УДК 519.6

# Эффективность метода уточнения оценок при аппроксимации многомерных шаров многогранниками[1]

**©2015 г. Г.К. Каменев**
(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)
*e-mail: gkk@ccas.ru*

В работе рассматривается метод «Уточнения оценок» полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Известно, что при аппроксимации выпуклых тел с гладкой границей этот метод порождает многогранники с оптимальным порядком роста числа вершин и гиперграней в зависимости от точности аппроксимации. В предыдущих исследованиях для задачи аппроксимации многомерного шара были получены оценки скорости сходимости по числу граней всех размерностей и показано, что мощность гранной структуры (норма $f$-вектора) построенного многогранника имеет оптимальную скорость роста. В работе проведено сравнение асимптотической скорости сходимости метода по граням всех размерностей со скоростью сходимости многогранников наилучшей аппроксимации. Получены явные выражения для асимптотической эффективности, в том числе для малых размерностей. Приведено сравнение теоретических оценок с результатами численных экспериментов. Библ. 29. Табл. 1.

**Ключевые слова:** выпуклые тела, многомерный шар, аппроксимация многогранниками, оптимальный метод, гранная структура, оценка скорости сходимости алгоритма

## 1. Введение

Аппроксимация многомерных выпуклых тел многогранниками является классической проблемой в теории выпуклых множеств [1], [2], актуальной для таких прикладных исследований, как задачи построения множеств достижимости динамических систем [3], [4] и задачи многокритериальной оптимизации [5], [6]. В этих приложениях стоит важная задача разработки методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел, близких к оптимальным. В рамках этих практических исследований был предложен [7] и разработан (см. подробности в [6], стр. 186) итерационный адаптивный метод «Уточнения Оценок» (УО), the Estimate Refinement (ER) method. В [8] метод «Уточнения Оценок» был переформулирован в виде, используемом в исследованиях, в том числе – в настоящей работе. Метод УО подробно теоретически исследован. Получены скорости сходимости по числу вершин и итераций в гладком [9], [10] и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-11-00432.

негладком [11] случаях, а также на начальном этапе аппроксимации [12]. В гладком случае показана оптимальность метода по порядку (по скорости) роста числа вершин и гиперграней аппроксимирующих многогранников в зависимости от точности аппроксимации [13]. Следствием этих свойств является оптимальность метода в гладком случае по порядку числа задач вычисления опорной функции аппроксимируемого гладкого тела, необходимых для достижения заданной точности. Сводка большинства результатов теоретического исследования метода УО представлена в [14].

Особое внимание в теории аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками уделялось проблеме минимизации сложности описания аппроксимирующих многогранников в виде числа основных элементов гранной структуры, таких как вершины или гиперграни. Были получены асимптотические оценки минимального числа вершин или гиперграней, необходимого для получения заданной точности аппроксимации (см., например, обзоры в [1], [2]). Вместе с тем, о полной мощности гранной структуры аппроксимирующих многогранников известно в общем случае значительно меньше [15], [16].

В рамках проблемы аппроксимации выпуклых компактных тел большое значение имеет задача аппроксимации шара. Прежде всего, среди всех изопериметричных (с равным поверхностным объемом) компактных выпуклых тел шар является наиболее сложным объектом для аппроксимации многогранниками (см., например, [1] или [2]). Кроме того, эта задача важна особенно тем, что на полиэдральной аппроксимации шара основаны некоторые неадаптивные методы полиэдральной аппроксимации [17] и методы построения сеток и кодов на поверхности сферы [18], [19]. В работе [20] для задачи аппроксимации многомерного шара получены оценки скорости сходимости по числу граней всех размерностей многогранников, порождаемых методом УО. Показано, что, асимптотически, число граней аппроксимирующих многогранников, получаемых в методе, пропорционально числу их вершин. Показано, что мощность гранной структуры (норма $f$-вектора) построенного многогранника будет иметь оптимальную скорость роста. Получены явные выражения для констант, зависящие только от размерности пространства, в том числе при больших размерностях. Для малых размерностей (от 3 до 5) получены явные верхние оценки скорости роста числа граней всех размерностей.

Основной целью настоящей работы является сравнение многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара, с многогранниками наилучшей аппроксимации по мощности различных компонентов гранной структуры.

## 2. Свойства гранной структуры многогранников наилучшей апроксимации

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ с метрикой $\rho$, евклидовой нормой и объемом $V$. Будем предполагать (если это не оговорено специально), что $d \geq 3$. Обозначим через $B^d$ единичный шар с центром в начале координат и пусть $S^{d-1} := \partial B^d$. Через $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ обозначим объем единичного шара. Нам понадобятся величины $\pi_2 = \pi$, $\pi_3 = 4\pi/3$, $\pi_4 = \pi^2/2$, $\pi_5 = 8\pi^2/15$, $\pi_6 = \pi^3/6$, $\pi_7 = 16\pi^3/105$.

Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел. На $\mathscr{C}$ рассмотрим метрику Хаусдорфа:

$$\delta(C_1, C_2) := \max \{\sup\{\rho(x, C_2) : x \in C_1\}, \sup\{\rho(x, C_1) : x \in C_2\}\}.$$

Через $\partial C$ обозначим границу тела $C$.

Обозначим через $\mathscr{C}^s$ класс выпуклых компактных тел с $s$ раз непрерывно дифференцируемой границей, и пусть $\mathscr{C}_+^s$ – класс выпуклых компактных тел с $s$ раз непрерывно дифференцируемой границей положительными главными кривизнами, $s \geq 2$. Тела из класса $\mathscr{C}_+^2$ называют иногда овалоидами.

Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P} \subset \mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P \in \mathscr{P}$ через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граням размерности $(d$-1)). Обозначим через $\mathbf{C}(n, k) := \binom{n}{k}$ число сочетаний из $n$ по $k$, через card $T$ – мощность множества $T$, через $\lfloor \cdot \rfloor$ – ближайшее целое снизу. Для $C \in \mathscr{C}$ и $u \in \mathbb{E}^d \setminus \{0\}$ введем обозначения опорной функции $g(u, C) := \max \{\langle u, x \rangle : x \in C\}$ и множества точек касания $T(u, C) := \{p \in \partial C : \langle u, p \rangle = g(u, C)\}$.

Нам понадобятся плотность покрытия $\vartheta_d$ и плотность упаковки $\delta_d$ пространства $\mathbb{E}^d$ шарами фиксированного радиуса. Иногда говорят о плотностях редчайшего покрытия и плотнейшей упаковки. Существуют различные эквивалентные определения этих понятий. Все они достаточно громоздки. Мы приведем классическое определение из [21], адаптированное для случая покрытия и упаковок одинаковыми шарами. Путь $\{a_i\}$ – последовательность точек и задан полуоткрытый куб $C$ с длиной ребра $s>0$. Пусть $\mathbf{B} := \{B^d + a_i\}$. Положим

$$\rho_+(\mathbf{B}, s) := (\pi_d / s^d) \operatorname{card} \{B \in \mathbf{B} : B \cap C \neq \emptyset\},$$

$$\rho_-(\mathbf{B}, s) := (\pi_d / s^d) \operatorname{card} \{B \in \mathbf{B} : B \subset C\}.$$

Пусть

$$\rho_+(\mathbf{B}) := \limsup_{s \to \infty} \rho_+(\mathbf{B}, s), \ \rho_-(\mathbf{B}) := \liminf_{s \to \infty} \rho_-(\mathbf{B}, s).$$

Будем говорить, что система $\mathbf{B}$ образует покрытие пространства, если каждая его точка принадлежит хотя бы одному шару семейства. Будем говорить, что система $\mathbf{B}$ образует упаковку (укладку) пространства, если открытые шары этого семейства попарно не пересекаются. Обозначим

$$\delta_d := \sup \{\rho_+(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \text{ – упаковка } \mathbb{E}^d \},$$

$$\vartheta_d := \inf \{\rho_{-}(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \text{ – покрытие } \mathbb{E}^d \}.$$

Оценкам величин $\vartheta_d$ и $\delta_d$ посвящена обширная литература [22]. Точно известны только величины $\delta_1=1$, $\delta_2=\pi/\sqrt{12}$ и $\vartheta_1=1$, $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$.

Для $C\in\mathscr{C}$ через $\mathscr{H}(C)$, где $\mathscr{H}(C)\subset\mathscr{P}$, обозначим класс вписанных в $C$ многогранников, т.е. многогранников, чьи вершины лежат на поверхности $\partial C$. Собственную грань многогранника $P$ (т.е. все грани, за исключением $\varnothing$ и $P$) можно представить как множество $T(u, P)$ при некотором $u\in\mathbb{E}^d\backslash\{0\}$ ([23], теорема 7.5). Собственная грань многогранника является многогранником меньшей размерности. Грань $F$ называется $i$-гранью (гранью размерности $i$), если $\dim F = i$. Вершины являются 0-гранями, гиперграни (facets) – ($d$-1)-гранями. Число граней многогранника конечно ([23], теорема 7.4). Обозначим через $\Phi(P)$ множество всех граней многогранника $P$. Обозначим через $\Phi_i(P)$ множество $i$-мерных граней многогранника $P$, $i=0, \ldots d-1$. Обозначим через $f_i(P) := \operatorname{card}\ (\Phi_i(P))$. Тогда $f(P) := (f_i(P))_{i=0,\ \ldots\ d-1}$ будет представлять собой $f$-вектор (или вектор чисел граней) многогранника $P$, характеризующий его гранную (facial) структуру. Введем норму $f$-вектора

$$\|f(P)\| := \max \{ f_i(P),\ i=0, 1, \ldots , d-1\}.$$

Обозначим через $f^*_i(m, d)$ и $f^{**}_i(m, d)$ минимальные и максимальные возможные числа $i$-мерных граней многогранника с $m$ вершинами. Существуют различные оценки этих величин [23], [24].

Для $C\in\mathscr{C}$ и $i$ ($i$=0, … $d$-1) определим классы многогранников, имеющих не более чем $m$ $i$-мерных граней:

$$\mathscr{P}_{i,m}(C) := \{P\in \mathscr{P}(C) : f_i(P) \le m\}.$$

Обозначим

$$\delta(C, \mathscr{P}_{i,m}) := \inf \{\delta(C, P) : P\in\mathscr{P}_{i,m}(C)\}.$$

Для конкретного $i$ существование многогранника $P(i, m)\in\mathscr{P}_{i,m}(C)$ такого, что

$$\delta(C, P(i, m)) = \delta(C,\ \mathscr{P}_{i,m}),$$

гарантируется компактностью $C$ (см., например, [16] стр. 179 или [14] стр. 8). Этот многогранник не обязательно является единственным и традиционно называется «best approximating polytope»: *многогранником наилучшей аппроксимации* [25] или «многогранником наилучшего приближения» [2].

В [1], [2] представлен обзор результатов, касающихся свойств оптимальной аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками. В нашем исследовании мы ограничимся результатами оптимальной аппроксимации вписанными многогранниками гладких тел в метрике Хаусдорфа.

