построению стратегий, которые уже будут удовлетворять сформулированным ограничениям.

Заметим, что аналогичным образом можно учитывать экспертные мнения, используемые для компенсации возможной неполноты применяемых математических моделей. Пусть стратегия, построенная на этапе 10, по мнению экспертов не реализуема в реальности по некоторым причинам, не учтенным в модели - она оказалась допустимой только в силу неполноты модели. Тогда эксперты могут наложить дополнительные ограничения на переменные модели и снова вернуться к этапу 9.

Наконец, нереализуемость или неразумность стратегий может вывиться уже в имитационных или натуральных экспериментах на этапе 12.

Это может привести к наложению дополнительных ограничений или даже к перерасчету матрицы влияния. В последнем случае потребуется вернуться к этапу 6.

Таким образом, грубость и неполнота модели могут привести к необходимости возвращения к этапам 6 или 9. Благодаря такому усложнению процедуры недостатки применяемых математических моделей могут быть компенсированы.

**Заключение.** Поводя итог, можно утверждать, что использование грубых, односторонних и даже недостаточно обоснованных моделей возможно в процессе коррекции представлений (ментальных моделей) на предпроектной стадии процесса проектирования. Это связано с тем, что варианты решения экологических проблем так или иначе разрабатываются на основе человеческих представлений, которые необходимо уточнять. Поэтому требуется компьютерная поддержка для проверки и уточнения человеческих представлений в процессе выработки разумных вариантов решения. Дополнение исходных представлений средствами математического моделирования (а также экспертными оценками) может помочь выявить интересные варианты, которые в дальнейшем будут проверены в имитационных экспериментах с исходными моделями (если такие найдутся), обсуждены с экспертами и проверены в натурных экспериментах.

#### 4.5. Переговоры с использованием МДЦ

До сих пор мы рассматривали вопросы, связанные с использованием МДЦ на предварительной стадии переговоров, когда стороны независимо одна от другой анализируют ситуацию, пытаясь понять связь различных интересов, и строят такие стратегии, которые были бы выгодны им и в тоже время приемлемы для других участников переговоров. В данном параграфе обсуждается вопрос о применении МДЦ непосредственно в процессе переговоров. В частности, рассматривается использование предлагаемой методики при проведении переговоров по компьютерной сети ИНТЕРНЕТ.

Применение МДЦ непосредственно в процессе переговоров также основывается на концепции принципиальных переговоров, уже описанной ранее. Напомним, что главная составляющая этой концепции – генерирование большого числа возможных вариантов и последующий выбор тех из них, которые соответствуют разумному компромиссу интересов. В нашем методе “большое число вариантов” представляется на основе ОЭП, а “выбор компромисса интересов” – это выбор недоминируемой достижимой цели. Вопрос о том, кто будет изучать ОЭП, т.е. объективные замещения между критериями, и выбирать достижимую цель во время переговоров, может быть решен несколькими способами. Мы рассмотрим два из них:

- непосредственные переговоры между участниками переговоров без посредника, когда сами переговорщики<sup>28</sup>, рассмотрев карты решений и комплексы кривых замещения типа приведенных на рис. 1.2, договариваются о целевой точке;
- переговоры, ведущиеся с помощью посредника. В этом случае ОЭП изучается посредником, который с учетом информации об интересах переговорщиков предлагает им в качестве компромиссных некоторые достижимые цели.

Итак, в обоих случаях строится ОЭП в пространстве критериев, отражающих интересы переговорщиков. Вопрос о том, как связать их интересы с набором критериев, далеко не прост. Остановимся на нем подробнее.

**Об описании интересов переговорщиков.** В примере, рассмотренном в параграфе 1.3, в качестве критериев, описывающих интересы, были выбраны доходы фермеров, прибыль рекреационного бизнеса и заболеваемость городского населения из-за загрязнения воды. Мы считали, что фермеры заинтересованы в увеличении значения первого критерия, бизнесмены – второго, а горожане – в уменьшении значения третьего. В реальности горожане могут быть заинтересованы и в увеличении сельскохозяйственного производства, так как это может привести к снижению цен, и в развитии рекреационного бизнеса, что может привести к общему экономическому оживлению в городе. В свою очередь, фермеры также могут быть заинтересованы в общем экономическом оживлении за счет рекреационного бизнеса – ведь это расширяет рынок их продукции. Таким образом, картина интересов может оказаться значительно сложнее предположений о том, что каждый заинтересован в одном из критериев. Информация о том, в какой же степени каждый из переговорщиков заинтересован в том или ином критерии, скрыта от окружающих. Действительно, если другие лица будут знать, какую роль в предпочтениях переговорщика играют те или иные критерии, они смогут воспользоваться этой информацией.

Чрезвычайно важно, что в переговорах учитываются вопросы, не имеющие прямого отношения к их тематике. Мы уже говорили о сочетании общественных и личных интересов. Кроме того, в переговорах могут учитываться и посторонние интересы, официально выходящие за пределы тематики переговоров, но существенные для переговорщиков. Так, обсуждая проблемы загрязнения озера, бизнесмены и фермеры могут одновременно делать взаимные уступки, скажем, в совместном проекте о реформе системы налогообложения в регионе и т.д. Заметим, что это не только не мешает, но и может помочь достижению компромисса, поскольку создает условия для “скрытых платежей”, дающих возможность

---

<sup>28</sup> В дальнейшем мы будем использовать термин “переговорщики”, быть может, недостаточно привычный, но уже использовавшийся ранее (см. [55]).

договориться в конфликтной ситуации. В то же время, такое свойство переговоров делает формализацию интересов весьма условной.

Во всех ситуациях, рассматриваемых в этом параграфе, предполагается, что интересы связаны с небольшим числом объективных критериев качества решения, но не обязательно ограничиваются ими. Значения этих критериев могут быть рассчитаны на основе математической модели. (Пример – критерии, рассмотренные в § 3.1). Мы предлагаем строить ОЭП и демонстрировать объективные замещения между критериями с помощью карт решений и комплексов кривых замещения, а также стратегий, соответствующих отдельным достижимым целям. Способ использования ОЭП в процедурах поддержки переговоров зависит от наших предположений о структуре интересов и способе организации процедур.

**Неструктуризованная процедура.** Основная идея организации переговоров состоит в перемещении недоминируемой точки вдоль недоминируемой поверхности в результате единогласного решения всех переговорщиков. Исходная точка выбирается либо из некоторых соображений справедливости, либо с помощью других заранее оговоренных процедур. Вопрос о том, каким образом может быть достигнут консенсус, заранее не обсуждается. Предполагается, что при этом будет использован обмен “скрытыми ресурсами”, т.е. ресурсами, которые скрыты от посредника и не описаны в модели. Главное в этой процедуре состоит в том, что переговорщики могут оценить объективное замещение между парами и тройками критериев, а также получить комплексы кривых замещения. В любой момент они имеют возможность построить эффективное решение, соответствующее текущей недоминируемой цели.

Посредник в этом случае играет пассивную роль – он обеспечивает компьютерную поддержку переговоров, т.е. строит ОЭП для выбранных критериев и помогает переговорщикам в использовании Диалоговых Карт Решений. То, что посредник не вмешивается в процесс переговоров о перемещении цели, является огромным преимуществом такой организации переговоров, так как сохраняет свободу взаимодействия, присущую переговорам без компьютерной поддержки. Переговорщики своим свободным взаимодействием компенсируют жесткость модели, описывающей их интересы и возможности далеко не полностью. Благодаря этому, такая их организация представляется достаточно жизненной. В то же время, она мало отличается от использования МДЦ на предварительной стадии для выявления разумных стратегий.

**Структуризованная процедура с простыми предпочтениями переговорщиков.** Рассмотрим теперь случай, в котором структура интересов крайне проста – каждый из переговорщиков заинтересован в одном и только одном “своем” критерии. Точнее говоря, под простыми предпочтениями понимается ситуация, когда с достаточной точностью можно предположить, что интересы переговорщика связаны со значением единственного критерия. В таком случае можно предложить структуризован-

ную процедуру, близкую к рассмотренной в § 4.1. Переговоры состоят из конечного числа шагов, на каждом из которых происходит перемещение текущей целевой точки по кривой объективного замещения только двух критериев, т.е. изменение касается интересов только двух переговорщиков. При этом опять предполагается, что кроме средств, включенных в модель, у переговорщиков есть скрытые дополнительные возможности компенсировать партнерам их уступки.

Как и в случае неструктурированной процедуры, посредник заранее строит ОЭП. Исходная недоминируемая точка выбирается так же, как и в неструктурированной процедуре. Все двумерные сечения ОЭП и карты решений доступны переговорщикам. Каждый шаг процедуры состоит из четырех этапов.

Этап 1. Переговорщики получают комплексы кривых замещения, причем для каждого из них в качестве ведущего взят его собственный критерий.

Этап 2. Переговорщик, зная свои возможности предложения скрытых компенсаций партнерам и поняв из полученных кривых, переговоры с кем из партнеров могут представлять интерес, пытается договориться о начале двусторонних переговоров с потенциальным партнером.

Этап 3. Посредник фиксирует пару переговорщиков, первыми договорившихся о проведении двусторонних переговоров между собой. Те начинают переговоры об изменении положения точки на кривой замещения двух критериев. Остальные переговорщики вынуждены ждать окончания переговоров и не имеют возможности менять положение целевой точки. Конечно, никто не может запретить им вмешиваться в эти переговоры неформальным образом. По окончании переговоров посредник регистрирует их результат, т.е. новое положение текущей недоминируемой точки. Остальные переговорщики вынуждены согласиться с этим изменением, поскольку значения их собственных критериев в двусторонних переговорах не менялись.

Этап 4. В соответствии с результатами переговоров, посредник пересчитывает комплексы кривых замещения и представляет их переговорщикам, и процедура переходит к этапу 1 следующего шага.

Переговоры заканчиваются, когда переговорщики оказываются не в состоянии изменить текущее положение целевой точки.

Отметим одно свойство этих переговоров – так же, как и в неструктурированной процедуре, обмен скрытыми ресурсами остается секретом как для посредника, так и для партнеров, непосредственно не участвующих в обмене. Заметим также, что хотя в процессе двусторонних переговоров между некоторой парой значения критериев остальных переговорщиков не меняются, их возможность вести переговоры может измениться – это уже обсуждалось в §§ 1.3 и 4.1.

**Структурированная процедура со сложными предпочтениями переговорщиков.** Описываемая далее схема переговоров основывается

на использовании идеи функции предпочтения. Предполагается, что каждый из переговорщиков имеет некоторую функцию предпочтения, которая является функцией объективных критериев и имеет следующий смысл: чем более предпочтительно для переговорщика некоторое сочетание значений критериев, тем выше значение функции предпочтения. Мы не станем останавливаться на методах построения этих функций, отметим лишь, что процедуры их построения связаны с ответами переговорщиков на довольно сложные вопросы посредников о своих предпочтениях. Таким образом, здесь посредники играют активную роль. Участие активного посредника – наиболее часто встречающийся подход к разработке компьютерных систем поддержки переговоров. Возникает вопрос о том, как использовать МДЦ в таких переговорах?

На предварительном этапе процедуры посредник строит ОЭП и функции предпочтения каждого из переговорщиков. Заметим, что МДЦ может быть использован и на этом этапе: анализ карт решений позволяет сформировать предпочтения переговорщиков и, таким образом, облегчить поиск ответов на вопросы, задаваемые посредником при построении функций предпочтения.

Построив функции предпочтения, посредники рассматривают их как новые критерии (у каждого переговорщика всего один новый критерий) и строят ОЭП множества достижимых значений функций предпочтения (далее это множество будем называть ОЭП в пространстве предпочтений). Далее, казалось бы, возможно применить процедуру из предыдущего раздела (действительно, каждому переговорщику теперь соответствует единственный новый критерий – его функция предпочтения), однако этого делать нельзя, поскольку информация о предпочтениях является конфиденциальной. В связи с этим, ОЭП в пространстве предпочтений не может быть продемонстрировано всем интересующимся, его могут изучать лишь посредники. Это предопределяет альтернативную организацию переговоров, в которых посредники играют важнейшую роль.

На первом шаге все участники переговоров представляют свои предложения о выборе достижимой целевой точки в пространстве исходных критериев. Посредник, рассчитав уровни функций предпочтения в предлагаемых точках, выясняет, существует ли такая достижимая точка ОЭП в пространстве предпочтений, чтобы она была более предпочтительной сразу для всех переговорщиков. Если такие точки существуют, то посредник выбирает наиболее “справедливую” из них и предлагает ее переговорщикам. Если таких точек нет, то остается искать достижимое сочетание предпочтений, в минимальной степени нарушающее предпочтительности точек, предложенных переговорщиками.

Описанная процедура имеет три явных недостатка. Во-первых, построение функции предпочтения является очень трудоемким делом, поэтому не всякий переговорщик согласится участвовать в такой процедуре. Напомним, как мы уже указывали в § 4.2, интересы человека связаны



с мысленной моделью ситуации, имеющейся у него. Поскольку эта модель имеет, наряду с логическим, и другие уровни, то человек, даже искренне стремящийся раскрыть свои предпочтения, может давать противоречивые ответы на вопросы, задаваемые посредником при построении функций предпочтения<sup>29</sup>.

Во-вторых, посредник оказывается в состоянии резко повлиять на ход переговоров, что не может не вызвать неприятных ситуаций. В-третьих, любому сразу становится ясна разумная стратегия переговорщика – просить побольше, т.е. отвечать на вопросы при построении его функции полезности таким образом, чтобы доказать важность принятия его позиции<sup>30</sup>. В-четвертых, любые неформальные контакты теряют смысл, если конечно переговорщики не замысливают заговор против посредника.

Таким образом, реализация структуризованных переговоров в случае сложных предпочтений – очень непростая задача. МДЦ может в какой-то степени облегчить положение, но многие проблемы все же остаются.

#### **4.6 Визуальный метод идентификации параметров математических моделей**

В данном параграфе рассматривается одна специфическая задача принятия решений – выбор параметров математической модели на основе имеющихся наблюдений. Эта задача является одной из важнейших в математическом моделировании, для ее решения разработаны разнообразные методы. Мы здесь показываем, как использование МДЦ позволяет выбрать параметры модели на основе синтеза результатов наблюдений и неформализованного опыта эксперта, осуществляющего идентификацию модели.

**Задача идентификации.** Итак, пусть задана некоторая математическая модель, т.е. система математических соотношений, связывающих выходы некоторой системы с ее входами. Математические соотношения включают некоторые неопределенные параметры. Задача идентификации состоит в том, чтобы выбрать значения параметров на основе конечного числа наблюдений, каждое из которых задано значениями входных и выходных переменных.

Задача идентификации возникает в том случае, когда число наблюдений достаточно велико, и из-за наличия ошибок в наблюдениях или из-за неточности модели нельзя найти такие значения параметров, чтобы расчеты по модели совпадали с результатами всех наблюдений. Традиционный подход к задаче идентификации состоит в следующем. Задается не-

---

<sup>29</sup> Вопрос о построении функций предпочтения подробно рассмотрен в книге [21].

<sup>30</sup> Всякий, кто помнит практику распределения ресурсов в период плановой экономики, должен согласиться с этим.

которая скалярная функция (так называемая функция ошибок), которая характеризует отклонение результатов наблюдений выходных переменных от значений выходных переменных, рассчитанных по модели для наблюдавшихся значений входных переменных. Значение этой функции зависит от величин параметров.

В традиционном подходе выбирается такое значение параметров модели, при котором достигается минимальное значение функции ошибки. Таким образом, идентификация модели происходит автоматически, на основе решения задачи оптимизации, без использования опыта и знаний эксперта. Между тем очень часто могут существовать другие значения параметров, при которых значение функции ошибки близко к оптимальному; в этом случае выбор единственного “оптимального” значения параметров может быть достаточно случаен.

В связи с этим, исследователи уже давно предлагали представлять экспертам все так называемые  $\varepsilon$ -оптимальные значения параметров, т.е. такие, для которых величина функции ошибки превосходит оптимальное значение не более чем на малое положительное число  $\varepsilon$ . Тогда эксперт мог бы выбрать среди  $\varepsilon$ -оптимальных те значения параметров, которые в наибольшей степени соответствуют его знаниям. Задав  $\varepsilon$  разумным образом, эксперт мог бы понять, какова неопределенность в выборе параметров на основе имеющихся наблюдений. Этот подход может быть реализован на основе метода достижимых целей.

**Идентификация на основе МДЦ.** Начнем со случая единственного параметра  $\lambda$ . На рис. 6.1 изображен график функции ошибки  $\psi(\lambda)$ . Минимальное значение  $\psi(\lambda)$  достигается при  $\lambda = \lambda^*$ . Этот рисунок дает представление о множестве  $\varepsilon$ -оптимальных значениях параметра для всех  $\varepsilon$  одновременно: множество  $\varepsilon$ -оптимальных значений параметров, которое обозначим через  $A_\varepsilon$ , является не чем иным как сечением совокупности точек, лежащих над графиком функции ошибок, прямой  $\psi(\lambda) = \psi(\lambda^*) + \varepsilon$ .

Как легко понять, вопрос о задании величины  $\varepsilon$  не так-то прост. При построении графика функции ошибки он просто снимается – величину  $\varepsilon$  задавать не требуется. Эксперт видит, как увеличение  $\varepsilon$  увеличивает диапазон возможных значений  $\lambda^0$ . При этом ему, с одной стороны, хотелось бы сделать величину  $\varepsilon$  поменьше, а с другой – выбрать такое значение  $\lambda$ , чтобы оно соответствовало его знаниям. Таким образом, мы имеем задачу выбора с несколькими показателями.

Заметим, что она не так-то проста: если относительно величины  $\varepsilon$  все ясно – ее надо уменьшать, то относительно величины параметра  $\lambda$  такой ясности нет и быть не может – представления эксперта не могут быть описаны так просто. Поэтому представление эксперту графика функции ошибок – разумный подход к проблеме. Использование МДЦ позволяет реализовать эту идею. Поскольку функция ошибки обычно нелинейна, приходится прибегать к методам аппроксимации графика функции систе-

мами простых фигур. Этот метод был описан в § 1.4 и применялся в §§ 3.4, 3.5 и 4.3, поэтому мы не станем его обсуждать здесь. Система прямоугольников, аппроксимирующая график функции ошибок с рис. 6.1, приведена на рис. 6.2. Эта аппроксимация дает эксперту ту же информацию, что и функция ошибок.

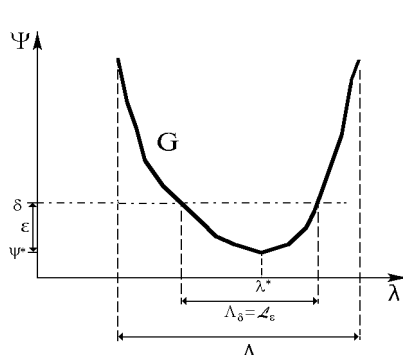


Рис. 6.1

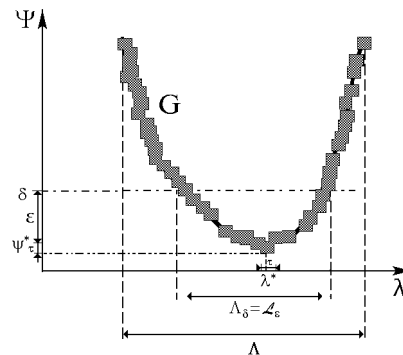


Рис. 6.2

Хотя случай одного параметра и встречается в практических задачах, это бывает довольно редко. Достоинство МДЦ состоит в том, что он позволяет реализовать описанную идею для двух, трех и большего числа параметров. Более того, несколько функций ошибок могут быть рассмотрены одновременно. Последнее важно в связи с тем, что выбор функции ошибки относительно произволен, переход от одной функции к другой приводит к изменению решения при автоматическом выборе параметров. Поэтому учет нескольких функций сразу позволяет сделать выбор более разумным.

Начнем описание использования МДЦ в задачах идентификации для единственной функции ошибок и двух параметров.

**Случай двух параметров.** Поскольку имеется два параметра  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и одна функция ошибки, то график является трехмерным множеством. В этом случае удобно рассмотреть надграфик функции ошибок, т.е. множество точек над графиком этой функции. На рис. 6.1 ясно видно, как для случая одного параметра  $\varepsilon$ -оптимальное множество  $A_\varepsilon$  задается сечением надграфика функции ошибок. Это же свойство сохраняется при большем числе параметров. Поэтому в случае двух параметров можно задать серию значений величины  $\varepsilon$  и построить сечения для заданных значений  $\varepsilon$ . Поскольку при росте  $\varepsilon$  множество  $\varepsilon$ -оптимальных сочетаний параметров может только расширяться, получаемая картина достаточно проста.

