

Многокритериальный метод множеств идентификации¹

©2015 г. Г.К. Каменев

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН)

e-mail: gkk@ccas.ru

Предлагается многокритериальный метод идентификации и прогнозирования для математических моделей имитационного типа при наличии нескольких критериев качества (функций ошибок). Необходимость в многокритериальной постановке возникает, например, в случае, когда требуется принять во внимание ошибки с совершенно различным, несводимым в один показатель, генезисом, а также в случае отсутствия необходимой информации о классе помех в данных. В работе рассматривается метод множеств идентификации, основанный на аппроксимации и визуализации многомерного графика функции ошибок идентификации, а также множеств субоптимальных параметров. Применение этого метода позволяет использовать дополнительные преимущества многокритериального подхода: строить и визуально исследовать границу и эффективное множество идентификации (границу и множество Парето для критериев качества), различные представления множеств эффективных и субэффективных по Парето сочетаний параметров, а также соответствующие им прогнозные трубки траекторий. Для аппроксимации предлагается использовать метод глубоких ям, позволяющий строить метрические эпсилон-сети со свойствами, близкими к оптимальным, а также многофазные методы аппроксимации оболочки Эджворта-Парето. Для визуализации предлагается использовать подход диалоговых карт решений. Многокритериальный метод позволяет получить и обосновать многовариантное решение задач идентификации и прогнозирования не только на основе исследования устойчивости оптимального решения по параметрам (робастности по данным), но и устойчивости по выбранному набору критериев качества идентификации в их совокупности (робастности по заданной совокупности функционалов). Библ. 23.

Ключевые слова: математическая моделирование, имитационная модель, идентификация, прогнозирование, трубки траекторий, робастность, многокритериальная оптимизация, многокритериальное принятие решений, эффективное множество, граница Парето, множество Парето, оболочка Эджворта-Парето, оптимальные и субоптимальные решения, эффективные

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-11-00432.

и субэффективные решения, метод множеств идентификации, метод достижимых целей, метод глубоких ям, диалоговые карты решений, аппроксимация, визуализация.

1. Проблема выбора критериев идентификации

Одной из важных проблем в математическом моделировании является проблема устойчивости решения задачи идентификации и прогнозирования, в том числе по критерию качества идентификации. Согласно [1, стр. 162], [2, стр.338], выбор критерия идентификации – это одно из важнейших решений, которое принимается в процессе идентификации. Критерием качества идентификации обычно служит некоторая скалярная свертка многокомпонентных ошибок идентификации на данных наблюдений, называемая иногда *функцией невязок*, *функцией потерь*, *функцией ошибок идентификации* или *ошибок предсказания*. Традиционно идентификация состоит в поиске вектора неизвестных параметров, на котором значение единственного критерия качества идентификации, т.е. единственной функции ошибок, минимально.

Существует большое разнообразие в выборе критерия идентификации. В случае когда источником ошибок идентификации служат случайные возмущения данных наблюдений, наиболее распространенным выбором критерия идентификации является метод максимального правдоподобия, в котором при выборе критерия максимизируется вероятность реализации наблюдений. При этом, однако, требуется знать вероятностный закон распределения ошибок наблюдений в предположении, что он является неизменным на всем рассматриваемом периоде получения данных. В технических системах эти условия, как правило, выполняются. Однако при моделировании социальных, экономических, экологических и физических процессов, имеющих большую длительность, такие предположения не всегда могут быть обоснованы.

Критерий максимального правдоподобия не является устойчивым к отклонениям закона распределения помехи от предполагаемого закона [22, стр.206]. В этом случае для конструирования критерия идентификации используют подходы робастного оценивания, которые основаны на постулировании определенного класса возможных распределений помех и выборе в нем наименее благоприятного распределения. Такой подход приводит, как правило, к негладким критериям идентификации. Положение усугубляется в том случае, когда источником ошибок является не шум в выходных переменных, а ошибки во входных данных, которые присутствуют в регрессионном уравнении в качестве параметров, по которым не проводится идентификация. Например, в экономических моделях распространена практика использования рядов данных одних наблюдаемых величин для получения оценок других. В этом случае даже известный вид помех во входных рядах может существенно трансформироваться, проходя через сложное нелинейное отображение модели. Заметим, что часто в

моделировании экономических процессов используется агрегирование данных разного уровня детализации. То же можно сказать о ситуациях, когда используется агрегированная модель некоторого процесса, производится структурная идентификация или модель заведомо неточна. Во всех этих случаях сложно говорить о существовании какого-либо закона распределения помех. Поэтому выбор того или иного единственного критерия идентификации определяется традицией, развитостью методов оптимизации, а, зачастую, произволом.

Особо необходимо отметить проблемы, которые возникают при выборе единственного критерия идентификации, когда приходится учитывать ошибки с совершенно различным генезисом: физико-технические, экономические, социальные, экологические и, наконец, математические. В качестве характерного примера укажем на работу [23], в которой требуется идентифицировать параметры модели так, чтобы она, с одной стороны, как можно более точно описывала данные наблюдений, а, с другой стороны, удовлетворяла требованиям условий дополняющей нежесткости, источником которых является верифицируемый принцип оптимальности наблюдаемой траектории. Соединить эти два разнородных показателя качества идентификации в единый критерий не представляется никакой возможности.

Итак, перечислим теперь случаи, когда при идентификации модели, а следовательно, и при построении прогноза использование единственного критерия качества может не быть обоснованным:

- при отсутствии информации о классе закона распределения помех в данных выходных переменных;
- при наличии помех в данных входных переменных в сложных нелинейных моделях;
- при наличии агрегирования данных с неизвестной точностью или законом ошибки;
- при гипотетической неточности модели, описывающей идентифицируемую систему;
- при необходимости учесть при идентификации ошибки с совершенно различным, несводимым в один показатель, генезисом.

Во всех этих случаях приходится использовать несколько критериев качества идентификации, и, вместо оптимизационного подхода, использовать подход многокритериальной оптимизации. В задачу настоящей работы входит распространение многокритериального подхода на метод множеств идентификации [4]-[6], позволяющий приближенно строить и визуально исследовать многомерную поверхность скалярной функции идентификации и субоптимальные множества параметров в случае единственного критерия ошибки.

Целью работы не является выработка рекомендаций по подбору критериев, так как это, как правило, диктуется спецификой задачи и традициями моделирования в той или иной предметной области. Наиболее

часто используются критерии, основанные на максимуме нормы ошибки, максимуме ее квадрата, интегральных величинах (усредненных суммах, характеризующих близость рядов), усреднения с различными весами дисконтирования и т.д.

В настоящей работе в качестве иллюстрации предлагаемой достаточно сложной технологии мы приводим простейший пример зашумленного сигнала. Помехи в данном примере для наглядности выбраны с равномерным распределением. Мы, однако, рассматриваем задачу идентификации, в которой число наблюдений мало и считается, что закон и класс закона распределения ошибок неизвестен. В этом случае в рассматриваемом примере предлагается использовать наиболее различающиеся между собой критерии – квадратичный и Чебышевский.

2. Проблема устойчивости результатов идентификации и неоднозначности прогнозирования

Вернемся к задаче с единственным критерием идентификации и рассмотрим ее оптимальное решение. В том случае, когда существуют достаточно отдаленные от такого решения допустимые векторы параметров, для которых значение функции ошибок близко к оптимальному, проблема идентификации и прогнозирования требует дополнительного исследования на устойчивость. Как уже отмечалось, использование единственной (скалярной) функции ошибок идентификации не всегда оправдано. Устойчивость оптимального решения если и изучается, то в линейных моделях, в терминах единственного выбранного критерия и при ряде дополнительных жестких предположений о распределении случайных ошибок в исходных данных (робастная идентификация), а также в методах группировки и отбраковки данных для повышения робастности статистических оценок ([2, стр. 332 и 341]). Устойчивость решения задачи идентификации, а тем более устойчивость прогноза по отношению к виду критерия качества для сложных нелинейных моделей, как правило, систематически не исследуются.

Устойчивость решения задачи идентификации в скалярном (однокритериальном) случае определяется поведением многомерного графика функции ошибок вблизи глобального минимума, а также множеств квазиоптимальных параметров, то есть параметров, для которых значение функции ошибок идентификации не превышает некоторую заданную величину. Устойчивость решения задачи прогнозирования будет в этом случае определяться множеством значений прогнозируемых величин (или их временной «трубкой траекторий»), достижимых при всех различных квазиоптимальных значениях вектора параметров. Желание исследовать поведение функции ошибок вблизи оптимума и его влияние на прогноз достаточно естественно. В [19, стр. 14] указывается, что исследователям было бы разумно представить информацию о значениях параметров, близких

к оптимальной оценке. В случае одного критерия такую информацию предоставляют методы построения интервальных оценок, а в случае многих критериев – методы расчета дисперсии оценок для различных гипотез о поведении случайных ошибок измерений. Однако долгое время реализация полномасштабного исследования квазиоптимальных решений задачи идентификации и последствий их использования при построении прогноза была затруднительна из-за отсутствия применимых на практике методов построения и визуализации таких множеств для нелинейных моделей общего вида.

В случае наличия нескольких функций качества идентификации возникают дополнительные трудности, так как приходится исследовать и визуализировать график вектор-функции ошибок. Кроме того, имеют место эффекты, связанные со свойствами задачи многокритериальной оптимизации. Так, например, минимумы по каждому из критериев качества идентификации, как правило, не совпадают. В этом случае в качестве решений задачи идентификации естественно рассматривать сочетания значений параметров, приводящие к так называемым эффективным (по Парето) сочетаниям значений критериев качества, т.е. сочетаниям, не улучшаемым по одной из компонент без ухудшения по другой. Для построения и визуального исследования таких сочетаний критериев и их прообразов в пространстве параметров требуются особые вычислительные методы.

Для исследования устойчивости решения задачи идентификации нелинейных математических моделей имитационного типа как в случае единственного критерия (скалярной функции потерь), так и в случае нескольких критериев качества идентификации в [4] был предложен визуальный подход, основанный на аппроксимации неявно заданных множеств стохастическими методами построения метрических сетей. В работах [5], [6] этот подход был развит для скалярного случая как метод множеств идентификации (ММИ). В этом методе аппроксимируются и визуально исследуются множества идентификации: многомерный график функции ошибок или его маломерные проекции, а также его различные представления (проекции, части, срезы или сечения), в том числе множества оптимальных, субоптимальных и квазиоптимальных параметров. Примеры применения ММИ для идентификации и прогнозирования представлены в [6], [13], [14].

