На правах рукописи

КАМЕНЕВ Георгий Кириллович

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АДАПТИВНЫХ МЕТОДОВ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТНЫХ ТЕЛ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой
степени доктора физико-математических
наук

Москва - 2004

Работа выполнена в Вычислительном Центре им. А.А. Дородницына РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
член-корр. РАН, профессор Павловский Юрий Николаевич

доктор физико-математических наук,
профессор Половинкин Евгений Сергеевич

доктор технических наук Пропой Анатолий Иванович

Ведущая организация:

Институт проблем механики РАН

Защита диссертации состоится " _________" _______________2005 г. в ч. на заседании диссертационного совета Д002.017.04 при Вычислительном центре им А.А. Дородницына РАН по адресу: 119991, Москва ГСП-1, ул. Вавилова, 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ВЦ РАН.

Автореферат разослан "___" "___________" 2004 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д002.017.04, доктор физико-математических наук

Новикова Н. М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Аппроксимация многогранниками является традиционным средством теории выпуклых множеств. Первые аппроксимационные теоремы восходят к Минковскому. В частности, Минковским было доказано, что для каждого выпуклого компактного тела можно найти сходящуюся последовательность выпуклых полиэдров, аппроксимирующих это тело. Эти утверждения широко использовались для получения результатов, связанных с геометрией выпуклых поверхностей. Однако долгое время интерес к задаче был сугубо теоретическим. На важность практической аппроксимации выпуклых тел многогранниками возможно впервые указал Л.С.Понтрягин в связи с проблемой построения множеств достижимости динамических систем. В настоящее время задача аппроксимации выпуклых компактных тел (ВКТ) многогранниками возникает во многих приложениях: в математическом программировании, кодировании изображений и др.

Важное практическое значение вычислительные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел имеют в задачах принятия решений на основе использования математических моделей в методе обобщенных множеств достижимости (ОМД), разрабатываемого в ВЦ РАН начиная с 70-х годов группой исследователей под руководством А.В. Лотова. В этом подходе вместо изучения отдельных вариантов решения осуществляется сжатие (агрегирование) информации о всех допустимых вариантах. Агрегирование состоит в построении в явном виде множества всех таких значений показателей качества решения, которые могут быть достигнуты в модели как результат допустимых вариантов решений (управлений). Построенное в явном виде множество достижимых значений показателей – обобщенное множество достижимости – может быть использовано для конструирования различных методов анализа моделей и принятия решений на их основе. В выпуклом случае для построения такого описания необходимо разработать эффективные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел.

Важным отличием адаптивных методов полиэдральной аппроксимации (АМПА) от методов приближенного описания с помощью отдельно взятых выпуклых тел (таких как симплекс, параллелепипед, эллипсоид, цилиндр) является возможность аппроксимации выпуклых компактных тел с любой степенью точности. За это преимущество, однако, приходится платить высокую цену: как показывают существующие теоретические оценки, а также экспериментальные и прикладные исследования, сложность описания аппроксимирующего многогранника быстро растет с увеличением точности и ростом размерности аппроксимируемого тела. Тем не менее, в задачах принятия решений необходимо использовать методы, обеспечивающие возможность аппроксимации с любой (заранее не известной) степенью точности в связи с тем, что для исследователя важна форма и конкретное расположение паретовой границы аппроксимируемого множества, а не только область, где это множество находится.

В связи со сказанным выше, использование методов полиэдральной аппроксимации (МПА) при исследовании математических моделей приводит к необходимости разработки методов, оптимальных с точки зрения сложности описания аппроксимирующих многогранников (под которой будем понимать число вершин или гиперграней). Кроме того, поскольку каждый запрос информации об аппроксимируемом теле (например, каждое вычисление опорной или дистанционной функции) может требовать большого времени, представляют интерес методы, оптимальные с точки зрения числа таких запросов (в частности, числа вычислений опорной или дистанционной функции).

Цель работы. Целью работы является:

1) Разработка теории оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. В рамках этой теории:

– необходимо разработать методы создания новых адаптивных методов аппроксимации, оптимальных как с точки зрения сложности аппроксимирующего многогранника, так и с точки зрения числа решаемых задач выпуклой оптимизации на аппроксимируемом теле;
– необходимо разработать методы теоретического исследования скорости сходимости и эффективности методов полиэдральной аппроксимации.

2) Разработка методики проверки в численных экспериментах эффективности адаптивных методов при достижимых на практике точностях аппроксимации.

3) Разработка методики использования адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в многокритериальных задачах принятия решений в рамках математического моделирования.

Метод исследования. В работе при разработке и исследовании адаптивных методов полиэдральной аппроксимации используются методы выпуклого анализа, дифференциальной геометрии, теории информации и вычислительной геометрии. При разработке методики использования адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в задачах принятия решений в рамках математического моделирования используются принципы и методы теории принятия решений, в том числе метод обобщенных множеств достижимости.

Научная новизна. Результаты диссертации, полученные автором, являются новыми. Основные из этих результатов следующие:

1. Создана теория оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Введены классы адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, основанные на адаптивных схемах восполнения и отсечения. Введено понятие H-методов отсечения и восполнения и исследованы их свойства. Введено понятие более узкого класса H_1-методов отсечения и восполнения с более сильными свойствами. [2], [3], [5], [13], [18]
2. Для H- и H_1-методов получены верхние оценки скорости сходимости, исследована их эффективность. Доказана оптимальность по порядку числа вершин (методы восполнения) и числа гиперграней (методы отсечения) для гладких (H-методы) и произвольных (H_1-методы) тел. В гладком случае доказана независимость эффективности H_1-методов восполнения от свойств аппроксимируемых тел (совместно с Р.В.Ефремовым). [3], [5], [7], [13], [18], [16], [17], [26]
3. На основе теории оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации изучены существующие алгоритмы и предложены новые. В частности, для существующего и активно используемого в приложениях метода «Уточнения Оценок» доказана принадлежность к классу оптимальных H_1-методов восполнения, изучена его скорость сходимости и эффективность. [2], [5], [8], [13].
4. Предложен метод «Сближающихся Многогранников», использующий одновременно схему восполнения и схему отсечения. Для этого метода получены оценки скорости сходимости и доказана в гладком случае оптимальность по порядку числа вершин внешнего и гиперграней внутреннего аппроксимирующих многогранников, а также по порядку числа вычислений опорной функции аппроксимируемого тела. [10]
5. Развита теория построения и исследования оптимальных адаптивных методов аппроксимации для тел, заданных своей дистанционной (калибровочной) функцией. Введено понятие двойственных классов адаптивных методов полиэдральной аппроксимации. Доказано, что H- (H_1-) методы восполнения и отсечения являются двойственными классами. Для известных методов сформулированы двойственные аналоги. [18]
6. Для тел, заданных одновременно опорной и дистанционной функциями, предложены самодвойственные методы. Доказано, что они оптимальны по порядку числа вершин внешних, гиперграней внутренних аппроксимирующих многогранников, а также по порядку числа вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого множества, причем как в гладком, так и в негладком случае. [21], [20]
7. Получена новая верхняя оценка аппроксимационного числа негладких

выпуклых дисков. [15]

8. Разработаны теоретические основы методики экспериментального исследования эффективности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в классе многомерных эллипсоидов. [2]

9. Осуществлено экспериментальное исследование эффективности методов в классах многомерных эллипсоидов (совместно с С.М. Джолдыбаевой). [4], [6]

10. Разработана методика использования методов полиэдральной аппроксимации в многокритериальных задачах принятия решений, в частности при анализе эколого-экономических проблем (совместно с А.В.Лотовым, В.А.Бушенковым и О.Л.Черных). [1], [14], [11], [12], [23], [24], [25], [28], [29]

11. С помощью оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации исследована сложная эколого-экономическая модель сельскохозяйственного региона (совместно с А.В.Лотовым и ван Вальсумом). [11], [22]

12. Предложена методика анализа многомерной задачи выбора на основе визуализации паретовой границы выпуклой оболочки критериальных точек (совместно с В.А.Бушенковым, Д.И.Гусевым, А.В.Лотовым, и О.Л.Черных). [9], [14], [28], [29]

Практическая ценность. В работе исследованы существующие и разработаны новые эффективные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. Проведено исследование этих методов в численных экспериментах. Разработана методика использования рассматриваемых методов в задачах принятия решений. С применением рассматриваемых методов исследована сложная эколого-экономическая система сельскохозяйственного региона (совместная работа с Международным институтом прикладного системного анализа (ИИСА)). Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации, рассмотренные в работе, были использованы также в системе поддержки поиска эффективных стратегий улучшения качества воды в крупных реках (в рамках Федеральной целевой программы «Возрождение Волги»).

Результаты, изложенные в настоящей работе, получены при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 95-01-00968, 98-01-00323, 01-01-00530, 04-01-00662), по программе поддержки ведущих научных школ (коды проектов 00-15-96118, НШ-1843.2003.1), при поддержке программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН «Вычислительные и информационные проблемы решения больших задач» и программы фундаментальных исследований РАН «Математическое моделирование и интеллектуальные системы».