На рис. 6.3 дана серия сечений надграфика функции ошибок при разных значениях  $\varepsilon$ . Соответствие между  $\varepsilon$  и сечением задано штриховкой. Как видно, самое узкое сечение соответствует величине  $\varepsilon \approx 0.01$ . Ему соответствует некое “оптимальное” сочетание параметров  $\lambda^* = (\lambda^*_1, \lambda^*_2)$ .

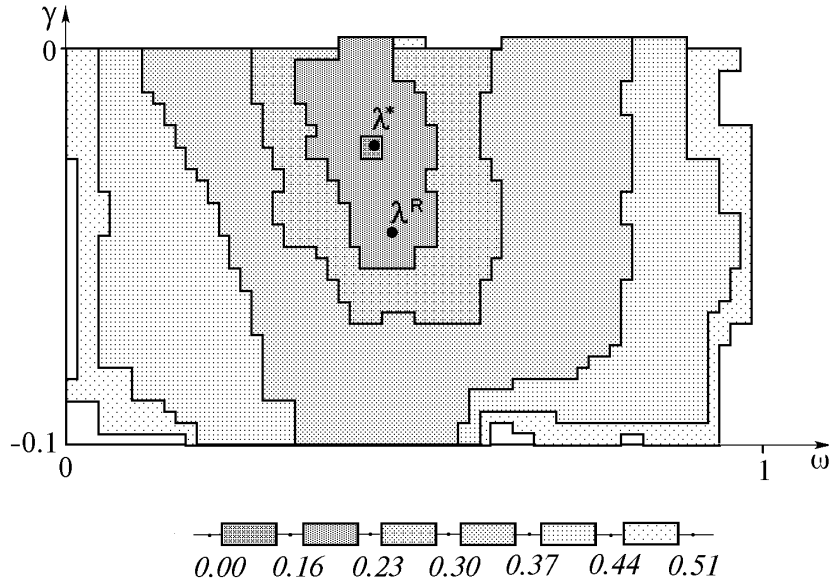


Рис. 6.3

Кроме того, известно, что  $\psi(\lambda^*) = 0.15$ . Следующее сечение соответствует  $\varepsilon \approx 0.08$ . Это множество покрывает значительный интервал значений параметра  $\lambda_2$  и в то же время достаточно узко по  $\lambda_1$ . Это означает, что значение  $\lambda^*_1$  достаточно устойчиво по ошибке, в то время как по  $\lambda_2$  эксперт имеет достаточно широкие возможности выбора.

**Случай трех и более параметров.** В случае трех и более параметров множество  $\varepsilon$ -оптимальных сочетаний параметров уже не может быть представлено на плоскости. В связи с этим можно действовать так, как это обычно делается в МДЦ – изображать это множество в виде его двумерных сечений. Форма представления двумерных сечений достаточно подробно обсуждалась в § 4.1.

Заметим, что поскольку мы аппроксимируем функцию ошибок системами простых фигур, то сечение надграфика задается также системами таких фигур. В связи с этим можно легко строить и проекции множеств  $\varepsilon$ -оптимальных сочетаний параметров в подпространстве, т.е. временно исключать из рассмотрения некоторые из параметров.

В этом случае эксперт идентифицирует только часть параметров, а затем может вернуться к остальным. Заметим, что при таком подходе лучше сразу строить надграфик функции ошибок и его сечения для части параметров, представляющей наибольший интерес. Такой подход может быть особенно полезен, если для идентификации некоторых параметров число наблюдений достаточно, а для других – нет<sup>31</sup>.

#### 4.7 Использование МДЦ в компьютерных сетях

Мы уже обсуждали использование МДЦ совместно со средствами мультимедиа, виртуальной реальности и географическими информационными системами. Остановимся теперь на вопросе о применении МДЦ в рамках компьютерных сетей. Эта тема нова, поэтому ограничимся двумя вопросами:

- об использовании МДЦ в открытых компьютерных сетях для разработки независимых стратегий решения важных экологических и экономических проблем;
- об использовании МДЦ в переговорах на основе компьютерных сетей.

Эти вопросы уже затрагивались во введении, а теперь, после того как читатель ознакомился с МДЦ достаточно подробно, можно обсудить способы практического применения этого метода в компьютерных сетях.

**Использование МДЦ для разработки независимых стратегий решения важных проблем.** Во введении к книге уже говорилось об общественных информационно-аналитических центрах (ОИАЦ). В таких центрах администраторы, политики, представители общественных движений и просто рядовые граждане на основе современных компьютерных технологий смогут получить полную достоверную информацию об интересующих их экономических, социальных, экологических и других проблемах, оценить и обсудить возможные стратегии решения этих проблем. Для этого в рамках ОИАЦ должна быть собрана информация о проблеме, а также реализованы математические модели и процедуры, позволяющие разработать компромиссные стратегии.

Создание ОИАЦ должно способствовать формированию унифицированной информационной, модельной и методической основы для дискуссий и переговоров, осуществлению общественного контроля, созданию атмосферы открытого общества и доверия между администрацией, политиками и рядовыми гражданами. МДЦ может быть использован в ОИАЦ для того, чтобы проанализировать сложные проблемы и найти стратегии их решения, отражающие интересы пользователей.

---

<sup>31</sup> Содержательный пример приведен в [10], где показано, что по имеющимся данным можно идентифицировать суммарный запас газовой залежи, а в каждой из зон залежи — не удается.

Как известно, любая информация, доступная в открытой компьютерной сети, доступна с домашнего персонального компьютера, если этот компьютер подключен к сети. Благодаря этому, информация, модели и методы их анализа, собранные в сетевом ОИАЦ, становятся доступными для рядового гражданина. Это может сделать сетевые ОИАЦ важной составной частью нового информационного общества, базирующегося на использовании открытых компьютерных сетей, скажем, ИНТЕРНЕТ. МДЦ может быть реализован и в рамках сетевых ОИАЦ.

Обратим внимание читателя, знакомого с сетью ИНТЕРНЕТ, на технический, но в данном случае принципиально важный факт: в силу простоты обмена информацией в рамках МДЦ, этот метод может быть реализован на основе обычных WWW-браузеров ИНТЕРНЕТ, скажем, NETSCAPE. Это означает, что свою собственную независимую стратегию сможет разработать любой человек, овладевший простейшими возможностями браузеров. Благодаря этому, реализуется право рядовых граждан на независимую объективную информацию о стратегиях решения экологических и экономических проблем, которое не могло быть реализовано ранее, до появления компьютерных сетей.

Приведем пример. Представим себе, что в некотором месте (скажем, в Министерстве экономики) экспертами подготовлена модель регулирования экономики страны и исходная информация для этой модели. Предположим для простоты, что модель и информация являются достаточно достоверными. Тогда каждый заинтересованный гражданин сможет использовать ИНТЕРНЕТ для изучения потенциальных возможностей выбора с помощью анализа диалоговых карт решений. Указав достижимую цель, этот человек сможет выработать стратегию регулирования экономики. Представляется, что такая “игра” в регулирование экономики своей страны куда содержательнее компьютерной игры в чужую цивилизацию.

Заметим, рядовой человек сможет контролировать деятельность тех, кто несет ответственность за разработку таких стратегий. Действительно, если у официальных разработчиков стратегии (или у других групп экспертов) не найдется аргументов для того, чтобы доказать, что предлагаемая ими стратегия предпочтительнее, чем стратегия, предложенная рядовым гражданином, то это будет означать необоснованность официальной стратегии. С другой стороны, делая попытки построить свою собственную стратегию, рядовой человек начинает понимать проблемы, с которыми сталкиваются разработчики стратегии, поэтому с большим вниманием отнесется к их предложениям. В случае использования МДЦ человек начинает играть активную роль – из пассивного соглашателя или нигилиста он превращается в автора стратегии! Это в корне меняет его положение, способствует становлению активной позиции и принуждает бороться за осуществление своих идей.

**Поддержка переговоров по компьютерным сетям.** Развитие компьютерных сетей позволяет осуществлять переговоры на основе исполь-

зования компьютерных средств связи. Конечно, личная встреча куда предпочтительнее переговоров на расстоянии, однако во многих случаях к ним приходится прибегать в связи с невозможностью организации личной встречи. К таким случаям, в частности, относятся переговоры в реальном времени, когда решение требуется принять в течение определенного, обычно небольшого промежутка времени. Ранее такие переговоры проводились по многосторонней телефонной связи. Теперь для этих целей могут быть использованы компьютерные сети и возможности компьютерной визуализации. В отличие от общедоступных средств, предназначенных для разработки независимых стратегий решения общественных проблем, в переговорах обычно используются внутренние сети, недоступные для посторонних. В настоящее время такие сети во все большей степени используют протоколы ИНТЕРНЕТ (сети ИНТРАНЕТ), поэтому разрабатываемые ныне программные средства, реализующие МДЦ для открытых сетей, смогут быть использованы и во внутренних компьютерных сетях.

Переговоры по компьютерным сетям в реальном времени ограничены дополнительным фактором – невозможностью достаточно быстро передать через сеть чрезмерно большой объем информации. Поэтому реализация позиционных переговоров по компьютерным сетям может привести к дополнительным затруднениям. Действительно, для того чтобы передать и быстро осознать предложения переговорщиков, требуется значительное время, особенно если предложения описываются большим числом параметров. МДЦ позволяет решить эту проблему, поскольку в нем объем передаваемой информации невелик. Остановимся на реализации структуризированной процедуры поддержки переговоров по компьютерной сети в случае простых предпочтений. Сначала опишем такую процедуру в общем случае, обращая внимание на ее особенности, связанные с использованием компьютерных сетей, а затем приведем пример.

Предлагаемая процедура поддержки переговоров по компьютерной сети использует возможность построить ОЭП заранее. Это множество еще до начала переговоров строится и передается переговорщикам вместе с программным обеспечением, строящим карты решений и комплексы кривых замещения по заданной ОЭП. Передачу ОЭП и такого программного обеспечения можно осуществить как по сети, так и передав дискету непосредственно.

Шаги процедуры поддержки переговоров состоят из четырех этапов, отличающихся от описанной выше структуризированной процедуры только тем, что переговорщики не собрались вместе, а связаны глобальной компьютерной сетью.

Этап 1. Переговорщики получают целевую точку по компьютерной сети. Программное обеспечение строит комплексы кривых замещения, причем для каждого из переговорщиков в качестве ведущего взят его собственный критерий.

Этап 2. Переговорщик, зная свои дополнительные возможности предложения скрытых компенсаций партнерам и поняв из полученных кривых, переговоры с кем из партнеров могут представлять интерес, пытается договориться с потенциальным партнером о начале двусторонних переговоров. Обсуждение этих вопросов может происходить как по компьютерной сети, так и на основе любых других средств связи (скажем, по телефону или через посыльных).

Этап 3. Посредник извещается об образовании пары переговорщиков, первыми договорившихся о проведении двусторонних переговоров между собой, и фиксирует эту пару. Те начинают переговоры об изменении положения точки на кривой замещения двух критериев по сети. При этом они могут выдвигать предложения как по сети (демонстрируя предлагаемое перемещение точки), так и с помощью телефона. Если реализована аудиовизуальная связь между переговорщиками, то они могут демонстрировать предлагаемые перемещения и описывать их условия с помощью этой связи. Остальные переговорщики могут вмешиваться в эти переговоры неформальным образом, без использования линии, по которой идут переговоры. По окончании переговоров посредники регистрируют их результат, т.е. новое положение текущей недоминируемой точки.

Этап 4. Переговорщики извещаются об окончании двухсторонних переговоров по компьютерной сети и процедура переходит к этапу 1 следующего шага.

По окончании переговоров визуализация полученной стратегии может осуществляться с помощью средств ММ также по сети (обсуждение этих возможностей выходит за пределы нашей книги).

Обратим внимание на то, что благодаря применению МДЦ обмен информацией по сети очень прост – передается лишь целевая точка. Положение целевой точки может быть задано положением движков, число которых равно числу переговорщиков, а передача такой информации по компьютерной сети может быть реализована очень просто. На первом этапе первого шага положение движков задается посредником, на втором и четвертом этапах положение движков не меняется. На третьем (главном) этапе в процессе двусторонних переговоров требуется договориться о таком новом положении двух движков, чтобы целевая точка осталась на кривой объективного замещения. Последнее достигается тем, что в программном обеспечении целевая точка всегда остается на кривой замещения за счет согласованных перемещений движков, соответствующих тем двум критериям, значения которых отложены по осям.

Концепцию проиллюстрируем на основе конкретного примера переговоров в реальном времени, т.е. когда решения должны приниматься в течение небольшого временного промежутка. Рассмотрим проблему распределения воды между несколькими потребителями, расположенными в бассейне одной реки. Предположим, что в течение засушливого периода требуется орошение посевов, причем недостаток влаги приводит к поте-



рям в доходах фермеров – к падению потенциального урожая. Пусть переговоры ведутся представителями местных властей – муниципалитетов. Прогноз осадков и доступного объема воды в реке уточняется каждую неделю, что не позволяет разделить воду заранее. Представители муниципалитетов должны вести переговоры и еженедельно принимать согласованное решение о разделе воды между муниципалитетами (точнее, фермерами, относящимися к муниципалитетам) на ближайшую неделю. Таким образом, эта проблема – проблема в реальном времени, т.е. переговоры должны завершиться достаточно быстро.

В рассматриваемой задаче критерии и интересы каждого переговорщика ясны – это уменьшение потерь фермеров, принадлежащих к своему муниципалитету. В связи со сказанным можно использовать структуризованную процедуру, аналогичную описанной выше. Ее отличие состоит в том, что в данном случае ОЭП должна пересчитываться каждую неделю по мере поступления новых прогнозов стока и осадков, а также и уточнения состояния посевов и влажности почвы. Из-за этого переговоры должны проводиться вновь.

Процедура переговоров может иметь следующий вид. Создается некоторый региональный центр, осуществляющий компьютерную поддержку описываемых переговоров. В начале засушливого сезона этот центр получает прогноз о стоке реки по неделям и об осадках до конца засушливого периода. Затем, на основе математической модели потерь от недостатка влаги, посредники строят ОЭП в пространстве критериев – потерь урожая за весь засушливый период в каждом из муниципалитетов. Ясно, что эти потери зависят от решений о распределении воды в течение всего периода, так что построение ОЭП может оказаться непростой задачей. Однако, поскольку построение ОЭП осуществляется заранее, это не отражается на переговорщиках.

Переговоры в самом начале засушливого периода направлены на выбор компромиссной достижимой цели – комбинации значений потерь. Для этого переговорщики изучают ОЭП, т.е. получают кривые объективного замещения как в виде карт решений, так и в виде комплексов кривых замещения. Анализ ОЭП происходит на персональных компьютерах в муниципалитетах, получивших ОЭП по сети.

Переговоры состоят в изменении положения текущей цели на картах решений. На основе неформальных контактов формируется пара переговорщиков, которая желает изменить положение цели по своей паре критериев. Переговорщики выбирают партнера на основе рассмотрения замещений, опыта личных связей и возможностей компенсации возникающих потерь. Важно, что условия перемещения целевой точки, которые могут включать многие конфиденциальные элементы отношений между этими муниципалитетами, остаются их секретом. Остальные участники переговоров получают единственный результат – изменение положения целевой точки (как на картах решений, так и на пересчитанных комплек-

сах кривых замещения). Далее все переговорщики снова получают возможность начать обсуждение об образовании новой пары, но уже в новых, сложившихся к этому моменту условиях.

После завершения всех попыток переместить текущую цель найденное сочетание потерь объявляется окончательным. Рассчитывается вариант деления воды между муниципалитетами до конца засушливого периода. На практике используется решение только для первой недели, поскольку через неделю прогноз осадков и стока изменится и потребуются пересмотреть решение с помощью той же процедуры переговоров. На следующих переговорах, однако, имеется уже некоторый ориентир – сочетание потерь, выработанное на предыдущих переговорах. Эта цель скорее всего окажется либо недостижимой, либо доминируемой, однако она может быть использована для построения исходной текущей недоминируемой цели, являющейся объектом переговоров.

Эффективные стратегии распределения воды, полученные как следствия целевых точек, могут также передаваться по сети, если имеются соответствующие технические возможности. Эти стратегии, однако, не являются информацией, необходимой при проведении переговоров в реальном времени, и, в принципе, могут передаваться и изучаться в промежутках между сессиями переговоров (т.е. на стадии подготовки переговоров). Если же имеются возможности быстрой передачи стратегий по сети во время переговоров, то форма представления стратегий (цифровая, визуальная или ММ) зависит исключительно от возможностей сети.

## Глава 5.

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ДОСТИЖИМЫХ ЦЕЛЕЙ

В этой главе рассматриваются математические основы МДЦ. Для чтения этой главы, в отличие от остальных глав книги, требуется некоторая математическая подготовка. Впрочем, здесь мы не стали описывать сложные математические проблемы, связанные с использованием методов топологии векторных пространств, алгебраической топологии и дифференциальной геометрии, которые нам пришлось решать в процессе разработки метода. В связи с этим данная глава доступна любому специалисту в области прикладной математики.

Прежде всего дадим математическую постановку задачи. В предыдущих главах переменные всегда принадлежали конкретному конечномерному линейному пространству. Здесь мы будем считать, что заранее задано некоторое пространство возможных решений  $W$ , природу которого пока уточнять не будем. В частности,  $W$  может быть пространством функций, аргументом которых является время. Относительно критериев будем по-прежнему предполагать, что их конечное число и, более того, совокупность критериев является  $m$ -мерным вектором, т.е. в качестве критериального пространства рассматривается  $m$ -мерное линейное пространство  $R^m$ . Будем считать, что связь между решениями и значениями критериев устанавливается отображением  $f$ , действующим из пространства решений  $W$  в критериальное пространство  $R^m$ . Множество допустимых решений обозначим через  $X$ . Конечно,  $X \subset W$ .

Рассмотрим задачу построения и визуализации множества достижимых целей, которое в выбранных обозначениях является образом  $X$  при отображении  $f$ , т.е.  $f(X)$ . Напомним, что нас интересует случай  $m \geq 3$ , для которого визуализация множества общего вида представляет собой сложную задачу. Эта задача усугубляется неявным заданием множества  $f(X)$  в рассматриваемых нами задачах, т.е. заданием множества  $X$  и отображения  $f$ , а не самого  $f(X)$ . В связи с этим приходится изучать различные конкретные типы пространств  $W$ , множеств  $X$  и отображений  $f$ . В § 1.4 уже упоминались три базовых задачи:

- 1) пространство  $W$  – линейное конечномерное, множество  $X$  – выпуклый многогранник, а отображение  $f$  – линейное;
- 2) множество  $f(X)$  – ограниченное выпуклое;

3) пространство  $W$  – конечномерное малой размерности, множество  $f(X)$  – ограниченное, не обязательно выпуклое.

Следует отметить, что, во-первых, к этим базовым задачам сводятся многие другие задачи. Так, к ним можно свести такие задачи, как построение множества достижимых целей для управляемых систем дифференциальных уравнений (дифференциальных включений), что сделано в § 5.6, или для краевых задач для систем в частных производных и т.д. Во-вторых, эти три типа задач соответствуют логике (и истории) развития МДЦ. В-третьих, методы построения ОЭП для этих задач аналогичны методам построения множества достижимых целей.

В первых двух базовых задачах визуализация множества  $f(X)$  основана на его аппроксимации выпуклым многогранником  $Q$ , получаемым в виде множества решений конечной системы линейных неравенств. В третьей базовой задаче множество  $f(X)$  аппроксимируется системой шаров  $R^n$ . При построении ОЭП в первых двух случаях эта оболочка аппроксимируется суммой многогранника  $Q$  и конуса доминирования в пространстве критериев. В третьем случае ОЭП аппроксимируется суммой системы шаров и конусов доминирования.

Итак, в основу методики визуализации множеств достижимых целей и их ОЭП легло разделение процесса решения рассматриваемой задачи на два этапа:

I этап – построение точного или приближенного описания множества  $f(X)$  (или его ОЭП) в явном виде, удобном для визуализации. Этот этап должен выполняться автоматически, без участия человека (возможно, на мощных ЭВМ). Его можно трактовать как предобработку в рассматриваемой задаче.

II этап – собственно визуализация, использующая явное представление множеств. Этот этап является существенно интерактивным (человеко-машинным), и поэтому на нем выдвигаются жесткие требования к удобству и скорости получения изображения. Этот этап разумно реализовать на персональном компьютере или графической станции.

Визуализация множества и его ОЭП для трех перечисленных выше базовых задач основана на аппроксимации этих множеств относительно простыми объектами, демонстрация которых на дисплее в форме совокупности двумерных сечений может быть осуществлена достаточно быстро. В книге уже было приведено достаточно примеров визуализации множества достижимых целей и его ОЭП. В первых двух случаях визуализация основана на “быстрых” алгоритмах расчета системы двумерных сечений многогранника (или суммы многогранника и конуса). В третьем случае система сечений получается либо путем непосредственного наложения двумерных сечений аппроксимирующих шаров и конусов, либо на основе построения и изображения контура их объединения, что также может быть выполнено достаточно быстро.