В векторном случае ММИ может быть реализован с использованием методологии и вычислительных алгоритмов метода достижимых целей [7]-[10]. Целью настоящей работы является систематическое изложение ММИ в общей многокритериальной постановке. При этом предлагаются алгоритмы построения явного описания (аппроксимации) множеств идентификации (с размерностью от 2 до 5 переменных) в случае идентификации моделей, заданных алгоритмически в виде «черного ящика». Эти алгоритмы являются развитием методов [11], [12] для задачи построения множеств

идентификации. Для визуализации аппроксимированных множеств предлагается технология диалоговых карт решений [10].

Помимо общих средств решения задачи идентификации и прогнозирования, предоставляемых ММИ, в случае, когда имеются несколько критериев качества идентификации, в настоящей работе предлагается использовать дополнительные возможности многокритериального подхода (многокритериальной оптимизации). В *многокритериальном* ММИ предлагается строить (аппроксимировать) и визуально исследовать:

- множество *критериев* идентификации, эффективных по Парето (множество неуправляемых сочетаний значений критериев, границу Парето множества достижимых сочетаний критериев идентификации),
- множества *параметров*, эффективных по Парето (решений задачи идентификации, соответствующих эффективным по Парето критериям) и субэффективных (соответствующих сочетаниям значений критериев, близким к границе Парето),
- *прогнозные трубки траекторий* (совокупности прогнозируемых состояний) поведения моделируемой системы, соответствующие множествам эффективных и субэффективных по Парето параметров.

Для построения и использования множества эффективных параметров, т.е. полного прообраза эффективного множества критериев идентификации, в многокритериальном ММИ предлагается использовать некоторую функцию близости критериальной точки к границе ее оболочки Эджворта-Парето. Эта функция дает параметризацию всего множества достижимых сочетаний критериев, позволяя визуализировать границу Парето, которая даже в простейших, двумерных, случаях имеет сложную и ненаглядную структуру. Эта же функция позволяет параметризовать множества допустимых параметров и прогнозные трубки, делая наглядной устойчивость совокупности последствий решений задачи идентификации, близких к эффективным по Парето. Для построения функции близости к границе оболочки Эджворта-Парето предлагается использовать многофазные алгоритмы [15], [16], [17], разработанные для метода достижимых целей [9], [10], а для построения множества параметров, эффективных по Парето, – специальную модификацию итерационного метода глубоких ям [11], [12].

В первой части работы формально излагается ММИ сначала в скалярной, а затем в многокритериальной постановке. Далее рассматривается один из алгоритмов аппроксимации множеств идентификации. В заключительной части приведен пример исследования устойчивости решения задачи идентификации и прогнозирования поведения простой динамической системы для случая двух наиболее различных между собой критериев (двух функций ошибок) при отсутствии какой-либо информации о законе распределения ошибок наблюдений.

3. Однокритериальный метод множеств идентификации

Приведем описание скалярного ММИ, т.е. метода для случая, когда имеется единственный критерий качества идентификации [4]-[6]. Рассмотрим регрессионную модель некоторого объекта. Пусть $y = f(x, \lambda)$, где x – входные, y – выходные переменные, λ – неизвестный вектор параметров, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$, $\lambda \in A \subset \mathbf{R}^p$. В дальнейшем будем считать множество A компактом. Пусть требуется идентифицировать вектор параметров λ на некотором множестве наблюдений $Z = \{(x^k, y^k), k = 1, \dots, K\}$, используя в качестве критерия погрешности идентификации скалярную *функцию ошибок идентификации* (единственный критерий качества идентификации) $\psi: A \rightarrow \mathbf{R}^1$, являющуюся некоторой сверткой норм ошибок $\|y^k - f(x^k, \lambda)\|$ на множестве наблюдений Z , и пусть существует $\psi(\lambda^*) = \min \{\psi(\lambda): \lambda \in A\}$.

Для исследования устойчивости решения требуется информация о *квазиоптимальных значениях параметров*, для которых значение функции ошибок идентификации не превышает некоторую заданную величину, т.е. таких $\lambda \in A$, что $\psi(\lambda) \leq \delta$, где $\delta \geq \psi^* = \psi(\lambda^*)$. При $\delta \approx \psi^*$ будем говорить о *субоптимальных значениях параметров*.

Рассмотрим *график функции ошибок* $\psi(\lambda)$, т.е. множество

$$G = \{(\lambda, \psi(\lambda)) \in A \times \mathbf{R}^1: \lambda \in A\}.$$

График G представляет собой некоторую поверхность в многомерном пространстве $\mathbf{R}^{p+1}$. Рассмотрим множество

$$A_\delta = \{\lambda \in A: \psi(\lambda) \leq \delta\}.$$

Для $\delta < \psi^*$ это множество пусто. При $\delta \geq \psi^*$ оно состоит из значений $\lambda \in A$, для которых значение функции ошибок идентификации не превосходит δ . Множество A_δ представляет собой проекцию части графика функции ошибок G , лежащую ниже уровня $\psi(\lambda) = \delta$, в пространство параметров λ . Назовем множество A_δ *множеством квазиоптимальных параметров уровня δ* (квазиоптимальным множеством).

Если функция ошибок имеет несколько локальных минимумов, то множество A_δ может быть неодносвязным. Даже в случае одного параметра оно может представлять из себя набор отрезков.

Если параметров несколько, исследование многомерного множества квазиоптимальных параметров представляет для человека значительную проблему. Она решается рассматриваемым нами ММИ с помощью *диалоговых карт идентификации* (ДКИ) [10], обеспечивающих интерактивную визуализацию *множеств идентификации*: графика функции ошибок и множеств квазиоптимальных параметров.

Заметим, что, в силу определения квазиоптимального множества, справедливо $A_{\delta^1} \subset A_{\delta^2}$ при $\delta^1 \leq \delta^2$. Поэтому множества с меньшим уровнем ошибки оказываются вложенными в множества с большим уровнем. Это свойство характерно для географических карт. По аналогии, изображения

множеств квазиоптимальных параметров в соответствии с линиями уровня функции ошибок, используемые в ММИ, называются *картами функции ошибок*.

Квазиоптимальное множество конкретного уровня δ можно изобразить и с помощью линий уровня, соответствующих значениям одного из параметров. В этом случае, однако, нельзя гарантировать вложенности отображаемых множеств, как на картах функции ошибок. Тем не менее, такие изображения в ММИ также называются картами – *картами параметров*.

В случае многих параметров множества идентификации можно представить *проекциями* их на подпространства, содержащие лишь часть параметров – тех, которые больше интересуют исследователя. В общем случае множество идентификации (график функции ошибок или квазиоптимальное множество) визуализируется в ММИ или в виде *срезов* (когда значения части параметров не интересуют исследователя, но на них наложены дополнительные ограничения), или в виде *сечений* (когда значения части параметров точно заданы). Возможны также динамические (анимированные) изображения, представляющие трехмерные карты функции ошибок или параметров при динамическом (в реальном времени или с помощью полосы прокрутки) изменении значений части остальных параметров со временем (подробнее, см. [10]). В любом случае, визуализация осуществляется исследователем в интенсивном диалоге с компьютером, что обеспечивается предварительной аппроксимацией визуализируемого множества.

Итак, основными этапами ММИ являются:

- 1) предварительная аппроксимация множеств идентификации в явном виде;
- 2) визуализация аппроксимации на основе диалоговых карт идентификации.

Необходимо отметить в заключение, что результат ММИ является многовариантным: в общем случае он может представлять собой *множество таких сочетаний значений идентифицируемых параметров, которое исследователь считает необходимым учесть при оценке последствий использования данной математической модели*. Это множество также может быть использовано при построении многовариантного прогноза поведения идентифицируемой системы.

4. Случай нескольких критериев качества идентификации

Пусть требуется идентифицировать вектор параметров λ , используя в качестве критерия погрешности идентификации *векторную* функцию ошибок идентификации (несколько критериев качества идентификации) $\psi: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^l$. В этом случае *график вектор-функции ошибок* $\psi(\lambda)$, т.е. множество

$$G = \{(\lambda, \psi(\lambda)) \in \Lambda \times \mathbf{R}^l: \lambda \in \Lambda\},$$

представляет собой многомерную поверхность в пространстве $\mathbf{R}^{p+l}$.

Рассмотрим сначала методы исследования многокритериальной задачи с помощью множеств идентификации, определяемых через проекции и сечения графика вектор-функции ошибок G .

Пусть задан вектор $\delta \in \mathbf{R}^l$, $\delta := \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$, $\delta_i > 0$, $i=1, \dots, l$. Определим через $A_\delta := \{\lambda \in A: \psi(\lambda) \leq \delta\}$ множество квазиоптимальных параметров векторного уровня δ . Отличие этого определения от определения, данного в предыдущем пункте для скалярной постановки, в том, что функция ψ и предельный уровень ошибок δ здесь являются векторами:

$$A_\delta := \{\lambda \in A: \psi_i(\lambda) \leq \delta_i, i=1, \dots, l\}.$$

Как и в скалярном случае, в силу определения квазиоптимального множества $A_{\delta^1} \subset A_{\delta^2}$ при $\delta^1 \leq \delta^2$ (т.е. $\delta_i^1 \leq \delta_i^2$, $i=1, \dots, l$), поэтому множества с меньшим уровнем ошибки оказываются вложенными в множества с большим уровнем. Как и в скалярном случае, изображения графика вектор-функции ошибок и множеств квазиоптимальных параметров, используемые в ММИ, назовем *картами множеств идентификации*. Визуализации их через ДКИ при этом принципиально не отличаются от методов в скалярной постановке.

Обозначим $\psi_i^* := \psi_i(\lambda^i) := \min \{ \psi_i(\lambda): \lambda \in A \}$. Обозначим через $\psi^* := \{ \psi^*_1, \dots, \psi^*_l \}$ «идеальную точку» задачи идентификации. Недостатком рассмотренного выше подхода к построению карт идентификации в векторном случае являются сложности, характерные для решения задачи многокритериальной оптимизации. Прежде всего, это тот факт, что минимизация компонент ψ_i функции ошибок может приводить к разным оптимумам λ^i . При этом «идеальная точка» задачи идентификации ψ^* , соответствующая совокупности покомпонентных минимумов, может быть недостижима, и множества «субоптимальных» параметров по всем компонентам вектор-функции ошибок *одновременно* могут быть пустыми, т.е. для δ : $\delta \approx \psi^*$, $\delta > \psi^*$ ($\delta := \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$, где $\delta_i > \psi_i^*$, $\delta_i \approx \psi_i^*$, $i=1, \dots, l$) может оказаться, что $A_\delta = \emptyset$.

Итак, рассматриваемый случай имеет характер многокритериальной задачи, так как вместо минимума скалярной функции требуется исследовать задачу минимизации сразу нескольких критериев качества идентификации (компонент вектор-функции ошибок), которые могут находиться в определенном противоречии друг с другом. Такая постановка требует разработки техники многокритериальной оптимизации, прежде всего определения эффективного по Парето (неулучшаемого) решения задачи идентификации.