Апробация. Результаты, нашедшие отражение в диссертации, докладывались на следующих совещаниях, конференциях и семинарах: на Всесоюзной конференции «Теория, методология и практика системных исследований» (Москва, 1985), на конференции «Математические методы управления и обработки информации» (Москва, 1985), на семинаре «Многокритериальные задачи математического программирования» Всесоюзного научно-исследовательского института системных исследования (Москва, 1985), на методологическом семинаре «Методы имитационного моделирования экономических объектов» Центрального экономико-математического института АН СССР (Москва, 1985), на заседаниях школы-семинара ИВЕРСИ-85 «Системные и прикладные аспекты диалога на персональных ЭВМ» (Тбилиси, 1985), на IX Всесоюзном симпозиуме «Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования» (Москва, 1986), на конференции молодых ученых Вычислительного центра АН СССР (Москва, 1988), на Советско-финском симпозиуме "Information technology and economic modeling" (Хельсинки, Финляндия 1992), на международной конференции «Konvexgeometrie» (Обервольфах, ФРГ 1997), на 2-й Московской международной конференции по исследованию операций (Москва, 1998), на научной сессии «Проблемы прикладной математики и информатики» Вычислительного центра РАН (Москва, 2000), на 3-й Московской международной конференции по исследованию операций (Москва, 2001), на научной конференции «Математика, Механика и Информатика 2002», посв. 10-летию РФФИ (Москва, 2002), на научной конференции «Математические модели сложных систем и междисциплинарные исследования», посв. 85-летию академика Н.Н.Моисеева (Москва, 2002), на 58-й Конференции Европейской рабочей группы «Поддержка многокритериального принятия решений» (Москва, 2003), на международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» (Москва, 2004), на 4-й Московской международной конференции по исследованию операций (Москва, 2004) и на ряде семинаров МГУ (Механико-математический факультет: семинарах кафедр математического анализа, теории чисел и дискретной математики; факультет Вычислительной математики и кибернетики: семинар кафедры оптимального управления), института Проблем механики РАН, Московского физико-технического института, Вычислительного центра РАН им. А.А. Дородницына.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 29 работах, из них четыре книги: [11] в соавторстве с А.В. Лотовым, В.А. Бушенковым и О.Л. Черных; [14] главы 1-5 в соавторстве с А.В.Лотовым и В.А. Бушенковым, гл. 8 – самостоятельно; [28] в соавторстве с А.В. Лотовым и В.А. Бушенковым; [29] главы 1-6 в соавторстве с А.В. Лотовым и В.А. Бушенковым, гл. 8 – самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из предисловия, введения, шести глав, заключения, списка литературы из 160 наименований, 17 таблиц и 71 рисунка. Текст диссертации без списка литературы, таблиц и рисунков составляет 361 страницу машинописного текста, общий объем – 420 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дан обзор существующих теории и методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел.

В **§ 0.1** дан обзор существующей теории оптимальной полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Центральным понятием теории оптимальной полиэдральной аппроксимации ВКТ является понятие многогранника наилучшей аппроксимации (МНА), на котором достигается наибольшая точность приближения для определенной метрики в заданном классе аппроксимирующих многогранников (например, вписанных с ограниченным числом вершин или описанных с ограниченным числом гиперграней). В параграфе приводятся известные оценки зависимости наилучшей достижимой точности от сложности описания аппроксимируемого многогранника (зависимости отклонения от числа вершин или гиперграней многогранника наилучшей аппроксимации). Оказывается, что, согласно существующей теории, для произвольного выпуклого компактного тела верхняя оценка точности обратно пропорциональна числу вершин (гиперграней) в степени $2/(d\text{-}1)$, где d – размерность пространства. При этом для широкого класса тел, включающего в себя тела с частично гладкой границей, эта оценка неулучшаема.

Рассматривается евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$, расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$, нормой $\|\cdot\|$ и Лебеговой мерой μ. Пусть $B_r(z)$ обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в z, и B^d обозначает единичный шар с центром в начале координат, $S^{d\text{-}1}$ – сферу направлений, т.е. границу B^d, и пусть $\pi_d := \mu(B^d)$.

Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел. В случае $d = 2$ говорят также о выпуклых дисках. Через ∂C обозначим границу тела C, через int C – множество его внутренних точек, через $\omega(C)$ – его асферичность (минимальное отношение радиусов концентрических внешнего $R(C)$ и внутреннего $r(C)$ шаров) и через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем. Обозначим через $\mathscr{C}^s$ класс ВКТ с s раз непрерывно дифференцируемой границей, и пусть $\mathscr{C}_+^s$ – класс ВКТ с s раз непрерывно дифференцируемой границей и положительными главными кривизнами, $s \geq 2$. Для $s\geq 2$ через $r_{\min}(C)$ и $r_{\max}(C)$ обозначим минимальный и, соответственно, максимальный радиусы кривизны ∂C, $C\in\mathscr{C}^s$. Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников. Для $P\in\mathscr{P}$ через $M^t(P)$ обозначим множество его вершин, а через $m^t(P)$ – число его вершин, через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граней максимальной размерности), а через $m^f(P)$ - число его гиперграней. Для $C\in\mathscr{C}$ введем класс $\mathscr{P}^i(C)$ внутренних многогранников, вершины которых принадлежат ∂C (вписанных многогранников), и класс $\mathscr{P}^c(C)$ внешних многогранников, гиперграни которых касаются ∂C (описанных многогранников). Определим также классы

$$\mathscr{P}^i{}_m(C) := \{P\in \mathscr{P}^i(C)\colon m^t(P)\le m\},\quad \mathscr{P}^c{}_m(C) := \{P\in \mathscr{P}^c(C)\colon m^f(P)\le m\}.$$

Рассмотрим традиционные для рассматриваемой задачи метрики на $\mathscr{C}$: метрику Хаусдорфа (метрику Бляшке)

$$\delta^H(C_1,C_2) := \max\,\{\sup\{\rho(x,\ C_2)\colon x\in C_1\},\ \sup\{\rho(x,\ C_1)\colon x\in C_2\}\}$$

и метрику объема симметрической разности (Никодимову метрику)

$$\delta^S(C_1,C_2) := \mu\,(C_1\Delta C_2),$$

где $C_1\Delta C_2 := (C_1\backslash C_2)\cup(C_2\backslash C_1)$ **.**

В дальнейшем, где это возможно, будем опускать индексные обозначения. Так, через δ будем обозначать δ^H и δ^S, через $\mathscr{P}_m(C)$ будем обозначать $\mathscr{P}^i{}_m(C)$ и $\mathscr{P}^c{}_m(C)$, через $\mathscr{P}(C)$ будем обозначать $\mathscr{P}_m(C)$ для любых $m\ge d+1$, через $M(P)$, $m(P)$ будем обозначать $M^t(P)$, $m^t(P)$ для $P\in\mathscr{P}^i(C)$ и $M^f(P)$, $m^f(P)$ для $P\in\mathscr{P}^c(C)$. Обозначим также

$$\delta(C,\ \mathscr{P}_m(C)) := \inf\,\{\delta(C,\ P)\colon P\in \mathscr{P}_m(C)\}.$$

Пусть $\mathbb{E}_0{}^d := \mathbb{E}^d\backslash\{0\}$, $\mathscr{C}_0:=\{C\subset\mathscr{C} :\ \{0\}\ \in\ \mathrm{int}\ C\}$ – класс ВКТ, содержащих внутри себя начало координат, $\mathscr{P}_0 := \mathscr{C}_0\cap\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_0(C) := \mathscr{P}_0\cap\mathscr{P}(C)$.

Для $u\in\mathbb{E}_0{}^d$ введем обозначения опорной функции

$$g(u,\ C) := \max\,\{<u,\ x>\colon x\in C\},$$

опорного полупространства $L(u,\ C) := \{x\in\mathbb{E}^d\colon <u,\ x>\ \le\ g(u,\ C)\}$, опорной гиперплоскости $l(u,C) := \{x\in\mathbb{E}^d\colon <u,\ x> = g(u,\ C)\}$, множества точек касания

$$T(u,C) := \{p\in\partial C\colon <u,\ p> = g(u,\ C)\}$$

и множества внешних единичных нормалей в граничной точке $p\in\partial C$

$$S(p,C) := \{u\in S^{d-1}\colon <u,\ p> = g(u,\ C)\}.$$

Пусть $C\in\mathscr{C}_0$ и $x\in\mathbb{E}^d$, через

$$g^*(x,\ C):=\min\,\{\lambda\ge 0\colon x\in\lambda C\}$$

обозначим дистанционную (Минковского или калибровочную) функцию для C. Из определения дистанционной функции следует, что $g^*(x,\ C)=||x||/||x_0||$, где $x_0=[o,\ x)\cap\partial C$ – точка пересечения луча, исходящего из начала координат и проходящего через x, и границы тела C. Эту точку x_0 обозначим через

$$t(x, C) := x/g^*(x, C) \in \partial C,\ x\in\mathbb{R}_0^d.$$

Пусть $\omega_0(C)$ есть минимальное отношение радиусов $R_0(C)$ внешнего и $r_0(C)$ внутреннего шаров с центрами в начале координат.

Пусть задано некоторое $C\in\mathscr{C}$. Классическим результатом теории выпуклых множеств является тот факт, что для метрики δ (т.е. δ^H и δ^S) в классе $\mathscr{P}_m(C)$ (т.е. $\mathscr{P}^i{}_m(C)$ и $\mathscr{P}^c{}_m(C)$) найдется многогранник Π_m, не обязательно единственный, на котором достигается $\delta(C,\mathscr{P}_m(C))$. Этот многогранник называется многогранником наилучшей аппроксимации: $\delta(C,\ \Pi_m)$ = $\delta(C,\ \mathscr{P}_m(C))$. Даже для двумерных тел задача нахождения МНА чрезвычайно сложна (за исключением простейших специальных случаев). Вместе с тем МНА могут служить эталоном полиэдральной аппроксимации ВКТ.

Приведем, прежде всего, верхние оценки скорости сходимости МНА (Dudley1974; Бронштейн и Иванов 1975):

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}.$$

Нижние оценки скорости сходимости МНА рассмотрим сначала для достаточно гладких тел. Пусть рассматривается метрика δ^H. Тогда для $C\in\mathscr{C}^2$ справедливо (Fejes Tóth 1948; Schneider 1981, 1987; Gruber 1993; Böröczky 2000):

$$\lim_{m\to\infty}\delta^H(C,\mathscr{P}_m)m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где ϑ_l есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса, $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x\in\partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Заметим, что точно известны только величины $\vartheta_1=1$ и $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$.

Рассмотрим метрику δ^S, и пусть $C\in\mathscr{C}^2$. Тогда (Gruber 1988, 1991, 1993; Böröczky 2000) существуют константы del_{d-1} и div_{d-1} (триангуляционные числа Делоне и Дирихле, соответственно), зависящие только от d, такие что

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^i{}_m)m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{del}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}\,d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)},$$

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^c{}_m)m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{div}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}\,d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)}.$$

При этом точно известны только значения $\mathrm{del}_1=1/6$, $\mathrm{del}_2=1/(2\sqrt{3})$, $\mathrm{div}_1=1/12$, $\mathrm{div}_2=5/(18\sqrt{3})$.

Таким образом, степень $2/(d-1)$ в оценках скорости сходимости для $C\in\mathscr{C}^2$ неулучшаема.