Глава состоит из шести параграфов. В первых трех описываются методы построения или аппроксимации  $f(X)$  для трех базовых задач. В § 5.4 рассматривается методика аппроксимации ОЭП. В § 5.5 описываются методы построения серии двумерных сечений многогранного множества, в § 5.6 – методы построения или аппроксимации  $f(X)$  для динамических систем.

### 5.1. Построение образа выпуклого многогранника при линейном отображении

Рассмотрим первый тип задач, когда пространство  $W$  является линейным пространством  $\mathbf{R}^n$ , множество  $X$  является многогранником в  $\mathbf{R}^n$ , отображение  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  является линейным. Предполагается, что множество  $X$  задано системой ограничений, т.е.

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n: Hx \leq h\}, \quad (1.1)$$

где  $H$  и  $h$  – заданные матрица и вектор. Линейное отображение  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  в данном случае задается матрицей  $F$ :

$$f(x) = Fx. \quad (1.2)$$

Для построения множества

$$f(X) = \{y \in \mathbf{R}^m : y = Fx, Hx \leq h\} \quad (1.3)$$

в виде

$$Q = \{y \in \mathbf{R}^m : Dy \leq d\}$$

в начале 70-х нами (см. [29]) было предложено использовать методы построения (ортогональных) проекций многогранных множеств на основе свертывания систем линейных неравенств.

#### Проекция многогранных множеств и свертывание неравенств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задано множество  $M \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ . Проекцией (ортогональной) множества  $M$  на  $\mathbf{R}^q$  называется множество

$$M_w = \{w \in \mathbf{R}^q : \exists v: (v, w) \in M\}.$$

Покажем, каким образом множество  $f(X)$  может быть представлено в виде проекции некоторого множества. Рассмотрим график отображения  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  типа (1.2), заданного на множестве (1.1)

$$Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m : y = Fx, Hx \leq h\}. \quad (1.4)$$

Заметим, что множество  $f(X)$ , определенное согласно (1.3), можно представить в виде

$$f(X) = \{y \in \mathbf{R}^m : \exists x: y = Fx, Hx \leq h\}.$$

Поэтому

$$f(X) = \{ y \in \mathbf{R}^m : \exists x: (x, y) \in Z \},$$

т.е. множество  $f(X)$  является проекцией множества  $Z$  на  $\mathbf{R}^m$ . Поскольку множество  $Z$  оказывается задано вместе с заданием изучаемой системы (1.1), (1.2), задача построения  $f(X)$  сводится к построению проекции многогранника  $Z$  на  $\mathbf{R}^m$ . Напомним, что эта проекция должна быть построена в виде многогранника  $Q$ , заданного как множество решений системы линейных неравенств.

Заметим, что при  $m = n$  и матрице  $F$  полного ранга множество  $f(X)$  может быть найдено очень легко: вектор  $x$  можно выразить через  $y$  в виде  $x = F^{-1}y$  и подставить это выражение в систему неравенств (1.1). Поэтому

$$f(X) = \{ y \in \mathbf{R}^m : HF^{-1}y \leq h \}.$$

Таким образом, вектор  $x$  может быть исключен из неявного описания (1.4) множества  $f(X)$  за счет простого обращения матрицы.

При  $m < n$  (а именно эта ситуация обычно встречается в прикладных задачах) этим простым способом задачу нахождения множества  $f(X)$  в виде многогранника  $Q$  полностью решить не удастся. Имеющиеся равенства позволяют исключить из описания (1.4) только часть координат вектора  $x$ . При этом они выражаются через остальные переменные и могут быть подставлены в неравенства. Для того чтобы исключить оставшиеся переменные и получить искомую проекцию, можно использовать методы свертывания систем линейных неравенств, предложенные Фурье в первой половине XIX века.

В общем случае методы свертывания позволяют найти проекцию  $M_w$  выпуклого многогранного множества  $M \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$  в виде

$$M_w = \{ w \in \mathbf{R}^q : Dw \leq d \}. \quad (1.5)$$

При этом полагается, что выпуклое многогранное множество  $M$  задано в виде

$$M = \{ (v, w) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q : Av + Bw \leq c \}, \quad (1.6)$$

где  $A, B, c$  – заданные матрицы и вектор, а задача построения  $M_w$  состоит в нахождении матрицы  $D$  и вектора  $d$ .

Поскольку методы свертывания недостаточно известны, мы вынуждены дать их краткое описание.

**Метод свертывания Фурье.** В методе свертывания систем линейных неравенств, предложенном Фурье, последовательно строятся проекции множества  $M$  на  $\mathbf{R}^{p-1} \times \mathbf{R}^q, \mathbf{R}^{p-2} \times \mathbf{R}^q, \dots, \mathbf{R}^q$ .

Последующая проекция вычисляется по предыдущей путем исключения одной компоненты вектора  $v$ . Исключение производится сложением неравенств, предварительно умноженных на неотрицательные числа. Этот процесс называется свертыванием неравенств. Метод Фурье в какой-то степени напоминает метод Гаусса решения систем линейных

уравнений, однако в нем нужно учитывать, что неравенства можно умножать только на неотрицательные числа.

Пусть для начала  $p = 1$ , т.е.  $v \in \mathbf{R}^1$ . Тогда систему неравенств (1.6) можно записать в виде

$$a_i v + \langle b_i, w \rangle \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.7)$$

причем здесь  $a_i$  – числа,  $b_i$  – векторы. Неравенства системы (1.7) разбиваются на три группы  $\Pi_+$ ,  $\Pi$  и  $\Pi_0$  в соответствии со знаком коэффициента  $a_i$  при исключаемой переменной  $v$ . В систему, описывающую  $M_w$ , следует включить все неравенства из  $\Pi_0$ , а также все возможные линейные комбинации пар неравенств в виде

$$\langle a_j b_i - a_i b_j, w \rangle \leq a_j c_i - a_i c_j, \quad i \in \Pi, \quad j \in \Pi_+,$$

где одно из неравенств взято из  $\Pi_+$ , а другое – из  $\Pi$ .

При исключении большого числа переменных в методе Фурье предполагается действовать точно так же, взяв систему, полученную после исключения предыдущей переменной, в качестве исходной.

Опыт показывает, что если число неравенств в исходной системе составляет несколько десятков, то при использовании алгоритма Фурье число неравенств в получаемых системах может расти настолько быстро, что массив их коэффициентов очень скоро переполнит быструю память любой современной ЭВМ. Кроме того, сложность визуализации многогранника, описываемого системой линейных неравенств, резко растет с ростом числа неравенств (подробнее об этом говорится в § 5.5), так что алгоритм Фурье не решает проблем, возникающих при реализации МДЦ.

К счастью, имеется ряд соображений, которые значительно облегчают ситуацию. Главное из них состоит в том, что среди совокупности полученных неравенств большая часть является следствием других неравенств (т.е. они являются зависимыми неравенствами), и поэтому удаление их из системы не влияет на множество решений. Выявление и удаление зависимых неравенств – основное условие успешного применения методов свертывания.

Для того чтобы понять, как устранить зависимые неравенства в рамках методов свертывания, используем некоторые результаты теории линейных неравенств, в частности, леммы Фаркаша и Александрова–Фань Цзи.

**Леммы Фаркаша и Александрова–Фань Цзи.** Лемма Фаркаша является фундаментальным результатом теории линейных неравенств. На ней, в частности, основывается теория двойственности линейного программирования. Лемма имеет две формулировки – геометрическую, как утверждение о двойственных многогранных конусах, и алгебраическую. Начнем с некоторых понятий.

**ОПРЕДЕЛЕНИЯ.** *Многогранным конусом* называется множество

$$K = \{b: b = A\lambda, \lambda \geq 0\},$$

где  $A$  – матрица, составленная из произвольной конечной совокупности векторов  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ .

*Конусом, сопряженным* некоторому конусу  $K$ , называется множество

$$K^+ = \{u: \langle u, b \rangle \geq 0, b \in K\}.$$

В случае многогранного конуса  $K$ , заданного матрицей  $A$ , сопряженный конус приобретает вид

$$K^+ = \{u: uA \geq 0\}.$$

Для конуса  $K^+$ , в свою очередь, можно определить сопряженный

$$K^{++} = \{w: \langle u, w \rangle \geq 0, u \in K^+\}.$$

ЛЕММА ФАРКАША (геометрическая формулировка). Для многогранного конуса  $K$  имеет место  $K^{++} = K$ .

ЛЕММА ФАРКАША (алгебраическая формулировка). Пусть дана матрица  $A$ . Для некоторого вектора  $b$  найдется такой вектор  $\lambda \geq 0$ , что  $b = A\lambda$ , тогда и только тогда, когда для любого решения системы  $uA \geq 0$  имеет место  $\langle u, b \rangle \geq 0$ .

Очевидным следствием леммы Фаркаша, удобным для анализа методов свертывания, является лемма Александрова–Фань Цзи.

ЛЕММА АЛЕКСАНДРОВА–ФАНЬ ЦЗИ. Система  $Av \leq b$  имеет решение тогда и только тогда, когда для любого решения системы

$$uA = 0, u \geq 0 \tag{1.8}$$

имеем

$$\langle u, b \rangle \geq 0.$$

Обозначим через  $U$  матрицу, строки которой представляют собой конечное число векторов, порождающих многогранный конус решений (1.8). Тогда лемма может быть переформулирована в следующем виде.

ЛЕММА АЛЕКСАНДРОВА–ФАНЬ ЦЗИ (эквивалентная формулировка). Пусть  $U$  – матрица, строки которой являются векторами, порождающими конус решений системы (1.8). Система  $Av \leq b$  имеет решение тогда и только тогда, когда

$$Ub \geq 0.$$

Как уже говорилось, на лемме Фаркаша базируется теория линейного программирования. В свою очередь, лемма Александрова–Фань Цзи может быть легко получена из теории двойственности линейного программирования.

Лемма Александрова – Фань Цзи может быть использована для построения проекции  $M_w$  многогранного множества (1.6) следующим образом. Рассмотрим систему



$$Av \leq b, \quad \text{где } b = c - Bw.$$

Согласно определению проекции и лемме Александра–Фань Цзи, включение  $w \in M_w$  имеет место тогда и только тогда, когда

$$U(c - Bw) \geq 0.$$

Поэтому

$$M_w = \{ w \in \mathbf{R}^q: UBw \leq Uc \}. \quad (1.9)$$

Поскольку элементы матрицы  $U$  согласно (1.8) неотрицательны, то следствием леммы является тот факт, что элементы матрицы  $D$  и вектора  $d$  могут быть получены на основе умножения на некоторое положительное число и сложения строк исходной системы неравенств, что и происходит в алгоритме Фурье.

Заметим, что существует бесконечное число матриц  $U$ , порождающих конус решений (1.8). Среди них есть матрицы с минимальным числом строк. Такие матрицы  $U_f$  принято называть фундаментальными матрицами решений (1.8). Известно, что алгоритм Фурье при  $p > 1$  обычно не позволяет получить систему (1.9), соответствующую  $U_f$ , т.е. такую что  $D = D_f = U_f B$ ,  $d = d_f = U_f c$ .

Идеи, которые могут быть использованы для построения  $U_f$ , были предложены в работе Т.С.Мощкина и других [44]. В связи с тем, что эти идеи были описаны в довольно неясной форме и без доказательств, фон Бургер [64] переформулировал их и дал доказательства. На основе этих утверждений С.Н.Черников сформулировал алгоритмы свертывания систем неравенств, позволяющие найти  $D_f$  и  $d_f$ . Опишем идею алгоритмов Черникова<sup>32</sup>.

**Алгоритмы свертывания Черникова.** При изложении методов Черникова большое значение имеет понятие *крайних векторов* конуса, т.е. таких векторов, которые не могут быть представлены в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами двух неколлинеарных векторов, принадлежащих этому конусу. Известно, что минимальный набор векторов, порождающих острый (не содержащий подпространства ненулевой размерности) конус – это совокупность его крайних векторов. Конус решений (1.8) содержится в неотрицательном ортанте, поэтому он является острым и задается совокупностью своих крайних векторов.

Решить вопрос о построении матрицы  $D_f$  и вектора  $d_f$  позволяет результат, полученный Черниковым для обоснования предложенных им методов свертывания систем линейных неравенств. Мы приведем здесь это утверждение в несколько иной форме, которая, на наш взгляд, более проста для понимания, так как опирается на общеизвестное понятие аффинной независимости векторов. Оказывается, найти крайние

---

<sup>32</sup> Материал, излагаемый в следующем разделе, представляет собой упрощенное изложение некоторых идей книги [56].

векторы конуса решений системы (1.8) можно на основе проверки аффинной независимости строк матрицы  $A$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , называются *аффинно зависимыми*, если существует такой вектор  $\lambda \in \mathbf{R}^r$ , что

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i = 0, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i = 0, \quad \exists \lambda_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Необходимое и достаточное условие того, что некоторое решение (1.8) является крайним вектором, дано в следующей лемме, которую мы приводим без доказательства.

ЛЕММА. Вектор  $u$ , принадлежащий конусу решений системы (1.8), является крайним вектором конуса тогда и только тогда, когда совокупность строк матрицы  $A$ , соответствующая положительным координатам  $u$ , аффинно независима.

Вернемся к задаче построения матрицы  $D_j$  и вектора  $d_j$  с помощью методов свертывания. Обозначим через  $I_j$  множество номеров неравенств системы (1.6), которые вошли в линейную комбинацию при образовании  $j$ -го неравенства системы (1.5). Это множество называется индексом этого неравенства. Из определения аффинной зависимости ясно, что если

$$I_i \subset I_j \tag{1.10}$$

для некоторого неравенства (1.5) с номером  $i$ , то строки матрицы  $A$  с номерами из  $I_j$  аффинно зависимы. Из сформулированной леммы можно вывести следующее правило обнаружения зависимых неравенств в системе (1.5): если найдется такой номер  $i$ , что выполняется (1.10), то  $j$ -е неравенство является зависимым.

Оказывается, что этого соображения вполне достаточно, чтобы модифицировать алгоритм Фурье и получить алгоритм для расчета системы  $U_j B w \leq U_j c$ . Этот алгоритм был назван *алгоритмом фундаментального свертывания*.

Легко показать, что матрица из  $p$  столбцов не может иметь более  $(p+1)$  аффинно независимых строк. Поэтому если  $|I_j| > p + 1$  ( $|I_j|$  – количество элементов в индексе), то  $j$ -е неравенство является зависимым. Поэтому условие (1.10), в котором требуется осуществлять попарное сравнение индексов для всех пар неравенств системы, разумно предварить проверкой числа элементов в индексе. Алгоритм, использующий такую проверку, называется *алгоритмом сокращенного фундаментального свертывания*. Он был также сформулирован Черниковым<sup>33</sup>.

Рассмотрим алгоритм сокращенного фундаментального свертывания. Опишем его шаг. Пусть из системы (1.6) исключены переменные  $v$  и получена система типа (1.5), причем для каждого  $i$ -го неравенства системы (1.5) хранится его индекс  $I_i$ . Пусть, далее, требуется исключить из систе-

<sup>33</sup> Возможно, что кроме подсчета числа элементов индекса существуют и другие предварительные проверки, которые позволят реже проверять условие (1.10).

мы (1.5) еще одну переменную. Как и в методе Фурье, все неравенства разобьем на три группы  $\Pi_+$ ,  $\Pi$  и  $\Pi_0$ . Прежде всего, в новую систему включим все неравенства из  $\Pi_0$ , сохранив индекс неравенств без изменения. Далее, в новую систему будем включать линейные комбинации пар неравенств, одно из которых взято из  $\Pi_+$ , а другое – из  $\Pi$ . В отличие от алгоритма Фурье, при этом будем образовывать не все комбинации, а только те, индексы которых удовлетворяют условиям, описываемым ниже. Пусть в системе (1.5) имелись неравенства  $i \in \Pi_+$  и  $j \in \Pi$ .

$$b_i^1 w_1 + \sum_{k=2}^q b_i^k w_k \leq c_i,$$

$$b_j^1 w_1 + \sum_{k=2}^q b_j^k w_k \leq c_j.$$

Неравенство

$$\sum_{k=2}^q (b_j^1 b_i^k + b_i^1 b_j^k) w_k \leq b_j^1 c_i + b_i^1 c_j$$

с индексом  $(I_i \cup I_j)$  включим в новую систему тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия

- 1)  $|I_i \cup I_j| \leq p + 2$ ;
- 2) не существует такого  $k$ -го неравенства системы (1.5), что  $I_k \subseteq I_i \cup I_j$ .

На этом шаг алгоритма завершается. Заметим, что условие 1) сформулировано здесь в упрощенном виде, на самом деле имеется возможность его несколько усилить.

**Обсуждение алгоритмов.** Обратим внимание на то, что, хотя число получаемых неравенств значительно меньше, чем в методе Фурье, число неравенств может зависеть экспоненциально от числа исключений. Это приводит к трудностям при использовании методов свертывания в практических задачах даже при относительно малой размерности. Сказанное подтверждается результатами различных экспериментальных и практических расчетов. Расчеты показывают, что эффективность методов свертывания сильно зависит от заполненности матрицы  $A$  и конкретных значений ее элементов<sup>34</sup>. Таким образом, эти методы гарантируют получение конечного результата лишь для систем очень малой размерности ( $p \approx 10$ , если число неравенств порядка 10). В то же время, встречаются практические задачи, в которых методы свертывания эффективны, поскольку число неравенств системы при исключении переменных растет достаточно медленно. Опыт показывает, что большое влияние на протекание процес-

<sup>34</sup> Влияние вариации значений элементов матрицы  $A$  на множество решений системы, а также на процесс исключения переменных в алгоритме Фурье рассмотрено в работах [38-40].

са свертывания оказывает очередность исключения переменных, поэтому конечный результат иногда может быть получен только за счет изменения порядка их исключения.

Обратим внимание на то, что даже минимальная матрица  $U_f$  обычно также порождает зависимые неравенства в описании множества  $M_w$ . Действительно, матрица  $U_f$  описывает ребра конуса решений (1.8), который зависит только от  $A$ , но не от конкретных  $B$  и  $c$ . Более того, матрица  $U_f$  должна содержать строки, дающие описание проекции при любых  $B$  и  $c$ ! В связи с этим при построении проекций для конкретных  $B$  и  $c$  с помощью метода сокращенного фундаментального свертывания получаем большое число зависимых ограничений. Для того чтобы расширить область применения методов свертывания, требуется использовать специальные методы, предназначенные для выявления зависимых неравенств.

Прежде всего, дадим математическую формулировку проблемы. В конечной системе неравенств

$$\langle a_i, x \rangle \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $a_i \in \mathbf{R}^p$  – заданные строки,  $b_i$  – заданные числа,  $x \in \mathbf{R}^p$ , необходимо выделить подсистему, имеющую то же множество решений, но не содержащую зависимых неравенств.

Отметим, что проблема устранения зависимых неравенств в линейных системах известна давно<sup>35</sup>. Большинство методов основано либо на использовании итераций прямой или двойственной задач линейного программирования (ЛП), либо на некоторых эвристических приемах. Выяснилось, что не удастся найти универсальное сочетание алгоритмов устранения несущественных ограничений, эффективное в большинстве встречающихся задач. Одни алгоритмы выявляют почти все зависимые неравенства, но требуют слишком больших временных затрат, другие работают быстро, но не дают никаких оценок того, сколько еще осталось зависимых неравенств<sup>36</sup>. Поэтому каждая из задач требует экспериментов с различными вариантами очередности исключения переменных в методе свертывания и различными методами исключения зависимых неравенств.

Таким образом, методы свертывания систем линейных неравенств могут быть использованы для построения образов многогранных конечномерных множеств при их линейных отображениях, если число переменных не превышает нескольких десятков. Подчеркнем, что при их использовании должны сочетаться различные методы выявления зависимых и “почти зависимых” неравенств, а также варьироваться порядок исключения переменных. Это означает, что при использовании методов свертывания процесс решения задачи не удастся автоматизировать, и прихо-

---

<sup>35</sup> См., например: [75].

<sup>36</sup> Предложенные нами методы описаны и обсуждены в [6, 7].

дится вмешиваться человеку, хорошо знающему особенности того или иного алгоритма<sup>37</sup>.

Существенным недостатком методов свертывания является то, что в том случае, когда процесс свертывания не удается провести до конца, затраченные усилия не приводят даже к приближенному результату. С другой стороны, большое достоинство этих методов заключается в возможности построения множеств  $f(X)$  для систем (1.3) при большой размерности пространства образов. В то же время, очевидно, что для моделей с сотней переменных эти методы непригодны.