Для $C\in\mathscr{C}^2$ и многогранников с заданным числом вершин ($i$=0) и гиперграней ($i$=$d$-1) справедливо (R. Schneider ($\mathscr{C}_+^3$), P.M. Gruber ($\mathscr{C}_+^2$), K. Böröczky Jr. ($\mathscr{C}^2$) – см. подробнее [2], [14]):

$$\lim_{m\to\infty} \delta(C,\mathscr{P}_{0,m})m^{2/(d-1)} = \lim_{m\to\infty} \delta(C,\mathscr{P}_{d-1,m})m^{2/(d-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x \in \partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке $x$.

Для многогранников с заданным числом граней промежуточных размерностей ($i$-граней) асимптотические формулы при $d \geq 4$ неизвестны (возможно, и не существуют в силу нерегулярности поведения их числа [15]). Однако для $d \geq 4$, $i=0, \ldots d-1$, $C \in \mathscr{C}^2$ и больших $m$ справедливы [15] нижние оценки

$$\delta(C, \mathscr{P}_{i,m}) > \frac{d}{34e\pi}\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)}.$$

Для $d \geq 4$, $i=0, \ldots d-1$, $C \in \mathscr{C}_+^2$ и больших $m$ справедливы [15] верхние оценки

$$\delta(C, \mathscr{P}_{i,m}) < c\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)},$$

где константа $c$ зависит только от $d$ и $i$. Наконец, при $d=3$, $C \in \mathscr{C}^2$ справедлива асимптотическая формула для числа ребер ($i=1$) [16]

$$\lim_{m \to \infty} \delta(C, \mathscr{P}_{1,m}) m = \frac{1}{2}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x).$$

Чтобы получить оценки для случая, когда аппроксимируемое тело $C$ является единичным шаром $B^d$, учтем, что $k_C(x) \equiv 1$ и $\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x) = d\pi_d$, где $d\pi_d$ – поверхностный объем (площади поверхности) сферы $S^{d-1}$. Итак, при аппроксимации шара имеем оценки сложности вида:

$$\lim_{m \to \infty} \delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}, \ i = 0, d\text{-}1, \ d \geq 2; \quad (1)$$

$$\delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) > \frac{d}{34e\pi}(d\pi_d)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)}, \ i = 1, \ldots, d\text{-}2, \ d \geq 4; \quad (2)$$

$$\delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) < c(d\pi_d)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)}, \ i = 1, \ldots, d\text{-}2, \ d \geq 4; \quad (3)$$

$$\lim_{m \to \infty} \delta(B^3, \mathscr{P}_{i,m}) m = 2\pi, \ i = 1. \quad (4)$$

При этом из [15] следует, что существуют многогранники, для которых оценки (1)-(3) (соответственно (1), (4) при $d=3$) достигаются одновременно. Это, разумеется, не означает, что такие многогранники являются многогранниками наилучшей аппроксимации $P(i, m)$ для всех $i$ одновременно.

# 3. Метод УО и его скорость сходимости при аппроксимации шара

Приведем теперь описание метода «Уточнения Оценок» [7] в виде [8], предназначенного для построения полиэдральных аппроксимаций выпуклых компактных тел (см. подробности в [6], стр. 186).

МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК (УО)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения $P^{n+1}$ выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, C) - g(u, P^n): u\in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := \operatorname{conv}\{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Заметим, что в случае аппроксимации шара $C \equiv B^d$, $g(u, C) = 1$ и $T(u_n, C) = \{u_n\}$.

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть последовательность многогранников, порождаемых методом УО для $C\in\mathscr{C}$. Тогда, согласно [8], [9],

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P^n, C) = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь скорость сходимости многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара, в метрике Хаусдорфа для отдельных компонентов гранной структуры и в целом, по норме $f$-вектора, полученные в [20].

Рассмотрим, как и в предыдущем разделе, $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ – последовательность многогранников, порождаемую методом УО для $B^d$. Обозначим $f_n^i := f_i(P^n)$ и $f_n := f(P^n) = (f_n^i)_{i=0,\dots d-1}$. Пусть $h_n := \delta(P^n, B^d)$.

**Теорема 1 [20].** *Для* $i$, $d-1 \ge i \ge 1$, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le$$
$$\le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \min\{ f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1, d),\ f_i^{**}(m^{**}(d-1), d)\}, \tag{6}$$

*кроме того, справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2}, \tag{7}$$

*где для величины* $m^{**}(d)$ *существуют следующие оценки:*

$$m^{**}(d) \le 5^d = 2^{2.322d}, \tag{8}$$

$$m^{**}(d) \le \min\{253 \times (d-2)^{3/2}\, 2^{1.523(d-2)}, 69 \times (d-2)^{3/2}\, 2^{1.924(d-2)}\},\ d\ge 5, \tag{9}$$

$$m^{**}(d) \le 11 \times 2^{1.4305(d-1)},\ d\to\infty. \tag{10}$$

Здесь величина $m^{**}(d)$ есть максимальное число открытых единичных шаров, которые можно упаковать в шар радиуса 5. Эта величина служит асимптотической оценкой числа вершин многогранника $P_n$, видимых из присоединяемой точки $p_n$ (см. [26], [20]).

При малых размерностях для величины $m^{**}(d)$, входящей в (6), имеем следующие верхние оценки [26]: при $d$=3 – $m^{**}(2)\le 25$ (предположительно 20), при $d$=4 – $m^{**}(3)\le 125$ (предположительно 68), при $d$=5 – $m^{**}(4)\le 625$, при $d$=6 – $m^{**}(5)\le 3125$.

