УДК 519.6

Асимптотические свойства метода уточнения оценок при аппроксимации многомерных шаров многогранниками[1]

©2014 г. Г.К. Каменев
(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)
e-mail: gkk@ccas.ru

В работе рассматривается метод «Уточнения оценок» полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Известно, что при аппроксимации выпуклых тел с гладкой границей этот метод порождает многогранники с оптимальным порядком роста числа вершин и гиперграней в зависимости от точности аппроксимации. Рассматриваются свойства метода при полиэдральной аппроксимации многомерного шара. Показано, что в этом случае рассматриваемый метод в качестве вершин аппроксимирующих многогранников порождает на поверхности шара так называемую последовательность Глубоких Ям. Это позволяет перенести на такие многогранники полученные ранее комбинаторные свойства выпуклых оболочек указанных последовательностей: скорости сходимости по числу граней всех размерностей, оптимальность роста мощности гранной структуры (нормы f-вектора). В работе проведено сравнение комбинаторных свойств аппроксимирующих многогранников метода «Уточнения оценок» со свойствами многогранников, обладающих экстремальными мощностями гранной структуры. Показано, что многогранники, получаемые в методе, близки к так называемым многогранникам пирамидальной надстройки, на которых достигается минимум граней всех размерностей при заданном числе вершин. Библ. 32. Фиг. 1.

Ключевые слова: выпуклые тела, многомерный шар, аппроксимация многогранниками, метод уточнения оценок, вершины, гиперграни, грани, гранная структура, f-вектор, скорость сходимости

1. Введение

В работе рассматривается классическая проблема аппроксимации многомерных выпуклых тел многогранниками. Эта задача, помимо самостоятельного интереса (см., например, обзоры в [1], [2]), актуальна для таких прикладных исследований, как задачи построения множеств достижимости динамических систем [3], [4] и задачи многокритериальной оптимизации [5], [6]. В этих приложениях стоит важная задача разработки *реализуемых на практике методов* полиэдральной аппроксимации выпуклых

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00235 и 12-01-00916), ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18, ПФИ ОМН №3.

компактных тел, оптимальных или близких к оптимальным. В рамках этих практических исследований был предложен [7] и разработан (см. подробности в [6], стр. 186) итерационный адаптивный метод «Уточнения Оценок» (УО), the Estimate Refinement (ER) method, который показал себя практически пригодным для аппроксимации выпуклых тел достаточно большой размерности. В [8] метод «Уточнения Оценок» был переформулирован в виде, используемом в исследованиях, в том числе – в настоящей работе.

В [9] – [13] метод УО подробно теоретически исследован. Получены скорости сходимости по числу вершин и итераций в гладком и негладком случаях, а также на начальном этапе аппроксимации. В гладком случае показана оптимальность метода по порядку (по скорости) роста числа вершин и гиперграней аппроксимирующих многогранников в зависимости от точности аппроксимации. Проведено исследование его эффективности (сравнение с многогранниками наилучшей аппроксимации). Показано, что при аппроксимации гладких тел этот метод порождает многогранники, отклонение которых в метрике Хаусдорфа асимптотически не более чем в четыре раза превышает минимально возможное при том же числе вершин. Следствием этих свойств является оптимальность метода в гладком случае по порядку числа задач вычисления опорной функции аппроксимируемого гладкого тела, необходимых для достижения заданной точности. Сводка большинства результатов теоретического исследования метода УО представлена в [14].

В [15] – [16] метод УО исследован в численных экспериментах, в том числе при аппроксимации многомерных эллипсоидов, которые показали, что асимптотические оценки скорости сходимости метода УО, полученные в [9], [11], могут быть значительно улучшены, по крайней мере, в этом классе аппроксимируемых тел.

Особое внимание в теории аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками уделялось проблеме минимизации сложности описания аппроксимирующих многогранников в виде числа основных элементов гранной структуры, таких как вершины или гиперграни. Были получены асимптотические оценки минимального числа вершин или гиперграней, необходимого для получения заданной точности аппроксимации (см., например, обзоры в [1], [2]). Вместе с тем, о полной мощности гранной структуры аппроксимирующих многогранников известно в общем случае значительно меньше [17], [18]. Однако для получения представления об общей сложности задачи полиэдральной аппроксимации недостаточно оценок на скорость роста числа вершин и гиперграней, так как во многих методах имеется необходимость выполнять построение выпуклых оболочек вершин и другие операции, по времени и объему занимаемой методом памяти, зависящие от сложности всей гранной структуры.

Для выпуклых тел, имеющих гладкую границу, задача полиэдральной аппроксимации оказывается связанной с построением метрических сетей на их поверхности. Выпуклая оболочка такой сети дает аппроксимирующий многогранник. Оказывается, что выпуклая оболочка центров системы шаров, дающих оптимальное покрытие поверхности в метрике второй квадратичной формы, асимптотически приводит к отклонению в метрике Хаусдорфа, совпадающему с отклонением многогранников наилучшей аппроксимации (см. [1], [2]). В [19] предложен метод «Глубоких Ям» (ГЯ) (the Deep Holes (DH) method) – универсальный адаптивный итерационный метод аппроксимации вполне ограниченных множеств в произвольных метрических пространствах, основанный на построении близких к оптимальным ε-сетей (построения эффективных покрытий и упаковок метрических шаров). Метод ГЯ состоит в построении в аппроксимируемом множестве последовательности точек – так называемой последовательности ГЯ: в последовательном пополнении аппроксимирующей базы (совокупности центров построенной сети) глубокими метрическими ямами аппроксимируемого множества (его точками, наиболее удаленными от базы). Как показано в [14], последовательности многогранников, являющихся выпуклыми оболочками конечных частей последовательностей ГЯ на поверхности гладких выпуклых тел, являются оптимальными по порядку числа вершин. В [13] исследован рост числа гиперграней в классе методов, порождающих на поверхности гладких выпуклых тел последовательности, близкие к последовательностям ГЯ. Показано, что порядок роста числа гиперграней в выпуклых оболочках точек (вершин) из конечных частей этих последовательностей тот же, что и порядок роста числа вершин, что является оптимальным. Так как практически реализуемые способы построения ГЯ на поверхности выпуклых тел в общем случае неизвестны, метод ГЯ является теоретическим подходом, применяемым, в основном, для построения оценок скорости сходимости. В настоящей работе будет использована техника построения последовательностей ГЯ на поверхности гиперсфер для исследования скорости сходимости метода УО при аппроксимации многомерных шаров. Будет показано, что в этом случае при определенных условиях имеет место совпадение результатов применения метода ГЯ и метода УО.