В **§ 0.2** приводится аппарат, используемый в диссертации для описания сходимости многогранников к выпуклым телам со скоростью, по порядку большей 2/(d-1).

Для характеристики аппроксимационных свойств негладких тел введем следующие понятия. Пусть $C \in \mathscr{C}$. Пусть $s>0$. Обозначим

$$\underline{a}^s(C) := \liminf_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^s, \quad \overline{a}^s(C) := \limsup_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^s.$$

Для характеристики нижней границы скорости сходимости МНА вводится (Schneider, Wieacker 1981) величина

$$\underline{\alpha}(C) := \inf\{s>0 : \underline{a}^s(C) = 0\},$$

которая названа аппроксимационным числом тела C. Поскольку нас интересуют верхние границы скорости сходимости методов полиэдральной аппроксимации (а значит, как эталона и МНА), то назовем эту величину нижним аппроксимационным числом C. Введем верхнее аппроксимационное число тела C как

$$\overline{\alpha}(C) := \inf\{s>0 : \overline{a}^s(C) = 0\}.$$

Очевидно, что $\underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C)$, и в случае равенства этих величин можно говорить об аппроксимационном числе $\alpha(C)$.

Существует (Schneider, Wieacker 1981) нижняя оценка нижнего аппроксимационного числа $\underline{\alpha}(C)$, равная половине хаусдорфовой размерности (dim) множества дальних точек C (exp* C – экстремальных точек, в которых существует внешняя касательная к телу окружность):

$$\underline{\alpha}(C) \ge \frac{1}{2}\dim \exp^* C.$$

Определим класс ВКТ, для которого порядок 2/(d-1) является неулучшаемым. Для $0 \le \alpha \le (d-1)/2$ обозначим $\mathscr{C}(\alpha) := \{C\in\mathscr{C}\colon \overline{\alpha}(C) = \alpha\}$ и пусть $\mathscr{C}_\# := \mathscr{C}((d-1)/2)$. В частности, $\mathscr{C}_+^2 \subset \mathscr{C}_\#$. Из $C := \bigcap_{i=1}^n C_i \in \mathscr{C},\ \ C_i \in \mathscr{C}_+^2$, также следует, что $C\in\mathscr{C}_\#$. Таким образом, класс $\mathscr{C}_\#$ достаточно широк, чтобы охватить ВКТ, аппроксимация которых требуется в приложениях.

В **§ 0.3** рассматриваются методы полиэдральной аппроксимации, вводится понятие эффективности этих методов и их оптимальности по порядку при аппроксимации как отдельных тел, так и их классов.

Пусть $C\in\mathscr{C}$ и $P\in\mathscr{P}(C)$. Величину

$$\eta(P) := \frac{\delta(C,\mathscr{P}_{m(P)}(C))}{\delta(C,P)}$$

назовем эффективностью аппроксимации тела C многогранником P (с точки зрения числа вершин или гиперграней соответственно).

Пусть $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=1,2,\dots}$ – сходящаяся к $C\in\mathscr{C}$ последовательность многогранников из $\mathscr{P}(C)$. Величины

$$\underline{\eta}(\mathrm{F}) := \liminf_{n\to\infty} \eta(P^n)\,, \quad \overline{\eta}(\mathrm{F}) := \limsup_{n\to\infty} \eta(P^n)$$

назовем, соответственно, нижней и верхней асимптотической эффективностью аппроксимации тела C последовательностью F. Если нижняя и верхняя асимптотическая эффективность совпадают, можно говорить об эффективности аппроксимации тела C. Наконец, под эффективностью метода полиэдральной аппроксимации тела C будем понимать эффективность порождаемой им последовательности многогранников.

Очевидно, что $0 \le \underline{\eta}(F) \le \overline{\eta}(F) \le 1$, причем для любого МНА Π_m, $m=d+1$, $d+2$, ..., эффективность аппроксимации равна единице. Поэтому гипотетический метод построения МНА будем называть оптимальным. Метод полиэдральной аппроксимации, порождающий для тела C последовательность с асимптотической эффективностью, равной 1, будем называть асимптотически оптимальным.

Метод полиэдральной аппроксимации, порождающий для тела C последовательность с нижней асимптотической эффективностью, большей нуля, будем называть асимптотически эффективным. Пусть $C\in\mathscr{C}$ и $\overline{\alpha}(C) > 0$. Метод полиэдральной аппроксимации назовем оптимальным по порядку числа вершин (гиперграней) для C, если он порождает последовательность многогранников с тем же порядком скорости сходимости, что и у МНА. Метод будем называть асимптотически эффективным (оптимальным по порядку) для класса $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$, если он является асимптотически эффективным (оптимальным по порядку) для каждого $C\in\mathscr{C}^*$. Нетрудно видеть, что асимптотически эффективный метод является (при условии $\overline{\alpha}(C) > 0$) оптимальным по порядку. Вместе с тем заметим, что метод может быть оптимальным по порядку и иметь, в то же время, асимптотическую эффективность, равную 0.

Для $C\in\mathscr{C}_+^2$ понятия асимптотической эффективности и оптимальности по порядку совпадают. Однако для класса $\mathscr{C}_\#$, они могут уже не совпадать. Заметим, наконец, что для того, чтобы некоторый метод был оптимален по порядку в классе $\mathscr{C}_\#$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тела $C\in\mathscr{C}_\#$ в порождаемой методом последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ выполнялось

$$\delta(C, P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}\,.$$

Далее в параграфе методы полиэдральной аппроксимации рассматриваются с точки зрения той информации, которая требуется в процессе их выполнения, прежде всего с точки зрения способа задания аппроксимируемого тела. В задачах принятия решений основным можно считать способ неявного задания аппроксимируемого тела через алгоритм расчета значений его опорной или дистанционной функции.

Пусть аппроксимируемое тело задано через опорную или дистанционную (калибровочную) функции и аппроксимирующий многогранник P построен некоторым МПА. Обозначим через $m^g(P)$ и $m^{g^*}(P)$ число вычислений опорной и дистанционной функции тела C, необходимое для построения P. Ясно, что для построения одной вершины (гиперграни) требуется как минимум один расчет опорной (дистанционной) функции. Поэтому по аналогии с определением оптимальности методов по порядку числа вершин (гиперграней) можно ввести понятие метода полиэдральной аппроксимации оптимального по порядку числа вычислений опорной (дистанционной) функции.

Наконец, в параграфе рассматривается различие между итерационными (step-by-step, sequential) и неитерационными, а также между адаптивными (active) и неадаптивными (passive) методами. В методах адаптивных строится последовательность многогранников, в которой построение описания каждого следующего многогранника существенно зависит от информации об аппроксимируемом теле, полученной на предыдущих итерациях.

В **§ 0.4** приводится краткий обзор известных методов полиэдральной аппроксимации. Значительная часть из них носит теоретический характер и содержится в доказательствах различных утверждений, касающихся возможностей аппроксимации выпуклых тел многогранниками. В конце параграфа приводится обзор адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, в том числе метода «Уточнения Оценок», обобщением которого явилась теория, рассматриваемая в диссертации.

В **первой главе** развивается теория адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, вводятся классы хаусдорфовых методов, а также приводятся примеры конкретных методов из этих классов.

В **§ 1.1** вводятся основные понятия теории итерационных методов полиэдральной аппроксимации. Рассматриваются две основные общие схемы аппроксимации – схема восполнения и схема отсечения, изучаемые в диссертации в дальнейшем.

Схема восполнения

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$. Тогда $(n+1)$-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбираем $p_n \in \partial C$.

Шаг 2. Кладем $P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$.

Конкретные методы, основанные на схеме восполнения, можно характеризовать способами решения двух задач:

1) способом выбора $p_n \in \partial C$;
2) способом построения $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$ в требуемом виде.

Схема отсечения

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$. Тогда $(n+1)$-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбирается направление $u_n \in S^{d-1}$;
Шаг 2. Кладется $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$.

Конкретные МПА, основанные на схеме отсечения, можно характеризовать:

1) способом выбора $u_n \in S^{d-1}$;
2) способом построения $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в требуемом виде.

Если в некоторой реализации схемы восполнения многогранник начального приближения P^0 принадлежит $\mathscr{P}^i(C)$ ($\mathscr{P}^c(C)$), то и $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ ($P^n \in \mathscr{P}^c(C)$) для любого n. В этом случае будем говорить, что последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ является *последовательностью восполнения (отсечения)* для C или последовательностью многогранников, порождаемой данной схемой для тела C и многогранника начального приближения $P^0 \in \mathscr{P}(C)$.

В **§ 1.2** на основе схем восполнения или отсечения даются определения классов хаусдорфовых или H-последовательностей вписанных (описанных) многогранников, неявно характеризующие классы адаптивных методов полиэдральной аппроксимации (H-схем), порождающих их. Помимо класса H-последовательностей (методов) вводится класс H_1-последовательностей (методов) с более сильными свойствами.

Определение 1.2.1. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ некоторой реализацией схемы восполнения, будем называть *хаусдорфовой или $H(\gamma, C)$-последовательностью восполнения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ справедливо $\delta^H(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C)$.

Определение 1.2.2. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ некоторой реализацией схемы восполнения, будем называть *$H_1(\gamma, C)$-последовательностью восполнения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ для некоторого $u_n \in S(p_n, C)$ справедливо $g(u_n, C) - g(u_n, P^n) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C)$.

Определение 1.2.3. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ схемой отсечения, будем называть

$H(\gamma,C)$*-последовательностью отсечения*, если существует константа $\gamma>0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ справедливо $\delta^H(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C)$.

Определение 1.2.4. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0^c(C)$ схемой отсечения, будем называть $H_1(\gamma, C)$*-последовательностью отсечения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ для некоторого $p_n\in T(u_n, C)$ справедливо $g(u_n, t(p_n, P^n)) - g(u_n, C) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C)$.

Нетрудно видеть, что $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения (отсечения), есть, в то же время, $H(\gamma, C)$-последовательность восполнения (отсечения).

Определение 1.2.5. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$, порождаемую для $C\in\mathscr{C}$ схемой восполнения (отсечения), будем называть *асимптотической* $H(\gamma,C)$*-последовательностью* ($H_1(\gamma,C)$*-последовательностью) восполнения (отсечения)*, если для любого ε, $0<\varepsilon<\gamma$, существует номер N такой, что последовательность $\{P^{N+n}\}_{n=1,2,...}$ является $H(\gamma\text{-}\varepsilon,C)$-последовательностью ($H_1(\gamma\text{-}\varepsilon,C)$-последовательностью) восполнения (отсечения).