Для получения явных значений в соотношениях (6), (7) необходимо использовать оценки величин $f^{**}_i(m, d)$ – максимального возможного числа $i$-мерных граней многогранника с $m$ вершинами. Обозначим $d^* := \lfloor d/2 \rfloor$, $d^{**} := \lfloor (d\text{-}1)/2 \rfloor$. Справедливо (см., например, [23], теорема 18.2 и следствие 18.3):

$$f^{**}_i(m, d) \le \mathbf{\Phi}_{d-1-i}(d, m),\ i=1, \dots, d\text{-}1, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{\Phi}_0(d, m) = \mathbf{C}(m\text{-}d^{**}\text{-}1, d^*)+ \mathbf{C}(m\text{-}d^*\text{-}1, d^{**});$$

$$\mathbf{\Phi}_i(d, m) = \mathbf{C}(m, d\text{-}i)+\mathbf{C}(m\text{-}d\text{+}i\text{-}1, i)\mathbf{C}(m\text{-}d\text{+}d^*, d^*\text{-}i)-$$

$$-\sum_{j=d^{**}+1}^{d-i}\mathbf{C}(d-j,i)\mathbf{C}(m-d+j-1,j),\ i=1, \dots, d^*;$$

$$\mathbf{\Phi}_i(d, m) = \mathbf{C}(m, d\text{-}i)\ ,\ i= d^{**}\text{+}1, \dots, d\text{-}2.$$

Добавим сюда обозначение

$$f^{**}_0(m, d) = m := \mathbf{\Phi}_{d-1}(d, m).$$

Заметим, что, согласно [28], справедливо свойство

$$\|f^{**}(m, d)\| = O(m^{d^*}). \tag{12}$$

Оценка (11) достигается на циклическом многограннике с $m$ вершинами (выпуклой оболочке $m$ различных точек на моментной кривой [23]).

Обозначим

$$\mathbf{R}_i(m, d) := \min \{\mathbf{\Phi}_{d-i}(d, m\text{-}1), \mathbf{\Phi}_{d-1-i}(d, m)\},\ i=1, \dots, d\text{-}1.$$

**Теорема 2 [20].** *Для $i$, $d$-1 ≥ $i$ ≥ 1, справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}\mathbf{R}_i(m^{**}(d-1),d), \tag{13}$$

*где для величины $m^{**}(d)$ существуют оценки* (8)-(10).

Нам понадобится подставлять в утверждения теоремы оценки сверху на величину $m^{**}(d)$. На циклических многогранниках достигается максимум числа $i$-мерных граней выпуклых многогранников при заданном числе вершин. Поскольку циклический многогранник с меньшим числом вершин можно считать вырожденным случаем циклического многогранника с большим числом вершин, то следует ожидать увеличения числа $i$-мерных граней циклического многогранника (а следовательно, величин $\mathbf{R}_i(m, d)$) с ростом числа вершин. Формально докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Для* $i$, $m_1$ *и* $m_2$, *где* $d$-$2 \ge i \ge 0$, $m_2 \ge m_1 \ge d+1$, $d \ge 2$, *справедливо*

$$\mathbf{\Phi}_i(d, m_2) \ge \mathbf{\Phi}_i(d, m_1).$$

*Доказательство.* Достаточно доказать, что $\mathbf{\Phi}_i(d, m+1) \ge \mathbf{\Phi}_i(d, m)$.

Заметим, что для любых целых $a$ и $b$, $0 \le a \le b$, справедливо $\mathbf{C}(b, a) \le \mathbf{C}(b+1, a)$. Отсюда и из определения $\mathbf{\Phi}_i$ следует доказываемое утверждение для $i=0$ и $i=d^{**}+1, \ldots, d$-2. Далее, согласно [23] стр. 186 (доказательство теоремы 18.2), при $i=1, \ldots, d^*$ справедливо

$$\mathbf{C}(m, d-i) - \sum_{j=d^{**}+1}^{d-i} \mathbf{C}(d-j, i)\mathbf{C}(m-d+j-1, j) = \sum_{j=0}^{d^{**}} \mathbf{C}(d-j, i)\mathbf{C}(m-d+j-1, j).$$

Поэтому

$$\mathbf{\Phi}_i(d, m) = \sum_{j=0}^{d^{**}} \mathbf{C}(d-j, i)\mathbf{C}(m-d+j-1, j) + \mathbf{C}(m-d+i-1, i)\mathbf{C}(m-d+d^*, d^*-i),$$

откуда вытекает доказываемое утверждение для $\mathbf{\Phi}_i(d, m+1)$. □

Из теоремы 2, оценок (8)-(10) и леммы 1 вытекают следующие утверждения.

**Следствие 1 [20].** *Для* $i$, $d$-$1 \ge i \ge 1$, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \mathbf{R}_i(2^{2.322(d-1)}, d). \qquad (14)$$

**Следствие 2 [20].** *Для* $i$, $d$-$1 \ge i \ge 1$, *при* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \mathbf{R}_i(11 \cdot 2^{1.4305d}, d). \qquad (15)$$

Обозначим $\|f_n\| := \max \{f_n^i, i=0, 1, \ldots, d-1\}$.

**Следствие 3 [20].** *При* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\| h_n^{(d-1)/2} = O(2^{0.7153d^2}). \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь малые размерности.

**Следствие 4 [20].** *Пусть* $d$=3. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n \le 7.2552,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1 h_n \le 21.77,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^2 h_n \le 14.52.$$

*Пусть* $d$=4. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 (h_n)^{3/2} \le 10.312,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1 (h_n)^{3/2} \le 691.0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^2 (h_n)^{3/2} \le 22800,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^3 (h_n)^{3/2} \le 22790.$$

*Пусть* $d$=5. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0(h_n)^2 \le 13.823,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1(h_n)^2 \le 6435,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^2(h_n)^2 \le 2004400,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^3(h_n)^2 \le 7953251,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^4(h_n)^2 \le 1991623.$$

# 4. Об асимптотической эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу граней всех размерностей

Сравним точность аппроксимации многогранниками, построенными методом УО, с точностью многогранников наилучшей аппроксимации, имеющих то же число граней заданной размерности.