В рамках проблемы аппроксимации выпуклых компактных тел большое значение имеет задача аппроксимации шара. Прежде всего, среди всех изопериметричных (с равным поверхностным объемом) компактных выпуклых тел шар является наиболее сложным объектом для аппроксимации многогранниками (см., например, [1] или [2]). Кроме того, эта задача важна особенно тем, что на полиэдральной аппроксимации шара основаны некоторые неадаптивные методы полиэдральной аппроксимации и методы построения сеток и кодов на поверхности сферы [20], [21]. В работах [22], [23] для метода ГЯ рассматривалась задача полиэдральной аппроксимации шара, была исследована мощность гранной структуры выпуклых оболочек конечных частей последовательностей ГЯ на поверхности сферы, порождаемых методом. Было показано, что норма f-вектора аппроксимирующих многогранников растет в этом случае от отклонения в метрике Хаусдорфа с оптимальной по порядку скоростью. Показано также, что, асимптотически, число граней всех размерностей аппроксимирующих многогранников, получаемых в методе ГЯ, пропорционально числу их вершин. В [23] были также рассчитаны верхние оценки скорости роста числа граней всех размерностей для малых размерностей.

Основной целью настоящей работы является перенесение результатов исследования гранной структуры выпуклых оболочек точек, получаемых в методе ГЯ на поверхности сферы, на многогранники, порождаемые методом УО при аппроксимации многомерного шара.

Работа имеет следующую структуру. Прежде всего рассматривается постановка задачи оптимальной аппроксимации выпуклого компактного тела многогранниками с точки зрения элементов гранной структуры. Приводятся известные результаты по этому вопросу, в частности, для многомерных шаров. Далее излагается метод УО, исследуются применительно к задаче аппроксимации шара его свойства (теоремы 1 и 2) и приводятся с учетом этих свойств полученные ранее результаты исследования скорости его сходимости по числу вершин и гиперграней. Далее излагается метод ГЯ и показывается, что при определенных условиях на многогранник начального приближения метод УО порождает на поверхности сферы последовательность ГЯ (теорема 4). Далее исследуется мощность компонентов гранной структуры в методе УО: результаты теоремы 4 из [23] для метода ГЯ используются для доказательства асимптотической пропорциональности числа граней многогранников, порождаемых методом УО, числу их вершин (теорема 5), а также получаются различные оценки этой зависимости, в том числе для малых (следствие 4) и больших (следствие 3) размерностей. Далее исследуется скорость сходимости метода УО по мощности компонентов гранной структуры: выводятся верхние оценки общего вида (теоремы 7 и 8), а также различные следствия, в том числе для малых (следствие 8) и больших (следствие 7) размерностей. Заметим, что результат следствия 7 позволяет в методе УО при аппроксимации шара оценить асимптотику роста нормы f-вектора аппроксимирующих многогранников (максимальное число граней всех размерностей) в зависимости от точности аппроксимации и размерности пространства. В последних разделах работы новые результаты по скорости сходимости метода УО сравниваются с полученными ранее. Также проводится сравнение комбинаторных свойств аппроксимирующих многогранников, получаемых в методе, со свойствами многогранников, обладающих экстремальными мощностями гранной структуры: отмечается, что многогранники в методе УО близки к так называемым многогранникам пирамидальной надстройки, на которых достигается минимум граней всех размерностей при заданном числе вершин.

2. Оптимальные свойства гранной структуры аппроксимаций выпуклых компактных тел многогранниками

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ с метрикой ρ, евклидовой нормой и объемом V. В настоящем исследовании мы будем предполагать (если это не оговорено специально), что $d\geq 3$. Обозначим через $B^d(r, z)$ шар в $\mathbb{E}^d$ радиуса r с центром в z, а через $B^d(r)$ шар радиуса r с центром в начале координат, единичный шар обозначим через B^d, и пусть $S^{d-1} := \partial B^d$. Через $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ обозначим объем единичного шара. Нам понадобятся величины $\pi_2=\pi$, $\pi_3=4\pi/3$, $\pi_4=\pi^2/2$, $\pi_5=8\pi^2/15$, $\pi_6=\pi^3/6$, $\pi_7=16\pi^3/105$.

Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел. На $\mathscr{C}$ рассмотрим метрику Хаусдорфа:

$$\delta(C_1,C_2) := \max \{\sup\{\rho(x, C_2): x\in C_1\}, \sup\{\rho(x, C_1): x\in C_2\}\}.$$

Через ∂C обозначим границу тела C, через int C – множество его внутренних точек, через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем.

Обозначим через $\mathscr{C}^s$ класс выпуклых компактных тел с s раз непрерывно дифференцируемой границей, и пусть $\mathscr{C}_+^s$ – класс выпуклых компактных тел с s раз непрерывно дифференцируемой границей положительными главными кривизнами, $s \geq 2$. Тела из класса $\mathscr{C}_+^2$ называют иногда «овалоидами».

Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P\in\mathscr{P}$ через $M^t(P)$ обозначим множество его вершин (граней нулевой размерности), а через $m^t(P)$ – число его вершин, через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граням размерности $(d$-1)), а через $m^f(P)$ – число его гиперграней. Обозначим через $\mathbf{C}(n, k):=\binom{n}{k}$ число сочетаний из n по k, через card T – мощность множества T, через $\lfloor\cdot\rfloor$ – ближайшее целое снизу. Обозначим через cl операцию замыкания и через aff и conv – операции взятия аффинной и выпуклой оболочки соответственно. Через proj (x, X) обозначим проекцию точки x на множество X. Конусом видимости $K(p, C)$ тела C из точки $p\notin C$ назовем минимальный конус с вершиной в p, содержащий C.