Итерационную схему аппроксимации будем называть *(асимптотической) H- (H_1-) схемой для класса тел* $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$ (с константой γ), если для каждого $C\in\mathscr{C}^*$ она является (асимптотической) H- (H_1-) схемой с одной и той же константой γ. Очевидно, что (асимптотическая) H- (H_1-) схема для класса тел $\mathscr{C}^*$ с константой γ_1 является H- (H_1-) схемой для класса тел $\mathscr{C}^*$ с константой γ_2, где $\gamma_1>\gamma_2$.

Далее в параграфе показывается, что H-схемы существуют для любого класса тел $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$. Для доказательства вводятся и используются «базовые» адаптивные методы восполнения ($М_{БВ}$) и отсечения ($М_{БО}$).

Базовый Метод Восполнения (БВ)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n\in\partial C$: $\rho(p_n, P^n) = \delta^H(P^n,C)$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \mathrm{conv}\, \{p_n, P^n\}$.

Базовый Метод Отсечения (БО)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $u_n := \arg\max\, \{g(u, P^n) - g(u, C): u\in S^{d-1}\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$.

В **§ 1.3** рассматриваются примеры методов, которые, как доказывается, относятся к классу хаусдорфовых методов.

Методы, реализующие H-схемы, будем называть *хаусдорфовыми* (или *H-) методами.* Класс методов, использующих H-схему восполнения или отсечения (т.е. порождающих H-последовательности восполнения или отсечения с константой γ для $C\in\mathscr{C}$), будем обозначать через $\mathfrak{H}(\gamma, C)$. Если необходимо, будем различать *класс H-методов* восполнения $\mathfrak{H}^{i}(\gamma, C)$ и – отсечения $\mathfrak{H}^{c}(\gamma, C)$. Очевидно, что при $\gamma_1\geq\gamma_2$ справедливо $\mathfrak{H}(\gamma_1, C)\subset\mathfrak{H}(\gamma_2, C)$. Если для некоторой константы γ, некоторого класса $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$ и некоторого метода М справедливо $\text{М}\in\mathfrak{H}(\gamma, C)$ для любого $C\in\mathscr{C}^*$, то будем писать $\text{М}\in\mathfrak{H}(\gamma, \mathscr{C}^*)$.

Класс методов, использующих H_1-схемы восполнения или отсечения (т.е. порождающих H_1-последовательности восполнения или отсечения с константой γ для тела $C\in\mathscr{C}$), будем обозначать через $\mathfrak{H}_1(\gamma, C)$. Если необходимо, будем различать *класс H_1-методов* восполнения $\mathfrak{H}^{i}_1(\gamma, C)$ и – отсечения $\mathfrak{H}^{c}_1(\gamma, C)$. Если для некоторой константы γ, некоторого класса $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$ и некоторого метода М справедливо $\text{М}\in\mathfrak{H}_1(\gamma, C)$ для любого $C\in\mathscr{C}^*$, то будем писать $\text{М}\in\mathfrak{H}_1(\gamma, \mathscr{C}^*)$. Если величина константы γ в некотором утверждении значения не имеет, класс H- (H_1-) методов будем обозначать через $\mathfrak{H}(\mathscr{C}^*)$ ($\mathfrak{H}_1(\mathscr{C}^*)$).

Класс методов, использующих асимптотические H-схемы восполнения или отсечения (т.е. порождающих асимптотические H-последовательности восполнения или отсечения с константой γ для тела $C\in\mathscr{C}$), будем обозначать через ${}^{a}\mathfrak{H}(\gamma, C)$. Если необходимо, будем различать *класс асимптотических H-методов* восполнения ${}^{a}\mathfrak{H}^{i}(\gamma, C)$ и отсечения ${}^{a}\mathfrak{H}^{c}_1(\gamma, C)$. Если для некоторой константы γ, некоторого класса $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$ и некоторого метода М справедливо $\text{М}\in{}^{a}\mathfrak{H}(\gamma, C)$ для любого $C\in\mathscr{C}^*$, то будем писать $\text{М}\in{}^{a}\mathfrak{H}(\gamma, \mathscr{C}^*)$. Совершенно аналогично определим *класс асимптотических H_1-методов* ${}^{a}\mathfrak{H}_1(\gamma, C)$ и обозначение $\text{М}\in{}^{a}\mathfrak{H}_1(\gamma, \mathscr{C}^*)$. Ясно, что для любых $C\in\mathscr{C}$ и γ справедливо $\mathfrak{H}(\gamma, C)\subset{}^{a}\mathfrak{H}(\gamma, C)$. Если величина константы γ в некотором утверждении значения не имеет, класс асимптотических H- (H_1-) методов будем обозначать через ${}^{a}\mathfrak{H}(\mathscr{C}^*)$ (${}^{a}\mathfrak{H}_1(\mathscr{C}^*)$).

Из свойств «базовых» адаптивные методов, полученных в §§ 1.2-1.3, вытекают:

Следствие 1.3.1. $\text{М}_{\text{БВ}}\in\mathfrak{H}^{i}(1, \mathscr{C})$, $\text{М}_{\text{БО}}\in\mathfrak{H}^{c}(1, \mathscr{C})$.

Следствие 1.3.2. $\mathfrak{H}(1, \mathscr{C})\neq\varnothing$.

Следствие 1.3.3. $\text{М}_{\text{БВ}}\in\mathfrak{H}^{i}_1(1, \mathscr{C})$.

Следствие 1.3.4. $\mathfrak{H}^{i}_1(1, \mathscr{C})\neq\varnothing$.

Базовый метод требует нахождения хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми вложенными компактами. Эта задача в общем случае слишком сложна, чтобы использоваться в приложениях.

Следующий метод «Уточнения Оценок» (УО) (см. историю его создания в [14], [25] и § 0.4) требует на каждой итерации метода конечного числа вычислений опорной функции и является в настоящее время основным АМПА, используемым на практике. Метод УО обозначим через $\mathrm{M}_{\mathrm{УО}}$.

Метод Уточнения Оценок (УО)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, C) - g(u, P^n): u\in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Свойства метода УО определяются следующими результатами:

Теорема 1.3.3. *Для любых* $C\in\mathscr{C}$ *и* $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ *метод* $\mathrm{M}_{\mathrm{УО}}$ *порождает* $H_1(r/R, C)$*-последовательность восполнения, где* $\gamma(P^0, C) := r/R$, *и* $B_r(z)\subset P^0\subset C\subset B_R(z)$, $z\in\mathrm{int}\ P^0$*, таким образом* $\mathrm{M}_{\mathrm{УО}}\in\mathfrak{H}^i_1(\gamma(P^0, C), C)$.

Следствие 1.3.6. *Для любого* $C\in\mathscr{C}$ *и любого* $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ *выполняется*

$$\mathrm{M}_{\mathrm{УО}}\in{}^{a}\mathfrak{H}^i_1(1/\omega(C), C).$$

Следствие 1.3.7. $\mathrm{M}_{\mathrm{УО}}\in{}^{a}\mathfrak{H}^i_1(1, \mathscr{C}_+^2)$.

Далее в параграфе приводятся аналоги метода УО, сформулированные в [18] на основе теории двойственности АМПА (см. гл. 3), которые позволяют строить H_1-последовательности отсечения.

Первый Метод Уточнения Внешних Оценок (УВО$_1$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ в виде множества $M^t(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $p_n := \arg\max \{\rho(p, p/g^*(p,C)): p\in M^t(P^n)\}$.

b). Найти $u_n\in S(p_n /g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

Второй Метод Уточнения Внешних Оценок (УВО$_2$).

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ в виде множества $M^t(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти

$$p_n := \arg\max \{g(u(p), p) - g(u(p), C): p\in M^t(P^n),$$
$$\text{где } u(p)\in S(p/g^*(p, C), C)\}.$$

b). Положить $u_n := u(p_n)\in S(p_n / g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

Метод УВО$_1$ обозначим через $\mathrm{M}_{\text{УВО1}}$. Метод УВО$_2$ обозначим через $\mathrm{M}_{\text{УВО2}}$. Свойства методов УВО определяются следующими результатами:

Теорема 1.3.6. *Для любых* $C\in\mathscr{C}_0$ *и* $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ *методы* $\mathrm{M}_{\text{УВО1}}$ *и* $\mathrm{M}_{\text{УВО2}}$ *порождают* $H_1(1/\omega_0(C), C)$*-последовательности отсечения, т.е.*

$$\mathrm{M}_{\text{УВО1}}, \mathrm{M}_{\text{УВО2}}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C).$$

Следствие 1.3.9. $\mathrm{M}_{\text{УВО2}}\in{}^a\mathfrak{H}^c{}_1(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+{}^2)$.

Таким образом, для классов H_1- методов отсечения справедливо

Следствие 1.3.8. *Для любого* $C\in\mathscr{C}_0$

$$\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C) \neq\varnothing.$$

Следствие 1.3.10. ${}^a\mathfrak{H}^c{}_1(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+{}^2)\neq\varnothing$.

В **§ 1.4** приводится пример нехаусдорфового метода – рассматривается предложенный автором метод «Сближающихся Многогранников», сочетающий в себе схемы отсечения и восполнения. Метод СМ обозначим через $\mathrm{M}_{\text{СМ}}$.

Метод Сближающихся Многогранников (СМ)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построены $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$ и $Q^n\in\mathscr{P}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n)\colon u\in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить $P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n\cap L(u_n, C)$.

Заметим, что на каждой итерации метода СМ вычисляется только одно значение опорной функции аппроксимируемого тела. Благодаря такой особенности, метод СМ (см. п. 2.6.4) в гладком случае оказывается оптимальным не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого тела. В главе 3 на основе теории двойственности АМПА рассмотрены методы отсечения, двойственные к методу СМ (методы СМ* и ДСМ). Эти методы основаны на вычислении дистанционной функции аппроксимируемого множества и обладают достоинствами и недостатками, аналогичными методу СМ. В частности, в гладком случае они оказываются оптимальными не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений дистанционной функции аппроксимируемого тела.