Прежде всего, заметим, что при выборе параметров желательно уменьшение значений каждого из критериев качества идентификации. Поэтому будем считать, что точка $\psi^1 \in \mathbf{R}^l$ доминирует (по Парето) точку $\psi^2 \in \mathbf{R}^l$, если $\psi^1 \leq \psi^2$ и $\psi^1 \neq \psi^2$.

Рассмотрим *множество достижимых критериальных векторов задачи идентификации*

$$\Psi := \psi(\Lambda) = \{\psi \in \mathbf{R}^l: (\lambda, \psi) \in G\}.$$

В дальнейшем будем считать множество Ψ компактным.

Граница Парето (недоминируемая или эффективная граница) задачи идентификации определяется как множество достижимых сочетаний значений критериев качества, которые не могут быть улучшены (т.е. в нашем случае уменьшены) ни по одной компоненте без ухудшения по другим:

$$P(\Psi) := \{\psi \in \Psi: \{\psi^1 \in \Psi: \psi^1 \leq \psi, \psi^1 \neq \psi\} = \emptyset\}.$$

Иногда границу Парето называют фронтом Парето, в нашем случае это будет фронт Парето задачи идентификации.

Решения задачи идентификации (сочетания параметров λ), порождающие точки границы Парето $P(\Psi)$, назовем эффективными по Парето, а их множество обозначим через $P(\Lambda)$. Это множество назовем также *множеством эффективных (по Парето) решений задачи идентификации* или *множеством Парето задачи идентификации* при нескольких критериях качества.

В нашем исследовании мы также будем использовать так называемую оболочку Эджворта-Парето (ОЭП) множества Ψ , под которой понимается множество

$$\Psi^* := \Psi + \mathbf{R}_+^l = \{\psi \in \mathbf{R}^l: \psi = \psi^1 + \psi^2, \psi^1 \in \Psi, \psi^2 \in \mathbf{R}_+^l\},$$

где $\mathbf{R}_+^l$ – неотрицательный ортант из $\mathbf{R}^l$. Кроме точек, принадлежащих Ψ , множество Ψ^* содержит также и недостижимые критериальные точки, доминируемые точками множества Ψ . Важно отметить, что $P(\Psi^*) \equiv P(\Psi)$ (см., например, [18], теорема 6.4), причем Ψ^* является максимальным множеством из $\mathbf{R}^l$, обладающим этим свойством. Кроме того, для компактного Ψ множество Ψ^* является замкнутым ([18], теорема 6.5).

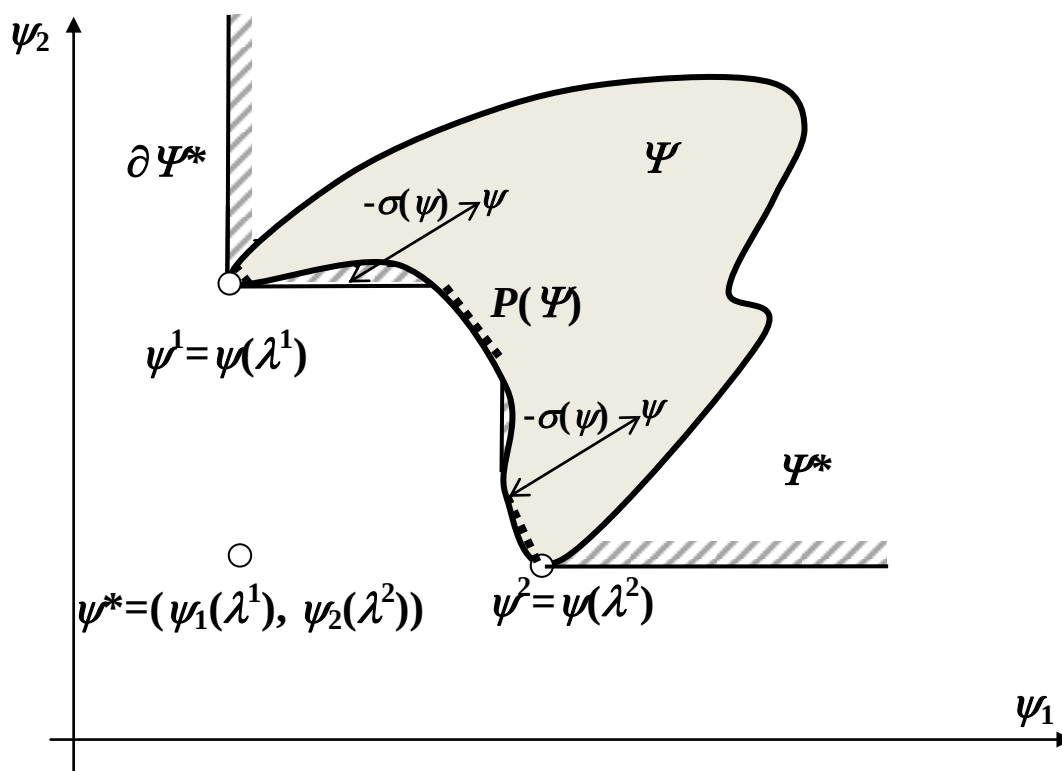


Рис. 1. Множество достижимых критериев, его граница Парето и ОЭП

На рис. 1 изображен пример множеств Ψ , Ψ^* , $P(\Psi)$ для случая двух критериев. Граница Парето $P(\Psi)$ на этом рисунке обозначена жирным пунктиром. Она состоит из трех участков границы множества Ψ , расположенных между критериальными точками, соответствующими минимумам каждой из двух компонент вектор-функции ошибок идентификации: $\psi(\lambda^1)$ и $\psi(\lambda^2)$. Заметим, что «идеальная точка» задачи идентификации ψ^* в этом примере не принадлежит ни Ψ , ни, естественно, Ψ^* .

Из приведенного рисунка видно, что даже в простейшем случае граница Парето имеет нетривиальную структуру, неочевидную уже в двумерном случае, даже если возможно точное построение и визуализация множества достижимых критериев Ψ . К тому же, как показано в [18, стр. 74-77], в отличие от множества Ψ , его граница Парето является во многих случаях неустойчивой. Этих недостатков можно избежать, если ввести дополнительный критерий, показывающий близость критериальной точки ψ к границе Парето $P(\Psi)$. Однако использование для этого критерия ОЭП множества Ψ^* и его границы $\partial\Psi^*$ вместо $P(\Psi)$ позволяет избежать проблем, связанных с ненаглядностью и неустойчивостью границы Парето. Кроме того, методы аппроксимации ОЭП развиты значительно лучше, чем методы

аппроксимации границы Парето [18]. Приведем описание и обоснование этого подхода при точном и приближенном вариантах решения.

Для замкнутого $A \subset \mathbf{R}^l$ обозначим

$$\rho(\psi, A) := \min \{ \rho(\psi, \xi) : \xi \in A \},$$

где ρ – расстояние в $\mathbf{R}^l$. Обозначим через ∂A границу множества A . Введем на $\mathbf{R}^l$ критерий эффективности (по Парето) как

$$\sigma(\psi) := \begin{cases} -\rho(\psi, \partial \Psi^*), \psi \in \Psi^* \\ \rho(\psi, \partial \Psi^*), \psi \notin \Psi^* \end{cases}.$$

Лемма 1. *Справедливо*

- 1) $\sigma(\psi(\lambda)) \leq 0, \lambda \in A$;
- 2) $\sigma(\psi(\lambda)) = 0, \lambda \in P(A)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из того, что $\Psi \subset \Psi^*$. Поскольку $P(\Psi^*) \equiv P(\Psi)$ ([18], теорема 6.4), то $P(\Psi) \subset \partial \Psi^*$, откуда вытекает второе утверждение леммы. $\square$

Поскольку ОЭП Ψ^* точно неизвестна, будем считать, что она аппроксимирована множеством T^* , т.е. ОЭП некоторого конечного набора точек $T \subset \Psi$. Введем приближенный критерий эффективности (по Парето) как

$$\sigma(\psi, T) := \begin{cases} -\rho(\psi, \partial T^*), \psi \in T^* \\ \rho(\psi, \partial T^*), \psi \notin T^* \end{cases}.$$

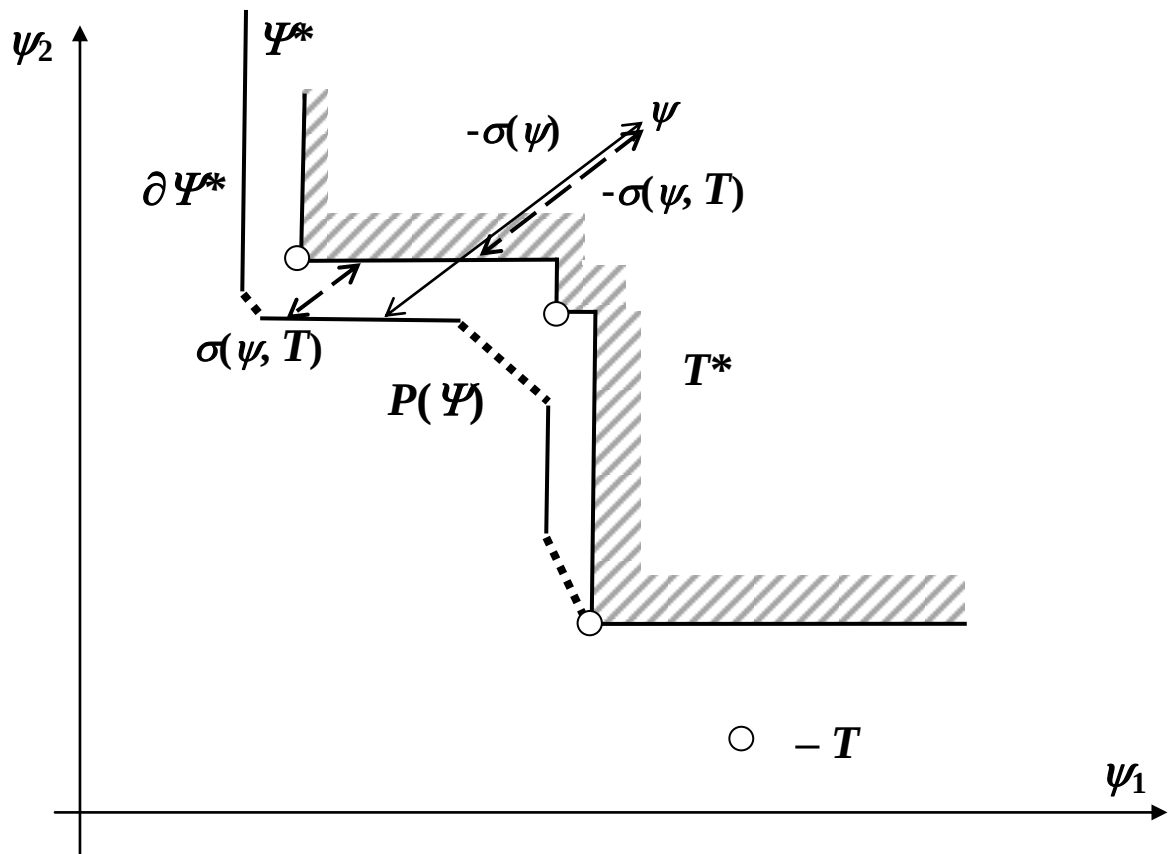


Рис. 2. Точный и приближенный критерии эффективности

На рис. 2 изображены множества Ψ^* , $P(\Psi)$, T , T^* и пример расчета критериев эффективности идентификации по границе ОЭП в точном $\sigma(\psi)$ и приближенном $\sigma(\psi, T)$ виде для случая двух критериев.