Для $C\in\mathscr{C}$ и $u\in\mathbb{E}^d\setminus\{0\}$ введем обозначения опорной функции $g(u, C) := \max \{\langle u, x\rangle: x\in C\}$, опорного полупространства $L(u, C) := \{x\in\mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle \leq g(u, C)\}$, опорной гиперплоскости $l(u, C) := \{x\in\mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle = g(u, C)\}$, множества точек касания $T(u,C) := \{p\in\partial C: \langle u, p\rangle = g(u, C)\}$ и конуса внешних единичных нормалей в граничной точке $S(p,C) := \{u\in S^{d-1}: \langle u, p\rangle = g(u, C)\}$, где $p\in\partial C$. Для произвольного $p\in\mathbb{E}^d$ нам будет удобно использовать обозначения $g(u, p) := \langle u, p\rangle$, $l(u, p) := \{x\in\mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle = \langle u, p\rangle\}$, $L(u, p) := \{x\in\mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle \le \langle u, p\rangle\}$.

Нам понадобятся плотность покрытия ϑ_d и плотность упаковки δ_d пространства $\mathbb{E}^d$ шарами фиксированного радиуса (для общего случая см. [24]). Путь $\{a_i\}$ – последовательность точек и задан полуоткрытый куб C с длиной ребра s>0. Пусть $\mathbf{B} := \{B^d + a_i\}$. Положим

$$\rho_+(\mathbf{B}, s) := (\pi_d / s^d) \operatorname{card} \{B\in\mathbf{B}: B\cap C\neq\varnothing\},$$

$$\rho_-(\mathbf{B}, s) := (\pi_d / s^d) \operatorname{card} \{B\in\mathbf{B}: B\subset C\}.$$

Пусть

$$\rho_+(\mathbf{B}) := \limsup_{s\to\infty} \rho_+(\mathbf{B}, s),\ \rho_-(\mathbf{B}) := \liminf_{s\to\infty} \rho_-(\mathbf{B}, s).$$

Обозначим

$$\delta_d := \sup \{\rho_+(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \text{ – упаковка } \mathbb{E}^d \},$$

$$\vartheta_d := \inf \{\rho_-(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \text{ – покрытие } \mathbb{E}^d \}.$$

Таким образом, упрощенно говоря, плотность упаковки пространства шарами показывает, чему равна максимально возможная доля объема упаковки шарами куба, когда длина его ребра стремится к бесконечности. Соответственно, плотность покрытия пространства шарами показывает, чему равно минимально возможное отношение суммарного объема покрытия шарами куба к его объему, когда длина его ребра стремится к бесконечности.

Оценкам величин ϑ_d и δ_d посвящена обширная литература [25]. Точно известны только величины δ_1=1, $\delta_2=\pi/\sqrt{12}$ и ϑ_1=1, $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$.

Для $C\in\mathscr{C}$ через $\mathscr{R}(C)$, где $\mathscr{R}(C)\subset\mathscr{P}$, обозначим класс вписанных в C многогранников, т.е. многогранников, чьи вершины лежат на поверхности ∂C. Выпуклое подмножество F в C называется гранью (face) C, если для любых двух различных $y, z\in C$ таких, что $]y, z[\cap F\neq\varnothing$, справедливо $[y, z]\subset F$. Грань F множества C называется i-гранью (гранью размерности i), если $\dim F = i$. Вершины являются 0-гранями, гиперграни (facets) – (d-1)-гранями. Обозначим через $\Phi(P)$ множество всех граней многогранника P. Обозначим через $\Phi_i(P)$ множество i-мерных граней многогранника P, i=0, … d-1. Обозначим через $f_i(P) := \operatorname{card} (\Phi_i(P))$. Тогда $f(P) := (f_i(P))_{i=0, \ldots d-1}$ будет представлять собой f-вектор (или вектор чисел граней) многогранника P, характеризующий его гранную (facial) структуру. Введем норму f-вектора

$$\|f(P)\| := \max \{f_i(P), i=0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Обозначим через $f^*_i(m, d)$ и $f^{**}_i(m, d)$ минимальное и максимальное возможное число i-мерных граней многогранника с m вершинами. Существуют различные оценки этих величин [26].

Для $C\in\mathscr{C}$ и i, i=0, … d-1, определим классы многогранников, имеющих не более чем m i-мерных граней:

$$\mathscr{P}_{i,m}(C) := \{P\in \mathscr{P}(C): f_i(P) \le m\}.$$

Обозначим

$$\delta(C, \mathscr{P}_{i,m}) := \inf \{\delta(C, P) : P \in \mathscr{P}_{i,m}(C)\}.$$

Для конкретного i существование многогранника $P(i, m) \in \mathscr{P}_{i,m}(C)$ такого, что

$$\delta(C, P(i, m)) = \delta(C, \mathscr{P}_{i,m}),$$

гарантируется компактностью и непрерывностью Хаусдорфовой метрики (см., например, [18] стр. 179 или [14] стр. 8). Этот многогранник не обязательно является единственным и традиционно называется «best approximating polytope»: *многогранником наилучшей аппроксимации* [15] или «многогранником наилучшего приближения» [2].

В [1], [2] представлен обзор результатов, касающихся свойств оптимальной аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками. В нашем исследовании мы ограничимся результатами оптимальной аппроксимации вписанными многогранниками гладких тел в метрике Хаусдорфа.

Для $C \in \mathscr{C}^2$ и многогранников с заданным числом вершин (i=0) и гиперграней (i=d-1) справедливо (см. [2]):

$$\lim_{m\to\infty} \delta(C, \mathscr{P}_{0,m}) m^{2/(d-1)} = \lim_{m\to\infty} \delta(C, \mathscr{P}_{d-1,m}) m^{2/(d-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x \in \partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x.