Вторая глава посвящена исследованию скорости сходимости, доказательству оптимальности и расчету эффективности (т.е. сравнению со скоростью сходимости многогранников наилучшей аппроксимации) хаусдорфовых методов.

В первых четырех параграфах рассматриваются методы исследования скорости сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации.

§ 2.1 – вводный. В **§ 2.2** излагается метод изменения объема на итерациях, который дает наиболее сильные оценки при исследовании скорости сходимости *H*-схем, при исследовании скорости сходимости на начальном этапе аппроксимации, а также при исследовании нехаусдорфовых методов.

В **§ 2.3** излагается метод упаковок нормалей на внешне-параллельном множестве, который дает наиболее сильные оценки при исследовании скорости сходимости H_1-методов при аппроксимации негладких тел.

В **§ 2.4** излагается метод «Глубоких Ям», который позволяет получить наиболее сильные результаты для оценки скорости сходимости хаусдорфовых алгоритмов в гладком случае.

В **§ 2.5** дана сводка результатов исследования скорости сходимости хаусдорфовых методов, полученных различными методами, выделены наилучшие оценки и рассмотрен вопрос об эффективности и оптимальности методов из рассматриваемого класса. В частности, показано, что в классе гладких тел асимптотическая скорость сходимости H_1-последовательностей восполнения отличается от асимптотической скорости сходимости многогранников наилучшей аппроксимации на константу, не зависящую от аппроксимируемого тела. Для *H*-последовательностей (и порождающих их методов) показано, что они оптимальны по порядку числа вершин (последовательности восполнения) и гиперграней (последовательности отсечения) в классе гладких выпуклых тел. Для H_1-последовательностей (и порождающих их методов) показано, что они оптимальны по порядку числа вершин (последовательности восполнения) и гиперграней (последовательности отсечения) в широком классе выпуклых тел, для которого порядок $2/(d\text{-}1)$ является неулучшаемым. Сходимость хаусдорфовых методов оценивается следующими теоремами.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_1(\gamma,C)k(n)^{1/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_2(\gamma,C)k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_1(\gamma,C)=\left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\left(\frac{\sigma(C)}{\gamma}\right)^d\right\}^{1/(d-1)}\omega(C)\,,$$

$$\lambda_2(\gamma, C) = \left\{ \frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}} \frac{\sigma(C)}{\gamma^d} \right\}^{1/(d-1)} \omega(C).$$

Теорема 2.3.1 и **следствие 2.3.1.** *Пусть* $C \in \mathscr{C}$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер N такой, что при* $n \geq N$ *справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_9(\gamma, C) := \frac{16R(C)}{\gamma} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $C \in \mathscr{C}_+^2$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при* $n \geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_3(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_4(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_3(\gamma, C) = \left\{ \frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}} \frac{\sigma(C)^{(d+1)/2}}{\gamma^d} \right\}^{2/(d-1)} \frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_4(\gamma, C) = \left\{ \frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}} \frac{\sigma(C)}{\gamma^d} \right\}^{2/(d-1)} \frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Следствия 2.4.4-2.4.6. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^H(C, P^n) k(n)^{2/(d-1)} \leq \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^S(C, P^n) k(n)^{2/(d-1)} \leq \frac{2\sigma(C)}{\gamma} \left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$.

Полученные оценки на скорость сходимости хаусдорфовых АМПА позволяют сделать следующие выводы об оптимальности по порядку хаусдорфовых АМПА.

Теорема 2.5.1. *Путь* $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{C}_\#$ *и* $\mathrm{M} \in \mathfrak{H}^i{}_1(\mathscr{C}^*)$ $(\mathrm{M} \in \mathfrak{H}^c{}_1(\mathscr{C}^*))$. *Тогда* M *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин (гиперграней) для класса* $\mathscr{C}^*$.

Теорема 2.5.2. *Путь* $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}_+^{\,2}$ *и* $\mathrm{M}\in\mathfrak{H}^i(\mathscr{C}^*)$ $(\mathrm{M}\in\mathfrak{H}^c(\mathscr{C}^*))$. *Тогда* M *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин (гиперграней) для класса* $\mathscr{C}^*$.

Приведем оценку на эффективность H_1-последовательностей.

Теорема 2.5.8. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ – $H_1(\gamma,\ C)$*-последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F)\geq\frac{\gamma}{4},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F)\geq\frac{\gamma}{4}\mathrm{del}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

Заметим, что эта оценка асимптотической эффективности в метрике Хаусдорфа не зависит от аппроксимируемого тела (в том числе от его асферичности) и прямо пропорциональна константе γ.

Изложенные в параграфе результаты о скорости сходимости, оптимальности по порядку и эффективности носят асимптотический характер. Они естественно распространяются и на случай асимптотических H-последовательностей и порождающих их АМПА.

В **§ 2.6** сформулированы основные результаты изучения скорости сходимости и эффективности конкретных методов, введенных в гл. 1. Эти результаты являются приложением теории скорости сходимости в классе хаусдорфовых методов к исследованию конкретных представителей из этого класса (подстановкой в скорости сходимости H- и H_1-последовательностей значений констант γ, соответствующих данному методу и данному классу аппроксимируемых тел, см. § 1.3). В частности, показано, что для любого выпуклого компактного тела методы «Уточнения Оценок» и «Уточнения Внешних Оценок» сходятся не хуже, чем со скоростью, имеющей порядок $2/(d$-$1)$. Таким образом, эти методы являются оптимальными по порядку числа вершин (метод УО) и числа гиперграней (методы УВО) в классе тел, для которых этот порядок является неулучшаемым. Кроме того, показано, что указанные методы являются асимптотически эффективными в классе тел с гладкой границей и положительными главными кривизнами, причем достигаемая с их помощью точность асимптотически не более чем в четыре раза хуже точности аппроксимации многогранниками наилучшей аппроксимации с тем же числом вершин или гиперграней.

В заключение параграфа рассматривается скорость сходимости метода «Сближающихся Многогранников». Этот метод, как и хаусдорфовы методы, основан на общих адаптивных схемах восполнения и отсечения. Однако, как уже отмечалось, он не принадлежит к классу H-методов. Поэтому для его исследования используется аппарат изучения изменения объема на итерациях, развитый в § 2.2. В результате этого исследования, в частности, показано, что метод CM в классе тел с гладкой границей и положительными главными кривизнами оптимален по порядку числа вершин внутренних, гиперграней внешних многогранников и по числу задач вычисления опорной функции. Оптимальность по числу задач вычисления опорной функции – уникальное свойство этого метода, отличающее его от других методов, рассматриваемых в настоящей работе.

Теорема 2.6.32. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\dots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом CM для* $C\in\mathscr{C}$, $\omega(C)\neq 1$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует N такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_1^{CM}(C)k(n)^{1/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_2^{CM}(C)k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n, $m^t(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$ *и*

$$\lambda_1^{CM}(C) = 2\left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^d\right\}^{1/(d-1)}[\omega(C)^2-1]^{1/2}\omega(C)^{d/(d-1)},$$

$$\lambda_2^{CM}(C) = 2\left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{1/(d-1)}[\omega(C)^2-1]^{1/2}\omega(C)^{d/(d-1)}.$$

Теорема 2.6.33. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\dots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом CM для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует N такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_3^{CM}(C)\,k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_4^{CM}(C)\,k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n, $m^t(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$, *и*

$$\lambda_3^{CM}(C) = \left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^{(d+1)/2}\right\}^{2/(d-1)}\frac{8}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_4^{CM}(C) = \left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{2/(d-1)}\frac{8}{r_{\min}(C)}.$$

Теорема 2.6.34. M_{CM} *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин внутренних, гиперграней внешних многогранников и по числу задач вычисления опорной функции аппроксимируемого множества для класса* $\mathscr{C}_+^2$.

Теорема 2.6.36. *Пусть* $F_1:=\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *есть последовательность внутренних и* $F_2:=\{Q^n\}_{n=0,1,2,\dots}$*– внешних многогранников, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *методом CM. Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F_1) \ge \frac{1}{4}\eta_d^H\,\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},\ \underline{\eta}^{cH}(F_2) \ge \frac{1}{4}\eta_d^H\,\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F_1) \ge \frac{1}{4}\eta^{i}{}_{d}^{S}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},\ \underline{\eta}^{cS}(F_2) \ge \frac{1}{4}\eta^{c}{}_{d}^{S}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\eta_d^H = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\eta^{i}{}_{d}^{S} = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}\mathrm{del}_{d\text{-}1},\ \eta^{c}{}_{d}^{S} = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}\mathrm{div}_{d\text{-}1}.$$

В **§ 2.7** изучена сходимость рассматриваемых в диссертации методов на начальном этапе аппроксимации. Полученные результаты позволяют рассчитывать скорость сходимости этих методов на начальном этапе для любых тел (в том числе и при аппроксимации многогранников).

В **третьей главе** излагается теория двойственности для адаптивных методов полиэдральной аппроксимации.

Необходимость применения теории двойственности в задачах полиэдральной аппроксимации возникает в следующих случаях:

– когда при наличии методов, основанных на описании аппроксимируемого тела через опорную (дистанционную) функцию, необходимо разработать МПА для тел с двойственным описанием через дистанционную (опорную) функцию;
– когда при наличии методов с последовательно растущим числом вершин (гиперграней) необходимо разработать МПА многогранниками с двойственным описанием, т.е. с последовательно растущим числом гиперграней (вершин);
– при необходимости разработки МПА, оптимальных по числу вычислений опорной и / или дистанционной функции аппроксимируемого тела.

Эта теория устанавливает взаимосвязь между рассматриваемыми в диссертации хаусдорфовыми методами восполнения и отсечения и позволяет разрабатывать новые методы.

В **§ 3.1** разрабатывается аппарат двойственного описания методов полиэдральной аппроксимации, определенных с помощью схем восполнения и отсечения.