Например, для метрики Чебышева приближенный критерий эффективности будет выглядеть как

$$\sigma_{\text{Чеб}}(\psi, T) := \begin{cases} -\max\{\min\{\psi_i - \tau_i : i = 1, \dots, l\} : \tau \in T\}, \psi \in T^* \\ \min\{\max\{\tau_i - \psi_i : i = 1, \dots, l\} : \tau \in T\}, \psi \notin T^* \end{cases}.$$

В этом случае, когда точка ψ принадлежит аппроксимации ОЭП множеством T^* , величина $|\sigma_{\text{Чеб}}(\psi, T)|$ показывает, на сколько критериальную точку необходимо минимально сдвинуть вниз, чтобы она перестала быть доминируема точками множества T и, таким образом, вышла из его ОЭП. В случае, когда точка ψ не принадлежит аппроксимации ОЭП множеством T^* , но принадлежит самой аппроксимируемой ОЭП Ψ^* , величина $\sigma_{\text{Чеб}}(\psi, T)$ показывает, на сколько точку необходимо минимально сдвинуть вверх, чтобы она стала доминироваться хотя бы одной точкой аппроксимирующего набора T и, таким образом, вошла бы в аппроксимацию Ψ^* множеством T^* .

Обозначим через $[A]_\varepsilon := \{\psi \in \mathbf{R}^l: \rho(\psi, A) \leq \varepsilon\}$ строгую окрестность множества $A \subset \mathbf{R}^l$. Обозначим через $\text{int } A$ множество внутренних точек A .

Лемма 2. Пусть замкнутое $A \subset \mathbf{R}^l$ и $\varepsilon \geq 0$. Тогда для любого $\psi \in [A]_\varepsilon^*$ справедливо $\rho(\psi, A^*) \leq \varepsilon$.

Доказательство. По построению существуют $a \in [A]_\varepsilon$ и $u \in \mathbf{R}_+^l$ такие, что $\psi = a + u$. Пусть $a \in [a^0]_\varepsilon$, где $a^0 \in A$. Поскольку $a^0 + u \in A^*$, то $\rho(\psi, A^*) \leq \rho(a + u, a^0 + u) = \rho(a, a^0) \leq \varepsilon$. $\square$

Лемма 3. Пусть $T \subset \Psi$, $\Psi^* \subset [T]_\varepsilon^*$, $\varepsilon \geq 0$. Тогда

- 1) $\sigma(\psi(\lambda), T) \leq \varepsilon$, $\lambda \in \Lambda$;
- 2) $\sigma(\psi(\lambda), T) \geq 0$, $\lambda \in P(\Lambda)$.

Доказательство. Для $\psi(\lambda) \in T^*$ имеем $\sigma(\psi(\lambda)) \leq 0$. Для $\psi(\lambda) \notin T^*$ имеем $\rho(\psi(\lambda), \partial T^*) = \rho(\psi(\lambda), T^*)$. Поскольку $\psi(\lambda) \in \Psi^* \subset [T]_\varepsilon^*$, то по лемме 2 справедливо $\rho(\psi(\lambda), T^*) \leq \varepsilon$, что доказывает первое утверждение леммы. Поскольку для $\lambda \in P(\Lambda)$ справедливо либо $\psi(\lambda) \in \partial T^*$, либо $\psi(\lambda) \notin T^*$, то второе утверждение леммы непосредственно вытекает из определения функции $\sigma(\psi, T)$. $\square$

Рассмотрим теперь применение критерия эффективности идентификации $\sigma(\psi)$ или приближенного критерия эффективности идентификации $\sigma(\psi, T)$ в ММИ. По аналогии с оптимальными и квазиоптимальными параметрами скалярной задачи идентификации, в рассматриваемом нами векторном случае сочетания параметров $\lambda \in \Lambda$, такие что $\sigma(\psi(\lambda)) \geq 0$, назовем *эффективными (по Парето) решениями задачи идентификации*, а сочетания параметров $\lambda \in \Lambda$, такие что $\sigma(\psi(\lambda)) \geq -\delta$, назовем *субэффективными (по Парето) решениями задачи идентификации*, при условии, что величина $\delta \geq 0$ достаточно мала. Введем множества *субэффективных параметров уровня δ*

$$\mathcal{L}_\delta := \{\lambda \in \Lambda: \sigma(\psi(\lambda)) \geq -\delta\}.$$

Совершенно аналогично будем говорить о приближенно субэффективных решениях при $\sigma(\psi(\lambda), T) \geq -\delta$ и множествах приближенно субэффективных параметров

$$\mathcal{L}_\delta(T) := \{\lambda \in \Lambda: \sigma(\psi(\lambda), T) \geq -\delta\}.$$

Из лемм 1 и 3 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1.

- 1) $P(\Lambda) \subset \mathcal{L}_0$;
- 2) пусть $T \subset \Psi$, тогда $P(\Lambda) \subset \mathcal{L}_0(T)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 1, второе – из леммы 3. $\square$

Можно доказать более общее утверждение.

Теорема 2. Пусть $T \subset \Psi$, $\delta \geq 0$. Тогда $\mathcal{L}_\delta \subset \mathcal{L}_\delta(T)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathcal{L}_\delta$, значит, $\sigma(\psi(\lambda)) \geq -\delta$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\psi = \psi(\lambda) \in T^*$. Поскольку $T^* \subset \Psi^*$, то $\rho(\psi, \partial T^*) \geq \rho(\psi, \partial \Psi^*)$. В рассматриваемом случае $\sigma(\psi) = -\rho(\psi, \partial \Psi^*)$ и $\sigma(\psi, T) = -\rho(\psi, \partial T^*)$. Поэтому $\sigma(\psi) \leq \sigma(\psi, T)$, откуда $\sigma(\psi, T) \geq -\delta$, значит $\lambda \in \mathcal{L}_\delta(T)$.

Пусть теперь $\psi \notin T^*$. По определению в этом случае $\sigma(\psi, T) \geq 0 \geq -\delta$. $\square$

Обозначим через $\omega(l) := \|(1, \dots, 1)\|$ норму единичного вектора в $\mathbf{R}^l$. Для метрики Чебышева $\omega(l)=1$, для евклидовой метрики суммы квадратов $\omega(l) = \sqrt{l}$.

Лемма 4. Пусть замкнутое $A \subset \mathbf{R}^l$ и $\varepsilon \geq 0$. Тогда для любого $\psi \in \partial A^*$ справедливо $\varepsilon \leq \rho(\psi, \partial[A]_\varepsilon^*) \leq \omega(l)\varepsilon$. $\square$

Доказательство. По построению существуют $a \in [A]_\varepsilon$ и $u \in \mathbf{R}_+^l$ такие, что $\psi = a + u$. Тогда $[a]_\varepsilon + u \subset [A]_\varepsilon^*$, откуда $\varepsilon = \rho(\psi, \partial([a]_\varepsilon + u)) \leq \rho(\psi, \partial[A]_\varepsilon^*)$.

Рассмотрим $\xi(t) := \psi - t(1, \dots, 1)$. Пусть $t^* := \max \{t: \xi(t) \in [A]_\varepsilon^*\}$. Покажем, что $t^* \leq \varepsilon$. Действительно, пусть $t^* > \varepsilon$. Так как $\xi(t) \in [A]_\varepsilon^*$, то по лемме 2 имеем $\rho(\xi(t), A^*) \leq \varepsilon$, откуда существует $a \in A^*$ такая, что $\rho(\xi(t), a) \leq \varepsilon$. Но тогда точка a доминирует ψ (т.е. $a_i < \psi_i$, $i=1, \dots, l$), что невозможно в силу того, что $\psi \in \partial A^*$. Итак, $t^* \leq \varepsilon$. Поэтому $\rho(\psi, \partial[A]_\varepsilon^*) \leq \rho(\psi, \xi(t^*)) \leq \omega(l)\varepsilon$. $\square$

Обозначим через $\text{proj}(\psi, A)$ проекцию точки ψ на множество A .

Теорема 3. Пусть $T \subset \Psi$, $\Psi^* \subset [T]_\varepsilon^*$, $\varepsilon \geq 0$. Тогда для $\delta \geq 0$ справедливо

$$\mathcal{L}_\delta(T) \subset \mathcal{L}_{\delta + \omega(l)\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathcal{L}_\delta(T)$, значит $\sigma(\psi(\lambda), T) \geq -\delta$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\psi = \psi(\lambda) \in T^*$. Пусть $\psi^1 := \text{proj}(\psi, \partial T^*)$ и $\psi^2 := \text{proj}(\psi^1, \partial \Psi^*)$. Тогда $\rho(\psi, \partial \Psi^*) \leq \rho(\psi, \psi^2) \leq \rho(\psi, \psi^1) + \rho(\psi^1, \psi^2)$. По лемме 4 имеем $\rho(\psi^1, \psi^2) \leq \omega(l)\varepsilon$, так как по условию $\Psi^* \subset [T]_\varepsilon^*$. В рассматриваемом случае $\sigma(\psi) = -\rho(\psi, \partial \Psi^*)$ и $\sigma(\psi, T) = -\rho(\psi, \partial T^*)$. Поэтому получаем $\sigma(\psi) \geq \sigma(\psi, T) - \omega(l)\varepsilon$, откуда $\sigma(\psi) \geq -\delta - \omega(l)\varepsilon$ и $\lambda \in \mathcal{L}_{\delta + \omega(l)\varepsilon}$.