Для многогранников с заданным числом граней промежуточных размерностей (i-граней) асимптотические формулы при $d \geq 4$ неизвестны (возможно, и не существуют в силу нерегулярности поведения их числа [17]). Однако для $d \geq 4$, i=0, … d-1, $C \in \mathscr{C}^2$ и больших m справедливы [17] нижние оценки

$$\delta(C, \mathscr{P}_{i,m}) > \frac{d}{34e\pi}\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)}.$$

Для $d \geq 4$, i=0, … d-1, $C \in \mathscr{C}_+^2$ и больших m справедливы [17] верхние оценки

$$\delta(C, \mathscr{P}_{i,m}) < c\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)},$$

где константа c зависит только от d и i. Наконец, при d=3, $C \in \mathscr{C}^2$ справедлива асимптотическая формула для числа ребер (i=1) [18]

$$\lim_{m\to\infty} \delta(C, \mathscr{P}_{1,m}) m = \frac{1}{2}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x).$$

Чтобы получить оценки для случая, когда аппроксимируемое тело C является единичным шаром B^d, учтем, что $k_C(x) \equiv 1$ и $\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) = d\pi_d$, где $d\pi_d$ – поверхностный объем (площади поверхности) сферы S^{d-1}. Итак, при аппроксимации шара имеем оценки сложности вида

$$\lim_{m\to\infty} \delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}, \ i = 0,\ d\text{-}1,\ d \geq 2; \tag{1}$$

$$\delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) > \frac{d}{34e\pi}\left(d\pi_d\right)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)}, \ i = 1, \ldots, d\text{-}2,\ d \geq 4; \tag{2}$$

$$\delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) < c\left(d\pi_d\right)^{2/(d-1)} m^{-2/(d-1)}, \ i = 1, \ldots, d\text{-}2,\ d \geq 4; \tag{3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \delta(B^d, \mathscr{P}_{i,m}) m = 2\pi, \ i = 1,\ d = 3. \tag{4}$$

При этом из [17] следует, что существуют многогранники, для которых оценки (1)-(3) (соответственно (1), (4) при d=3) достигаются одновременно. Это, разумеется, не означает, что такие многогранники являются многогранниками наилучшей аппроксимации $P(i, m)$ для всех i одновременно.

3. Метод УО

Для $C\in\mathscr{C}$ рассмотрим одну из общих аппроксимационных схем – схему восполнения [27], [28].

СХЕМА ВОСПОЛНЕНИЯ

Пусть построен $P^n\in\mathscr{P}(C)$. Тогда (n+1)-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбираем $p_n\in\partial C$.

Шаг 2. Кладем P^{n+1} := conv $\{p_n, P^n\}$.

Конкретные методы, основанные на схеме восполнения, можно характеризовать способами решения двух задач: способом выбора $p_n\in\partial C$ и способом построения P^{n+1} := conv $\{p_n, P^n\}$ в виде, требуемом для продолжения итераций. Такие методы мы будем называть методами восполнения.

Если в некотором методе восполнения многогранник начального приближения P^0 принадлежит $\mathscr{P}(C)$, то и $P^n\in\mathscr{P}(C)$ для любого n. В этом случае будем говорить, что последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ является последовательностью *восполнения* для C или последовательностью многогранников, *порождаемой* данным методом восполнения для тела C и многогранника начального приближения $P^0\in\mathscr{P}(C)$.

Приведем теперь описание метода «Уточнения Оценок» (см. [7]) в виде [8], предназначенного для построения полиэдральных аппроксимаций выпуклых компактных тел (см. подробности в [6], стр. 186).

МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК (УО)

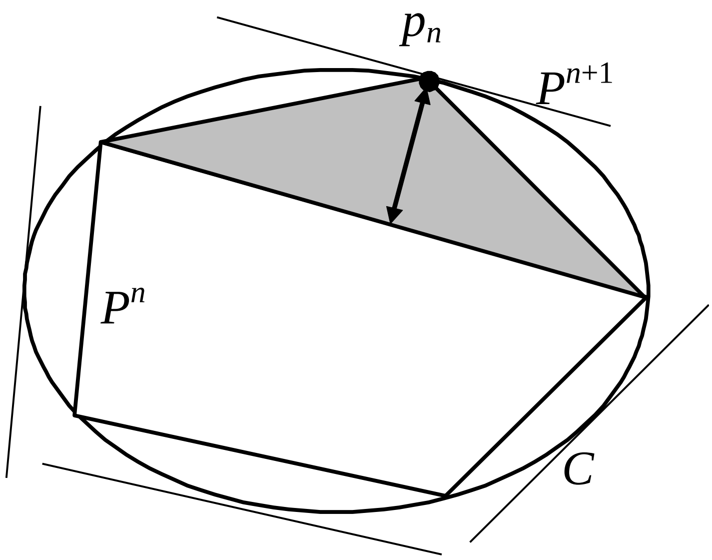
Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1}

выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти u_n := arg max $\{g(u, C) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}$; найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание P^{n+1} := conv $\{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Двумерная иллюстрация работы метода УО приведена на фигура.



Фигура.

Заметим, что в случае аппроксимации шара $C \equiv B^d$, $g(u, C) = 1$ и $T(u_n, C) = \{u_n\}$.