Обратим внимание на тот факт, что исключение “почти зависимых” неравенств из системы, описывающей очередную проекцию, приводит к принципиально новой ситуации – задача точного построения проекции заменяется задачей ее аппроксимации. Спрашивается, зачем при построении аппроксимации исходить из описания точной проекции, а не строить с самого начала аппроксимацию проекции оптимальным образом (например, искать аппроксимирующий многогранник с минимальным числом вершин при заданной точности)? Такой подход был использован в методе уточнения оценок проекции [3] с целью преодоления основного недостатка методов свертывания, состоящего в отсутствии приближенной оценки проекции в том случае, когда задачу не удается решить до конца.

**Метод уточнения оценок проекции.** В методе уточнения оценок проекции (УОП) аппроксимация проекции (1.5) осуществляется на основе построения последовательности многогранников  $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$ , сходящейся к  $M_w \subset R^p$ , т.е. к аппроксимируемой проекции в метрике Хаусдорфа. При этом последовательность многогранников строится итеративно на основе решения некоторой вспомогательной задачи свертывания.

Перед началом  $k$ -й итерации метода УОП должен быть задан многогранник  $P^k$ , причем:

- а)  $P^k \subset M_w$ ;
- б) вершины  $P^k$  должны лежать на границе  $M_w$ ;
- в)  $P^k$  должен быть задан в двух следующих формах одновременно:
  - в виде множества вершин  $\{w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(r)}\}$ ;
  - в виде множества решений системы линейных неравенств

$$P^k = \{w \in R^q: \langle c_j, w \rangle \leq d_j, j = 1, 2, \dots, N\}, \quad (1.11)$$

где  $c_j$  – векторы  $R^q$ ,  $d_j$  – числа.

---

<sup>37</sup> В свое время был реализован пакет прикладных программ “Потенциал”, с помощью которого человек мог в диалоговом режиме строить множества достижимых целей на основе использования методов свертывания [9].

Переход к  $P^{k+1}$  состоит в следующем. Для всех граней  $P^k$ , задаваемых векторами  $c_j$  и числом  $d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , решается задача линейного программирования

$$\langle c_j, w \rangle \rightarrow \max \text{ при } (v, w) \in M. \quad (1.12)$$

Среди полученных решений  $(v_{(j)}, w_{(j)})$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , выбирается такое, что точка  $w^{(j^*)}$  наиболее удалена от  $P^k$ . Далее полагается  $P^{k+1} = \text{conv} \{ w^{(j^*)}, P^k \}$ .

Заметим, что для работы алгоритма на  $(k+1)$ -й итерации необходимо решить задачу построения  $P^k$  в виде (1.11). Для решения этой задачи в рамках метода УОП был предложен следующий алгоритм.

АЛГОРИТМ БУШЕНКОВА.

- 1) Находятся неравенства системы (1.11), нарушаемые точкой  $w^{(j^*)}$ ;
- 2) выделяются вершины  $w^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , принадлежащие граням, соответствующим нарушаемым неравенствам;
- 3) рассматривается конус  $K \subset \mathbf{R}^q$ , задаваемый совокупностью ребер  $w^{(i)} - w^{(j^*)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ;
- 4) находится описание конуса  $K$  в виде множества решений системы линейных неравенств (что эквивалентно построению ребер сопряженного конуса  $K^+$ );
- 5) к описанию  $P^k$  добавляются неравенства, задаваемые ребрами  $K^+$  и проходящие через точку  $w^{(j^*)}$ ;
- 6) из описания исключаются неравенства, нарушаемые точкой  $w^{(j^*)}$ .

Для построения сопряженного конуса  $K^+$  в алгоритме Бушенкова предлагается использовать методы свертывания систем линейных неравенств. Обратим внимание на то, что при решении задачи аппроксимации множества достижимых целей построение сопряженного конуса осуществляется в  $\mathbf{R}^m$ , а не в исходном пространстве переменных. Поскольку  $m$  относительно мало, то последнее свойство позволяет применять метод УОП и другие методы, разработанные на его основе, для аппроксимации  $f(X)$  в задачах большой размерности ( $n \approx 1000$ ). Наш опыт свертывания систем линейных неравенств и наличие соответствующего математического обеспечения позволили сделать этот метод мощным средством решения задач построения множества достижимых целей.

Было подмечено, что метод УОП может быть использован для аппроксимации любых ограниченных выпуклых множеств, для которых можно рассчитать опорную функцию, т.е. решить задачу (1.12) для любого  $c_j$ . Именно в такой постановке рассматриваются современные алгоритмы аппроксимации выпуклых множеств достижимых целей, рассмотренные в следующем параграфе. На основе метода УОП был предложен целый класс алгоритмов аппроксимации выпуклых множеств многогранниками, в которых использованы следующие идеи метода УОП:

- итеративное построение многогранников аппроксимации;

- разбиение перехода от  $P^k$  к  $P^{k+1}$  на два независимых шага:
  - 1) выбор некоторой "присоединяемой" точки  $w^*$  на основе решения тех или иных задач оптимизации;
  - 2) построение  $\text{conv} \{P^k, w^*\}$  в виде (1.11), которое осуществляется на основе методов свертывания в пространстве малой размерности.

## 5.2. Адаптивные алгоритмы аппроксимации выпуклых множеств многогранника

В данном параграфе изучается вопрос о построении последовательности многогранников, аппроксимирующих с любой степенью точности выпуклое компактное тело (т.е. множество с непустой внутренностью). Рассматривается евклидово пространство  $R^m$  с расстоянием  $d$ . Пусть в  $R^m$  своей опорной функцией задано некоторое выпуклое компактное тело (в.к.т.)  $C$ , т.е. для любого  $u$ , принадлежащего сфере направлений  $S = \{u \in R^m: \langle u, u \rangle = 1\}$ , можно рассчитать значения его опорной функции

$$g_C(u) = \max \{ \langle u, y \rangle : y \in C \}.$$

**Итерационные алгоритмы аппроксимации в.к.т. многогранниками.** Под *итерационными алгоритмами* аппроксимации в.к.т.  $C$  многогранниками будем понимать такие алгоритмы построения последовательности телесных многогранников  $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$  с растущим числом вершин<sup>38</sup>, в которых последующий многогранник строится на основе предыдущего, с использованием некоторых расчетов опорной функции множества  $C$ . Далее будем рассматривать алгоритмы, позволяющие для каждого в.к.т.  $C$  из  $R^m$  построить последовательность многогранников  $P^k$ , таких что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(P^k, C) = 0,$$

где  $\delta(\cdot, \cdot)$  – метрика Хаусдорфа, т.е.

$$\delta(C_1, C_2) = \max \{ \sup \{ d(x, C_2) : x \in C_1 \}, \sup \{ d(x, C_1) : x \in C_2 \} \}.$$

Такие алгоритмы будем называть аппроксимирующими.

Важным отличием рассматриваемых алгоритмов аппроксимации, основанных на построении последовательности многогранников, от алгоритмов приближенного описания с помощью отдельно взятых выпуклых тел (таких как симплекс, параллелепипед, эллипсоид), является возможность аппроксимации в.к.т. с любой степенью точности. За это преимущество, однако, приходится платить дорогой ценой: как показывают практика и теоретические оценки, сложность описания аппроксимирующей

<sup>38</sup> или гиперграней, т.е. граней размерности  $m-1$ .

шего многогранника быстро растет с увеличением точности и ростом размерности аппроксимируемого тела. Тем не менее, мы были вынуждены пойти на построение аппроксимирующих последовательностей в связи с тем, что в МДЦ нас интересует форма границы аппроксимируемого множества, а не только область, где это множество находится.

Использование итерационных методов приводит к необходимости разработки алгоритмов, оптимальных с точки зрения сложности описания аппроксимирующих многогранников. Кроме того, поскольку каждое вычисление опорной функции аппроксимируемого тела может быть достаточно сложным и требовать большого времени, представляют интерес алгоритмы, оптимальные с точки зрения числа вычислений опорной функции. Такие алгоритмы рассматриваются в данном параграфе.

Итерационные алгоритмы различаются способом построения последующего многогранника по предыдущему. В данном параграфе, в основном, рассматриваются алгоритмы, использующие так называемые схемы восполнения. Обозначим через  $P(C)$  семейство выпуклых телесных многогранников, вершины которых принадлежат границе  $\partial C$  аппроксимируемого в.к.т.  $C$ .

#### СХЕМЫ ВОСПОЛНЕНИЯ

Пусть  $P^k \in P(C)$ . Тогда  $(k+1)$ -я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбирается точка  $y^* \in \partial C$ ;

Шаг 2. Строится  $P^k = \text{conv} \{ y^*, P^k \}$ .

Очевидно, что если в некоторой схеме восполнения многогранник начального приближения  $P^0$  принадлежит  $P(C)$ , то и  $P^k \in P(C)$  для любого  $k$ . Если для многогранника  $P \in P(C)$  через  $N(P)$  обозначить число его вершин, то

$$N(P^k) \leq N(P^0) + k. \quad (2.1)$$

Обратим внимание на то, что описанный выше алгоритм УОП базируется на схеме восполнения.

Конкретные алгоритмы восполнения можно характеризовать методами решения двух задач:

1) методом выбора  $y^* \in \partial C$ ;

2) методом построения  $P^{k+1} = \text{conv} \{ y^*, P^k \}$  в требуемом виде.

Кроме схем восполнения возможны и другие классы итерационных схем, например, схемы отсечения. Пусть аппроксимируется некоторое в.к.т.  $C$ . Обозначим через  $Q(C)$  класс выпуклых многогранников, гиперграницы которых касаются  $\partial C$ .

#### СХЕМЫ ОТСЕЧЕНИЯ.

Пусть  $Q^k \in Q(C)$ . Тогда  $(k+1)$ -я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбирается направление  $u^* \in S$ ;



Шаг 2. Строится  $Q^{k+1} = Q^k \cap \{y \in \mathbf{R}^m: \langle u^*, y \rangle \leq g_C(u^*)\}$ .

К алгоритмам, использующим схему отсечения, относится рассматриваемый в конце данного параграфа алгоритм сходящихся многогранников.

**Адаптивные алгоритмы.** Среди схем выполнения можно выделить адаптивные (активные) схемы, в которых в методе выбора точки  $y^* \in \partial C$  используется информация о многограннике  $P^k$ . В этом случае выбор  $y^* \in \partial C$  адаптирован к форме  $C$  в той мере, в какой  $P^k$  аппроксимирует  $C$ . Адаптивные алгоритмы являются более эффективными, нежели неадаптивные (пассивные), основанные, как правило, на построении априорной сетки на сфере направлений, т.е. не учитывающие конкретную форму аппроксимируемого тела<sup>39</sup>. Насколько нам известно, впервые адаптивный алгоритм рассматриваемого нами типа, основанный на схеме выполнения, был предложен для аппроксимации части границы двумерного выпуклого тела [69].

В качестве характерного примера адаптивных итерационных алгоритмов рассмотрим класс алгоритмов, в дальнейшем обозначаемый как  $A^0$ . Алгоритмы этого класса основаны на одном частном случае схем выполнения и являются развитием алгоритма УОП. В алгоритмах класса  $A^0$  для выбора точки  $y^* \in \partial C$  с учетом формы  $P^k$  используется представление  $P^k$  в виде множества решений системы линейных неравенств. Для этого на шаге 2 алгоритма выполнения решается достаточно сложная задача построения  $P^{k+1} = \text{conv} \{y^*, P^k\}$  в требуемом виде.

Пусть аппроксимируется в.к.т.  $C$ . Обозначим через  $U(P)$  конечное множество единичных внешних нормалей к гиперграням телесного многогранника  $P^k \in \mathbf{P}(C)$ . Очевидно, что множество  $U(P)$  задано, если многогранник  $P$  задан в виде множества решений системы линейных неравенств.

АЛГОРИТМ КЛАССА  $A^0$ .

Перед началом  $(k+1)$ -й итерации должен быть построен  $P^k \in \mathbf{P}(C)$  в виде множества решений системы линейных неравенств.

Шаг 1: находим  $u^* \in U(P^k)$ , на котором достигается

$$\max \{ (g_C(u) - g_{P^k}(u)): u \in U(P^k) \}; \quad (2.2)$$

в качестве  $y^*$  берем такую точку  $\partial C$ , что

$$\langle u^*, y^* \rangle = g_C(u^*).$$

Шаг 2: находим  $U(P^{k+1})$  для  $P^{k+1} = \text{conv} \{y^*, P^k\}$  на основе построения  $\text{conv} \{y^*, P^k\}$  в виде множества решений

<sup>39</sup> В работе [14] приведены экспериментальные данные, показывающие, что адаптивные алгоритмы по скорости сходимости качественно превосходят неадаптивные.

системы линейных неравенств.

Предполагается, что перед началом работы алгоритма задан исходный многогранник  $P^0 \in P(C)$ , методы построения которого здесь рассматриваться не будут [60].

Отметим некоторые свойства класса алгоритмов  $A^0$ . Во-первых, благодаря решению задачи (2.2) можно получить грубую оценку  $\delta_{\square}(P^k, C)$ . Во-вторых, возможна визуальная оценка этого расстояния на основе одновременного изображения двумерных сечений многогранника  $P^k$  и многогранника

$$\tilde{P}^k = \{y \in \mathbf{R}^m: \langle u, y \rangle \leq g_C(u), u \in U(P^k)\},$$

содержащего  $C$ .

В-третьих, как и во всех схемах восполнения, в алгоритмах класса  $A^0$  методы выбора точки  $y^*$  и построения  $U(P^{k+1})$ , вообще говоря, не связаны между собой. Конкретный алгоритм класса  $A^0$  определяется методом расчета опорной функции тела на первом шаге и методом построения  $\text{conv}\{y^*, P^k\}$  на втором. Примером алгоритма класса  $A^0$  является алгоритм УОП.

Далее рассмотрим результаты теоретических и экспериментальных исследований, показывающие, что схема выбора точки  $y^* \in \partial C$ , используемая в алгоритмах класса  $A^0$ , приводит к оптимальной последовательности многогранников аппроксимации, а затем обсудим используемые нами методы построения  $\text{conv}\{y^*, P^k\}$ .

**О многогранниках наилучшей аппроксимации.** Для оценки качества итерационных алгоритмов можно сравнить последовательности многогранников, генерируемых алгоритмами, с некоторой “образцовой” последовательностью многогранников, дающих наилучшую аппроксимацию. Многогранники наилучшей аппроксимации могут быть введены следующим образом.

Пусть задано некоторое в.к.т.  $C$ . Классическим результатом теории выпуклых множеств [71, 72] является тот факт, что среди многогранников с числом вершин, не более чем  $N$  (класс таких многогранников обозначим через  $P_N(C)$ ), найдется многогранник  $P_N \in P_N(C)$ , на котором достигается минимум  $\delta_{\square}(C, P_N)$ . Этот многогранник называется *многогранником наилучшей аппроксимации* (м.н.а.). Он может служить эталоном аппроксимации тела  $C$ . Известно, что  $\delta_{\square}(C, P_N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Для в.к.т. с дважды непрерывно дифференцируемой границей существуют положительные константы  $k_C$  и  $K_C$  такие, что

$$k_C N^{-2/(m-1)} \leq \delta_{\square}(C, P_N) \leq K_C N^{-2/(m-1)}. \quad (2.3)$$

При изучении алгоритмов аппроксимации представляет интерес сравнение генерируемых ими последовательностей многогранников с последовательностью м.н.а.

**Хаусдорфовы схемы.** При анализе свойств аппроксимирующих последовательностей оказалось полезным использовать понятия хаусдорфо-

вых схем восполнения (и отсечения) и хаусдорфовых алгоритмов, которые были введены в работах Г.К.Каменева [14, 15]. Схему восполнения называют хаусдорфовой для в.к.т.  $C$  с константой  $\gamma > 0$ , если она порождает последовательность многогранников  $\{P^k\}_{k=0,1,\dots}$  со свойством

$$\delta_{\square}(P^k, P^{k+1}) \geq \gamma \delta_{\square}(P^k, C), k = 0, 1, \dots$$

Показано, что хаусдорфовы схемы являются аппроксимирующими. Пусть  $N(P^k)$  – число вершин  $P^k$ . Доказано, что для в.к.т. с дважды дифференцируемой границей величина  $\delta_{\square}(C, P^k)$  асимптотически имеет порядок  $N(P^k)^{-2/(m-1)}$ , т.е. совпадает с порядком аппроксимации м.н.а. Это утверждение позволяет решить вопрос об оптимальности хаусдорфовых схем по порядку числа вершин.

Так как для достаточно гладких тел хаусдорфовы алгоритмы оптимальны по порядку числа вершин, возникает вопрос об асимптотических значениях постоянных аппроксимации. Приведем результаты теоретических и экспериментальных исследований в этой области.

Пусть  $F = \{P^k\}_{k=0,1,\dots}$  – последовательность многогранников, сходящаяся к в.к.т.  $C$ . Величину

$$\eta(F) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta(C, P_{N(P^k)})}{\delta(C, P^k)}$$

назовем асимптотической эффективностью последовательности  $F$ . Для последовательностей м.н.а. имеем  $\eta(F) = 1$ ; для последовательностей, не оптимальных по порядку числа вершин, имеем  $\eta(F) = 0$ ; в остальных случаях имеет место  $0 < \eta(F) < 1$ .

Показано, что для в.к.т. с трижды непрерывно дифференцируемой границей для хаусдорфовых последовательностей  $F$  с константой  $\gamma$  имеем

$$\eta(F) \geq \frac{1}{4} \left( \frac{m-1}{m+1} \frac{\mathcal{G}_{m-1}}{m} \gamma^m \right)^{2/m-1} \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}},$$

где  $\rho_{\min}$  и  $\rho_{\max}$  – минимальный и максимальный радиусы кривизны  $\partial C$ , а  $\mathcal{G}_m$  – плотность покрытия пространства  $\mathbf{R}^m$  единичными шарами. В частности,  $\mathcal{G}_2$  составляет около 1.2,  $\mathcal{G}_3$  составляет около 1.5, а при  $m \geq 4$  относительно  $\mathcal{G}_m$  имеют место оценки, например,  $1.65 \leq \mathcal{G}_4 \leq 1.77$ .

**Свойства алгоритмов класса  $A^0$ .** Поскольку хаусдорфовы алгоритмы обладают замечательными свойствами, возникает вопрос о том, существуют ли схемы восполнения, являющиеся хаусдорфовыми. Было показано [16], что алгоритмы класса  $A^0$ :

- 1) являются реализацией хаусдорфовой схемы восполнения для любого в.к.т.  $C$ ;
- 2) обладают константой  $\gamma$ , в процессе аппроксимации стремящейся к  $1/\alpha(C)$ , где  $\alpha(C)$  – асферичность  $C$ ;

3) для в.к.т. с дважды непрерывно дифференцируемой границей обладают константой  $\gamma$ , стремящейся к единице.

Итак, теоретическое исследование алгоритмов класса  $A^0$  показывает, что для гладких тел они оптимальны по порядку числа вершин. Более того, для в.к.т. с трижды непрерывно дифференцируемой границей верна оценка

$$\eta(F) \geq \frac{1}{4} \left( \frac{m-1}{m+1} \frac{\rho_{m-1}}{m} \right)^{2/m-1} \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}.$$

Было осуществлено и экспериментальное исследование [12] одного из алгоритмов класса  $A^0$ . Рассматривалась аппроксимация двух-, трех- и четырехмерных эллипсоидов, для которых удалось получить экспериментальные оценки асимптотической эффективности алгоритма. Важность исследования аппроксимации эллипсоидов определяется тем фактом, что к ним принадлежит шар, являющийся наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике Хаусдорфа. Помимо сказанного, задача эффективной аппроксимации шара и других эллипсоидов имеет самостоятельное значение.

На основании результатов аппроксимации эллипсоидов были сделаны следующие основные выводы:

- 1) алгоритмы  $A^0$ , как и следует из теоретического анализа, являются оптимальными по порядку числа вершин аппроксимирующих многогранников;
- 2) в трех- и четырехмерных случаях экспериментальная асимптотическая эффективность алгоритмов  $A^0$  превосходит 1/2;
- 3) экспериментальная асимптотическая эффективность алгоритмов  $A^0$  растет с ростом размерности;
- 4) экспериментальная асимптотическая эффективность алгоритмов  $A^0$  мало зависит от асферичности аппроксимируемого тела.

Таким образом, теоретические и экспериментальные исследования подтверждают возможность аппроксимации выпуклых множеств в пространствах размерности от трех до шести с помощью адаптивных схем восполнения.