Как уже отмечалось выше, согласно [15], существуют многогранники, на которых для всех одновременно $i$, $i$=0, … $d$-1, выполняются оценки (1)-(3) (соответственно (1), (4) при $d$=3). Нас будет интересовать вопрос о том, удовлетворяют ли этим оценкам многогранники, построенные методом УО.

Пусть $C\in\mathscr{C}$ и $P\in\mathscr{P}(C)$ и задано $i$, $i$=0, … $d$-1. Величину

$$\eta_i(P) := \frac{\delta(C, \mathscr{P}_{i,\,f_i(P)}(C))}{\delta(C,P)}$$

назовем *эффективностью аппроксимации тела C многогранником P с точки зрения числа i-мерных граней*. Эта величина показывает, во сколько раз минимально возможное отклонение от тела в метрике Хаусдорфа при числе $i$-мерных граней, совпадающим с числом $i$-мерных граней многогранника $P$, меньше, чем отклонение от тела, обеспеченное этим многогранником.

Пусть $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=1,2,...}$ – сходящаяся к $C\in\mathscr{C}$ последовательность многогранников из $\mathscr{P}(C)$. Величины

$$\underline{\eta}_i(\mathrm{F}) := \liminf_{n\to\infty} \eta_i(P^n),$$

$$\overline{\eta}_i(\mathrm{F}) := \limsup_{n\to\infty} \eta_i(P^n)$$

назовем, соответственно, *нижней* и *верхней асимптотической эффективностью аппроксимации тела C последовательностью* F *с точки зрения числа i-мерных граней*. Если нижняя и верхняя асимптотическая эффективность совпадают, можно говорить об *эффективности аппроксимации тела C*. Наконец, под *эффективностью метода полиэдральной аппроксимации тела C* будем понимать эффективность порождаемой им последовательности многогранников.

Очевидно, что $0 \le \underline{\eta}_i(F) \le \overline{\eta}_i(F) \le 1$, причем при заданном $i$ для любого многогранника наилучшей аппроксимации $P(i,\ m)$, $m$=$d$+1, $d$+2, ..., эффективность аппроксимации равна единице. Поэтому гипотетический метод построения многогранников наилучшей аппроксимации будем называть *оптимальным*. Например, при $d$=2 в случае аппроксимации круга оптимальным будет метод построения правильных многоугольников с заданным числом вершин. Заметим, что другие оптимальные методы даже для двумерного случая неизвестны.

Метод, порождающий для тела $C$ последовательность с асимптотической эффективностью, равной 1, будем называть *асимптотически оптимальным* (*с точки зрения числа i-мерных граней*). Асимптотически оптимальные методы известны только для тел класса $\mathscr{C}^2$ при $i$=0 и $i$=$d$-1 (то есть только для вершин и гиперграней), причем при $d$>2 эти методы не являются конструктивными (см. [2], [27]).

Метод, порождающий для тела $C$ последовательность с нижней асимптотической эффективностью, большей нуля, будем называть *асимптотически эффективным* (*с точки зрения числа i-мерных граней*). Из (1)-(2) следует, что для асимптотически эффективной последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ справедливо

$$\delta(C,P^n)\le\frac{\mathrm{const}_{C,d,i}}{f_i(P^n)^{2/(d-1)}}. \qquad (17)$$

Результаты [15], [16] свидетельствует о том, что при $d$=3, $C\in\mathscr{C}^2$ и при $d\ge4$, $C\in\mathscr{C}_+^2$ и существуют последовательности многогранников асимптотически эффективные с точки зрения числа $i$-мерных граней для всех $i$, $i$=0, … $d$-1, одновременно. Способы построения таких последовательностей неизвестны.

**Теорема 3.** *Метод УО при аппроксимации $B^d$ является асимптотически эффективным с точки зрения числа граней всех размерностей одновременно.*

*Доказательство.* Из теоремы 1 вытекает, что многогранники, порождаемые методом УО при аппроксимации шара, удовлетворяют условию (17), так как константы в правых частях (6) и (7) зависят только от размерностей $d$ и $i$. ☐

Вычислим теперь там, где это позволяет наличие количественных оценок на величины $\delta(C,\ \mathscr{P}_{i,m})$, нижние оценки асимптотической эффективности метода УО для граней различных размерностей.

# 5. Расчет асимптотической эффективности метода УО по числу вершин

Пусть $\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)$ := $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ – последовательность многогранников, порождаемая методом УО для $B^d$. Рассмотрим эффективность метода УО с точки зрения числа вершин (граней нулевой размерности).

Сравним асимптотический результат для числа граней многогранников наилучшей аппроксимации (1) с оценкой скорости сходимости метода УО по числу вершин (6). Этот результат получен в [20] для $d \geq 3$. Вообще говоря, согласно теореме 2.6.18 [14], асимптотическая эффективность метода УО при аппроксимации тел класса $\mathscr{C}_+^2$ по числу вершин не может быть ниже ¼:

$$\underline{\eta}_0(\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)) \geq \frac{1}{4}. \qquad (18)$$

Покажем, что для шара $d=2$ (т.е. круга) эта оценка не может быть улучшена теоретически.

**Теорема 4.** *При* $d=2$ *нижняя эффективность метода УО при аппроксимации шара по числу вершин и гиперграней равна* ¼.