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть последовательность многогранников, порождаемых методом УО для $C \in \mathscr{C}$. Тогда, согласно [8], [9],

$$\lim_{n \to \infty} \delta(P^n, C) = 0. \tag{5}$$

Лемма 1 [23]. *Пусть* $P \in \mathscr{P}(B^d)$. *Пусть* $p \in S^{d-1}$ *такая, что* $\rho(p, P) = \delta(P, B^d)$. *Пусть* $q = \mathrm{proj}(p, P)$, $u = (p-q)/\|p-q\|$. *Тогда* $p \in T(u, B^d)$ *и*

$$g(u, B^d) - g(u, P) = \delta(P, B^d).$$

Теорема 1. *Пусть* $P \in \mathscr{P}(B^d)$ *и* $\delta(P, B^d) < 1$. *Тогда*

$$\delta(P, B^d) = \max \{g(u, B^d) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}.$$

Доказательство. Обозначим $\varepsilon := \delta(P, B^d)$. Пусть $p \in S^{d-1}$ такая, что $\rho(p, P) = \varepsilon$. Пусть $q := \mathrm{proj}(p, P)$, $u^* := (p-q)/\|p-q\|$. Тогда по лемме 1 имеем $p \in T(u^*, B^d)$ и $g(u^*, B^d) - g(u^*, P) = \varepsilon$. Поэтому $p = u^*$, $q \in [0, p)$ и $\rho(p, q) = \varepsilon$, откуда $q \in T(u, B^d(1 - \varepsilon))$. По лемме 2 из [28] (лемма 1.3.4 из [14]) выполняется $B^d(1 - \varepsilon) \subset P$. Получаем, что многогранник P и внутренний для него шар $B^d(1 - \varepsilon)$ имеют общую граничную точку касания q. Это возможно только, если точка q является внутренней для гиперграни P с внешней нормалью u^*. Поэтому $u^* \in M^f(P^n)$. □

Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$, порождаемую для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}(C)$ некоторым методом восполнения, будем называть *хаусдорфовой или $H(\gamma, C)$-последовательностью восполнения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ справедливо

$$\delta(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\, \delta(P^n, C).$$

Методы, порождающие H-последовательности восполнения, будем называть хаусдорфовыми (или H-) методами восполнения.

Лемма 2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ *– последовательность многогранников, порождаемая методом УО для* B^d *и* $P^0\in\mathscr{P}(B^d)$ *и* $\delta(P^n, B^d) < 1$. *Тогда*

$$\delta(P, B^d) = g(u_n, B^d) - g(u_n, P^n) = \rho(p_n, P^n).$$

Доказательство. Пусть u_n и p_n – направление и точка, выбираемые на шаге 1 очередной итерации метода УО. Согласно [29] (247), для любых $C_1,C_2\in\mathscr{C}$ справедливо

$$\delta^H(C_1, C_2) = \max\{|\, g(u, C_1) - g(u, C_2)\,|: u\in S^{d-1}\}.$$

Поэтому из теоремы 1 следует, что $\delta(P, B^d) = g(u_n, B^d) - g(u_n, P^n)$.

Поскольку $p_n\in T(u_n, B^d)$, то $\rho(p_n, P^n) \geq g(u_n, B^d) - g(u_n, P^n)$, откуда $\rho(p_n, P^n) = g(u_n, B^d) - g(u_n, P^n)$. ☐

Теорема 2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ *– последовательность многогранников, порождаемая методом УО для* B^d *и* $P^0\in\mathscr{P}(B^d)$ *и* $\delta(P^0, B^d) < 1$. *Тогда она есть* $H(1, B^d)$*-последовательностью восполнения.*

Доказательство. Поскольку $P^{n+1} = \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$, то $\delta(P^n, P^{n+1}) = \rho(p_n, P^n)$. Далее применяем лемму 2. ☐

Скорость сходимости и асимптотические свойства хаусдорфовых последовательностей и различных конкретных методов, порождающих эти последовательности, подробно изучены в [9] – [13], обзор в [14]. В частности, в [11] доказано, что если $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ есть H-последовательность восполнения для $C\in \mathscr{C}_+^2$, то справедлива следующая оценка на скорость сходимости $H(\gamma, C)$-последовательностей восполнения по числу вершин:

$$\limsup_{n\to\infty} \delta(C,P^n) m^t(P^n)^{2/(d-1)} \leq \frac{2}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}.$$

В [13] показано, что при тех же условиях справедлива следующая оценка по числу гиперграней:

$$\limsup_{n\to\infty} \delta(C,P^n) m^f(P^n)^{\frac{2}{d-1}} \leq \frac{2\theta(d,\gamma,C)^{2/(d-1)}}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}},$$

где $\theta(d,\gamma,C) = \mathbf{C}\big(\phi(d,\gamma,C), d-1\big)$ и

$$\phi(d,\gamma,C)=\left\lfloor\left(\frac{5}{1-\sqrt{1-\gamma}}\frac{R_{\partial C}}{r_{\partial C}}\right)^{d-1}\right\rfloor,$$

где $R_{\partial C}$ и $r_{\partial C}$ есть, соответственно, максимальный и минимальный радиусы кривизны поверхности аппроксимируемого тела. Для случая, когда аппроксимируемое тело – шар ($R_{\partial C}$ = $r_{\partial C}$ = 1), и для последовательности, порождаемой методом УО (γ=1 по теореме 2), из этих оценок вытекает:

$$\limsup_{n\to\infty}\delta(C,P^n)m^t(P^n)^{\frac{2}{d-1}}\le 2\left(\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right)^{\frac{2}{d-1}}, \tag{6}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\delta(C,P^n)m^f(P^n)^{\frac{2}{d-1}}\le 2\mathbf{C}(5^{d-1},d-1)^{\frac{2}{d-1}}\left(\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right)^{\frac{2}{d-1}}. \tag{7}$$

Ниже будут получены более сильная, чем (6), оценка на число гиперграней, а также оценки на другие компоненты f-вектора аппроксимирующих многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара.

4. Связь метода УО и последовательностей ГЯ

Для получения новых свойств многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара, установим их связь с многогранниками Глубоких Ям – выпуклыми оболочками конечных частей последовательности точек, порождаемой методом «Глубоких Ям» [19] на поверхности сферы [22], [23].