Пусть $C\in\mathscr{C}$, обозначим $C^*:=\{x\in\mathbb{E}^d\colon \langle x, y\rangle\le 1, y\in C\}$ – полярное множество (поляру) для C (относительно $\{0\}$). Пусть $y\in\mathbb{E}_0{}^d$ и $l_y:=\{x\in\mathbb{E}^d\colon \langle x, y\rangle=1\}$. Под полярой $\pi(y)$ для точки y (относительно сферы $\langle x, x\rangle=1$) будем понимать гиперплоскость l_y, а через $\pi(l_y)\equiv\{y\}$ обозначим полюс (относительно сферы $\langle x, x\rangle=1$) для гиперплоскости l_y. Пусть $C\in\mathscr{C}_0$, тогда известно, что $C^*\in\mathscr{C}_0$, $C^{**}\equiv C$, полюс каждой (экстремальной) гиперплоскости, опорной к C, есть (экстремальная) граничная точка C^*, и поляра каждой (экстремальной) граничной точки C есть (экстремальная) опорная гиперплоскость для C^*. В наших обозначениях для $u\in S^{d-1}$ и $p\in\partial C$ имеем

$$\pi(l(u,C))=\frac{u}{g(u,C)}\in\partial C^*;$$

$$\pi(p)=l(u_p,C^*),\, g(u_p,C^*)=\frac{1}{\|p\|},\, u_p:=\frac{p}{\|p\|}.$$

Кроме того, опорная и дистанционная (калибровочная) функции полностью "дуальны": $g(x, C^*)=g^*(x, C)$, и $g^*(x, C^*)=g(x, C)$. Определенные в гл. 1 аппроксимационные схемы отсечения и восполнения являются двойственными в смысле следующей теоремы.

Теорема 3.1.1. *Пусть последовательность многогранников* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$, *где* $P^n\in\mathscr{C}_0$, n=0,1,2,... , *является последовательностью восполнения (отсечения) для* $C\in\mathscr{C}_0$. *Тогда последовательность многогранников* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,2,...}$ *является последовательностью отсечения (восполнения) для* C^*.

В **§ 3.2** устанавливается факт двойственности H- и H_1-последовательностей восполнения и отсечения: последовательность из многогранников, полярных к многогранникам H- (H_1-) последовательности восполнения, оказывается H- (H_1-) последовательностью отсечения для полярного тела и наоборот.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть (асимптотическая)* $H(\gamma, C)$-*последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^n\in\mathscr{P}_0$, n=0,1,... . *Тогда* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть (асимптотическая)* $H(\gamma_a, C^*)$-*последовательность отсечения, где*

$$\gamma_a:=\frac{r_0(P^0)^2}{R_0(C)^2}\gamma\ .$$

Кроме того, $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H(\gamma^*(\gamma, C), C^*)$-*последовательность отсечения, где*

$$\gamma^*(\gamma,C):=\frac{\gamma}{\omega_0(C)^2}\ .$$

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ – *(асимптотическая)* $H(\gamma, C)$-*последовательность отсечения для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^n\in\mathscr{P}_0$, n=0,1,... . *Тогда* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть (асимптотическая)* $H(\gamma_c, C^*)$-*последовательность восполнения, где*

$$\gamma_c:=\frac{r_0(C)^2}{R_0(P^0)^2}\gamma\ .$$

Кроме того, $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H(\gamma^*(\gamma, C), C^*)$-*последовательность восполнения, где константа* $\gamma^*(\gamma, C)$ *определена в утверждении теоремы 3.2.1.*

Аналогичные утверждения справедливы и для H_1-последовательностей восполнения и отсечения.

В **§ 3.3** развитая теория двойственности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации используется для исследования скорости сходимости и эффективности этих методов. В частности, показано, что рассматриваемый подход позволяет для произвольного метода аппроксимации, основанного на схеме восполнения (отсечения), переходить к его точному двойственному аналогу – методу отсечения (восполнения), применимому для аппроксимации полярного тела, и, варьируя весовые коэффициенты, конструировать новые адаптивные методы как различные двойственные аналоги для уже существующих оптимальных методов. В заключение параграфа рассматривается проблема использования двойственных методов для решения прямых задач (прямодвойственные методы) и смешанная задача построения многогранников с двойственным (прямым) описанием при аппроксимации тел заданных прямым (двойственным) способом (комбинированные или двухфазные методы).

В **§ 3.4** рассматривается вопрос построения методов, оптимальных по порядку числа решений задач оптимизации на аппроксимируемом теле для негладких тел. В параграфе рассматриваются методы, состоящие одновременно из H_1-метода восполнения (отсечения) и метода отсечения (восполнения) из класса, двойственного к нему. Такие методы мы называем самодвойственными. В параграфе приводится описание двух самодвойственных методов, предложенных автором, получены верхние оценки их скорости сходимости, имеющие порядок $2/(d$-$1)$. Показано, что в классе тел, для которых этот порядок является неулучшаемым, они являются оптимальными по порядку числа вершин вписанных, гиперграней описанных аппроксимирующих многогранников, по числу вычислений опорной и дистанционной функций, т.е. числу решений задач выпуклой оптимизации на аппроксимируемом теле.

Приведем описание одного из самодвойственных методов ($\mathrm{M}_{\text{СМД}1}$). Пусть задан пороговый параметр метода λ, $0 < \lambda < 1$.

Самодвойственный$_1$ Метод (СМД$_1$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0^c(C)$ построены $P^n\in\mathscr{P}_0^i(C)$ и $Q^n\in\mathscr{P}_0^c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

a). Найти $v_n\in M^f(P^n)$ и $q_n\in T(v_n, Q^n)$, где

$$v_n := \arg\max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n): u\in M^f(P^n)\}.$$

b). Найти $p_n\in T(v_n, C)$.

c). Если

$$g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n) \geq \lambda\, [g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)],$$

то

$$\text{построить } P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\},$$
$$\text{положить } Q^{n+1} := Q^n,$$

иначе

$$\text{найти } u_n \in S(q_n/g^*(q_n, C), C),$$
$$\text{построить } Q^{n+1} := Q^n \cap L(u_n, C),$$
$$\text{положить } P^{n+1} := P^n.$$

Свойства метода СМД$_1$ определяются, в частности, следующими утверждениями.

Следствие 3.4.1. *Пусть* $\{P_1{}^n\}_{n=1,2,...}$ *и* $\{Q_1{}^n\}_{n=1,2,...}$ *– подпоследовательности внутренних и внешних многогранников с различными членами, порождаемые методом СМД$_1$ для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$. *Тогда они являются асимптотическими* $H_1(\gamma_a, C)$*-последовательностью восполнения с* $\gamma_a := \lambda/\omega(C)$ *и* $H_1(\gamma_c, C)$*-последовательностью отсечения с* $\gamma_c := (1-\lambda)/[\omega(C)\omega_0(C)]$, *соответственно.*

Теорема 3.4.2. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,...}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМД$_1$ для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\lambda/\omega(C), C)\, (m^t(P^n))^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9((1-\lambda)/(\omega(C)\omega_0(C)), C)\, (m^f(Q^n))^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi(\lambda, C)\, n^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi(\lambda, C)\, k_1(n)^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9((1-\lambda)/(\omega(C)\omega_0(C)), C)\, k_2(n)^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi_1(\lambda, C)\, k_3(n)^{-2/(d-1)},$$

где $k_1(n)$ *есть* $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$, $k_2(n)$ *есть* $m^{g^*}(P^n)$ *или* $m^{g^*}(Q^n)$, $k_3(n)$ *есть* $m^{\mathrm{opt}}(P^n)$ *или* $m^{\mathrm{opt}}(Q^n)$, *константа* $\lambda_9(\gamma, C)$ *определена в (3.4.3), и*

$$\psi(\lambda, C) := \left[\lambda^{\frac{1-d}{2}} + \omega_0(C)^{\frac{d-1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{1-d}{2}}\right]^{\frac{2}{d-1}},$$

$$\psi_1(\lambda, C) := \left[\lambda^{\frac{1-d}{2}} + 2\omega_0(C)^{\frac{d-1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{1-d}{2}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Теорема 3.4.3. М$_{\text{СМД}1}$ *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин внутренних многогранников, числа гиперграней внешних многогранников, числа вычислений опорной* *и дистанционной функций аппроксимируемого множества и числа задач оптимизации, решаемых на аппроксимируемом множестве, для класса* $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_\#$.

В **четвертой главе** исследуется наилучшая достижимая точность аппроксимации двумерных выпуклых компактных тел многоугольниками и получена новая оценка скорости сходимости многогранников наилучшей аппроксимации.

Как уже говорилось выше, про минимальное число вершин многогранника, необходимое для получения аппроксимации с заданной точностью, известно только, что его порядок, аппроксимационное число тела, имеет верхнюю оценку вида $(d\text{-}1)/2$. Т.е. в двумерном случае (d=2) минимально необходимое число вершин оценивается по порядку обратной величиной к корню от требуемой точности и не зависит от свойств гладкости аппроксимируемого тела. Ясно, что в случае, когда аппроксимируемым телом является, например, многогранник, эта оценка является очень грубой. Более тонкие верхние оценки в общем случае отсутствуют. Исследование, приведенное в гл. 4, устанавливает связь между верхней оценкой скорости сходимости многоугольника наилучшей аппроксимации и метрическими свойствами (в частности, размерностью) множества крайних точек аппроксимируемого диска.

В **§ 4.1** приводятся известные аппроксимационные свойства выпуклых дисков. В **§ 4.2** приводятся определения, необходимые для описания различных типов сходимости многогранников к выпуклым телам.

Пусть U и A – непустые подмножества метрического пространства $\mathbb{R}$. Множество U называется ε-сетью для A, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Множество U называется ε-различимым, если любые две его различные точки находятся на расстоянии, большем, чем ε. Множество A называется вполне ограниченным, если для любого положительного ε существует конечная ε-сеть для A.

Для вполне ограниченного A обозначим через $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ минимальное число точек ε-сети A и через $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A. Величины $\mathfrak{H}^R{}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ и $\mathfrak{E}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ назовем, соответственно, относительной ε-энтропией и ε-емкостью A (под log здесь и далее понимается $\log_2$). *Нижняя метрическая размерность* вполне ограниченного множества A определяется как

$$\underline{\mathrm{dm}}\, A := \liminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathfrak{H}_\varepsilon^R(A)}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathfrak{E}_\varepsilon(A)}{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}.$$

Аналогично определяется верхняя метрическая размерность $\overline{\mathrm{dm}}A$, а при равенстве верхней и нижней – метрическая размерность dm A.