*Доказательство.* Рассмотрим двумерный единичный шар $B^2$. Вписанным многогранником наилучшей аппроксимации с $n$-вершинами в этом случае будет правильный $n$-угольник $Q(n)$, а точность аппроксимации будет равна:

$$\delta(B^2, Q(n)) = 1 - \cos(\pi / n).$$

Рассмотрим аппроксимацию тела $B^2$ методом УО, начиная, скажем, с правильного четырехугольника Q(4). Рассмотрим генерируемую этим адаптивным методом последовательность F многоугольников $P(n)$ с числом вершин $n$. При $n = 2^k$, $k=2, 3, \ldots$ , в этой последовательности получаются многоугольники, совпадающие с правильными $2^k$-угольниками: $P(2^k) \equiv Q(2^k)$, в то время как в многоугольниках $P(n)$ при $n=2^{(k+1)}-1$ присутствуют $2^{(k+1)}-2$ ребра многоугольника $P(2^{k+1}) \equiv Q(2^k+1)$ и одно ребро от многоугольника $P(2^k) \equiv Q(2^k)$. При этом

$$\delta(B^2, P(2^{(k+1)}-1)) = \delta(B^2, Q(2^k)) = 1 - \cos(\pi / 2^k),$$

где $k=2, 4, \ldots$ . Поэтому эффективность аппроксимации методом УО равна

$$\eta_0(P(2^{k+1}-1)) = \frac{\delta(B^2, Q(2^{k+1}-1)}{\delta(B^2, P(2^{k+1}-1)} = \frac{1-\cos(\pi/(2^{k+1}-1))}{1-\cos(\pi/2^k)},$$

откуда

$$\eta_0(\mathrm{F}) = \liminf_{n\to\infty} \eta_0(P(n)) \leq \lim_{k\to\infty} \eta_0(P(2^{k+1}-1)) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2-2^{-k}}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Вместе с (18) это дает утверждение теоремы 4 для числа вершин. Для доказательства утверждения теоремы относительно числа гиперграней (одномерных ребер) достаточно заметить, что в двумерном случае их число совпадает с числом вершин. □

Заметим, что в рассмотренном двумерном случае переход от многогранника наилучшей аппроксимации (правильного многоугольника) с $n$ вершинами к многограннику наилучшей аппроксимации (правильному многоугольника) с $n+1$ вершинами требует изменения положения всех вершин. Это свойство типично для многогранников наилучшей аппроксимации. В то же время метод УО имеет адаптивный характер, поэтому в процессе аппроксимации часть вершин с предыдущих итераций сохраняется на своих местах (подробнее, см. [26], п.2.3.2). Как показывает теорема 4, это препятствует получению эффективности метода УО, равной единице.

Итак, для шара $d$=2 (т.е. круга) оценка (18) не может быть улучшена теоретически. Однако при $d$>2 могут быть получены более сильные результаты на основе оценок, полученных в работе [20].

**Теорема 5.** *При $d \geq 3$ для нижней эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу вершин справедливо*

$$\underline{\eta}_0(\mathrm{F_{УО}}(d)) \geq \frac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\delta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}. \qquad (19)$$

*Доказательство.* Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (1) и результата (7) теоремы 1. □

Численные значения оценки (19) для конкретных размерностей зависят от оценок плотности покрытия $\vartheta_d$ и упаковки $\delta_d$ пространства шарами (см., например, сводку в [22]). Приведем некоторые следствия, основанные на таких оценках.

Следующее утверждение вытекает из неравенств Роджерса [21].

**Лемма 2.** *Справедливо*

$$\frac{\vartheta_d}{\delta_d} \geq \left(\frac{2d}{d+1}\right)^{d/2} \qquad (20).$$

*Доказательство.* Рассмотрим правильный симплекс с ребром, равным 2, и систему из $d$+1 шаров радиуса 1 с центрами в вершинах симплекса. Пусть $\sigma_d$ – отношение объема части симплекса, которая покрыта шарами, к объему всего симплекса. Тогда, по [21], теорема 7.1, справедливонеравенство $\delta_d \leq \sigma_d$.

Рассмотрим теперь правильный симплекс с ребром, равным $[2(d+1)/d]^{1/2}$, и систему из $d$+1 шаров радиуса 1 с центрами в вершинах симплекса. Пусть $\tau_d$ – отношение суммы объемов «секторов» этих шаров, лежащих в симплексе, к объему всего симплекса. Тогда, по [21], формула (8.3.1), справедливо $\tau_d = [2d/(d+1)]^{d/2}\sigma_d$. Кроме того, по [21] теорема 8.1, имеем $\vartheta_d \geq \tau_d$. □

**Следствие 5.** *При $d \geq 3$ для нижней эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу вершин справедливо*

$$\underline{\eta}_0(\mathrm{F_{УО}}(d)) \geq \frac{1}{2}\frac{(d-1)}{d}. \qquad (21)$$

*Доказательство.* Утверждение следует из неравенств (19) и (20) леммы 2. □

Из (21) вытекает, что

$$\underline{\eta}_0(\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)) \ge \frac{1}{3},\ d \ge 3, \qquad (22)$$

$$\liminf_{d\to\infty} \underline{\eta}_0(\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)) \ge \frac{1}{2}. \qquad (23)$$

При $d\to\infty$ верны асимптотические оценки $\vartheta_d$ Роджерса [21]:

$$d / (e\sqrt{e}) \le \vartheta_d \le d \ln d + d \ln \ln d + 5d. \qquad (24)$$

При $d\to\infty$ верны асимптотические оценки $\delta_d$, полученные Минковским–Главкой и Роджерсом (нижняя оценка) [21] и Кабатянским–Левенштейном (верхняя оценка) [29]:

$$d\zeta(d) / [e(1-e^{-d})2^{d-1}] \le \delta_d \le 1 / 2^{0.599d}, \qquad (25)$$

где $\zeta(d)$ – дзета-функция Римана, $\zeta(d) := \Sigma\, k^{-d}$. Из (25) следует более простое неравенство

$$d/(e2^{d-1}) \le \delta_d \le 1 / 2^{0.599d}. \qquad (26)$$

Так как эффективность аппроксимации не может превосходить единицу, из (19) и левого неравенства (24) следует оценка

$$\delta_d \ge \vartheta_d / 2^{d-1} \ge d / [2^{d-1}e\sqrt{e}],$$

что несколько хуже (26).