Пусть A – компактное подмножество метрического пространства $\mathbb{R}$ с метрикой μ. Пусть T – конечное подмножество A (база покрытия) и card(T) – его мощность. Для $x\in A$ обозначим $\mu(x, T)$:= min $\{\mu(x, t)$: $t\in T\}$ и пусть $\mu(A, T)$:= sup $\{\rho(x, T)$: $x\in A\}$. Для заданного γ, $0 < \gamma \le 1$, обозначим

$$\mathrm{DH}_\gamma(T) := \{x\in A: \rho(x, T) \ge \gamma\,\rho(A, T)\}.$$

В силу конечности T имеем $\rho(A, T)$ = max $\{\rho(x, T)$: $x\in A\}$, поэтому $\mathrm{DH}_1(T)$ не пусто. Точки $x\in \mathrm{DH}_1(T)$ называются глубокими ямами (the Deep Holes), см., например, [25], стр. 5. Множество $\mathrm{DH}_1(T)$ назовем *множеством глубоких ям* (ГЯ) базы T и обозначим его через DH(T), а множество $\mathrm{DH}_\gamma(T)$ назовем множеством ГЯ уровня γ.

Опишем метод Глубоких Ям [19] – класс итерационных алгоритмов построения ε-сетей и ε-различимых подмножеств для вполне ограниченных множеств.

МЕТОД ГЛУБОКИХ ЯМ (ГЯ)

Пусть $T_1\subset A$. Пусть множество T_n построено и $\rho(A, T_n) > 0$.

Тогда $T_{n+1} := T_n\cup\{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1}\in \mathrm{DH}_\gamma(T_n)$.

Конкретный алгоритм метода ГЯ состоит в уточнении способа выбора $T_1 \subset A$ и $t_{n+1} \in \mathrm{DH}_\gamma(T_n)$. Последовательность множеств $\{T_n\}_{n=1,2\ldots}$, порождаемую методом ГЯ для множества A с константой γ, будем называть DH(γ)-последовательностью на A. Для $\gamma=1$ будем говорить о последовательности ГЯ или DH-последовательности на A.

В общем случае скорость сходимости метода ГЯ (последовательностей ГЯ) определяется теоремой 1 из [9] в терминах ε-энтропии и ε-емкости, однако, как и в работах [22] и [23], мы ограничимся исследованием последовательностей ГЯ на поверхности шара. Рассмотрим сферу S^{d-1} как метрическое пространство $\mathbb{R}$ с внутренней метрикой μ, совпадающей с минимальным углом между точками. Обозначим $\mu(P) := \mu(S^{d-1}, M^t(P))$, $P \in \mathscr{P}(B^d)$.

Теорема 3 [23]. *Пусть $P \in \mathscr{P}(B^d)$. Тогда*

$$\delta(P, B^d) = 1 - \cos \rho(P).$$

Теорема 4. *Пусть $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ – последовательность многогранников, порождаемая методом УО для B^d и $P^0 \in \mathscr{P}(B^d)$, $\delta(P^0, B^d) < 1$. Тогда $\{M^t(P^n)\}_{n=1,2,\ldots}$ есть* DH-*последовательность на S^{d-1}.*

Доказательство. Пусть p_n и u_n, – точка и направление, выбираемые на шаге 1 n-й итерации метода УО. Для доказательства достаточно показать, что $p_n \in \mathrm{DH}(M^t(P^n))$, т.е. $\mu(p_n, M^t(P^n)) = \mu(P^n)$.

По построению $p_n \in T(u_n, B^d)$. Далее, имеем $M^t(P^n) \cap l(u_n, P^n) \neq \varnothing$. Пусть $p \in M^t(P^n) \cap l(u_n, P^n)$. Для любого $q \in M^t(P^n) \backslash l(u_n, P^n)$ справедливо $\mu(p_n, q) > \mu(p_n, p)$. Поэтому $\mu(p_n, p) = \mu(p_n, M^t(P^n))$. Но $1 - \cos \mu(p_n, p) = g(u_n, B^d) - g(u_n, P^n)$. По лемме 2 имеем $g(u_n, B^d) - g(u_n, P^n) = \delta(P^n, B^d)$. Поэтому из теоремы 3 следует $1 - \cos \mu(p_n, M^t(P^n)) = 1 - \cos \mu(P^n)$. Отсюда из начальных условий вытекает $\mu(p_n, p) = \mu(P^n)$. □

Замечание. Нетрудно видеть, что доказанная теорема справедлива для любого метода, порождающего $H(1, B^d)$-последовательности восполнения.

Поскольку, согласно (5), многогранники, порождаемые методом УО, сходятся в метрике Хаусдорфа, то ограничение $\delta(P^0, B^d) < 1$, налагаемое теоремой 4 на многогранник начального приближения, не является ограничительным (см. [12]). Поэтому для получения асимптотических оценок скорости сходимости метода УО по мощности компонентов гранной структуры при аппроксимации шара могут быть использованы оценки для многогранников ГЯ, полученные в [23].

5. Мощности компонентов гранной структуры аппроксимирующих многогранников

Прежде всего, рассмотрим соотношения между собой мощностей компонентов гранной структуры (компонентов f-вектора) многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара.

Пусть $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ – последовательность многогранников, порождаемая методом УО для B^d. Обозначим $f_n^{\,i} := f_i(P^n)$ и $f_n := f(P^n) = (f_n^{\,i})_{i=0,\ldots\, d-1}$.

Теорема 5. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^i}{n} \le \min\{\, f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1,d),\, f_i^{**}(m^{**}(d-1),d)\}, \tag{8}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^i}{f_n^0} \le \min\{\, f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1,d),\, f_i^{**}(m^{**}(d-1),d)\}, \tag{9}$$

где для величины $m^{**}(d)$ *существуют следующие оценки:*

$$m^{**}(d) \le 5^d = 2^{\,2.322d}, \tag{10}$$

$$m^{**}(d) \le \min\{253 \times (d\text{-}2)^{3/2}\, 2^{1.523(d-2)},\ 69 \times (d\text{-}2)^{3/2}\, 2^{1.924(d-2)}\},\ d\ge 5, \tag{11}$$

$$m^{**}(d) \le \min\{11 \times 2^{1.4305(d-1)},\ 3 \times 2^{1.8193(d-1)}\},\ d\to\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из (5), теоремы 4 и теоремы 4 [23]. Оценки (10), (11) и (12) взяты из оценок (6), (10) и (8) работы [23], соответственно. □

При малых размерностях для величины $m^{**}(d\text{-}1)$, входящей в (8)-(9), имеем следующие верхние оценки [23]: при d=3 – $m^{**}(2)$=25 (предположительно 20), при d=4 – $m^{**}(3)$=125 (предположительно 68), при d=5 – $m^{**}(4)$=625, при d=6 – $m^{**}(5)$=3125.