Пусть $0 \le \alpha < 2\pi$ такая параметризация S, что для $0 \le \alpha < \pi$ можно определить

$$\alpha_-(p) := \min \{\alpha\colon\ u = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in S(p, C)\};$$
$$\alpha_+(p) := \max \{\alpha\colon\ u = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in S(p, C)\}.$$

Обозначим через $s_-(p)$ и $s_+(p)$ граничные векторы $S(p, C)$:

$$s_-(p) := (\cos \alpha_-(p), \sin \alpha_-(p));$$
$$s_+(p) := (\cos \alpha_+(p), \sin \alpha_+(p)).$$

Обозначим

$$s(p) := (s_-(p) + s_+(p)) \,/\, \|s_-(p) + s_+(p)\|$$

– средний вектор единичных внешних нормалей в точке p (аналог симметричной производной Шварца). Пусть Z: $\partial C \to \partial(C+B)$ такое, что $Z(p) := p + s(p)$, $p \in \partial C$.

В **§ 4.3** описывается предложенная автором модификация метода «Уточнения Оценок» – хаусдорфовый метод «Экстремальных Ям». На каждой итерации рассматриваемого метода к множеству вершин аппроксимирующего многоугольника прибавляется наиболее удаленная от него экстремальная точка аппроксимируемого тела (так называемая *глубокая яма*), что и служит обоснованием названия самого алгоритма.

Метод Экстремальных Ям (ЭЯ)

Пусть $t_1 \in \mathrm{ext}\, C$ и $T_1 := \{t_1\}$. Пусть множество T_n построено и $\delta(C, \mathrm{conv}\, T_n) > 0$. Тогда $T_{n+1} := T_n \cup \{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1} \in \mathrm{ext}\, C$ и

$$\rho(t_{n+1}, \mathrm{conv}\, T_n) = \delta(C, \mathrm{conv}\, T_n).$$

Метод ЭЯ принадлежит к классу хаусдорфовых АМПА аппроксимации многомерных ВКТ, описанному в гл. 1 и исследованному в гл. 2. От метода БВ, описанного в гл. 1 и порождающего H_1-последовательности многогранников с константой 1, алгоритм ЭЯ отличается только конкретизацией выбора присоединяемой вершины t_{n+1} обязательно из множества экстремальных точек.

Обозначим $P^n := \mathrm{conv}\, T_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Следующая теорема, характеризующей скорость сходимости последовательности $\{P^n\}_{n = 1, 2, \ldots}$ к аппроксимируемому телу:

Теорема 4.3.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n = 1, 2, \ldots}$ *– последовательность, порождаемая методом ЭЯ для* $C \in \mathscr{C}$. *Тогда для любых* $n > \sigma(C+B)/\sqrt{2}$, *и* ν, $0 < \nu < \delta(P^n, C)$, *справедливо*

$$n + 1 \le \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\delta(P^n, C) - \nu}}{1 + \sqrt{2}}, Z(\mathrm{ext}\, C) \right).$$

В **§ 4.4** показано, что в случае негладких тел из этой оценки вытекает следующая новая оценка минимально необходимого числа вершин многоугольников наилучшей аппроксимации.

Теорема 4.4.1. *Для* $C\in\mathscr{C}$ *при* $n \geq N_0(C)$ *и* ν, $0 < \nu < \delta(\mathscr{P}_n, C)$, *справедливо*

$$n+1 \leq N_{\delta(\mathscr{P}^n, C)-\nu}(C),$$

где $N_0(C) := 1 + \sigma(C+B)/\sqrt{2}$ *и*

$$N_\varepsilon(C) := \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{2}}, Z(\operatorname{ext} C)\right).$$

Теорема 4.4.1 позволяет дать верхние оценки числа вершин МНА, необходимых для достижения любой заданной точности аппроксимации.

Следствие 4.4.1. *Для* $C\in\mathscr{C}$ *и любых* ε *и* ν, $0 < \nu < \varepsilon$, *справедливо*

$$\min\{n: \delta(\mathscr{P}_n, C) \leq \varepsilon\} \leq \max\{N_0(C), N_{\varepsilon-\nu}(C)\},$$

где $N_0(C)$ *и* $N_\varepsilon(C)$ *определены в формулировке теоремы 4.4.1.*

Далее, в главе получены следствия из полученной оценки. В **§ 4.5** показано, что аппроксимационное число (порядок скорости сходимости) тела не превышает половины верхней метрической размерности множества продолженных экстремальных точек.

Теорема 4.5.1. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$. *Тогда*

$$\underline{\alpha}(C) \leq \overline{\alpha}(C) \leq \frac{\overline{\operatorname{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C)}{2}.$$

В **§ 4.6** дана верхняя оценка аппроксимируемости (множества функциональных зависимостей точности аппроксимации от числа вершин), справедливая и для скорости сходимости более быстрой, чем полиномиальная.

В **§ 4.7** в качестве примера использования техники исследования, развитой в четвертой главе, рассматривается один класс двумерных дисков с бесконечным (счетным) числом вершин. В этом случае удается аналитически рассчитать скорость сходимости многоугольников наилучшей аппроксимации и сравнить её с верхней оценкой, получаемой по рассмотренной в главе методике. Показано, что полученные таким образом оценки совпадают.

Определим множество M_λ ($\lambda > 0$) из класса $\mathscr{C}$ следующим образом. На плоскости $\mathbb{E}^2$ в положительном ортанте рассмотрим четверть окружности $S_+ := \{x^2+y^2=1:\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$. Далее на оси y рассмотрим последовательность точек Q_λ^n с координатами $(0, n^\lambda)$, $n=0,1,\ldots$. Каждую из вершин Q_λ^n соединим отрезком D^n с точкой $B(1, 0)$. Точки пересечения отрезков D^n с S_+ обозначим T^n. И определим, наконец, множество M_λ:

$$M_\lambda = \mathrm{conv}\{O, B, \{T^n\}_{n=1}^{\infty}\},$$

где O – начало координат (0, 0). Класс тел M_λ ($\lambda > 0$) обозначим через $\mathcal{M}$.

Теорема 4.7.1. $\alpha(M_\lambda) = \dfrac{1}{2\lambda + 2}$.

Теорема 4.7.2. $\overline{\mathrm{dm}}\, Z(\mathrm{ext}\, M_\lambda) \le \dfrac{1}{\lambda + 1}$

Следствие 4.7.3. *Метод ЭЯ оптимален по порядку при аппроксимации тел из класса* $\mathcal{M}$.

Задачей **пятой главы** является выработка и применение методологии численного исследования асимптотической эффективности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации.

В **§ 5.1** рассматриваются задачи и разработанная автором общая методика численного исследования эффективности методов полиэдральной аппроксимации. Она основана на сравнении асимптотических оценок сходимости МНА с эффективностью АМПА, полученных в реальных численных экспериментах по аппроксимации, и состоит из двух основных этапов: 1) исследования порядка скорости сходимости; 2) исследования собственно эффективности.

1) Первый этап состоит в следующем. Будем считать, что гипотетический оптимальный метод (метод построения МНА) для ВКТ C имеет асимптотическую скорость сходимости вида

$$\delta(C, \Pi^n) \approx \frac{A(C)}{[m(\Pi^n)]^{1/\alpha(C)}},$$

где $\alpha(C)$ и $A(C)$ – некоторые константы, а m – некоторая вычислительная характеристика аппроксимирующего МНА Π^n: число итераций n, число вычислений опорной или дистанционной функции G, число вершин m^t, число гиперграней m^f. После этого можно выделить две части исследования.

а). *Обоснование применимости асимптотической теории.* Пусть в процессе численной аппроксимации получена последовательность многогранников $\{P^n\}$. Проверим гипотезу о том, что асимптотически

$$\delta(C, P^n) \approx \frac{A'(C)}{[m(P^n)]^{1/\alpha^*(C)}},$$

где $A'(C)$ и $\alpha^*(C)$ – некоторые положительные константы, минимизирующие ошибку интерполяции экспериментальных точек в координатах $\log \delta(C, P^n)$ и $\log m(P^n)$. Если разброс точек относительно прямой

$$\log \delta(C, P^n) = \log A'(C) - \log m(P^n) / \alpha^*(C)$$

невелик, гипотезу можно считать справедливой.

б). *Сравнение порядка скорости сходимости и аппроксимационного числа.* Сравним величины $\alpha(C)$ и $\alpha^*(C)$. Их близость говорит о том, что порядок скорости сходимости многогранников, порождаемых исследуемым методом и МНА, один и тот же. В этом случае численные исследования будут подтверждать применимость асимптотической теории для оценки скорости сходимости на конечных итерациях.

Заметим, что для проведения данного этапа экспериментального исследования достаточно знать только величину аппроксимационного числа тела: $\alpha(C)$. Поэтому данный этап исследования может быть применен в отношении, например, любых тел из класса $\mathscr{C}^2$, для которых $\alpha(C) =(d-1)/2$, а также в том случае, когда величина аппроксимационного числа может быть рассчитана специально (см., например, класс тел из § 4.7).

2) Второй этап состоит также из двух частей.

а). Исследование эффективности на итерациях метода.

Пусть $C\in\mathscr{C}$ и $P\in\mathscr{P}(C)$. Эффективность аппроксимации может быть рассчитана как

$$\eta(P) := \frac{A(C)}{[m(P)]^{1/\alpha(C)}\,\delta(C,P)}\,.$$

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ – сходящаяся к $C\in\mathscr{C}$ последовательность многогранников, построенная исследуемым методом. Начиная с некоторого номера N_0, определим эмпирические величины

$$\eta^*_{\min}(C) := \min\,\{\eta(P^n) : N_0 \le n \le N_1\},$$
$$\eta^*_{\max}(C) := \max\,\{\eta(P^n) : N_0 \le n \le N_1\},$$
$$\eta^*\,(C) := \sum_{n=N_0}^{N_1} \eta(P^n)/(N_1 - N_0 + 1)\,,$$

где N_1 – максимальный достигнутый в эксперименте номер итерации метода. Эти величины характеризуют эффективность метода на рассматриваемом отрезке последовательности $\{P^n\}$.

б). Исследование асимптотической эффективности метода.