При подстановке в (19) верхней оценки на $\delta_d$ из (25) и нижней оценки на $\vartheta_d$ из (24) получаем следующий результат:

**Следствие 6.** *При $d\to\infty$ для нижней эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу вершин справедливо*

$$\underline{\eta}_0(\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)) \ge 2^{-0.802} \approx 0.5735. \qquad (27)$$

Таким образом, оценка (27) несколько уточняет оценку (23). При подстановке в (19) нижней оценки на $\delta_d$ из (26) и нижней оценки на $\vartheta_d$ из (24) получаем следующий результат: при $d\to\infty$ при справедливости оценки Минковского–Главки выполняется

$$\underline{\eta}_0(\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)) \ge \frac{1}{4}\left(\frac{2^{d-2}}{\sqrt{e}}\right)^{2/(d-1)} = (4e)^{-1/(d-1)} = 1 - \frac{\ln 4 + 1}{d} + o\left(\frac{1}{d}\right),$$

откуда

$$\liminf_{d\to\infty} \underline{\eta}_0(\mathrm{F}_{\text{УО}}(d)) = 1. \qquad (28)$$

Таким образом, *если достижима оценка Минковского–Главки для максимальной плотности упаковки пространства шарами, при больших размерностях метод УО является асимптотически оптимальным по числу вершин*.

Рассмотрим теперь эффективность метода УО по числу вершин для малых размерностей. В таблице во втором столбце приводятся значения рассчитанной теоретически асимптотической эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу вершин. Приведены значения асимптотической эффективности, рассчитанной по формуле (19) с подстановкой верхних оценок на $\delta_d$ и нижних оценок на $\vartheta_d$ из [22]. Звездочкой обозначены значения, рассчитанные по (1) и результатам следствия 4. Оказалось, что они вплоть до трех значащих цифр совпадают со значениями, полученными по (19). В третьем столбце таблицы приводятся значения асимптотической эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу вершин, полученной экспериментально [27], стр.95.

Таблица. Теоретическая и экспериментальная оценки асимптотической эффективности метода УО по числу вершин

| ***d*** | $\underline{\eta}_0$ теоретическая | $\eta_0$ экспериментальная | $\underline{\eta}_{d-1}$ теоретическая |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.250 | 0.25 | 0.25 |
| 3 | 0.333* | 0.58 | 0.17 |
| 4 | 0.377* | 0.63 | 0.0022 |
| 5 | 0.400* | 0.67 | 0.0011 |
| 6 | 0.417 | 0.75 | |
| 7 | 0.429 | | |

Из таблицы видно, что для $d$>2 экспериментальная величина асимптотической эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу вершин превосходит ½ и растет с ростом размерности (сравните (23) и (27)). В то же время, численные эксперименты говорят скорее в пользу оценки (28). В частности, из экспериментов следует, что метод УО позволяет аппроксимировать шестимерный шар с точностью лишь на четверть худшей, чем это делают многогранники наилучшей аппроксимации с тем же числом вершин.

# 6. Расчет асимптотической эффективности метода УО по числу граней ненулевой размерности

Рассмотрим теперь эффективность метода УО с точки зрения числа гиперграней (граней максимальной размерности).

**Теорема 6.** *При $d$≥3 для нижней эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу гиперграней справедливо*

$$\underline{\eta}_{d-1}(\mathrm{F_{УО}}(d)) \ge \frac{1}{4}\left(\frac{\delta_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\mathbf{R}_{d-1}(m^{**}(d-1),d)\right)^{-2/(d-1)}, \tag{29}$$

*где для величины $m^{**}(d)$ существуют оценки* (8)-(10).

*Доказательство.* Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (1) и результата (13) теоремы 2 для $i$=$d$-1. □

**Следствие 7.** *При $d\to\infty$ справедливо*

$$\underline{\eta}_{d-1}(\mathrm{F_{УО}}(d)) \ge 2^{-1,431d}. \tag{30}$$

*Доказательство.* Согласно следствию 5 [28],

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{f_n^0} = O(2^{0.7153d^2}) . \tag{31}$$

Поэтому утверждение теоремы вытекает из (27) следствия 6 с учетом (16) следствия 3 и (31). □

Таким образом, при аппроксимации шара, в отличие от асимптотической эффективности метода УО по числу вершин, для асимптотической эффективности по числу гиперграней в (30) получена нижняя оценка, ухудшающаяся с ростом размерности. Значения асимптотической эффективности метода УО по числу гиперграней для малых размерностей могут быть рассчитаны по (1) и результатам следствия 4. Они приведены в четвертом столбце таблицы. Монотонного ухудшения эффективности метода УО с ростом размерности в этих результатах не наблюдается. Последние численные эксперименты (Р.В. Ефремов, частное сообщение) свидетельствуют о том, что теоретические нижние оценки вида (29) являются сильно заниженными. В любом случае, согласно теореме 3, метод УО при аппроксимации шара произвольной размерности остается асимптотически эффективным и по числу гиперграней.

Рассмотрим теперь эффективность метода УО при аппроксимации шара по числу других элементов гранной структуры аппроксимирующих многогранников.