Для получения явных значений в соотношениях (8), (9) необходимо использовать оценки величин $f^{**}_i(m, d)$ – максимального возможного числа i-мерных граней многогранника с m вершинами. Обозначим $d^* := \lfloor d/2 \rfloor$, $d^{**} := \lfloor (d\text{-}1)/2 \rfloor$. По теореме о максимальном числе граней [30] справедливо (см. [31], теорема 18.2 и следствие 18.3):

$$f^{**}_i(m, d) \le \mathbf{\Phi}_{d-1-i}(d, m),\ i=1, \ldots, d\text{-}1, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{\Phi}_0(d, m) = \mathbf{C}(m\text{-}d^{**}\text{-}1, d^*) + \mathbf{C}(m\text{-}d^*\text{-}1, d^{**});$$

$$\mathbf{\Phi}_i(d, m) = \mathbf{C}(m, d\text{-}i) + \mathbf{C}(m\text{-}d\text{+}i\text{-}1, i)\mathbf{C}(m\text{-}d\text{+}d^*, d^*\text{-}i) -$$

$$- \sum_{j=d^{**}+1}^{d-i} \mathbf{C}(d-j,i)\mathbf{C}(m-d+j-1,j),\ i=1, \ldots, d^*;$$

$$\mathbf{\Phi}_i(d, m) = \mathbf{C}(m, d\text{-}i)\ ,\ i= d^{**}\text{+}1, \ldots, d\text{-}2.$$

Добавим сюда обозначение

$$f^{**}_0(m, d) = m := \mathbf{\Phi}_{d-1}(d, m).$$

Заметим, что, согласно [32], справедливо свойство

$$\|f^{**}(m, d)\| = O(m^{d^*}). \tag{14}$$

Обозначим

$$\mathbf{R}_i(m, d) := \min\{\mathbf{\Phi}_{d-i}(d, m\text{-}1),\ \mathbf{\Phi}_{d-1-i}(d, m)\},\ i=1, \ldots, d\text{-}1.$$

Теорема 6. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{f_n^0}=\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{n}\le \mathbf{R}_i(m^{**}(d-1),d), \tag{15}$$

где для величины $m^{**}(d)$ *существуют оценки* (10)-(12).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из (5), теоремы 4 и теоремы 6 [23]. Оценки (10), (11) и (12) взяты из оценок (6), (10) и (8) работы [23], соответственно. ☐

Следствие 1. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{f_n^0}=\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{n}\le \mathbf{R}_i(2^{2.322(d-1)},d). \tag{16}$$

Следствие 2. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *при* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{f_n^0}=\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{n}\le \mathbf{R}_i(11\cdot 2^{1.4305d},d). \tag{17}$$

Эти следствия вытекают из теоремы 6, монотонности $\mathbf{\Phi}_i(d, m)$ по m и оценок (10) и (12), соответственно.

Из (5), теоремы 4 и следствия 5 [23] (то есть в силу асимптотик (14) и (12)) получаем

Следствие 3. *При* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|f_n\|}{n}=O(2^{0.7153d^2}), \tag{18}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|f_n\|}{f_n^0}=O(2^{0.7153d^2}). \tag{19}$$

Рассмотрим теперь малые размерности. Из (5), теоремы 4 и результатов, приведенных в конце 7 раздела [23], получаем следующие оценки.

Следствие 4. *Пусть* d=3. *Тогда*

$$f_n^1\le 3f_n^0\text{-}6,\ f_n^2\le 2f_n^0\text{-}4;$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^1}{f_n^0}\le 3,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^2}{f_n^0}\le 2.$$

Пусть d=4. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^1}{f_n^0}\le 67,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^2}{f_n^0}\le 2211,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^3}{f_n^0}\le 2210.$$

Пусть d=5. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^1}{f_n^0}\le 624,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^2}{f_n^0}\le 194376,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^3}{f_n^0}\le 771264,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^4}{f_n^0}\le 193137.$$

6. Скорость сходимости метода УО по мощности компонентов гранной структуры

Рассмотрим теперь скорость сходимости многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара, в метрике Хаусдорфа для отдельных компонентов гранной структуры и в целом, по норме f-вектора.

Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ – последовательность многогранников, порождаемую методом УО для B^d. Обозначим $f_n^{\,i} := f_i(P^n)$ и $f_n := f(P^n) = (f_n^{\,i})_{i=0,\dots d-1}$. Пусть $h_n := \delta(P^n, B^d)$.

Теорема 7. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2}\le$$

$$\le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}\min\{\,f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1,d),\,f_i^{**}(m^{**}(d-1),d)\},\tag{20}$$

кроме того, справедливо

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n^{(d-1)/2}\le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2},\tag{21}$$

где для величины $m^{**}(d)$ *существуют оценки* (10)-(12).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из (5), теоремы 4 и теоремы 5 из [23]. Оценки (10), (11) и (12) взяты из оценок (6), (10) и (8) работы [23], соответственно. □

При малых размерностях оценки величины $m^{**}(d\text{-}1)$, входящей в (20), приведены в предыдущем разделе, после доказательства теоремы 5.

Используем обозначения $\mathbf{\Phi}_i$ и $\mathbf{R}_i$, введенные выше, для получения следующего результата.