Пусть теперь $\psi \notin T^*$. Пусть $\psi^1 := \text{proj}(\psi, \partial T^*)$ и $\psi^2 := (\psi, \psi^1) \cap \partial \Psi^*$. Тогда справедливо $\psi^1 = \text{proj}(\psi^2, \partial T^*)$, откуда по лемме 2 имеем $\rho(\psi^1, \psi^2) \leq \varepsilon$. Поэтому $\rho(\psi, \partial \Psi^*) \leq \rho(\psi^2, \psi) \leq \rho(\psi^2, \psi^1) \leq \varepsilon$. В силу того, что $\delta \geq 0$ и $\omega(l) \geq 1$, получаем $\sigma(\psi) = -\rho(\psi, \partial \Psi^*) \geq -\delta - \omega(l)\varepsilon$, откуда $\lambda \in \mathcal{L}_{\delta + \omega(l)\varepsilon}$. $\square$

Из приведенной теоремы следует, что наибольший интерес для исследования задачи идентификации представляют множество субэффективных параметров $\mathcal{L}_\delta$ и устойчивость его при малых δ , а в случае аппроксимации – приближенное множество субэффективных параметров $\mathcal{L}_\delta(T)$ и его устойчивость.

Заметим, что, в силу определения субэффективного множества, справедливо $\mathcal{L}_{\delta_1} \subset \mathcal{L}_{\delta_2}$ при $\delta_1 \leq \delta_2$, поэтому линии с меньшим уровнем критерия эффективности оказываются вложенными в линии с большим уровнем. По аналогии с картами квазиоптимальных параметров изображения множеств субэффективных параметров, используемых в ММИ, будем называть *картами субэффективных параметров*.

Итак, с помощью критерия эффективности метод множеств идентификации может быть использован при нескольких критериях качества. Для расчета величины $\sigma(\psi)$ предлагается сначала строить с некоторой точностью аппроксимацию ОЭП. После этого могут быть использованы технологии ММИ (в том числе ДКР) для исследования многомерного графика скалярного критерия эффективности, позволяющие строить и визуализировать карты идентификации, в том числе карты множества эффективных и субэффективных (по Парето) параметров. Визуализация этих множеств может служить для изучения их на предмет устойчивости. Кроме того, возможны построение и визуализация прогнозов, соответствующих одновременно всем субэффективным параметрам, т.е. множеств $f(x, \mathcal{L}_\delta)$ значений функции $f(x, \lambda)$, $\lambda \in \mathcal{L}_\delta$, при различных заданных $\delta \geq 0$. В случае, когда одна из компонент вектора входных переменных является временем, можно говорить о трубке субоптимальных или субэффективных траекторий.

Подход к построению и визуализации субоптимальных или субэффективных прогнозных множеств в ММИ не отличается от подхода к построению и визуализации множеств идентификации. Примеры таких исследований можно найти в работах [13], [14]. Более подробное рассмотрение этого вопроса выходит, однако, за рамки настоящей работы.

Отметим, что результат применения ММИ в многокритериальной постановке остается прежним: множество таких сочетаний значений идентифицируемых параметров, которое исследователь считает необходимым учесть при оценке последствий использования данной математической модели. В многокритериальном случае этот выбор основывается не только на исследовании устойчивости оптимального решения по параметрам (робастности по данным), но и устойчивости по выбранному набору критериев качества идентификации (робастности по совокупности функционалов критериев качества).

5. Аппроксимация множеств идентификации

Рассмотрим теперь проблему аппроксимации множеств идентификации в общем нелинейном случае.

Универсальным способом «кодирования» или «табулирования» невыпуклых множеств является построение так называемых метрических эпсилон-сетей. Геометрически это означает, что множество аппроксимируется набором простых фигур (таких, как шар или куб) с

диаметром тем меньшим, чем выше точность аппроксимации. Под метрической ε -сетью множества A понимается такое его подмножество T , что любая точка A удалена от T на расстояние не больше ε . Если вокруг точек метрической ε -сети построить «шары» в рассматриваемой метрике пространства, то они покроют все аппроксимируемое множество. В евклидовой метрике с нормой $\|z\|=(\sum z_j^2)^{1/2}$ это соответствует аппроксимации множества системой обычных шаров, а в метрике Чебышева с нормой $\|z\|=\max\{|z_j|\}$ – системой кубов. Для каждой точки такой системы можно быстро найти «подлинную» точку аппроксимируемого множества A (ближайшую точку метрической ε -сети T), отстоящую от нее не более чем на ε в рассматриваемой метрике. При этом, чем меньше величина ε , тем ближе будут «подлинные» точки из T к точкам аппроксимируемого множества, тем меньше будет «лишних» точек в аппроксимирующей системе «шаров», но тем больше требуется построить точек в используемой метрической сети T . Для характеристики сложности задачи построения ε -сетей используется аппарат метрической ε -энтропии и ε -емкости [20]. В настоящем исследовании нам понадобится только следующее определение: множество называется ε -различимым, если любые две его различные точки находятся на расстоянии большем, чем ε . Обозначим через $\mathcal{M}(\varepsilon, A)$ максимальное число точек ε -различимого подмножества A .

Если известна константа Липшица функции ошибок $\psi(\lambda)$, для аппроксимации ее графика можно использовать сетки (равномерные или псевдо-случайные) на множестве допустимых параметров A . В более общем случае могут быть использованы адаптивные стохастические методы аппроксимации ограниченных неявно заданных множеств, реализующие метод глубоких ям [11], [12]. С помощью этих методов на аппроксимируемом множестве, неявно заданном с помощью нелинейного отображения вида «черный ящик», строится метрическая сеть, аппроксимирующая его с заданной точностью и полнотой. Полнота аппроксимации характеризуется тем, что остается лишь небольшая часть (часть с малой мерой прообраза) аппроксимируемого множества, лежащая вне построенной системы шаров с центрами в точках метрической сети. Методы из [11], [12] позволяют выбрать точки аппроксимируемого множества, которые станут центрами аппроксимирующей системы шаров. При этом число таких точек близко к минимально возможному. Радиус шара, обеспечивающего покрытие аппроксимируемого множества с заданной надежностью и полнотой, рассчитывается на основе методов статистики.

Приведем метод аппроксимации множеств идентификации, реализующий подход [11], [12]. Будем считать, что исследователя интересуют параметры идентификации из подмножества $\{i_1, \dots, i_q\}$ множества всех номеров параметров $\{1, \dots, p\}$. В общем случае множество идентификации можно описать как проекцию части графика функции ошибок G на одно из своих подпространств. Если рассматривается задача

построение карт на основе критерия эффективности (по Парето), то будем предполагать, что вместо графика функции ошибок ψ рассматривается график приближенного критерия эффективности (по Парето) $\sigma(\psi(\lambda), Q)$, где Q^* – аппроксимация Ψ^* , построенная, например, с помощью методов [15], [16], [17]. В этом случае все условия вида $\psi(\lambda) \leq \delta$ надо в дальнейшем изложении заменять на условия вида $\sigma(\psi(\lambda), Q) \geq -\delta$.

Рассмотрим сначала карту параметров. Она представляет собой проекцию множества уровня L_δ в подпространство $\{i_1, \dots, i_q\}$ -х координат выбранных исследователем параметров, т.е. отображение вида $F: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^q$, где $F_j(\lambda) = \lambda_j, j=1, \dots, q$, при условии $\psi(\lambda) \leq \delta$.

Рассмотрим теперь карту скалярной функции ошибок (или скалярного критерия эффективности). Она представляет собой проекцию части графика G , лежащей ниже уровня $\psi(\lambda) = \delta$, в произведение подпространства $\{i_1, \dots, i_q\}$ -х координат выбранных исследователем параметров, и скалярного пространства значений функции ошибок, т.е. отображение вида $F: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^1$, где $F_j(\lambda) = \lambda_j, j=1, \dots, q, F_{q+1}(\lambda) = \psi(\lambda)$, при условии $\psi(\lambda) \leq \delta$.

Таким образом, не нарушая общности, будем рассматривать множество идентификации как отображение вида $F: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^r$, где $r=q$ или $r=q+1$, при дополнительном условии $\psi(\lambda) \leq \delta$. Обозначим $W := \{w \in \mathbf{R}^r: w = F(\lambda), \psi(\lambda) \leq \delta\}$.

Рассмотрим случай, когда на борелевской σ -алгебре $\mathfrak{B}(\Lambda)$ задана некоторая вероятностная мера π . Пусть имеется возможность получать большие независимые повторные выборки $H_N := \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ объема N точек из Λ , удовлетворяющих условию $\psi(\lambda) \leq \delta$. Пусть ρ – расстояние в $\mathbf{R}^r$. Опишем один из алгоритмов [11], [12], адаптированный для аппроксимации множества идентификации.

МЕТОД ГЛУБОКИХ ЯМ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Начальная итерация алгоритма состоит в том, что генерируется случайная точка λ_1 из Λ такая, что $\psi(\lambda_1) \leq \delta$, и полагается $T_1 := \{w_1\}$, где $w_1 = F(\lambda_1)$.

(n+1)-я итерация алгоритма, $n \geq 1$

Шаг 1: получить контрольную выборку H_N , рассчитать $F(H_N)$.

Шаг 2: положить $T_{n+1} := T_n \cup \{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1} := \arg\max \{\rho(F(\lambda), T_n): \lambda \in H_N\}$.

При описании алгоритма мы опустили условие окончания. В качестве простейшего условия окончания можно принять фиксацию события

$$\max \{\rho(F(\lambda), T_n): \lambda \in H_N\} \leq \varepsilon.$$

Кратко рассмотрим некоторые свойства сходимости приведенного алгоритма. Обозначим через $(\cdot)_\varepsilon$ открытую ε -окрестность множества в $\mathbf{R}^r$. Мы будем рассматривать случай, когда существует мера, индуцированная мерой π с помощью отображения F на множестве W . Для этого будем предполагать, что $\pi(F^{-1}((U)_\varepsilon \cap W))$ существует для всякого $\varepsilon > 0$ и конечного U , а также, что $\pi(F^{-1}(W)) \neq 0$. В силу того, что пространство части компонент отображения F

является проекцией из пространства параметров, для выполнения рассматриваемого условия достаточно, чтобы функция ошибок ψ (или критерий близости σ) была измерима на Λ , например, непрерывна. Множество $U \subset W$ назовем ε -сетью для W полноты η , если $\pi(F^{-1}((U)_{\varepsilon} \cap W)) / \pi(F^{-1}(W)) \geq \eta$. При $\eta > 0$ множество $(U)_{\varepsilon}$ будем называть *существенным покрытием* W , а величину $\pi(F^{-1}((U)_{\varepsilon} \cap W)) / \pi(F^{-1}(W))$ – *полнотой* этого покрытия. Если значение полноты равно 1, то покрытие $(U)_{\varepsilon}$ будем называть *полным*.