**Следствие 8.** *При* $d$=3 *справедливо* $\underline{\eta}_1 \geq 2\pi / 21.77 \approx 0.289$.

*Доказательство.* Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (4) и результата для числа ребер следствия 4 при $d$=3. □

**Теорема 7.** *При* $d$≥4 *для нижней эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу i-граней,* $i = 1, \ldots, d$-2, *справедливо*

$$\underline{\eta}_i(\mathrm{F_{УО}}) \geq \frac{d}{68e\pi}\left(\frac{\delta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\mathbf{R}_i(m^{**}(d-1), d)\right)^{-2/(d-1)}, \tag{32}$$

*где для величины* $m^{**}(d)$ *существуют оценки* (8)-(10).

*Доказательство.* Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (2) и результата (13) теоремы 2. □

**Следствие 9.** *При* $d\to\infty$ *для нижней эффективности метода УО при аппроксимации шара по числу i-граней,* $i = 1, \ldots, d$-2, *справедливо*

$$\underline{\eta}_i(\mathrm{F_{УО}}) \geq 2^{-1,431d} . \tag{33}$$

*Доказательство.* Величина $\delta_d$ имеет верхнюю асимптотику вида $2^{-0.599d}$, величина $\pi_d$ – вида $d^{-d}$. Утверждения (12) и (10) дают асимптотику $\boldsymbol{R}_i(m^{**}(d-1,d))$ вида $2^{0.7153d^2}$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из (32). □

Эта оценка совпадает по порядку зависимости от размерности с оценкой (30) для числа гиперграней и также падает с ростом размерности.

Приведем теперь оценки асимптотической эффективности для малых размерностей, полученные из (2) и следствия 4, для граней соответствующих размерностей: при $d$=4 $\underline{\eta}_1 \geq 2.24\times10^{-4}$, $\underline{\eta}_2 \geq 2.18\times10^{-5}$; при $d$=5 $\underline{\eta}_1 \geq 2.73\times10^{-4}$, $\underline{\eta}_2 \geq 1.55\times10^{-5}$, $\underline{\eta}_3 \geq 7.76\times10^{-6}$.

При $d$≥4 для точности многогранников наилучшей аппроксимации по мощности промежуточных (между вершинами и гипергранями) элементов гранной структуры имеется только грубая нижняя оценка (2) (сравните с (3)). Поэтому оценка (32), приведенные после нее оценки для малых размерностей и оценка (33) оказываются достаточно приблизительными. В любом случае, согласно теореме 3, метод УО при аппроксимации шара произвольной размерности остается асимптотически эффективным по числу граней любой размерности.

## 7. Заключение

В [26], [20] и в настоящей работе были получены новые оценки скорости сходимости метода УО при аппроксимации шара по мощностям различных компонентов гранной структуры аппроксимирующих многогранников. Было также проведено сравнение этих многогранников с многогранниками, обладающими экстремальными мощностями гранной структуры и многогранниками наилучшей аппроксимации. Была доказана асимптотическая эффективность метода по мощности всех компонентов гранной структуры. Аналогичные результаты могут быть получены и для задачи аппроксимации методом УО произвольных выпуклых компактных тел с дважды непрерывно дифференцируемой границей. Этот вопрос, однако, должен быть темой отдельного исследования.

## Список литературы

1. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
2. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
4. *Лотов А.В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем // Доклады АН СССР, 1980. Т. 250, № 5, с. 1081-1083.
5. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997. 239 с.

6. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
7. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
8. *Каменев Г.К.* Исследование итерационных методов аппроксимации выпуклых множеств многогранниками. Москва: ВЦ АН СССР, 1986.
9. *Каменев Г.К.* Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34. N4. С. 608-616.
10. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 23-32.
11. *Каменев Г.К.* Эффективные алгоритмы аппроксимации негладких выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. N3. С. 423-427.
12. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т. 48. N5. С. 35-50.
13. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Об оптимальном порядке роста числа вершин и гиперграней в классе хаусдорфовых методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011, Т. 51. N6. С. 1018-1031.
14. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007. – 230 с.
15. *Böröczky K. Jr.* Polytopal Approximation Bounding the Number of *k*-Faces // J. of Approx. Theory. 2000, V. 102. P. 263-285.
16. *Böröczky K. Jr., Fodor F., Vígh V.* Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges // Beit. Alg. Geom, 2008. 49. P. 177-193.
17. *Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К.* Экспериментальное исследование аппроксимации выпуклых тел многогранниками. М.:ВЦ АН СССР. 1991. 51 с.
18. *Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Построение субоптимальных покрытий многомерной единичной сферы // Доклады Академии наук. 2012. Т.444. N2. С. 153-155.
19. *Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Итеративный метод построения покрытий многомерной единичной сферы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013, Т. 53. N2. С. 181-194.
20. *Каменев Г.К.* Асимптотические свойства метода уточнения оценок при аппроксимации многомерных шаров многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т.55. N10. С. 1647-1660.
21. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.

22. *Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. Т.1. М.: Мир, 1990.
23. *Брёнстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
24. *Grünbaum B.* Convex Polytopes. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 221. New York: Springer, 2003.
25. *Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N6. С. 857-866.
26. *Каменев Г.К.* Метод полиэдральной аппроксимации шара с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. N8. С. 1235-1248.
27. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Изд-во. ВЦ РАН, 2010. 118 с.
28. *Seidel R.* The upper bound theorem for polytopes: an easy proof of its asymptotic version // Comput. Geometry: Theory and Applications. 1995. V. 5. P. 115-116.
29. *Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.* О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Пробл. передачи информации. 1978. Т. 14. Вып. 1. С. 3-25.