**Построение выпуклой оболочки многогранника и точки по схеме "под-над".** Перейдем к вопросу о реализации второго шага схем восполнения, т.е. к описанию методов построения  $\text{conv} \{ y^*, P^k \}$ . В фундаментальной книге Препараты и Шеймоса [51] рассмотрена схема построения выпуклой оболочки многогранника и точки, которая названа методом "под-над" ("beneath-beyond"). Опишем эту схему на трехмерном примере.

Пусть имеется многогранник ABCDEF (см. рис. 2.1a), и требуется построить грани выпуклой оболочки этого многогранника и точки G. Нетрудно понять, что в эту новую выпуклую оболочку войдут все грани исходного многогранника, не видимые из точки G (т.е. ABCD, BCE, CDE,

DEF и ADF), и не войдут грани, видимые из точки G (ABF и BEF, заштрихованные на рисунке). Кроме того, выпуклая оболочка будет иметь новые грани (см. рис 2.1б). Этими новыми гранями являются грани минимального конуса с вершиной G, содержащего многогранник ABCDEF.

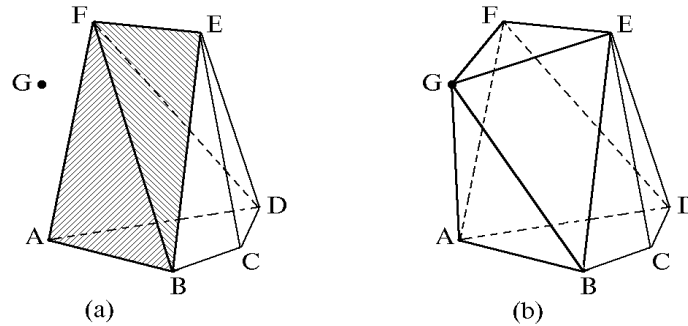


Рис. 2.1

Каждая такая новая грань лежит в гиперплоскости, проходящей через ребро многогранника, лежащее на границе между видимой и невидимой из точки G частями поверхности многогранника. Эта граница, выделенная на рисунке жирной линией, состоит из ребер AB, BE, EF и FA. Таким образом, каждая новая грань выпуклой оболочки проходит через пересечение пары соседних граней многогранника, одна из которых видима, а другая – невидима из точки G. Например, новая грань BEG проходит через ребро BE, которое является пересечением видимой грани BEF и невидимой грани BCE. Эта схема легко обобщается на случай пространства произвольной размерности  $m$ , если учесть, что граница между видимой и невидимой из точки G частями многогранника в  $\mathbf{R}^m$  состоит из граней размерности  $m-2$ .

Для реализации схемы "под-над" требуется решить три проблемы:

- определить, является ли гипергрань видимой из точки;
- определить, являются ли две гиперграни соседними;
- преобразовать представление многогранника к новому виду.

Способы решения перечисленных проблем зависят от формы представления многогранника и определяют конкретный вид алгоритма.

В упоминавшейся книге Препараты и Шеймоса описаны конкретные алгоритмы, основанные на методе "под-над", которые были предложены в неопубликованных работах Kallay и Seidel. В алгоритме Kallay для представления многогранника хранятся координаты его вершин, а также полная комбинаторная структура многогранника в виде графа принадлежности друг другу граней многогранника всех размерностей. Для решения вопроса о видимости гиперграни из точки требуется решить задачу об ориентации полупространства, граница которого проходит через вершины данной гиперграни, по отношению к присоединяемой точке. Со-

седство граней легко определяется при помощи графа принадлежности. Для преобразования представления многогранника предлагается довольно сложная комбинаторная процедура. Алгоритм Seidel является двойственным к алгоритму Kallay, он оказался оптимальным по порядку числа операций в пространствах четной размерности. Информация об опыте реализации и использования этих алгоритмов отсутствует.

**Построение выпуклой оболочки на основе свертывания неравенств.** Наши исследования в области создания алгоритмов построения многомерных выпуклых оболочек были начаты одновременно и независимо от Kallay и Siedel. Описанный в п. 5.1 алгоритм Бушенкова также реализует схему “под-над”. Поскольку для реализации МДЦ требовалось иметь описание выпуклой оболочки в виде множества решений системы линейных неравенств, реализация схемы “под-над” в наших исследованиях оказалась иной, чем в чисто комбинаторных алгоритмах типа Kallay. В дальнейшем на основе развития алгоритма Бушенкова был разработан еще один алгоритм (алгоритм Черных) [59], используемый нами в настоящее время.

Описание алгоритма Черных начнем с того, что рассмотрим задачу построения выпуклой оболочки заданной совокупности точек  $\{v^1, v^2, \dots, v^s\} \subset \mathbf{R}^m$  в виде множества решений системы линейных неравенств. Согласно определению, точка  $y \in \mathbf{R}^m$  принадлежит выпуклой оболочке точек  $\{v^1, v^2, \dots, v^s\}$ , если существуют такие  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , что

$$y = \sum_{i=1}^s \lambda_i v^i, \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.4)$$

Рассмотрим пространство  $\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^m$  переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  и  $y$ . Рассмотрим многогранное множество  $\Lambda$  в этом пространстве, задаваемое системой (2.4). Согласно определению проекции, выпуклая оболочка совокупности точек  $\{v^1, v^2, \dots, v^s\}$  является проекцией множества  $\Lambda$  в пространство  $\mathbf{R}^m$  переменных  $y$ . Таким образом, для построения искомой выпуклой оболочки достаточно из системы (2.4) исключить переменные  $\lambda$ .

Будем исключать переменные  $\lambda$  из системы (2.4) в порядке их номеров. Будем считать, что  $s > m + 1$  и точки находятся в общем положении – все требуемые детерминанты не равны нулю. Тогда переменные  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$  можно выразить через остальные переменные, используя имеющиеся в системе равенства. Дальнейшее исключение переменных будем проводить на основе метода сокращенного фундаментального свертывания.

Можно проверить, что после исключения части переменных  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ , где  $q \geq m+1$ , мы фактически получаем описание выпуклой оболочки точек  $v^1, v^2, \dots, v^q$  (для этого в полученной системе надо лишь приравнять к нулю переменные  $\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_s$ ). Более того, исключение очередной переменной  $\lambda_{q+1}$  из системы (2.4) соответствует присоединению точки  $v^{q+1}$  к

выпуклой оболочке точек  $v^1, v^2, \dots, v^q$ . Благодаря этому при построении выпуклой оболочки фактически не требуется информация о тех точках, которые пока не присоединяются, поэтому не нужно заранее знать ни сами будущие точки, ни их число. Таким образом, данный алгоритм позволяет присоединять точки к многограннику последовательно.

Алгоритм Черных также построен по схеме “под-над”. Хранение индексов неравенств, которые используются в алгоритме сокращенного фундаментального свертывания, соответствует частичному хранению комбинаторной структуры многогранника в виде информации о принадлежности вершин граням. Таким образом, фактически многогранник хранится в памяти в виде системы неравенств, каждое из которых соответствует гипергранице многогранника, причем при каждом неравенстве хранится информация о номерах вершин, принадлежащих соответствующей грани.

Вследствие отличного от Kallay представления многогранника, в алгоритме Черных иным оказывается и решение трех перечисленных выше основных проблем схемы. Прежде всего, вопрос видимости грани решается простой подстановкой присоединяемой точки в линейное неравенство, соответствующее этой грани.

Далее, вопрос о выборе соседних граней в выпуклой оболочке точек  $v^1, v^2, \dots, v^q$  становится центральным моментом алгоритма. Если бы при исключении переменных  $\lambda$  из системы (2.4) применялся алгоритм Фурье, то это привело бы к комбинированию всех пар неравенств, соответствующих одной видимой и одной невидимой граням (без учета соседства). Понятно, что в этом случае число несущественных неравенств в описании многогранника росло бы катастрофически, а алгоритм не соответствовал бы схеме “под-над”. Использование сокращенного фундаментального свертывания приводит к тому, что комбинируются именно такие пары неравенств, которые соответствуют соседним граням, т.е. комбинирование происходит в соответствии со схемой “под-над”.

Вопрос о преобразовании представления многогранника в алгоритме Черных решается достаточно просто: преобразование индексов не представляет труда, а коэффициенты неравенства, соответствующего новой грани, находятся сложением двух неравенств, описывающих две соседние грани, с положительными весами.

Теоретический порядок временной сложности алгоритма Черных выше, чем в чисто комбинаторном алгоритме Kallay, поскольку для идентификации соседства приходится перебирать все возможные пары видимых и невидимых граней. В рамках метода МДЦ, однако, время его работы оказывается вполне удовлетворительным, так как само выяснение соседства происходит на основе небольшого числа быстро выполняемых операций, а метод МДЦ обычно не требует доводить процесс решения до той стадии, на которой время выполнения этой части алгоритма начинает доминировать. В случае небольших значений  $m$  (до 7-8) алгоритм Черных

позволяет строить выпуклые оболочки множеств, состоящих из нескольких сотен точек даже на персональных ЭВМ.

Как было сказано, алгоритм Бушенкова также построен на основе идей, составляющих схему “под-над”. В нем при присоединении каждой точки для построения новых граней сначала отбираются вершины  $V = \{v^1, v^2, \dots, v^r\}$ , лежащие на границе видимой и невидимой частей многогранника. Поскольку в исходном варианте этого алгоритма не предполагалось хранить комбинаторную структуру многогранника, то такая совокупность вершин определялась путем непосредственной подстановки всех вершин многогранника во все неравенства системы. Затем грани конуса строились на основе исключения вспомогательных переменных  $\lambda$  из системы равенств и неравенств, определяющих этот конус

$$y - p^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i (v^i - p^*), \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.5)$$

при помощи алгоритма сокращенного фундаментального свертывания.

Сравним алгоритмы Бушенкова и Черных. Во-первых, алгоритм Черных имеет более простую структуру и требует меньше времени и памяти, поскольку в алгоритме Бушенкова для присоединения к оболочке одной вершины приходится исключать из вспомогательной системы (2.5) целый набор величин  $\lambda_i$ , число которых равно числу вершин, принадлежащих видимым граням.

Во-вторых, алгоритм Черных является более надежным, поскольку для него разработана методика контроля погрешности, возникающей из-за наличия ошибок округления. При исследовании этого вопроса оказалось удобным воспользоваться классическими понятиями комбинаторной топологии и рассмотреть совокупность граней многогранника как цикл абстрактного симплициального комплекса. Благодаря этому удалось легко обосновать корректность простейшей апостериорной оценки погрешности построения выпуклой оболочки, которая получается путем подстановки всех вершин выпуклой оболочки во все неравенства полученной системы, приближенно описывающей эту выпуклую оболочку. Заметим, что для контроля погрешности следует хранить в памяти координаты вершин выпуклой оболочки (для работы основной части алгоритма Черных, в отличие от алгоритма Бушенкова, этого не требуется).

В то же время, в алгоритме Бушенкова не требуется проверять соседство всех пар, составленных из видимой и невидимой граней. По существу, в алгоритме Бушенкова при присоединении очередной вершины рассматривается не многогранник в целом, а лишь его видимая часть и те грани невидимой части, которые примыкают к ней. Благодаря этому происходит разбиение задачи построения оболочки системы точек на последовательность локальных подзадач, при решении каждой из которых не требуется рассматривать текущий многогранник в целом. С одной стороны, это свойство алгоритма Бушенкова может стать важным, когда число граней окажется велико. С другой стороны, именно это разбиение



значительно затрудняет поддержание правильной комбинаторной структуры многогранника, что крайне необходимо для контроля погрешности при наличии ошибок округления.

**О предварительных оценках граней.** Еще одним достоинством алгоритма Черных является то, что он позволяет создать эффективный алгоритм класса  $A^0$ , в котором почти без дополнительных затрат можно оценить сверху величины

$$g_C(u) - g_{P^{k+1}}(u) \quad (2.6)$$

для нормалей вновь образовавшихся граней  $u \in U(P^{k+1}) \setminus U(P^k)$ .

Идея предварительного оценивания величин (2.6) для таких нормалей была впервые предложена и реализована Каменевым, однако при использовании алгоритма Черных она приобретает особенно изящную форму. Пусть новое неравенство получено путем линейного комбинирования неравенств

$$\langle c_i, y \rangle \leq d_i \text{ и } \langle c_j, y \rangle \leq d_j$$

с положительными весами  $\Delta_i$  и  $\Delta_j$ , и таким образом имеет вид

$$\langle \Delta_i c_i + \Delta_j c_j, y \rangle \leq \Delta_i d_i + \Delta_j d_j.$$

И пусть известны (например, в результате непосредственного решения задачи нахождения значения опорной функции) величины  $e_i$  и  $e_j$  такие, что все точки аппроксимируемого множества удовлетворяют неравенствам

$$\langle c_i, y \rangle \leq d_i + e_i \text{ и } \langle c_j, y \rangle \leq d_j + e_j.$$

Очевидно, что тогда все точки аппроксимируемого множества удовлетворяют также и неравенству, являющемуся следствием этих двух неравенств

$$\langle \Delta_i c_i + \Delta_j c_j, y \rangle \leq \Delta_i d_i + \Delta_j d_j + (\Delta_i e_i + \Delta_j e_j). \quad (2.7)$$

Это означает, что величина  $\Delta_i e_i + \Delta_j e_j$  является оценкой сверху величины (2.6) для  $\Delta_i c_i + \Delta_j c_j$  (т.е. для нормали вновь полученного неравенства).

Наличие оценок (2.7) часто позволяет не решать трудоемкую задачу непосредственного расчета опорной функции аппроксимируемого множества для части из вновь получаемых неравенств. Опыт показал, что в среднем доля неравенств, для которых все же требуется непосредственно вычислять опорную функцию, уменьшается с ростом размерности  $m$  и числа вершин многогранника. Так, при  $m = 3$  эта доля обычно составляет около 80%, а при  $m = 6$  – только около 25%. Описанная идея предварительного оценивания показывает, что хотя шаги схемы восполнения независимы, между ними можно установить полезную информационную связь.

**Метод сближающихся многогранников.** Вернемся к затронутому в начале параграфа вопросу об алгоритмах, оптимальных по порядку числа

расчетов опорной функции аппроксимируемого тела. Ясно, что такие алгоритмы крайне важны в задачах большой размерности (порядка сотен или тысяч). Алгоритм сближающихся многогранников (СМ) обладает таким свойством. Пусть аппроксимируется некоторое в.к.т.  $C$ .

АЛГОРИТМ СМ.

Пусть  $P^k \in P(C)$  и  $Q^k \in Q(C)$ <sup>40</sup>. Тогда  $(k+1)$ -я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1: находим  $u^* \in U(P^k)$ , на котором достигается

$$\max \{ (g_{Q^k}(u) - g_{P^k}(u)) : u \in U(P^k) \},$$

в качестве  $u^*$  берем такую точку  $\partial C$ , что

$$\langle u^*, y^* \rangle = g_C(u^*).$$

Шаг 2: а) находим  $U(P^{k+1})$  для  $P^{k+1} = \text{conv} \{ y^*, P^k \}$  на основе построения  $\text{conv} \{ y^*, P^k \}$  в виде множества решений системы линейных неравенств;

б) положим

$$Q^{k+1} = Q^k \cap \{ y \in \mathbf{R}^m : \langle u^*, y \rangle \leq g_C(u^*) \}.$$

Обратим внимание на тот факт, что на каждой итерации решается единственная задача оптимизации на аппроксимируемом теле  $C$ : находится  $g_C(u^*) = \max \{ \langle u^*, y \rangle : y \in C \}$  и соответствующая точка  $y^*$ .

Как видно, алгоритм СМ включает в себя как схему восполнения, так и схему отсечения. Потребовав, чтобы вершины исходного многогранника  $P^0$  лежали на гипергранях  $Q^0$ , получим многогранники, также обладающие этим свойством.

Для алгоритма СМ в случае достаточно гладких тел была доказана оптимальность метода по порядку числа вершин. Оптимальность по числу вычислений опорной функции очевидна.

**Заключение.** Используемые нами алгоритмы аппроксимации выпуклых тел многогранниками являются надежным средством построения множеств достижимых целей в случае их выпуклости, ограниченности и относительно малой размерности пространства критериев. Для тех случаев, когда множества достижимых целей не являются выпуклыми, были предложены методы, рассматриваемые в следующем параграфе.

---

<sup>40</sup> Напомним, что из этого условия следует  $P^k \subset C \subset Q^k$ .

### 5.3. Аппроксимация невыпуклых множеств достижимых целей системами простых фигур

Основная трудность при аппроксимации множества  $f(X)$  в невыпуклом случае состоит в том, что отдельный выпуклый многогранник не может аппроксимировать это множество. Далее, алгоритмы аппроксимации вряд ли разумно основывать на решении задач оптимизации – эти задачи обычно являются крайне сложными в случае невыпуклого множества  $f(X)$ . Поэтому метод, описываемый здесь, базируется на идеях вариантного расчета [53]. Задавая различные варианты точек из множества  $X$ , можно получать многомерные отклики в виде точек в пространстве выбора критериев. В этом случае, однако, возникает проблема выбора точек из множества  $X$  и, в случае, когда число точек велико, проблема представления результатов расчетов.

Здесь будет описан алгоритм отбора точек в пространстве критериев, существенных с точки зрения задачи построения  $f(X)$ . Этот алгоритм основан на глобальном зондировании множества  $X$ . Результатом является набор небольшого числа точек  $f(X)$ , объединение окрестностей которых дает аппроксимацию  $f(X)$  с заданной точностью и полнотой. Изображение же такой системы окрестностей средствами современной компьютерной графики не представляет труда.

Сейчас нам не важно, как в деталях устроены отображение  $f: W \rightarrow R^m$  и множество  $X \in W$ . Потребуем лишь, чтобы множество  $f(X)$  было ограниченным. Во многих приложениях на множестве  $X$  может быть задана конечная мера  $\mu_X$ ,  $\mu_X \neq 0$ , и способ получения достаточно большого числа независимых случайных точек из  $X$ , согласованных с этой мерой (например, равномерно распределенных на  $X$ ). При достаточно общих предположениях отображение  $f$  порождает на  $f(X)$  меру  $\mu_Y$  так, что мера образа равна мере прообраза:

$$\mu_Y(C) = \mu_X(f^{-1}(C)), \quad C \subset Y. \quad (3.1)$$

Здесь под  $f^{-1}(C)$  понимается полный прообраз множества  $C$  в множестве  $X$ . Обозначим через  $d(z, q)$  расстояние между точками  $z$  и  $q$  в  $R^m$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Через  $(Q)_\varepsilon$  обозначим  $\varepsilon$ -окрестность множества  $Q$ , т.е. множество точек, отстоящих от  $Q$  на расстояние, меньшее  $\varepsilon$ . Множество  $Y'$  будем называть  $(\varepsilon, \eta)$ -аппроксимацией множества  $Y = f(X)$ , если оно удовлетворяет следующим двум требованиям:

- 1) заданной точности по отклонению в критериальном пространстве:

$$Y' \subset (Y)_\varepsilon;$$

- 2) заданной полноте по мере, индуцированной в пространстве критериев:

$$\mu_Y(Y' \cap Y) \geq \eta \mu_Y(Y), \quad 0 < \eta < 1.$$

Первое требование означает, что для любой точки  $y \in Y'$  может быть найдено допустимое решение  $x^* \in X$  такое, что  $d(y, f(x^*)) < \varepsilon$ . Второе требование означает, что в множестве  $Y'$  представлена  $\eta$ -я доля прообраза. Таким образом, первое требование означает, что множество  $Y'$  не очень размыто, а второе – что оно не очень бедно по сравнению с  $Y = f(X)$ .

Выберем из множества  $Y$  некоторое конечное число точек, обозначим их совокупность через  $T$  и назовем базой покрытия. Обозначим через  $\eta_T(s)$  вероятность попадания образа точки из  $X$  в  $s$ -окрестность  $T$ . Эта вероятность может быть определена как

$$\eta_T(s) = \mu_Y((T)_s \cap Y) / \mu_Y(Y).$$

Функцию  $\eta_T(s)$  назовем функцией полноты покрытия. При  $s > 0$  функция  $\eta_T(s)$  есть функция распределения случайной величины, равной расстоянию от образа случайной точки из  $X$  до базы покрытия  $T$ . Поэтому для получения эмпирических оценок  $\eta_T(s)$  можно использовать статистические методы, основанные на расчете  $f(x)$  для некоторого числа независимых случайных точек из  $X$ .

Пусть теперь для  $Y$  имеем некоторую базу покрытия  $T$  и известна функция  $\eta_T(s)$ . Тогда множество  $(T)_s$  есть  $(s, \eta_T(s))$ -аппроксимация  $f(X)$ . При этом величина  $1 - \eta_T(s)$  есть ошибка 1-го рода, т.е. вероятность ошибки в гипотезе о том, что из  $x \in X$  следует  $f(x) \in (T)_s$ . Таким образом, задача построения  $(\varepsilon, \eta)$ -аппроксимации  $Y = f(X)$  сводится к нахождению такого множества  $T$ , что

$$\eta_T(\varepsilon) \geq \eta. \quad (3.2)$$

Опишем один из способов получения такого множества.