Пусть U задано. Обозначим через $\eta^U(s) := \pi(F^{-1}((U)_s \cap W)) / \pi(F^{-1}(W))$ функцию распределения случайной величины, равной расстоянию $\rho(F(\lambda), U)$ от случайной точки $F(\lambda)$ из W до множества U . Воспользуемся контрольной выборкой H_N объема N точек из Λ , удовлетворяющих условию $\psi(\lambda) \leq \delta$, для оценки полноты покрытия $(U)_{\varepsilon}$. Обозначим через $\eta^{(U)}(s, H_N)$ выборочную функцию распределения для $\eta^U(s)$:

$$\eta^{(U)}(s, H_N) := n(s)/N, \quad n(s) := \text{card} \{ \lambda \in H_N : \rho(F(\lambda), U) < s \},$$

где через $\text{card } H$ обозначим число элементов H .

Рассмотрим случайную величину ξ из W , которая равна единице при $F(\lambda) \in (U)_s$ и равна нулю в противном случае. Заметим, что случайная величина ξ является бернуллиевской случайной величиной (см., например, [21]) с вероятностями $p = \eta^U(s)$ и $q = 1 - \eta^U(s)$. Ясно, что $\mathbf{M} \xi = p$, $\mathbf{D} \xi = pq$. Обозначим через S_N сумму N независимых реализаций бернуллиевской случайной величины ξ . Для S_N имеет место экспоненциальное неравенство Чебышева ([21], стр. 80):

$$\mathbf{P} \{ S_N/N - p \geq \Delta \} \leq \exp(-2N\Delta^2),$$

из которого сразу следует оценка

$$\mathbf{P} \{ \eta^{(U)}(s, H_N) - \eta^U(s) < \Delta \} \geq 1 - \exp(-2N\Delta^2).$$

Эта формула дает надежность вероятностной оценки величины $\eta^U(s)$ для каждого s с неопределенностью Δ .

Пусть задана некоторая мера надежности χ , $0 < \chi < 1$. Обозначим

$$\Delta(\chi, N) := \sqrt{-\frac{\ln(1-\chi)}{2N}}.$$

Тогда вероятностная оценка полноты покрытия $(U)_{\varepsilon}$ приобретает вид

$$\mathbf{P} \{ \eta^U(\varepsilon) > \eta^{(U)}(\varepsilon, H_N) - \Delta(\chi, N) \} \geq \chi.$$

Пусть на шаге 2 $(n+1)$ -й итерации рассмотренного алгоритма рассчитывается функция $\eta^{(T_n)}(\varepsilon, H_N)$. Определим

$$\rho_n := \rho(t_{n+1}, T_n) = \max \{ \rho(F(\lambda), T_n) : \lambda \in H_N \}.$$

Пусть зафиксировано событие

$$\eta^{(T_n)}(\varepsilon, H_N) - \Delta(\chi, N) \geq \eta,$$

где $\eta \leq 1 - \Delta(\chi, N)$. Тогда с надежностью χ можно заключить, что множество T_n является ε -сетью для W полноты η .

Из приведенных рассуждений вытекает основное свойство сходимости рассмотренного алгоритма, являющееся адаптацией теоремы 7 из [21] для задачи аппроксимации множеств идентификации.

Теорема 4. Пусть F измеримо на Λ и $\pi(F^{-1}(W)) \neq 0$. Пусть заданы величины χ , $0 < \chi < 1$, и объем выборки N . Тогда для любых ε , $0 < \varepsilon$, и η , $\eta \leq 1 - \Delta(\chi, N)$, рассматриваемый алгоритм позволяет построить ε -сеть T_n для W полноты η с мощностью $\text{card } T_n = n$, не превосходящей $\mathfrak{M}(\varepsilon, W)$, причем для построения требуется независимая выборка из W объемом не более $(n-1)N+1$ элементов.

Доказательство. Достаточно заметить, что при построении ε -сети с помощью рассматриваемого алгоритма для всех $l \leq n$ справедливо $\rho_{l-1} > \varepsilon$. Поэтому при $n = \mathfrak{M}(\varepsilon, W)$ множество T_n является ε -различимым подмножеством W . $\square$

Поскольку за счет увеличения N значение $\Delta(\chi, N)$ может быть сделано сколь угодно малым и ε -емкость любого компакта всегда конечна, то из приведенной теоремы вытекает возможность построения ε -сетей множеств идентификации с любой точностью и любой, меньшей единицы, полнотой.

Другие свойства приведенного алгоритма, в том числе свойства оптимальности по числу точек ε -сети, могут быть сформулированы по аналогии с результатами, полученными в [21]. Рассмотрение их выходит за рамки настоящей работы.

6. Пример идентификации при двух критериях

Рассмотрим простой пример модели с единственным показателем и тремя параметрами вида

$$y(t, \lambda) = e^{\gamma t} (0.5 + \sin(\omega t + \varphi)), \quad t = 1, 2, \dots,$$

где t – входная, y – выходная переменные, $\lambda = (\gamma, \omega, \varphi)$ – неизвестный вектор параметров.

Рассмотрим задачу идентификации данных наблюдений, определенных для нескольких дискретных значений времени:

$$y^*(t) = e^{0.1x} (0.5 + \sin(0.5t + \pi)) + \xi(t), \quad x = 1, 2, \dots, 10,$$

зашумленных по переменной y случайной величиной $\xi(t)$, имеющей равномерное распределение на отрезке $(-1, 1)$. Таким образом, искомое сочетание параметров будет иметь вид $\lambda^* = (\gamma^*, \omega^*, \varphi^*) = (0.1, 0.5, \pi)$. Мы, однако, будем считать, что *никакой априорной информации о законе и даже о классе ошибок данных измерений не имеется.*

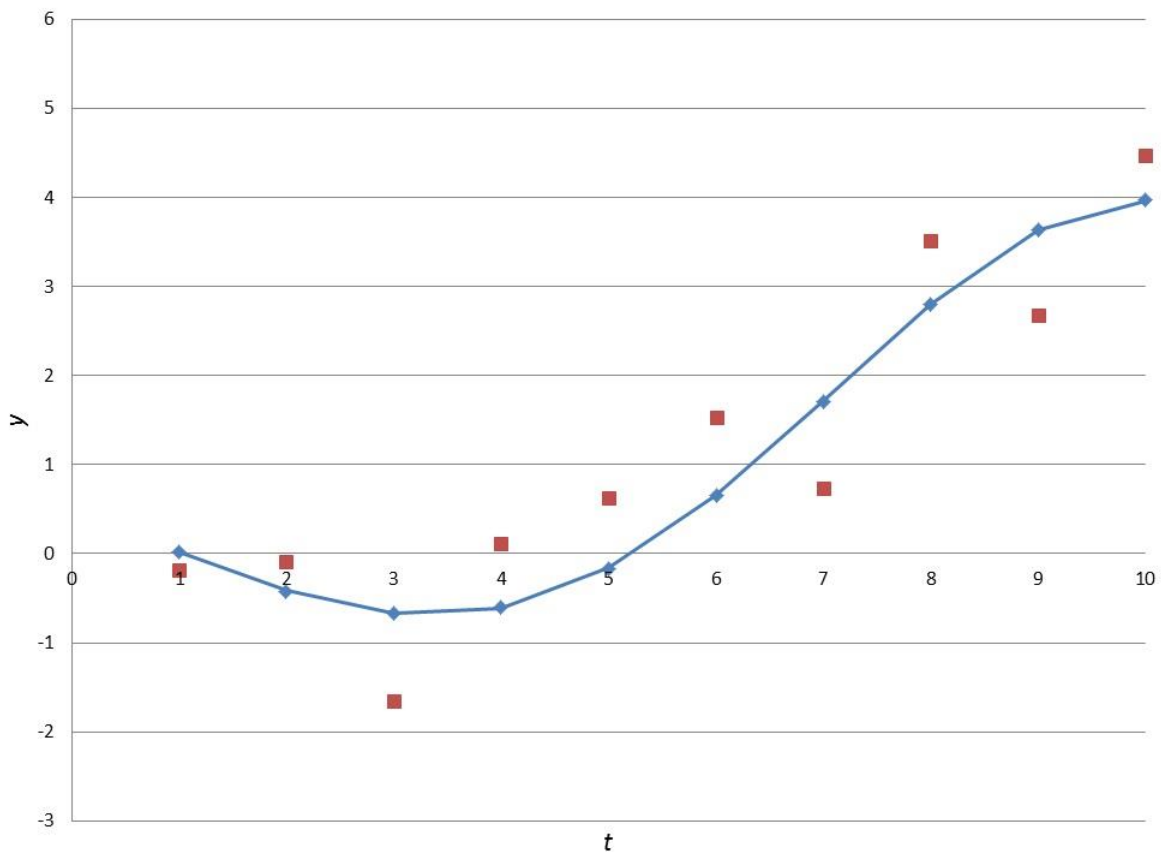


Рис. 3. Идентифицируемый сигнал и данные наблюдений

На рис. 3 изображен график идентифицируемого сигнала $y(t, \lambda^*)$ и его зашумленные данные $y^*(t)$, используемые для идентификации.

В качестве допустимого диапазона изменений параметров примем множество

$$\Lambda = \{(\gamma, \omega, \varphi): \gamma \in (0.05, 0.15), \omega \in (0, 2), \varphi \in (0, 2\pi)\}.$$

Поскольку информации о виде и классе ошибок не имеется, будем оценивать качество идентификации с помощью двух распространенных, но наиболее различных между собой функций ошибок:

– максимальной ошибки

$$\psi_{\max}(\lambda) = \max \{|y(t, \lambda) - y^*(t)| : t = 1, 2, \dots, 10\};$$

– средней квадратичной ошибки

$$\psi_{\text{mean}}(\lambda) = \left[\frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} (y(t, \lambda) - y^*(t))^2 \right]^{1/2}.$$

Таким образом, каждому допустимому сочетанию параметров $\lambda \in \Lambda$ будет соответствовать значение вектор-функции критериев $\psi(\lambda) = (\psi_{\max}(\lambda), \psi_{\text{mean}}(\lambda))$. Заметим, что «неизвестный» минимум рассматриваемых

функций смещен от искомого значения ω^* . Соответствующие оптимальные сочетания параметров и критериев будут составлять:

– для критерия максимальной ошибки

$$\lambda_1^{**} = (\gamma_1^{**}, \omega_1^{**}, \varphi_1^{**}) = (0.106, 0.438, 3.46),$$

$$\psi^1 = \psi(\lambda_1^{**}) = (0.968, 0.743).$$

– средней квадратичной ошибки

$$\lambda_2^{**} = (\gamma_2^{**}, \omega_2^{**}, \varphi_2^{**}) = (0.104, 0.339, 4.25),$$

$$\psi^2 = \psi(\lambda_2^{**}) = (1.17, 0.696).$$

На рис. 4 изображена проекция надграфика G в подпространство $(\psi_{\max}, \psi_{\text{mean}}, \sigma(\psi, Q))$, то есть расслоение множества достижимых сочетаний значений критериев идентификации Ψ по критерию близости точки к некоторой аппроксимации Ψ^* ОЭП множества Q .