В случае, если на первом этапе исследования гипотеза о сходимости рассматриваемой последовательности многогранников с оптимальным порядком $\alpha^* = \alpha(C)$ считается подтвержденной, начиная с номера N_0, то, экстраполируя результаты аппроксимации, получаем, что величины $\eta^*_{\min}(C)$ и $\eta^*_{\max}(C)$ могут служить эмпирическими оценками для нижней и верхней асимптотической эффективности метода:

$$\underline{\eta}(C) \approx \eta^*_{\min}(C),\ \overline{\eta}(C) \approx \eta^*_{\min}(C)\,.$$

Заметим, что для проведения данного этапа экспериментального исследования необходимо знать не только величину аппроксимационного числа тела $\alpha(C)$, но и уметь рассчитывать *константу аппроксимируемости* $A(C)$:

$$A^H(C)=\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$A_i^S(C)=\frac{1}{2}\,\mathrm{del}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}\,d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)},$$

$$A_c^S(C)=\frac{1}{2}\,\mathrm{div}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}\,d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)}.$$

Поэтому второй этап численного исследования эффективности АМПА может быть проведен только в том случае, когда удается рассчитать поверхностные интегралы либо аналитически (что практически возможно только в простейшем случае шаров), либо приближенно, сведя их вычисление к обычному интегрированию. Именно так мы поступаем в классе многомерных эллипсоидов.

Наконец, с величиной $A(C)$ может быть сравнена экспериментальная константа сходимости $A^*(C)$, полученная заменой $\alpha^*(C)$ на точное значение апрроксимационного числа $\alpha(C)$:

$$\log \delta(C,P^n)=\log A^*(C)-\ \log m(P^n)\,/\alpha(C).$$

При этом величина $A(C)/A^*(C)$ также, наряду с $\eta^*(C)$, может служит мерой эффективности метода аппроксимации.

В **§ 5.2** в качестве объектов аппроксимации выбраны многомерные телесные эллипсоиды. Важность исследования эффективности алгоритмов в классе эллипсоидов определяется тем фактом, что эллипсоиды являются наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике объема симметрической разности. Кроме того, этому классу принадлежит шар, являющийся наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике Хаусдорфа. Основным результатом данного параграфа является сведение задачи расчета константы аппроксимируемости в классе многомерных эллипсоидов к обычному интегрированию по прямоугольной области. Это позволяет проводить исследование методов в классе эллипсоидов в полном объеме.

В **§ 5.3** излагаются результаты различных численных исследований метода «Уточнения Оценок» в классе многомерных эллипсоидов. В **§ 5.4** кратко излагаются результаты исследований других адаптивных методов по разработанной методике.

В **§ 5.5** рассматриваются численные эксперименты по аппроксимации введенного в § 4.7 класса выпуклых дисков со счетным числом вершин и нетривиальной (лежащей между 0 и ½) верхней оценкой для аппроксимационного числа.

В **§ 5.5** рассматриваются основные выводы из приведенных в диссертации экспериментальных исследований:

1) предложенная в главе методика экспериментального исследования полиэдральной аппроксимации ВКТ является универсальным средством для исследования различных методов и различных классов тел (гладкие тела, тела с бесконечным числом вершин, многогранники с огромным числом вершин и гиперграней);
2) предложенная в главе методика позволяет исследовать как порядок асимптотической скорости сходимости, так и асимптотическую эффективность;
3) рассматриваемые АМПА (в частности, методы УО, СМ, прямо-двойственный, комбинированный) являются оптимальными по порядку для различных классов тел и метрик, при этом асимптотическая скорость сходимости достигается в большинстве случаев уже при достижимой в экспериментах точности;
4) полученные экспериментальные результаты подтверждают теоретические выводы (см. главы 2, 3 и 4) о скорости сходимости и эффективности оптимальных АМПА, рассматриваемых в диссертации.

Заметим также, что ряд результатов численных экспериментов (независимость эффективности метода УО в классе эллипсоидов от свойств аппроксимируемого тела, сверхбыстрая по сравнению с гладкими телами скорость сходимости метода УО в классе тел с бесконечным числом вершин) был получен раньше, чем соответствующие теоретические результаты, что явилось стимулом для разработки соответствующего математического обоснования.

Глава шестая посвящена вопросам практического применения оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в задачах принятия решений, главным образом, в рамках метода ОМД.

В **§ 6.1** приводится математическое описание метода ОМД, рассматриваются некоторые особенности использования в нем адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, а также вопросы визуализации аппроксимирующих многогранников в данном подходе. Предлагается разработанный автором (совместно с О.Л. Черных) быстрый алгоритм построения больших серий сечений выпуклых многогранников.

В **§ 6.2** приводится пример использования описанных в диссертации адаптивных методов полиэдральной аппроксимации для анализа экономических и экологических аспектов проблемы распределения водных ресурсов в регионе с развитым сельским хозяйством. За основу модели, используемой в исследовании, принята модель, разработанная в Международном институте прикладного системного анализа. Отметим, что используемая модель отличается подробным описанием производственных процессов. В связи с этим расчет опорной функции аппроксимируемого ОМД требовал значительного времени, что во многом способствовало развитию существующих и появлению новых методов аппроксимации выпуклых тел, изложенных в первой главе.

В **§ 6.3** рассмотрена методика многокритериального анализа эколого-экономических проблем методом ОМД в целом и кратко охарактеризованы прикладные исследования, основанные на использовании адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в рамках метода ОМД.

В **§ 6.4** рассматривается применение адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в задаче визуализации множества Парето в многомерных задачах выбора из конечного числа альтернатив и кратко описываются примеры использования этого подхода.

§ 6.5 посвящен аппроксимации множеств достижимости динамических моделей, описываемых системами управляемых дифференциальных уравнений или дифференциальными включениями. Различные методики построения явного описания этих множеств были предложены А.В. Лотовым. В параграфе рассматриваются, главным образом, вопросы использования оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации для аппроксимации множеств достижимости.

В **§ 6.6** рассматривается проблема идентификации совокупности параметров по имеющимся в наличии данным наблюдений. В параграфе предлагается визуальный подход к решению задачи идентификации параметров и характеристик моделей, основанный на методах полиэдральной аппроксимации, который может быть особенно эффективным в случае недостатка информации и данных.

Таким образом, в шестой главе рассмотрены различные сферы применения адаптивных методов полиэдральной аппроксимации в задачах принятия решений и математического моделирования.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Бушенков В.А., Каменев Г.К., Лотов А.В., Черных О.Л. Использование геометрического метода для анализа эколого-экономических систем // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова и А.А. Самарского. М.: Наука, 1986. С. 240-252.
2. Каменев Г.К. Исследование итерационных методов аппроксимации выпуклых множеств многогранниками М.: ВЦ АН СССР. 1986. – 40 с.
3. Каменев Г.К. Об одном классе адаптивных схем аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Математическое моделирование и дискретная оптимизация. М: ВЦ АН СССР. 1988. С. 3-9.

4. Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К. Экспериментальное исследование аппроксимации выпуклых тел многогранниками. М.:ВЦ АН СССР. 1991. – 51 с.
5. Каменев Г.К. Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. № 1. С. 136-152.
6. Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К. Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. № 6. С.857-866.
7. Каменев Г.К. Об эффективности хаусдорфовых алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т.33. № 5. С. 796-805.
8. Каменев Г.К. Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34. № 4. С. 608-616.
9. Бушенков В.А., Гусев Д.И., Каменев Г.К., Лотов А.В., Черных О.Л. Визуализация множества Парето в многомерной задаче выбора // Доклады Академии наук. 1994. Т.335. № 5. С. 567-569.
10. Каменев Г.К. Алгоритм сближающихся многогранников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. № 4. С. 134-147.
11. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. / Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. М.: Наука, 1997. – 239 с.
12. Каменев Г.К. Визуальный метод идентификации параметров // Доклады Академии наук. 1998. Т.359. № 3. С. 319-322.
13. Каменев Г.К. Эффективные алгоритмы аппроксимации негладких выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. № 3. С. 423-127.
14. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999. – 400 с.
15. Каменев Г.К. Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 10. С. 1464-1474.
16. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т.41. № 11. С. 1751-1760.
17. Ефремов Р.В., Каменев Г.К. Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. №1. С.23-32.

18. Каменев Г.К. Сопряженные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. №9. С. 1351-1367.
19. Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е. Аппроксимация и визуализация Паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // Доклады Академии наук. 2002. Т.386. № 6. С. 738-741.
20. Каменев Г.К. Самодвойственные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. №8. С. 1123-1137.
21. Каменев Г.К. Метод полиэдральной аппроксимации выпуклых тел, оптимальный по порядку числа расчетов опорной и дистанционной функций // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388. № 3. С. 309-311.
22. Kamenev G.K., Lotov A.V., van Walsum P.E.V. Application of the GRS Method to Water Resources Problems in the Southern Peel Region of the Netherlands, CP-86-19. International Institute for Applied Systems Analysis. Laxenburg, Austria, 1986. – 55 pp.
23. Lotov A. Bushenkov V., Kamenev G., Chernykh O. Method and software for decision making in public problems // Information technology and economic modeling. A joint Finnish-Soviet symposium Helsinki, Finland. Technical research center of Finland, Espoo, 1992. P. 293-308.
24. Chernykh, O.L., and Kamenev, G.K. Linear algorithm for a series of parallel two-dimensional slices of multidimensional convex polytope // Pattern Recognition and Image Analysis, 1993, 3(2), pp. 77-83.
25. Bushenkov, O.L. Chernykh, G.K. Kamenev, and A.V. Lotov. Multidimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 5, No. 1, 1995. P. 35-56.
26. Kamenev G.K. One class of effective step-by-step algorithms for polyhedral approximation // Konvexgeometrie. Mat. Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht. 1997. N 44. P.12-14.
27. Lotov A., Bushenkov V., Kamenev G., Loucks D., Camara A. Water Resource Conflict Resolution Based on Interactive Tradeoffs Display // Restoration of Degraded Rivers: Challenges, Issues and Experiences, ed. by D.P.Loucks, Kluwer Academic Publishers. 1998. P. 447-470.
28. Lotov A., Bushenkov V., Kamenev G. Feasible Goals Method. Search for Smart Decisions. M.: ВЦ РАН, 2001. – 239 с.
29. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston, Dordrecht, New York, London. 2004. - 310 P.