Возьмем случайную точку из  $X$  и сформируем начальное множество  $T$  из образа этой точки. Далее будем повторять однотипные итерации:

- выберем  $N$  случайных независимых точек из  $X$  и найдем их образы (величина  $N$  зависит от  $\eta$  и  $\varepsilon$ );
- с помощью методов математической статистики оценим величину  $\eta_T(\varepsilon)$  и проверим условие окончания (3.2);
- если (3.2) выполнено, то закончим работу, в противном случае пополним  $T$  тем образом, который отстоит от  $T$  на наибольшее расстояние;
- перейдем к следующей итерации.

Можно показать, что при условии ограниченности  $f(X)$  и любых  $\eta < 1$  и  $\varepsilon > 0$  приведенный алгоритм позволяет за конечное число итераций найти  $T$  – базу покрытия, удовлетворяющую условию (3.2), т.е. построить  $(\varepsilon, \eta)$ -аппроксимацию  $f(X)$ . Могут быть предложены и другие алгоритмы построения  $T$ , более экономно использующие результаты вариантных расчетов. Они, однако, выходят за рамки настоящего изложения [18].

Пусть теперь построена  $(\varepsilon, \eta)$ -аппроксимация  $Y = f(X)$  в виде  $Y' = (T)_\varepsilon$ . Множество  $Y'$  имеет простое явное описание как система из  $|T|$  (где  $|\dots|$  – мощность множества) шаров радиуса  $\varepsilon$ . Часто расстояние между точками  $y^1$  и  $y^2$  характеризуется метрикой

$$\max \{ \lambda_i |x_i^1 - x_i^2| : i = 1, 2, \dots, m \},$$

где  $\lambda_i$  – некоторые положительные веса. В этом случае шары, использующиеся при аппроксимации  $f(x)$ , являются параллелепипедами со сторонами, параллельными осям координат, и множество  $(T)_\varepsilon$  может быть быстро изображено средствами компьютерной графики (в нашей книге, как можно заметить, использовался именно этот случай). Наконец, для каждой точки  $(T)_\varepsilon$  может быть найдена ближайшая к ней точка базы покрытия  $T$ , для которой легко может быть восстановлен прообраз.

#### 5.4. Об аппроксимации оболочки Эджворта–Парето множества достижимых целей

До сих пор в данной главе мы обсуждали вопросы построения (и аппроксимации) множества достижимых целей и не касались вопросов построения его ОЭП. Этот вопрос рассматривается в данном параграфе. Как увидит читатель, задачи построения ОЭП близки к задачам построения множества достижимых целей, поэтому разработка алгоритмов их построения состоит в модификации алгоритмов решения трех базовых задач, изучавшихся ранее в данной главе.

В данном параграфе будем для определенности предполагать, что в рассматриваемых многокритериальных задачах представляет интерес увеличение значений всех критериев  $y$ . Тогда критериальная точка  $y^*$  доминирует целый конус критериальных точек  $y$ , задаваемых соотношением  $y \leq y^*$ . В этом случае ОЭП представляет собой множество  $Y_p$ , выражаемое через множество достижимых целей  $Y$  следующим образом:

$$Y_p = \{y \in \mathbf{R}^m : y \leq y^*, \text{ где } y^* \in Y\}. \quad (4.1)$$

Заметим, что множество  $Y_p$  можно представить в ином, иногда более удобном виде  $Y_p = Y + (-\mathbf{R}_+^m)$ , где  $\mathbf{R}_+^m$  – неотрицательный ортант пространства  $\mathbf{R}^m$ .

**Построение ОЭП на основе свертывания систем линейных неравенств.** Рассмотрим системы, изучавшиеся в § 5.1, т.е. пространство  $W$  является линейным пространством  $\mathbf{R}^n$ , множество  $X$  является многогранником, отображение  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  является линейным. Будем предполагать, что многогранник  $X$  задан системой ограничений

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n : Hx \leq h\},$$

где  $H$  и  $h$  – заданные матрица и вектор, а линейное отображение  $f$  задано матрицей  $F$ , т.е.  $f(x) = Fx$ .

Для построения множества  $Y = f(X)$ , которое в данном случае задается как

$$f(X) = \{y \in \mathbf{R}^m: y = Fx, Hx \leq h\},$$

в явном виде

$$Q = \{y \in \mathbf{R}^m: Dy \leq d\}, \quad (4.2)$$

в § 5.1 было предложено использовать построения проекции многогранного множества

$$Z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m: y = Fx, Hx \leq h\}$$

на пространство критериев. Для построения ОЭП в том же явном виде (4.2) также используем построение проекций. Согласно (4.1), ОЭП в данном случае может быть представлена в форме

$$Y_p = \{y \in \mathbf{R}^m: y \leq Fx, Hx \leq h\},$$

поэтому для построения его явного представления (4.2) достаточно построить проекцию множества

$$Z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m: y \leq Fx, Hx \leq h\}$$

на пространство критериев. Таким образом, нет принципиальных различий между проблемами и алгоритмами построения множества достижимых целей и его ОЭП. При этом остаются в силе все замечания о достоинствах и недостатках этих методов, приведенные в § 5.1. Этот метод был предложен в [36], но не нашел широкого применения в связи с появлением методов аппроксимации выпуклых тел многогранниками.

**Построение ОЭП на основе аппроксимации выпуклых тел многогранниками.** В этом разделе рассматриваются алгоритмы, которые, как и алгоритмы аппроксимации множества достижимых целей, основываются на построении очередного аппроксимирующего многогранного множества как выпуклой оболочки предыдущего многогранного множества и некоторой дополнительной точки, рассчитанной на основе решения задач оптимизации. При этом предполагается, что множество достижимых целей для рассматриваемой системы является ограниченным и выпуклым. В рассматриваемых алгоритмах множества достижимых целей предлагается аппроксимировать с помощью ОЭП выпуклой оболочки некоторых специальным образом выбираемых точек этого множества.

Остановимся сначала на построении ОЭП выпуклой оболочки некоторого конечного множества точек  $V = \{v^1, v^2, \dots, v^s\}$ , принадлежащего  $\mathbf{R}^m$ . Выпуклая оболочка этой совокупности точек определяется как

$$\text{conv}V = \{y \in \mathbf{R}^m: y = \sum_{i=1}^s \lambda_i v^i, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s\}.$$

ОЭП выпуклой оболочки этого множества точек в случае (4.1) определяется так:

$$(\text{conv}V)_p = \{y \in \mathbf{R}^m: y \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i v^i, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s\}. \quad (4.3)$$

Заметим, что это определение отличается от определения выпуклой оболочки лишь одним знаком неравенства вместо знака равенства. В связи с этим описание алгоритма аппроксимации ОЭП в значительной степени аналогично приведенному в § 5.2 описанию алгоритма аппроксимации выпуклого тела.

ОЭП выпуклой оболочки совокупности точек  $V$  можно построить на основании ее определения, т.е. на основании системы равенств и неравенств (4.3), задающей  $(\text{conv}V)_p$  в неявном виде. Для построения ОЭП достаточно построить проекцию множества  $Z_p$  в пространстве переменных  $y$  и  $\lambda$ :

$$Z_p = \{(\lambda, y) \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^m: y \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i v^i, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s\},$$

в пространство переменных  $y \in \mathbf{R}^m$ . Это можно сделать при помощи исключения переменных  $\lambda$  из системы равенств и неравенств, задающей  $Z_p$ . Перепишем эту систему в следующем виде

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^s \lambda_i v_l^i + y_l \leq 0, & l = 1, 2, \dots, m; \\ \lambda_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, s; \\ \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \end{cases}$$

где  $v_l^j$  —  $l$ -я координата точки  $v^j \in V$ . Эта задача аналогична задаче построения  $\text{conv}V$ , и методы решения этих задач аналогичны. Переменную  $\lambda$  исключим, используя последнее равенство. Остальные переменные  $\lambda$  будем исключать с помощью метода сокращенного фундаментального свертывания.

Для установления полного соответствия между алгоритмом построения ОЭП выпуклой оболочки системы точек и алгоритмом построения их обычной выпуклой оболочки оказывается удобным перевести рассмотрение из обычного евклидова пространства в проективное пространство. В проективном пространстве исчезает разница между ограниченными многогранниками и неограниченными многогранными множествами (в частности, конусами) [52], в результате чего алгоритмы построения этих тел оказываются идентичными.

Здесь мы не будем останавливаться на этом вопросе подробно [62], заметим лишь, что алгоритм построения ОЭП полностью идентичен алгоритму построения выпуклой оболочки. Как и при построении выпуклой оболочки, здесь точки совокупности  $V$  могут поступать последовательно,

т.е. допускается, чтобы очередная точка стала известной после того, как построена ОЭП выпуклой оболочки предыдущих точек. Этим можно воспользоваться для аппроксимации ОЭП выпуклого множества достижимых целей.

Для того чтобы при построении ОЭП выпуклого множества воспользоваться алгоритмами, предназначенными для аппроксимации выпуклых компактных тел, достаточно лишь небольшой модификации: в качестве исходного множества надо взять неположительный ортант  $-\mathbf{R}_+^m$ . Далее можно использовать любой алгоритм аппроксимации выпуклых тел многогранниками. Нетрудно заметить, что в ходе работы этих алгоритмов будут формироваться только такие грани, векторы нормалей которых лежат в конусе  $\mathbf{R}_+^m$ . В результате будет уточняться описание только той части границы  $Y_p$ , которая соответствует недоминируемой границе множества  $Y$ .

**Аппроксимации ОЭП системами фигур.** Рассмотрим третью базовую задачу. Для аппроксимации ОЭП в этом случае используются системы простых фигур, каждая из которых представляет собой сумму шара и конуса ( $-\mathbf{R}_+^m$ ). Для построения систем таких фигур используются алгоритмы, почти полностью совпадающие с алгоритмами, изложенными в § 5.3. Единственным отличием является то, что к совокупности базовых точек присоединяется точка наиболее удаленная от базовых точек в направлении, принадлежащем  $\mathbf{R}_+^m$ .

Как уже говорилось в § 5.3, в вычислительных алгоритмах покрытия множеств в качестве шаров используются параллелепипеды. Поэтому при аппроксимации ОЭП в качестве аппроксимации берется сумма параллелепипеда и конуса ( $-\mathbf{R}_+^m$ ). Эта сумма представляет собой ортант, сдвинутый в недоминируемую вершину параллелепипеда. Таким образом, аппроксимация осуществляется системами сдвинутых ортантов.

## 5.5. Построение двумерных сечений МДЦ

Рассмотрим теперь второй этап метода достижимых целей – собственно визуализацию. Как уже говорилось, при этом используется точное или приближенное описание множества  $f(X)$  (или  $f(X) + (-\mathbf{R}_+^m)$ ), построенное в достаточно простой форме – либо в виде пересечения конечного числа полупространств, либо в виде объединения конечного числа кубов или конусов. Отметим заранее, что методика визуализации, описанная далее, отражает наш собственный опыт использования МДЦ в задачах принятия решений при нескольких критериях. Вообще говоря, после того, как получено явное описание множества  $f(X)$ , могут быть использованы и другие возможности современных компьютерных средств визуализации.

Как уже говорилось, основой визуализации многомерных множеств в МДЦ является двумерное сечение. Напомним его определение. Пусть  $I^0 = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $I \subset I^0$ ,  $|I| = 2$ ,  $I^* = I^0 \setminus I$ . Обозначим через  $R(I)$  подпростран-



ство переменных с номерами из  $I$ . Сечением множества  $V \subset \mathbf{R}^m$ , порожденным  $z \in R(I^*)$ , назовем множество  $\Gamma(V, z) = \{u \in R(I) : (u, z) \in V\}$ .

**Построение двумерных сечений выпуклых многогранников.**

Пусть  $G$  – выпуклый многогранник, описывающий точно или приближенно выпуклое множество  $f(x)$ . Как известно, двумерное сечение  $G$  является выпуклым многоугольником и может быть построено за время, пропорциональное  $N \ln N$ , где  $N$  – число ограничивающих  $G$  полупространств [51]. Поскольку при визуализации многомерного многогранника в МДЦ приходится иметь дело с построением на экране терминала совокупности двумерных сечений  $Q$ , число которых может достигать нескольких тысяч. Для ускорения процесса визуализации, который, как уже говорилось, осуществляется в диалоговом режиме на персональных компьютерах, был предложен эффективный алгоритм, основная идея которого состоит в том, что построение большого числа параллельных сечений многогранника разбивается на два этапа – предобработку (т.е. общую часть, которая выполняется для всех сечений только один раз) и собственно вычисление вершин сечения. Затраты времени на предобработку пропорциональны  $N \ln N$ , а время построения каждого сечения пропорционально  $N$ . Память, необходимая для работы алгоритма, пропорциональна  $N$ .

Сначала приведем математическую формулировку задачи. Пусть в  $\mathbf{R}^m$  задан многогранник как множество решений системы линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1)$$

Будем рассматривать сечения этого многогранника двумерными плоскостями, задаваемыми двумя номерами переменных  $I = \{j_1, j_2\}$  и значениями  $x_j^*$  переменных  $x_j$  с номерами, входящими в  $I^*$ . Такое сечение является многоугольником в пространстве  $\mathbf{R}^2$  переменных  $(x_{j_1}, x_{j_2})$ , который задается как множество решений системы линейных неравенств от двух переменных  $x_{j_1}, x_{j_2}$

$$\sum_{j \in I} a_{ij}x_j \leq b_i - \sum_{j \notin I} a_{ij}x_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.2)$$

Требуется вычислить вершины этого многоугольника в порядке их обхода вдоль границы. Под серией параллельных сечений понимаются сечения с одинаковыми  $I$  и различными значениями  $x_j^*, j \in I^*$ . Поскольку далее будет рассматриваться только одна серия параллельных сечений, то без ограничения общности можно считать, что  $I = \{1, 2\}$ . В этом случае (5.2) имеет вид

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j \leq b_i - \sum_{j=3}^m a_{ij}x_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.3)$$

Напомним, что каждое неравенство системы (5.3) определяет полупространство (в данном случае – полуплоскость), а коэффициенты ( $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$ ) являются координатами вектора внешней нормали к этой полуплоскости. Каждая вершина искомого многоугольника является крайней точкой множества решений одной из подсистем системы (5.3), состоящей из двух неравенств. Крайнюю точку множества решений подсистемы двух произвольных неравенств системы (5.3) будем называть узловой точкой этих двух неравенств.

Для того чтобы найти вершины многоугольника, достаточно среди неравенств системы (5.3) выделить неравенства, соответствующие сторонам этого многоугольника, расположив их в порядке обхода вдоль границы. Узловые точки соседних неравенств будут искомыми вершинами многоугольника. Такое расположение неравенств задается упорядочением внешних нормалей соответствующих им полуплоскостей по или против часовой стрелки. Поскольку предполагается строить несколько многоугольников, представляется удобным заранее расположить в таком порядке все неравенства системы (5.3) (отделив при этом неравенства, у которых оба коэффициента равны нулю). Этот порядок одинаков для всей серии параллельных сечений, поэтому такое упорядочение для всей серии выполняется только один раз и выступает в качестве предобработки. Для такого упорядочения известны алгоритмы<sup>41</sup>, имеющие порядок временной сложности  $N \ln N$ .

После завершения предобработки для построения каждого из сечений следует отобрать неравенства, существенные для описания данного сечения, т.е. соответствующие сторонам искомого многоугольника<sup>42</sup>.

Идея алгоритма состоит в последовательной обработке неравенств упорядоченной системы (5.3). Возможность последовательной обработки основана на следующем очевидном факте: если некоторые неравенства оказались зависимыми для данного подмножества неравенств исходной системы, то они будут зависимыми и для всей совокупности неравенств (5.3). В процессе обработки очередного неравенства происходит модификация набора неравенств, бывших существенными для подмножества неравенств, рассмотренного ранее. Возможно, часть из них станет зависимыми при учете нового неравенства.

---

<sup>41</sup> См., например, [22].

<sup>42</sup> Точнее говоря, необходимо исключить зависимые неравенства (см. § 5.1) из системы (5.3) при заданных  $x_j^*$ ,  $j, I^*$ .

Рассмотрим пример (см. рис. 5.1). Здесь после обработки некоторой совокупности неравенств построена ломаная с узлами A, B, C, D (порядок обхода против часовой стрелки).

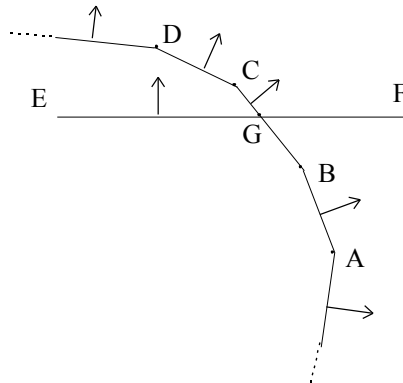


Рис. 5.1

Она состоит из трех звеньев и двух бесконечных лучей, выходящих из точек A и D. Внешние нормали соответствующих полуплоскостей также изображены на рисунке.

Пусть первое обрабатываемое неравенство задает прямую EF. Видно, что узлы D и C нарушают обрабатываемое неравенство, поэтому вся часть ломаной “выше” линии EF устраняется из ломаной. В ломаную добавляется новый узел G (образуется звено BG) и луч GE, выходящий из этой

точки.

Обратим внимание, что упорядоченная система неравенств (5.3) является циклической, т.е. за последним неравенством следует первое. После обработки всех неравенств (если сечение не пусто), для того чтобы замкнуть ломаную и получить многоугольник, следует продолжить работу алгоритма, обрабатывая отобранные неравенства в том же порядке по второму разу, пока не будет вычислена точка самопересечения ломаной<sup>43</sup>.

#### Построение двумерных сечений объединения параллелепипедов.

Двумерное сечение объединения шаров может визуализироваться либо с помощью наложения сечений отдельных шаров, либо с помощью построения контура объединения совокупности их сечений. Как уже говорилось, в качестве шаров в книге используются параллелепипеды. В этом случае двумерное сечение – объединение прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Алгоритмы построения контура таких систем предложены, например, в [51] и имеют временную сложность, пропорциональную  $N \ln N$ , где  $N$  – число прямоугольников, описывающих визуализируемое множество. Недостатком указанных алгоритмов является чрезвычайная сложность их реализации. Результаты численных экспериментов с ними отсутствуют.

Можно предложить сравнительно простой алгоритм построения контура двумерного сечения объединения прямоугольников с временной сложностью, пропорциональной  $N^2$ . Алгоритм основан на методе заметания: контур строится по мере продвижения заметающей прямой, распо-

<sup>43</sup> Подробнее см. [68], где также показано, что благодаря предварительному упорядочению системы (5.3) число операций, осуществляемых при построении многоугольника, пропорционально числу неравенств  $N$ .

ложенной вдоль одной из осей координат. Поясним основную идею алгоритма<sup>44</sup>.

Пусть имеется набор прямоугольников, изображенный на рис. 5.2. На этом рисунке  $W$  – заметающая прямая в ее начальном положении ( до обработки каких-либо событий ). Направление заметания – вверх, т.е. в сторону возрастания ординаты  $Y$ . Следующий рис. 5.3 иллюстрирует организацию информации о прямоугольниках, отслеживаемую в процессе перемещения заметающей прямой.

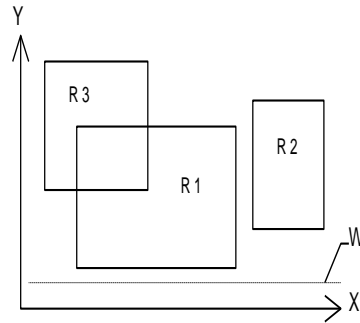


Рис. 5.2

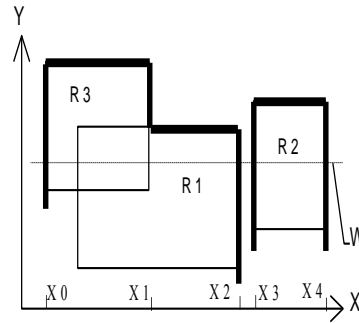


Рис. 5.3

Поддерживается структура, описывающая верхнюю и нижнюю границы контура объединения прямоугольников, пересекающих линию заметания (на рисунке верхняя граница показана жирными линиями). Она хранится в виде упорядоченного набора интервалов оси абсцисс:  $(-\infty, X_0)$ ,  $(X_0, X_1)$ ,  $(X_1, X_2)$ ,  $(X_2, X_3)$ ,  $(X_3, X_4)$ ,  $(X_4, +\infty)$ ; для каждого интервала хранится значение ординаты  $Y$ . Для интервалов, лежащих вне пересечения линии заметания с прямоугольниками ( на рис. 5.3 – интервалы  $(-\infty, X_0)$ ,  $(X_2, X_3)$ ,  $(X_4, +\infty)$ ), принимаем  $Y = -\infty$ .