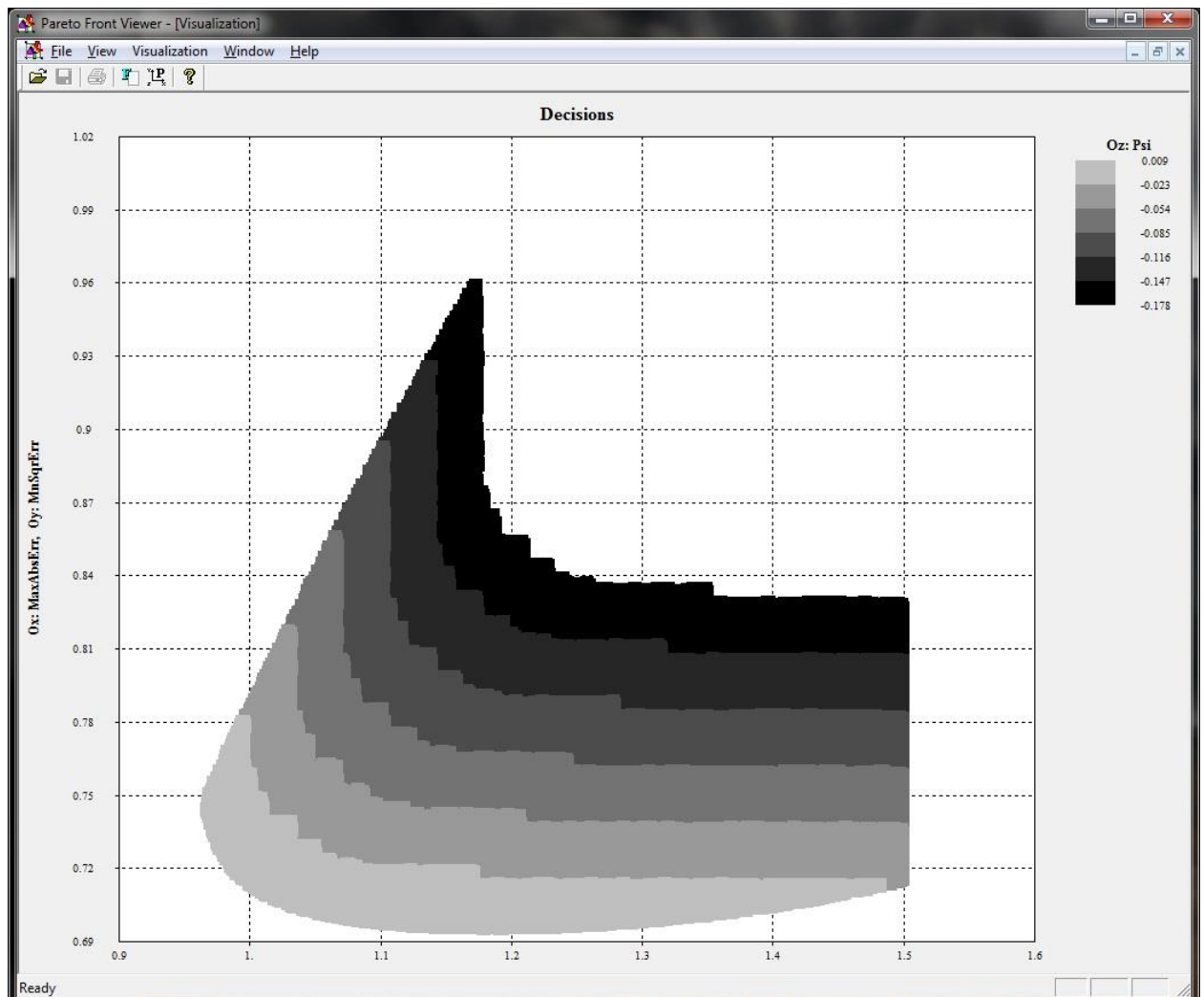


Рис. 4. Окрестность фронта Парето задачи идентификации

Значение критерия близости $\sigma(\psi)$ даны цветом (плотностью штриховки) по слоям. Слои с большим значением критерия наложены на слои с меньшим значением («вид сверху»). Таким образом, наиболее светлый слой на рисунке приближенно соответствует границе ОЭП Ψ^* , а значит, близок к границе (фронту) Парето $P(\Psi)$ рассматриваемой задачи идентификации.

На рис. 5 приведена проекция надграфика G в подпространство $(\omega, \gamma, \sigma(\psi(\gamma, \omega, \varphi), Q))$, то есть множества уровня $\mathcal{L}_\delta(Q)$ для критерия близости $\sigma(\psi(\gamma, \omega, \varphi), Q)$, представленные в пространстве наиболее значимых параметров (ω, γ) .

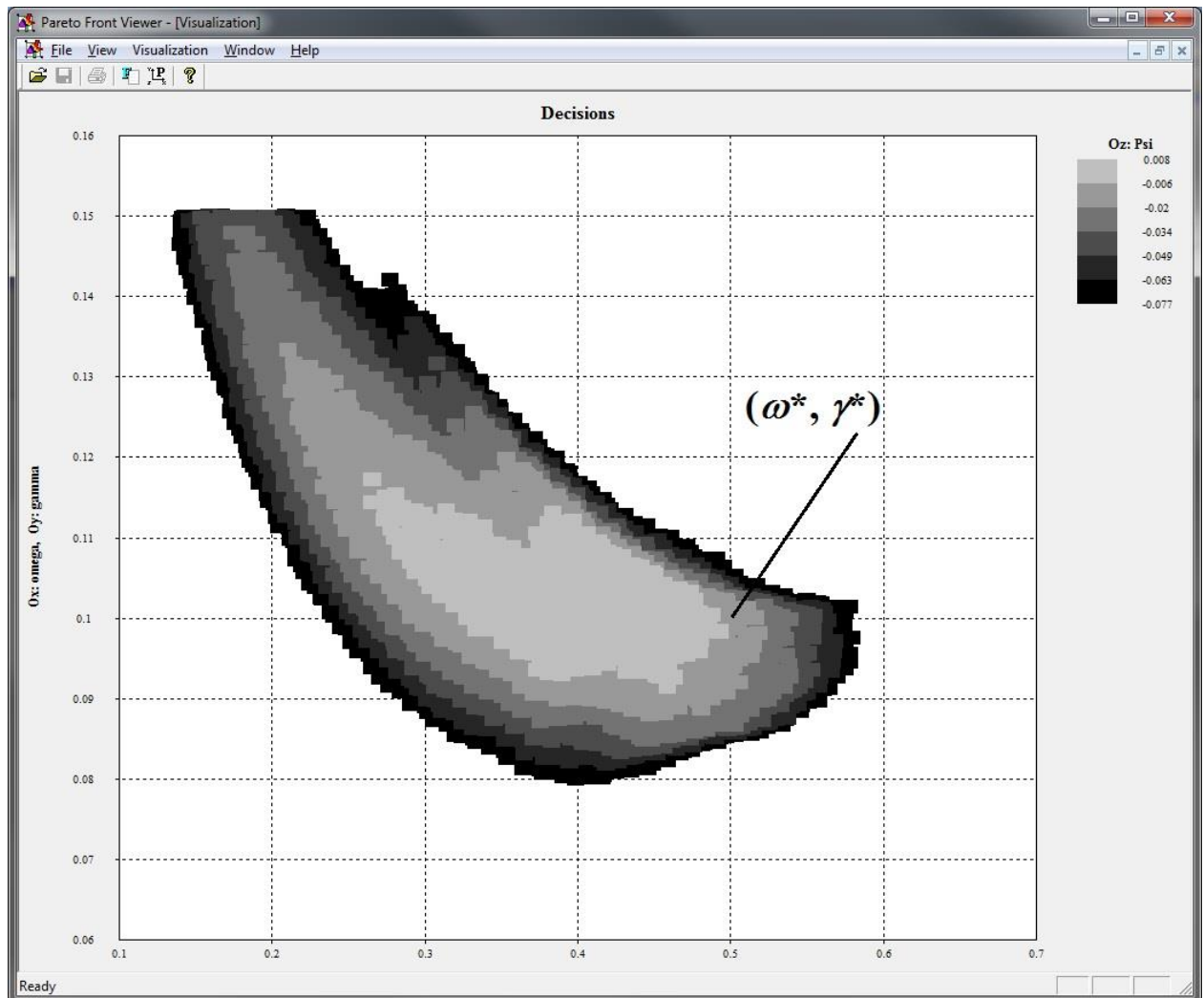


Рис. 5. Проекция множества субэффективных параметров идентификации

Значение критерия близости σ даны цветом по слоям. Слои с большим значением критерия наложены на слои с меньшим значением («вид сверху»). Таким образом, наиболее светлый слой на рисунке приближенно соответствует сочетаниям параметров, приводящим к границе ОЭП Ψ^* , т.е. множеству эффективных по Парето решений задачи идентификации $P(\Lambda)$.

Из рисунка видно, что искомое сочетание параметров (γ^*, ω^*) лежит вне $P(A)$ и является субэффективным (приводящим к сочетаниям критериев качества идентификации, лежащим вблизи границы Парето). Этот эффект является следствием зашумленности данных наблюдений и одной из причин, по которой при идентификации необходимо принимать во внимание субэффективные решения.

Перейдем теперь к вопросу прогнозирования поведения модели.

На рис. 6 изображены графики «неизвестного» идентифицируемого сигнала $y(t, \lambda^*)$ и его идентификации, построенные для минимумов критерия максимальной ошибки $y(t, \lambda_1^{**})$ и критерия средней квадратичной ошибки $y(t, \lambda_1^{**})$ для значений времени $1 \leq t \leq 20$, при этом значения $10 \leq t$ являются прогнозными.