Изменения в эту структуру данных вносятся в следующих случаях:

- когда  $Y_{\text{заметания}}$  совпадает с нижней стороной какого-либо прямоугольника (событие “вхождение нового прямоугольника в сечение”);
- когда  $Y_{\text{заметания}}$  совпадает с  $Y$  какого-либо интервала (событие “завершение интервала”).

Интересно, что для описываемого алгоритма вычислительные эксперименты с различными случайными распределениями координат прямоугольников дают близкую к линейной зависимость времени выполнения от числа прямоугольников (рассматривались множества, описываемые десятками тысяч прямоугольников).

<sup>44</sup> Подробнее см. [20].

Подход, описанный в этом разделе, дает возможность производить операции с изображениями, что не удается в случае простого наложения сечений шаров.

**Построение двумерных сечений ОЭП.** Как уже говорилось, ОЭП в случае невыпуклых множеств аппроксимируется в книге объединением сдвинутых ортантов. Сечение такой системы представляет собой монотонную убывающую или возрастающую ломаную, состоящую из звеньев, параллельных осям координат. Это свойство позволяет построить простой алгоритм, аналогичный алгоритму построения вершин выпуклого многоугольника, предназначенный для визуализации большого числа сечений ОЭП. В этом алгоритме используется предобработка в виде упорядочивания абсцисс системы ортантов и построение вершин ломаной за время, пропорциональное числу ортантов в системе.

## 5.6. О построении множеств достижимых целей для динамических моделей

Во введении к данной главе указывалось, что МДЦ применим для анализа моделей достаточно произвольной природы. Математически говоря, это выражалось в том, что мы не указывали конкретное пространство  $W$  рассматриваемых решений (стратегий). На практике, конечно, приходится ограничиваться тем или иным классом пространств  $W$ , множеств  $X$  и отображений  $f: W \rightarrow R^m$ , для которых удается разработать алгоритмы аппроксимации и визуализации множеств  $f(X)$ . Так, были рассмотрены три базовые задачи, методы аппроксимации  $f(X)$  для которых изложены в §§ 5.1-5.3. В данном параграфе показывается, что к базовым задачам сводятся задачи построения множеств достижимых целей для динамических моделей, описываемых дифференциальными включениями (или системами управляемых дифференциальных уравнений).

**Основные понятия.** Напомним некоторые понятия теории динамических систем<sup>45</sup>. Рассматриваются системы типа

$$\dot{x} = g(x, u, t), \quad (5.1)$$

где  $t$  – время,  $x$  –  $n$ -мерный вектор фазовых координат,  $u$  –  $r$ -мерный вектор управляющих воздействий,  $g(x, u, t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция, определенная при  $t \in [0, T]$  и всех  $u \in R^r, x \in R^n$ . На вектор управлений и вектор фазовых координат в каждый момент времени  $t \in [0, T]$  наложено ограничение

$$(u(t), x(t)) \in Y(t), \quad (5.2)$$

---

<sup>45</sup> См., например, [26, 49, 57].

где  $Y(t) \subset \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^n$  – заданное семейство множеств, зависящих от времени. Кроме того, задано множество  $\Gamma(0) \subset \mathbf{R}^n$  исходных состояний системы

$$x(0) \in \Gamma(0). \quad (5.3)$$

Пусть определены классы, к которым принадлежат вектор-функции  $u(\cdot)$  и  $x(\cdot)$ . Например,  $u(\cdot) \in L_\infty^r[0, T]$ , где  $L_\infty([0, T])$  – линейное пространство измеримых, почти всюду ограниченных на  $[0, T]$  функций с максимальной нормой, а  $x(\cdot) \in L_\infty^n([0, T])$ , где  $L_\infty([0, T])$  – линейное пространство абсолютно непрерывных функций на  $[0, T]$  с максимальной нормой. Положим  $W = L_\infty^r[0, T] \times L_\infty^n[0, T]$  и пусть задано отображение

$$f: L_\infty^r[0, T] \times L_\infty^n[0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m,$$

ставящее в соответствие паре  $(u(\cdot), x(\cdot))$  некоторую совокупность значений  $m$  критериев. Обозначим через  $X$  совокупность пар  $(u(\cdot), x(\cdot)) \in L_\infty^r[0, T] \times L_\infty^n[0, T]$ , удовлетворяющих (5.1)-(5.3). Тогда множество достижимых целей для рассматриваемой системы задается в обычной форме  $f(X)$ .

Существует альтернативное, зачастую более удобное описание динамических систем – описание в виде дифференциальных включений. Пусть

$$\dot{x} \in G(x, t), \quad (5.4)$$

где  $G(x, t) \subset \mathbf{R}^n$  – семейство множеств, заданное при  $t \in [0, T]$  и всех  $x \in \mathbf{R}^n$ . Ясно, что система (5.1), (5.2) приводится к виду (5.4). С другой стороны, положив  $v \equiv \dot{x}$  получаем систему

$$\dot{x} = v, \quad v \in G(x, t),$$

аналогичную (5.1), (5.2). Таким образом, для системы (5.4), (5.3) можно ввести понятие множества достижимых целей аналогично системе (5.1)–(5.3). Заметим, что динамическую систему удобно задавать в виде (5.4) вместо (5.1), (5.2) в том случае, когда представляет интерес лишь траектория  $x(\cdot)$ , например, если отображение  $f(u(\cdot), x(\cdot))$  имеет частный вид  $f(x(\cdot))$ .

Рассмотрим один важнейший частный случай  $f(x(\cdot))$ : критерии – это концы траекторий  $x(\cdot)$ , т.е. векторы  $x(T)$ . Множество достижимых векторов  $x(T)$  принято называть множеством достижимости динамической системы (5.1)-(5.3) (или (5.4),(5.3)) и обозначать  $\Gamma(T)$ . Это множество также может быть точно или приближенно построено и изображено на дисплее.

Другой пример – это случай терминальных критериев, т.е. критериев, рассчитываемых на основе значений  $x(T)$ :

$$f(x(\cdot)) = \tilde{f}(x(T)).$$

Возможно также рассмотреть и более сложные критерии, определяемые на траекториях, например, зависящие от состояния системы в конеч-

ном числе моментов времени или представляющие собой интегралы от траекторий. Все они могут быть сведены к виду  $f(x(\cdot)) = \tilde{f}(x(T))$ . Подчеркнем, что зависимость только от траекторий – хотя и важный, но только частный случай критериев.

Далее будут рассмотрены лишь терминальные критерии. В этом случае важную роль играет аппроксимация множеств  $\Gamma(T)$ .

**Об аппроксимации множеств достижимости для выпуклых систем.** Рассмотрим дифференциальное включение (5.4). Заметим, что если заменить множество  $G(x, t)$  в (5.4) на его выпуклую оболочку, т.е.  $\text{conv } G(x, t)$ , то при выполнении некоторых простых условий (см. [1]) множество достижимости не изменится. При каждом  $t \in [0, T]$  рассмотрим  $Z(t) \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  – график многозначного отображения, действующего из  $\mathbf{R}^n$  в  $\mathbf{R}^n$  и заданного множеством  $\text{conv } G(x, t)$ , т.е.

$$Z(t) = \{ (v, x) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : v \in G(x, t), x \in \mathbf{R}^n \}.$$

Тогда (5.4) можно записать в эквивалентном виде

$$\dot{x} \in v, (v, x) \in Z(t). \quad (5.5)$$

Систему (5.1), (5.2) или (5.4) будем называть выпуклой, если она сводится к виду (5.5) с выпуклыми множествами  $Z(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Заметим, что частным случаем выпуклых систем являются системы (5.1), (5.2) с линейным дифференциальным уравнением, т.е.

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + a(t),$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $a(t)$  – матрицы и вектор, заданные при  $t \in [0, T]$ , и с выпуклыми множествами  $Y(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Кроме того, к выпуклым относятся и другие системы<sup>46</sup>.

Обратимся к вопросу об аппроксимации множества  $\Gamma(T)$  для выпуклых систем с выпуклыми  $\Gamma(0)$ . Очевидно, что для них множество  $\Gamma(T)$  выпукло. Поэтому проблему аппроксимации можно решить либо на основе использования методов свертывания систем линейных неравенств<sup>47</sup>, либо на основе методов аппроксимации выпуклых тел многогранниками.

**Аппроксимация множеств достижимости на основе методов свертывания.** Разобьем отрезок  $[0, T]$  на  $N$  равных частей точками  $t_i = i\tau$ , где  $\tau = T/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Вместо системы (5.5) рассмотрим, например, систему

<sup>46</sup> Примеры приведены в [23]. В частности, при выполнении некоторых простых условий к ним относятся системы (5.1), (5.2) с дифференциальным уравнением  $\dot{x} = \varphi(x)\psi(u)$  с вогнутыми  $\varphi(x)$ .

<sup>47</sup> Построение множеств достижимости для линейных систем с выпуклыми ограничениями на основе использования методов свертывания было предложено и изучено в работах [29, 31, 33].

$$\frac{x^{i+1} - x^i}{\tau} = v^i, \quad (v^i, x^i) \in Z^\Delta(t_i), \quad x^0 \in \Gamma^\Delta(0), \quad (5.6)$$

где  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $Z^\Delta(t_i)$  – многогранное множество, аппроксимирующее  $Z(t_i)$  с точностью  $\Delta$ ,  $\Gamma^\Delta(0)$  – многогранное множество, аппроксимирующее  $\Gamma(0)$  с точностью  $\Delta$ . Заметим, что, вообще говоря, здесь не предполагается ограниченность множеств  $Z(t)$  и  $\Gamma(0)$ , поэтому мы требуем заранее, чтобы эти множества можно было аппроксимировать многогранными множествами, не обязательно ограниченными, с любой степенью точности.

В качестве аппроксимации<sup>48</sup> множества достижимости  $\Gamma(T)$  предлагается брать множество  $\Gamma_N$ , представляющее собой множество достижимых векторов  $x^N$  для системы (5.6).

Рассмотрим сначала метод построения  $\Gamma_N$  – непосредственное сведение к первой базовой задаче. Если многогранные множества  $\Gamma^\Delta(0)$  и  $Z(t_i)$  заданы как множества решений системы линейных неравенств, и положив  $y = x^N$ , мы приходим к первой базовой задаче, в которой решения – это векторы

$$(x^0, x^1, \dots, x^N, v^0, v^1, \dots, v^{N-1}) \in \mathbf{R}^{(N+1)n} \times \mathbf{R}^{Nr},$$

удовлетворяющие соотношениям (5.6), а критерии – это векторы  $y \in \mathbf{R}^n$ . В § 5.1 указывалось, что, вообще говоря, методы свертывания позволяют строить множества достижимых значений критериев для не слишком большого числа переменных.

В данном случае число переменных равно  $(N + 1)n + Nr$ , т.е. является довольно большим. Тем не менее, множество  $\Gamma_N$  часто удается построить за счет специфики системы (5.6), представляющей собой разностную аппроксимацию дифференциального включения (5.4).

Рассмотрим теперь пошаговый метод построения  $\Gamma_N$ . В этом методе вводится понятие множества достижимости на отдельном шаге. Например,  $\Gamma_1$  – это множество векторов  $x^1$ , удовлетворяющих (5.6) для  $i = 0$ , т.е. векторов  $x^1$ , для которых найдутся такие  $x^0$  и  $v^0$ , что

$$\frac{x^1 - x^0}{\tau} = v^0, \quad (v^0, x^0) \in Z^\Delta(0), \quad x^0 \in \Gamma^\Delta(0).$$

В свою очередь,  $\Gamma_2$  – это множество векторов  $x^2$ , для которых найдутся такие  $x^0, x^1, v^0, v^1$ , что

---

<sup>48</sup> Вопрос об условиях аппроксимации  $\Gamma(T)$  множествами  $\Gamma_N$  при стремлении  $N$  к бесконечности и  $\Delta$  к нулю рассматривается в [34, 41].



$$\frac{x^2 - x^1}{\tau} = v^1, \quad \frac{x^1 - x^0}{\tau} = v^0, \\ (v^1, x^1) \in Z^\Delta(t_1), \quad (v^0, x^0) \in Z^\Delta(t_0), \quad x^0 \in \Gamma^\Delta(0).$$

Множества  $\Gamma_3, \Gamma_4, \dots, \Gamma_i, \dots, \Gamma_{N-1}$  определяются аналогичным образом.

Заметим, что при определении множества  $\Gamma_2$  мы можем не рассматривать задачу с самого начала, а определить его как множество  $x^2$ , для которых найдутся такие  $x^1$  и  $v^1$ , что

$$\frac{x^2 - x^1}{\tau} = v^1, \quad (v^1, x^1) \in Z^\Delta(t_1), \quad x^1 \in \Gamma_1.$$

Аналогичным образом, множество достижимых состояний на  $(i+1)$ -шаге  $\Gamma_{i+1}$  можно определить как множество  $x^{i+1}$ , для которых найдутся такие  $x^i$  и  $v^i$ , что

$$\frac{x^{i+1} - x^i}{\tau} = v^i, \quad (v^i, x^i) \in Z^\Delta(t_i), \quad x^i \in \Gamma_i.$$

Поэтому, если множество  $\Gamma_i$  уже построено в виде множества решений системы линейных неравенств, то нахождение множества  $\Gamma_{i+1}$  – это первая базовая задача. Таким образом, множество  $\Gamma_{i+1}$  может быть найдено с помощью методов свертывания. Поскольку исходное множество  $\Gamma(0)$  аппроксимировано многогранным множеством  $\Gamma^\Delta(0)$ , заданным в виде множества решений системы линейных неравенств, то построение можно осуществить по шагам, последовательно находя  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ . При этом на каждом шаге с помощью свертывания требуется исключить только  $r$  переменных вектора  $v^i$  (вектор  $x^i$  исключается с помощью равенств). Число таких шагов равно  $N$ .

Использование пошаговой процедуры связано со следующими преимуществами:

- 1) попутно строятся промежуточные множества, которые могут представлять самостоятельный интерес;
- 2) можно использовать человеко-машинные процедуры упрощения описания промежуточных множеств, что может позволить построить множества  $\Gamma_N$  для более широкого класса систем, чем в прямом методе.

Промежуточным между прямым и пошаговым методом является метод крупных шагов, в котором заранее выбираются нужное число номеров шагов  $i$ , для которых будут построены множества  $\Gamma_i$ . Он обладает всеми преимуществами пошагового метода, но в то же время не имеет его недостатка – не требует построения всех множеств  $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots, N$ , число

которых может оказаться слишком большим. Различные методы аппроксимации множеств достижимости с помощью методов свертывания были реализованы в диалоговой системе (см. [9]).

**Аппроксимация множеств достижимости на основе методов аппроксимации в.к.т. многогранниками.** В том случае, когда методы свертывания не позволяют построить множество  $G_N$  в силу слишком большой сложности задачи, можно использовать методы аппроксимации, описанные в § 5.2. При этом требуется, чтобы множество  $L(T)$  было ограниченным и телесным.

Один из подходов в рамках базовой задачи состоит в аппроксимации множества  $G_N$  для линейной системы (5.6). Эта задача рассмотрена в § 5.2.

Другой подход состоит в использовании исходной, дифференциальной формы описания динамической системы. Дело в том, что в методах аппроксимации в.к.т. многогранниками требуется решать вспомогательные задачи оптимизации, а для некоторых из динамических систем это удастся сделать в исходном виде, обычно с помощью использования принципа максимума Понтрягина [49]. В частности, задачи оптимизации можно решить для систем (5.1)-(5.3) с линейным дифференциальным уравнением и ограничениями на управление, не зависящими от фазового состояния.

Заметим, что метод аппроксимации позволяет также строить промежуточные множества достижимости в заданные моменты времени (или на каждом шагу).

**Об аппроксимации множеств достижимых целей для выпуклых динамических систем.** Пусть множество достижимости  $L(T)$  аппроксимировано многогранным множеством  $G^A$ , где  $G^A$  — это  $G_N$  или иная аппроксимация  $L(T)$ , заданная в виде множества решений системы линейных неравенств. Множество  $G^A$  может быть использовано при решении задачи аппроксимации множества  $f(L(T))$  достижимых целей для терминальных критериев.

Если отображение  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  — линейное, то эта задача решается с помощью методов свертывания или на основе использования методов § 5.2 (при этом  $G^A$  должно быть ограничено). Выбор метода зависит от сложности описания  $G^A$  и от числа критериев  $m$ .

Заметим, что для линейного отображения  $f$  задача с самого начала могла бы быть сформулирована как построение (или аппроксимация) множества достижимых целей в пространстве терминальных критериев для системы (5.6) без промежуточного построения множества  $G_N$ . Такой подход может оказаться неразумным, если, например, множество достижимости  $L(T)$  аппроксимируется без замены дифференциального включения (5.4) его разностным аналогом.

Рассмотрим теперь терминальные критерии, задаваемые нелинейным отображением  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ . Будем по-прежнему изучать выпуклые динамические системы. В отличие от случая линейных критериев, здесь предварительная аппроксимация множества  $\Gamma(T)$  многогранным множеством  $\Gamma^A$  является необходимой.

Как было сказано в § 5.3, методы аппроксимации невыпуклых множеств достижимых целей системами шаров являются достаточно эффективными при малой размерности пространства переменных. В данном случае, при предварительной аппроксимации множества  $\Gamma(T)$  многогранным множеством  $\Gamma^A$ , задача оказывается сведена к проблеме аппроксимации  $f(\Gamma^A)$ , где  $\Gamma^A \subset \mathbf{R}^n$ . Поскольку размерность пространства состояний обычно не слишком велика, методы покрытия невыпуклых множеств оказываются применимыми.

**Случай невыпуклых динамических систем.** Если динамические системы не удовлетворяют условию выпуклости, то описанные выше методы можно использовать для построения некоторого множества, содержащего  $\Gamma(T)$ . Это достигается<sup>49</sup> за счет использования выпуклой оболочки множества  $Z(t)$ , после чего можно построить множество, содержащее  $f(\Gamma(T))$ .

Ясно, что для аппроксимации множества достижимых целей в случае терминальных критериев и невыпуклых динамических систем можно использовать покрытие системами шаров. При этом пространство  $L_\infty^r[0, T]$  возможных управлений  $u(\cdot)$  требуется параметризовать небольшим числом параметров, например, считать, что

$$u(t) = \sum_{s=1}^S \alpha_s u^{(s)}(t),$$

где  $\alpha_s$  – неопределенные параметры, а  $u^{(s)}(t)$  – заданная система функций  $s = 1, 2, \dots, S$ . Если это отвечает смыслу задачи, то множество  $f(\Gamma(T))$  может быть аппроксимировано достаточно точно. Для этого можно использовать методику, описанную в § 4.3, без каких-либо дополнений. В частности, в экономических задачах, рассмотренных в §§ 3.4 и 3.5, именно такая методика использовалась для анализа динамических систем.

**Замечание.** До сих пор мы рассматривали вопрос о построении множеств достижимых целей для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями (5.1) и дифференциальными включениями (5.4). Ясно, что рассмотренные методы применимы и для разностных (многшаговых) уравнений, в которых состояние меняется от шага к шагу.

**Заключение.** Методы, рассмотренные в данном параграфе, позволяют строить множества достижимых целей для динамических систем, опи-

<sup>49</sup> Подробнее этот вопрос рассмотрен в [23].

сываемых обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями. Это лишь один из примеров применения МДЦ в случае бесконечномерных пространств решений  $W$ . Могут быть рассмотрены и более общие системы, например, включающие уравнения в частных производных или интегральные уравнения<sup>50</sup>.

---

<sup>50</sup> Вопросы аппроксимации множества достижимых целей в таких случаях рассмотрены в [35].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### На пороге XXI века

В начале 80-х годов, на одном из семинаров, проходивших в Вычислительном центре АН СССР и посвященном методу достижимых целей, руководитель семинара профессор Ю.Г.Евтушенко<sup>51</sup> отметил, что МДЦ – это метод XXI века, именно тогда можно ожидать его широкое распространение. Это утверждение оказалось пророческим. Действительно, к настоящему времени компьютерные технологии достигли такого уровня, что вопрос о компьютерных средствах поддержки принятия решений, переговоров и дискуссий на их основе превратился из чисто теоретической проблемы в практическую (и даже коммерческую) задачу. Появилась необходимость использовать новые методы, пригодные для реализации в компьютерных сетях.

В гл. 4 было описано сочетание ОИАЦ с компьютерными сетями на основе использования МДЦ для предоставления независимой информации о стратегиях решения экономических и экологических проблем. Возможно, такое использование МДЦ станет основой новых электронных средств массовой информации, отличающихся от обычных тем, что от читателя требуется активное участие в процессе усвоения информации (активные средства массовой информации).

Уже сейчас часть из газет и журналов распространяется и в электронном виде в сети ИНТЕРНЕТ. Ясно, что после всеобщей "интернетизации" наиболее читаемые журналы будут вынуждены перейти на электронную форму, которая имеет специфическое воздействие на читателя. Если в традиционном печатном издании даже не очень интересная статья привлекает внимание, поскольку текст перед глазами и не просто удержаться, чтобы не бросить на него взгляд, в электронном журнале каждую статью надо предварительно вызвать на экран. Это коренным образом меняет дело – будут читаться только те материалы, которые необходимы или привлекают внимание<sup>52</sup>. По этой причине потребность формирования заинтересованности у потенциального читателя становится куда более острой, чем ранее.

---

<sup>51</sup> Ныне член-корреспондент РАН, директор ВЦ РАН.

<sup>52</sup> Пользователи системы телетекст легко согласятся с этим – они имеют доступ к огромному объему информации, которую вызывают, однако, лишь по мере надобности.

Один из способов привлечения внимания потенциального потребителя – его активное вовлечение в процесс анализа информации<sup>53</sup>. Эта идея не нова – компьютерные средства обучения, включающие те или иные активные действия обучаемого, являются наиболее эффективными. Ясно, что активные формы должны получить распространение и в электронной прессе. Какими могут быть эти средства?

Мы уже говорили о средствах мультимедиа, в рамках которых человек сам выбирает форму представления информации, и о виртуальной реальности, в рамках которой он активно взаимодействует с виртуальным миром. Рассмотрим, для определенности, экологическую проблему качества воды в некотором водоеме. Автор статьи о стратегиях решения рассматриваемой проблемы может заранее подготовить материалы, демонстрирующие преимущества поддерживаемой автором стратегии, с помощью средств ММ и ВР и предложить читателю электронного журнала использовать эти средства для усвоения мнения автора.

Представляется, что такая электронная журналистика может оказаться достаточно эффективным средством привлечения внимания потенциального читателя, его информирования и убеждения. Все же, у читателя может возникнуть вопрос – следует ли тратить столько сил и времени (а использование ММ и ВР требует существенных затрат времени!) на изучение мнения некоторого журналиста (или даже специалиста, решившегося изложить свою точку зрения в электронной прессе)? Этот вопрос неизбежно возникнет тогда, когда средства ММ и ВР потеряют свою новизну, и значительная часть электронных журналов станет пользоваться ими. Далее, так ли уж велика активность человека в ММ и ВР, если ему приходится изучать (пусть и активно) стратегию, заранее отобранную для него автором статьи? По-настоящему активной деятельность читателя может стать тогда, когда ему будет предоставлена возможность не только подробно рассмотреть некоторую стратегию, но и предложить эту стратегию самостоятельно, исходя из своих интересов и представлений о справедливости. МДЦ является подходящим средством для осуществления этой идеи. Таким образом, сочетание ОИАЦ, использующих МДЦ, с возможностями сети ИНТЕРНЕТ позволяет создать общедоступное компьютерное средство активного анализа информации по важным экономическим или экологическим проблемам, которое может быть включено в электронную прессу, например, в виде приложений к электронным журналам.

Подводя итог, можно утверждать, что сочетание МДЦ с возможностями сети ИНТЕРНЕТ может рассматриваться как новая форма независимых активных средств массовой информации, которые обеспечивают право каждого гражданина на получение независимой информации об

---

53 Недаром редакторы многих газет и журналов для повышения тиража публикуют кроссворды – активную форму чтения. Для многих читателей наличие кроссворда – решающий фактор при выборе издания

экономических и экологических стратегиях. Более того, такие средства, несомненно, создадут новую ситуацию в области переговоров о компромиссных решениях экономических и экологических проблем. Возможно, они станут прообразом активных средств массовой информации в новом информационном обществе XXI века.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. Тр.МИАН СССР. М.: Наука, 1985.
2. *Бушенков В.А.* Численный алгоритм построения проекций много-гранных множеств // Аэрофизика и прикл. математика. М.: МФТИ, 1981.
3. *Бушенков В.А.* Итерационный метод построения ортогональных проекций выпуклых многогранных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т.25. N 9.
4. *Бушенков В.А., Гусев Д.И., Каменев Г.К., Лотов А.В., Черных О.Л.* Визуализация множества Парето в многомерной задаче выбора // Доклады Академии наук. 1994. Т.335. N 5.
5. *Бушенков В.А., Каменев Г.К., Лотов А.В., Черных О.Л.* Использование геометрического метода для анализа эколого-экономических систем // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. Н.Н.Моисеева, А.А.Петрова и А.А.Самарского. М.: Наука, 1986.
6. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Алгоритм анализа независимости неравенств линейной системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т.20. N 3.
7. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т.20. N 5.
8. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Анализ потенциальных возможностей региона в межрегиональной межотраслевой модели мировой экономики // Межрегиональные межотраслевые модели мировой экономики. М.: Наука, 1983.
9. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Пакет прикладных программ "Потенциал" // Пакеты прикладных программ. Системное наполнение. (Алгоритмы и алгоритмические языки). М.: Наука, 1984.
10. *Гереш П.А.* и др. Оценка параметров газовой залежи с помощью обобщенной динамической модели. М.: ВЦ РАН, 1994.
11. *Гермейер Ю.Б.* Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
12. *Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N 6.
13. *Емельянов С.В., Ларичев О.И.* Многокритериальные методы принятия решений. М.: Знание, 1985.
14. *Каменев Г.К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N 1.



15. *Каменев Г.К.* Об эффективности хаусдорфовых алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т.33. N 5.
16. *Каменев Г.К.* Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34. N 4.
17. *Каменев Г.К.* Алгоритм сближающихся многогранников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. N 4.
18. *Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л.* Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Математическое моделирование. 1992. N 3.
19. *Каменев Г.К., Кокорев М.А., Кондратьев О.Л.* Алгоритмы распределения памяти для системы реального времени на ПК IBM PC. М.: ВЦ РАН, 1993.
20. *Каменев Г.К., Чернов А.В.* Алгоритм построения контура объединения изотетичных прямоугольников // Исследование операций. М.: ВЦ РАН, 1996.
21. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
22. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Т.3. Сортировка и поиск. М.: Мир, 1978.
23. *Кондратьев Д.Л., Лотов А.В.* О внешних оценках и построении множеств достижимости для нелинейных управляемых систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т.30. N 4.
24. *Краснощечков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: изд. МГУ, 1983.
25. *Краснощечков П.С., Петров А.А., Федоров В.В.* Информатика и проектирование. М.: Знание, 1986.
26. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
27. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987.
28. *Ломов Б.Ф.* Методологические и теоретические проблемы психологии. М.: Наука, 1984.
29. *Лотов А.В.* Численный метод построения множеств достижимости для линейной управляемой системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т.12. N 3.
30. *Лотов А.В.* Один подход к перспективному планированию экономики в условиях отсутствия критерия // Тр. конф. "Системный анализ и перспективное планирование" (Москва, май 1972). М.: ВЦ АН СССР, 1973.
31. *Лотов А.В.* Численный метод исследования непрерывности времени быстрогодействия в линейных системах и решения задачи Коши для уравнения Беллмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т.13. N 5.
32. *Лотов А.В.* Исследование экономических систем с помощью множеств достижимости // Тр. международной конференции "Моделирование экономических процессов" (Ереван, апрель 1974). М.: ВЦ АН СССР, 1975.
33. *Лотов А.В.* Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т.15. N 1.
34. *Лотов А.В.* О сходимости методов численной аппроксимации множеств достижимости для линейных дифференциальных систем с выпуклыми фазовыми ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. N 1.

35. *Лотов А.В.* О понятии и построении обобщенных множеств достижимости для линейных управляемых систем в частных производных // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261. N 2.
36. *Лотов А.В.* Согласование экономических моделей с использованием множеств достижимости // Математические методы анализа взаимодействия отраслевых и региональных систем. М.: Наука, 1983.
37. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984.
38. *Лотов А.В.* Об оценке устойчивости и числе обусловленности множества решений системы линейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т.24. N 12.
39. *Лотов А.В.* Оценка устойчивости множества решений системы линейных равенств и неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т.25. N 3.
40. *Лотов А.В.* Оценка воздействия ошибок округления на точность исключения переменных в системах линейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т.26. N 3.
41. *Лотов А.В.* Аппроксимация и устойчивость обобщенных множеств достижимости // Кибернетика и вычислительная техника / Под ред. В.А. Мельникова. Вып.3. М.: Наука, 1987.
42. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
43. *Моисеев Н.Н., Александров В.В., Тарко А.М.* Человек и биосфера. М.: Наука, 1985.
44. *Моцкин Т.С., Райфа Х., Томпсон Дж.Л., Тролл Р.М.* Метод двойного описания// Матричные игры. М.: Наука, 1961.
45. *Петров А.А.* Математическое моделирование экономического развития. М.: Знание, 1984.
46. *Петров А.А.* Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1996.
47. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
48. *Полищук Л.И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. М.: Наука, 1989.
49. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
50. *Поспелов Г.С., Ириков В.А.* Программно-целевое планирование и управление. М.: Сов. радио, 1976.
51. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989.
52. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Наука, 1977.
53. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981.
54. *Форрестер Дж.* Мировая динамика. М.: Наука, 1978.
55. *Фишер Р., Юри У.* Путь к согласию, или переговоры без поражения. М.: Наука, 1992.
56. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
57. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.

58. Черных О.Л. Анализ потенциальных возможностей экономических систем с учетом загрязнения. М.: ВЦ АН СССР, 1984.
59. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек при приближенных вычислениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28. N 9.
60. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек на основе триангуляции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т.31. N 8.
61. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек в виде системы линейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N 8.
62. Черных О.Л. Аппроксимация Парето-оболочки выпуклого множества многогранными множествами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т.35. N 8.
63. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.
64. Burger E. Uber homogene lineare Ungleichungssysteme // Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. 1956. Bd.36. No.3/4.
65. Bushenkov V.A., Ereshko F.I., Kindler J., Lotov A.V., de Mare L. Application of the GRS Method to Water Resources Problems in Southwestern Skane, Sweden. WP-82-120. International Institute for Applied Systems Analysis. Laxenburg, Austria, 1982.
66. Bushenkov V., Kaitala V., Lotov A., and Pohjola M. Decision and Negotiation Support for Transboundary Air Pollution Control between Finland, Russia and Estonia // Finnish Economic Papers. 1994. Vol 7. N 1.
67. Camara A. (ed.) Proceeding of the 1st Conference in Spatial Multimedia and Virtual Reality. Lisbon: New University of Lisbon, 1995.
68. Chernykh O.L., Kamenev G.K. Linear algorithm for a series of parallel two-dimensional slices of multidimensional convex polytope // Pattern Recognition and Image Analysis. 1993. V.3. No.2.
69. Cohon J. L. Multiobjective Programming and Planning. N.Y.: Academic Press, 1978.
70. Gass S., Saaty T. The computational algorithm for the parametric objective function: Naval Research Logistics Quarterly. 1955. V.2. 39-51.
71. Gruber P.M. Approximation of convex bodies // Convexity and its applications. Basel: Birkhauser, 1983.
72. Gruber P.M., Kendrov P. Approximation of convex bodies by polytopes // Rendiconti Circolo mat. Palermo. Ser. 2. 1982. T.31. F.2.
73. Kamenev G.K., Lotov A.V. Interactive structured procedure of multiple criteria decision making based on Generalized Reachable Sets method // Multicriteria Mathematical Programming Problems. M.: The Institute for Systems Studies, 1985.
74. Kamenev G.K., Lotov A.V., van Walsum P.E.V. Application of the GRS Method to Water Resources Problems in the Southern Peel Region of the Netherlands, CP-86-19. International Institute for Applied Systems Analysis. Laxenburg, Austria, 1986.
75. Karwan M., Lotfi V., Telgen J. and Zionts S. Redundancy in mathematical programming: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, V.206. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
76. Lotov A. Comment to the paper by D.J.White "A characterization of the feasible set of objective function vectors in linear multiple objective problems" // European Journal of Operational Research. 1996. V.9. N 1.

77. Lotov A., Bushenkov V., Chernykh O. Multi-criteria DSS for River Water Quality Planning // Microcomputers in Civil Engineering. 1996.

78. Lotov A.V., Chernykh O.L., Hellman O. Multiple Objective Analysis of Long-Term Development Strategies for a National Economy // European Journal of Operational Research. 1992. V.56. No.2.

79. Moiseev N., Aleksandrov V., Krapivin V., Lotov A., Svirezhev J., Tarko A. Global Models. The Biospheric Approach, CP-83-33. International Institute for Applied Systems Analysis Laxenburg, Austria, 1983.

## **SYNOPSIS**

### **Computer and the search for a balanced tradeoff: Feasible Goals Method**

The book is devoted to a new graphic computer technique which helps to find out smart strategies solving economic and environmental problems. The technique develops the ideas of the goal method and of the multiple criteria decision making.

Applying the goal programming methods, one often meets a difficulty related to the fact that identified goals (i.e. combinations of decision-related criterion values) aren't feasible. Indeed, if the identified goal is distant from the variety of feasible goals, the feasible combination of criterion values may disappoint a decision maker. Moreover, this combination may depend more upon the parameters of the distance function than on the identified goal and therefore disregard the preferences of decision maker.

To solve this problem, we display the variety (the set) of feasible goals. Only then, decision maker is proposed to identify the preferable feasible goal (the Feasible Goals Method). The strategy is computed automatically on the basis of the goal.

The display of the feasible goals set is based on application of the new computer-based technique, the Interactive Decision Maps (the IDM), developed for the exploration of problems with conflicting criteria. The objective information on decision situation is displayed in a clear graphical form of decision maps: several efficiency frontiers (tradeoff curves) among two criteria related to restrictions imposed on the value of the third criterion are depicted. Changing one frontier for another, one can see how the increment (or decrement) of the third criterion influences the efficiency frontier. By this, a decision map helps to understand the tradeoff among three criteria. The curves on a modified decision map look like the height contours of a usual geographical map, and so one can understand them quite easily.

The IDM techniques is an interactive tool for fast display of various decision maps for three, four, five and more criteria. Actually, the IDM techniques can display myriad of virtual decision maps by request. This is done on the basis of preliminary approximation of the feasible goals set or the Edgeworth-Pareto Hull (EPH) of it. To display numerous virtual decision maps, we use matrices of maps, scroll-bars and animation of maps, i.e. the display of automatically generated sequences of maps. By this, anyone may

receive information about the potentialities of choice and tradeoffs among the criteria in a simple graphic form. The IDM helps to identify the preferable feasible goal by a simple click of mouse, i.e. to implement the Feasible Goals Method (FGM) practically.

It is important that the FGM/IDM technique results in a graphic colorful computer software which can be easily assessed by any person. For this reason, the FGM may be used as a basis for a new type of INTERNET resources providing objective independent information about feasible strategies for the solution of environmental and economic problems. Moreover, the FGM/IDM technique may be used in INTRANET and other computer networks for the support of group and collaborative decision making as well as for negotiations support.

The FGM and its applications are described in the book. The book is written in a simple form assessable for any computer-literal person. It may be used by University students of a diverse range of specialties.

## THE CONTENTS

**INTRODUCTION.** The problems of application of new computer technologies for decision and negotiation support are discussed. The opportunities provided by computer networks are considered and the potential role of the FGM in the framework of them is outlined.

**CHAPTER 1. INTRODUCTION INTO THE FEASIBLE GOALS METHOD.** The method is introduced on the basis of several simple models. Then, an example model of regional environmentally sound economic development is explored by the FGM.

**CHAPTER 2. BALANCED ENVIRONMENTAL STRATEGIES.** Examples of the application of the FGM method in environmental topics are given. The following problems and software systems are discussed:

- hypothetical problem of sea dumping of slugs in the Lower bight of the New York City,
- problem of agricultural development of a small region in the Netherlands taking the water quality and the water quantity problems into account,
- decision support system for environmental engineers developing the water quality plans for Russian rivers,
- negotiation support system for development of international strategies for atmosphere pollution abatement (exemplified by the case of Finland, Russia and Estonia),
- demo version of computer support for developing smart response strategies to global environmental problems (exemplified by the greenhouse effect).

CHAPTER 3. VISUALIZATION OF EFFICIENT GOALS IN ECONOMIC TOPICS. Application of the FGM technique for exploration of various economic models is considered:

- development of strategies for long-time growth of a national economy taking social and environmental issues into account (on the basis of an aggregated model of economic growth),
- development of feasible national economic-social goals and strategies for a medium time period (on the basis of a dynamic input-output model),
- development of strategies of international trade (on the basis of a static input-output model of the world trade),
- development of strategies of short-time regulation of a market economy (on the basis of an econometric model),
- development of strategies of economic reform in Russia (on the basis of a structured macro-economic model).

CHAPTER 4. METHODOLOGICAL PROBLEMS OF THE FGM. The chapter consists of seven sections in which the following topics are discussed:

- Interactive and Animated Decision Maps as well as their combination with the multimedia, virtual reality, geographical information systems and other new computer technologies,
- psychology of decision making, mental models and their modification,
- developing the technical projects with the FGM: supersonic aircraft example,
- FGM-based methodology for integrated assessment of environmental problems,
- application of the FGM technique in negotiation processes,
- identification of systems with the FGM technique,
- application of the FGM in computer networks.

CHAPTER 5. MATHEMATICAL BASIS OF THE FGM TECHNIQUE. Mathematical topics related to the computer implementation of the FGM technique are discussed in short. This section was included into the non-mathematical book to provide software engineers with the understanding of opportunities and limitations of the FGM technique. The FGM technique is based on algorithms for numerical approximating the feasible goals set and on algorithms for displaying the Interactive and Animated Decision Maps. Algorithms are described in a simplified form. The chapter includes the following sections:

- algorithms based on the convolution of liner inequalities due to Fourier,
- algorithms based on the approximating of convex bodies by polytops,
- algorithms based on the essential covering of non-convex sets by systems of simple figures,
- algorithms for approximating the Edgeworth-Pareto Hulls,

- algorithms for displaying the decision maps,
- algorithms of the FGM technique in the case of dynamic systems.

CONCLUSION. THE FGM TECHNIQUE AT THE BEGINNING OF THE 21st CENTURY. Here, the future active electronic mass media supporting the development of environmental and economic strategies are outlined.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	10
ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД ДОСТИЖИМЫХ ЦЕЛЕЙ.....	17
ГЛАВА 2. КОМПРОМИССНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ.....	61
ГЛАВА 3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КОМПРОМИССОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ.....	105
ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ МДЦ.....	133
ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ДОСТИЖИМЫХ ЦЕЛЕЙ.....	185
ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НА ПОРОГЕ XXI ВЕКА.....	227
ЛИТЕРАТУРА.....	230
SYNOPSIS.....	235

*Научное издание*

**Лотов** Александр Владимирович  
**Бушенков** Владимир Алексеевич  
**Каменев** Георгий Кириллович  
**Черных** Олег Леонидович

**КОМПЬЮТЕР  
И ПОИСК КОМПРОМИССА.  
МЕТОД ДОСТИЖИМЫХ  
ЦЕЛЕЙ**

*Утверждено к печати  
редколлекцией серии  
“Кибернетика: неограниченные возможности  
и возможные ограничения”*

Заведующая редакцией  
“Наука – философия, социология, психология, право”  
Т.В.Савич

Редактор Л.В.Пеняева  
Художественный редактор Г.М.Коровина

Оригинал-макет подготовлен  
в Вычислительном Центре РАН  
на компьютерной технике

ИБ № 2350  
ЛР № 020297 от 27.11.1991

**К63 Компьютер** и поиск компромисса. Метод достижимых целей / Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. – М.: Наука, 1997 – 240 с. (Серия “Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения”).

ISBN 5-02-013536-4

Рассматривается новый графический метод поиска разумных компромиссных стратегий решения сложных проблем – метод достижимых целей (МДЦ). Описывается опыт применения МДЦ в процессе разработки экологических и экономических стратегий и проектов. Обсуждаются возможности синтеза МДЦ и современных компьютерных технологий – мультимедиа, виртуальной реальности, географических информационных систем, а также его использование в рамках компьютерных сетей ИНТЕРНЕТ для обучения и для представления широкому кругу лиц объективной информации о стратегиях решения сложных проблем.

Для широкого круга читателей, студентов и аспирантов ВУЗов. По сети ИНТЕРНЕТ распространяется компьютерная лабораторная работа, иллюстрирующая МДЦ.

**К**  $\frac{1402000000 - 162}{042(02) - 97}$  **49 – 97, I полугодие**

**ББК**

**22.18**