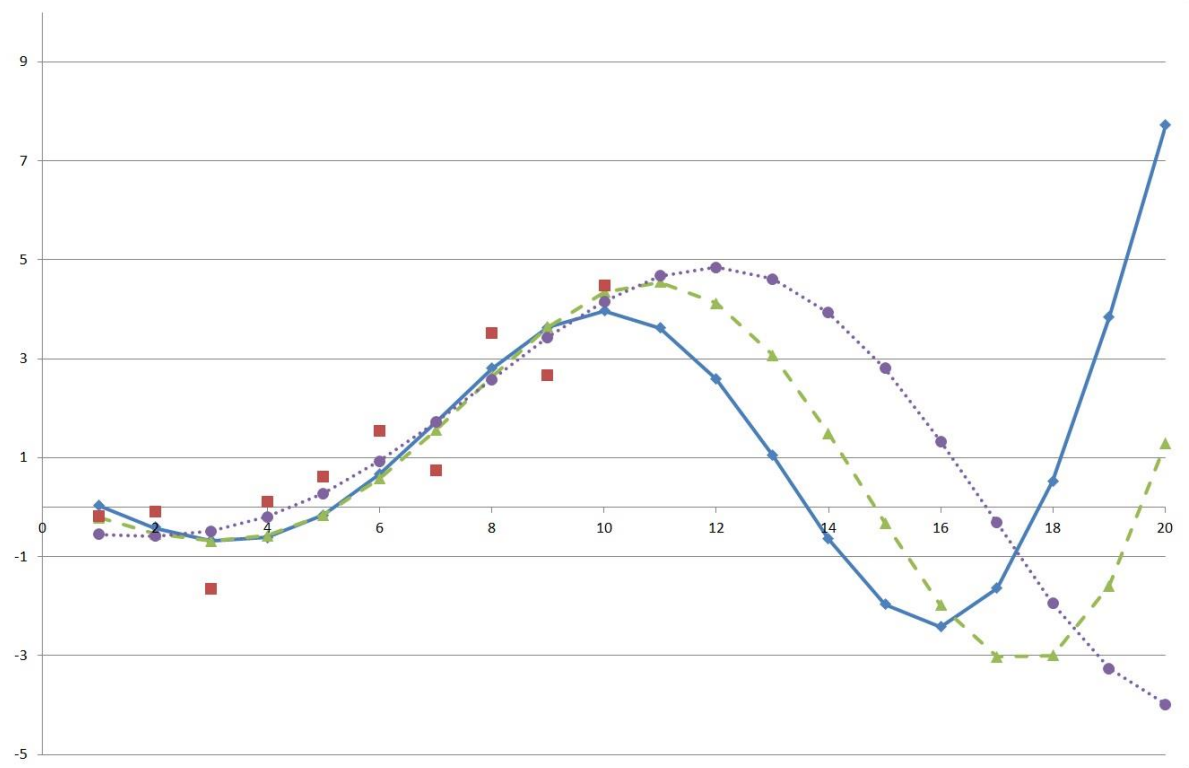


Рис. 6. Исходный сигнал и траектории покомпонентных оптимумов

Из рисунка видно, что до $t = 10$ все три графика близки, а после $t = 17$ результаты модели с точными параметрами и ее результаты на рассматриваемых наборах параметров существенно расходятся.

ММИ в многокритериальной постановке позволяет строить трубки прогноза для субэффективных параметров.

На рис. 7 изображена трубка траекторий прогноза (возможные значения идентифицируемого сигнала $y(t, \lambda)$) для сочетаний параметров λ с различным значением критерия $\sigma(\psi(\lambda), Q)$.

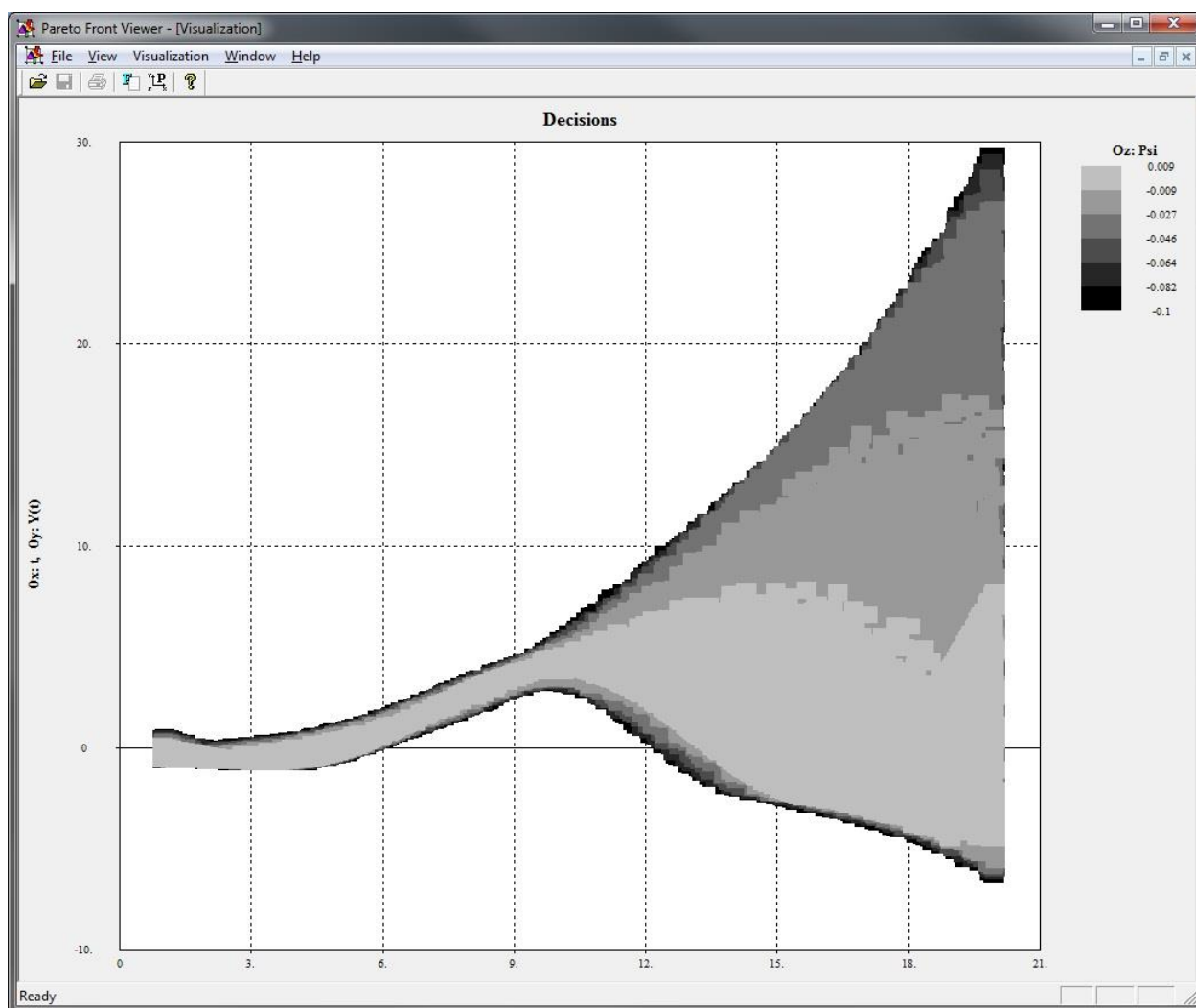


Рис. 7. Трубка траекторий для субэффективных решений

Значение критерия близости σ даны цветом по слоям. Слои с большим значением критерия наложены на слои с меньшим значением («вид сверху»). Таким образом, наиболее светлый слой на рисунке приближенно соответствует прогнозу по множеству субэффективных по Парето решений задачи идентификации, близких к $P(A)$. Этот рисунок позволяет исследовать пределы устойчивости (робастность) трубки прогноза по его временному горизонту и по совместному использованию двух рассматриваемых критериев качества идентификации.

7. Заключение

Мы рассмотрели технологию использования метода множеств идентификации в задачах, когда по каким-либо причинам имеются несколько функций ошибок (критериев качества). В этом случае могут быть использованы дополнительные преимущества многокритериального подхода. Предварительная аппроксимация ОЭП множества достижимых значений вектора критериев качества и введение критерия эффективности (близости

критериальной точки к ОЭП) позволяют строить и визуально исследовать множества эффективных и субэффективных по Парето сочетаний параметров (полный прообраз границы Парето и близких к нему решений). Метод позволяет строить трубки прогнозных траекторий поведения моделируемой системы. Построение прогнозной трубки для субэффективных параметров позволяет оценить точность и границы применимости прогноза для имеющихся данных и набора критериев качества идентификации. Таким образом, в многокритериальном случае ММИ позволяет получить и обосновать решение задач идентификации и прогнозирования не только на основе исследования устойчивости оптимального решения по параметрам (робастности по данным), но и устойчивости по выбранному набору критериев качества идентификации (робастности по совокупности функционалов). Однако выбор самого набора критериев качества находится за пределами этого метода. Как правило, он определяется традициями предметной областью исследуемой модели. Этот вопрос заслуживает самого серьезного рассмотрения, однако выходит за рамки настоящей статьи.

Литература

1. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М., ФАЗИС, ВЦ РАН: 2000.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
3. Дисперсионная идентификация / Под ред. Н.С. Райбмана. М.: Наука, Главн. ред. физ-мат литер., 1981. 336 с.
4. Каменев Г.К. Визуальный метод идентификации параметров // Доклады Академии наук. 1998. Т.359. N 3. С. 319-322.
5. Каменев Г.К. Об одном подходе к исследованию неопределенности, возникающей при идентификации моделей // Математическое моделирование. 2010. Т 22, N9. С.116-128.
6. Каменев Г.К. Метод исследования неопределенности, возникающей при идентификации параметров моделей. М.: Изд. ВЦ РАН, 2010. 46 с.
7. Лотов А.В. О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем // Доклады АН СССР, 1980. Т. 250, № 5, с. 1081-1083.
8. Лотов А.В. Анализ потенциальных возможностей экономических систем // Экономика и мат. методы, 1981. Т., № 17(2), с. 377-381.
9. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. / Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. М.: Наука, 1997. 239 с.
10. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. – 310 pp.
11. Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л. Об одном методе исследования

- незамкнутых нелинейных моделей // Математическое моделирование. 1992. №3. С. 105-118.
12. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.
13. *Оленев Н.Н., Каменев Г.К., Гусман В.Л.* Исследование устойчивости прогнозирования на модели российской экономики методом множеств идентификации. М.: Изд. ВЦ РАН, 2012. 49 с.
14. *Каменев Г.К., Оленев Н.Н.* Исследование устойчивости идентификации и прогнозирования российской экономики // Математическое моделирование. 2014. Т 26, № 9, с. 3-17.
15. *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной границы Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46. N 11. С. 2009-2023.
16. *Каменев Г.К., Березкин В.Е.* Исследование сходимости двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012, Т. 52. №6. С. 990-998.
17. *Каменев Г.К.* Исследование скорости сходимости и эффективности двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013, Т. 53. N4. С. 507-519.
18. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М: Макс Пресс, 2008. – 197 с.
19. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. М., Статистика, 1979.
20. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.
21. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
22. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
23. *Андреев М. Ю., Вржещ В. П., Пильник Н. П., Поспелов И. Г., Хохлов М. А., Жукова А. А., Радионов С. А..* Модель межвременного равновесия экономики России, основанная на дезагрегировании макроэкономического баланса // Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **29**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2013, 43–145.