Теорема 8. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2}\le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}\mathbf{R}_i(m^{**}(d-1),d),\tag{22}$$

где для величины $m^{**}(d)$ *существуют оценки* (10)-(12).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из (5), теоремы 4 и теоремы 6 [23]. Оценки (10), (11) и (12) взяты из оценок (6), (10) и (8) работы [23], соответственно. □

Следствие 5. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \mathbf{R}_i(2^{2.322(d-1)}, d). \qquad (23)$$

Следствие 6. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *при* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \mathbf{R}_i(11\cdot 2^{1.4305d}, d). \qquad (24)$$

Эти следствия вытекают из теоремы 8, монотонности $\mathbf{\Phi}_i(d, m)$ по m и оценок (10) и (12), соответственно.

Обозначим $\|f_n\| := \max\ \{f_n^i,\ i=0,\ 1,\ \dots\ ,\ d-1\}$. Из (5), теоремы 4 и следствия 5 [23] (то есть в силу асимптотик (14) и (12)) получаем

Следствие 7. *При* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\| h_n^{(d-1)/2} = O(2^{0.7153d^2}). \qquad (25)$$

Рассмотрим теперь малые размерности. Из (5), теоремы 4 и результатов, приведенных в конце 7 раздела [23], получаем следующие оценки.

Следствие 8. *Пусть* d=3. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n \le 7.2552,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1 h_n \le 21.77,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^2 h_n \le 14.52.$$

Пусть d=4. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 (h_n)^{3/2} \le 10.312,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1 (h_n)^{3/2} \le 691.0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^2 (h_n)^{3/2} \le 22800,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^3 (h_n)^{3/2} \le 22790.$$

Пусть d=5. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 (h_n)^2 \le 13.823,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1 (h_n)^2 \le 6435,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^2 (h_n)^2 \le 2004400,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^3 (h_n)^2 \le 7953251,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^4 (h_n)^2 \le 1991623.$$

7. Сравнение со старыми оценками для числа вершин и гиперграней

Сравним старые оценки (6) и (7) сходимости метода УО по числу вершин и гиперграней с оценками (21) и (22) при $i=d-1$.

Оценка (6) сходимости по числу вершин ($f_n^0 = m^t(P^n)$) дает

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n^{(d-1)/2} \le \vartheta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2}. \tag{26}$$

Поскольку, согласно теореме 1.3 [24], справедливо

$$\delta_d \le 1 \le \vartheta_d, \tag{27}$$

то очевидно, что старая оценка хуже оценки (21).

Оценка (7) сходимости по числу гиперграней ($f_n^{d-1} = m^f(P^n)$) дает

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n^{(d-1)/2} \le \vartheta_{d-1} \mathbf{C}(5^{d-1}, d-1) \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2}. \tag{28}$$

Для малых размерностей (28) дает (нижние и верхние границы для величины ϑ_d взяты из [25]):

– при d=3 ($1.209 \le \vartheta_2 \le 1.209$) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n^2 h_n \le 5805$;

– при d=4 ($1.432 \le \vartheta_3 \le 1.464$) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n^3 (h_n)^{3/2} \le 37188728$;

– при d=5 ($1.658 \le \vartheta_4 \le 1.766$) $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n^4 (h_n)^2 \le 5692843577891$.

Сравнение этих результатов с соответствующими результатами следствия 4 показывает, что для малых размерностей новые оценки значительно превосходят оценки (7).

Рассмотрим теперь случай больших размерностей. Учтем, что, согласно [24], при $d\to\infty$ справедливо

$$d / (e\sqrt{e}) \le \vartheta_d \le d \ln d + d \ln \ln d + 5d.$$

Учтем также, что

$$\sqrt{\frac{2\pi}{d+2}} < \frac{\pi_{d+1}}{\pi_d} < \sqrt{\frac{2\pi}{d+1}}.$$

Применяя формулу Стирлинга $d! \approx \sqrt{2\pi d}\,(d/e)^d$, получаем, что величина $\mathbf{C}(5^d, d)$ имеет асимптотику вида $O(5^{d^2})$, т.е. $O(2^{2.322d^2})$. После подстановки в (28) получаем, что из (7) вытекает оценка

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n^{(d-1)/2} = O(2^{2.322d^2}).$$

Что, очевидно, существенно хуже (25). Таким образом, и при больших размерностях новые оценки значительно превосходят оценки (7). В силу важности оценок на сходимость по числу гиперграней аппроксимирующих многогранников сформулируем в обозначениях (7) новый результат (29), непосредственно вытекающий из (25).

Теорема 9. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ *– последовательность многогранников, порождаемая методом УО для* B^d. *При* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \delta(C, P^n) m^f (P^n)^{(d-1)/2} = O(2^{1.4306d}). \qquad (29)$$

Оставшаяся часть работы будет посвящена сравнению аппроксимирующих многогранников, порождаемых методом УО, с многогранниками, имеющими экстремальные мощности гранной структуры.

8. Сравнение с многогранниками экстремальной мощности гранной структуры

Прежде всего, сравним многогранники, порождаемые в методе УО при аппроксимации шара, с многогранниками, на которых достигается максимальное число $f^{**}_i(m, d)$ i-граней различных размерностей i при заданном числе вершин m.

Оценка (13) достигается на смежностных симплициальных многогранниках, в частности, на циклических многогранниках. Согласно [32], справедлива оценка

$$\|f^{**}(m, d)\| = O(m^{\lfloor d/2 \rfloor}). \qquad (30)$$

В то же время из теоремы 6 и следствий 1-3 вытекает, что, асимптотически, число граней всех размерностей многогранников, порождаемых методом УО для шара, пропорционально числу их вершин, т.е.

$$\|f(P^n)\| = O(m^t(P^n)). \qquad (31)$$

Сравнение (30) и (31) показывает, что многогранники, порождаемые в методе УО при аппроксимации шара, имеют принципиально меньшую мощность гранной структуры, чем многогранники с максимальным числом граней (при заданном числе вершин), например, чем циклические многогранники.

В этом отношении аппроксимирующие многогранники метода УО ближе по комбинаторным свойствам к многогранникам, на которых достигаются минимальные оценки $f^*_i(m, d)$ числа i-граней при заданном числе вершин m. Согласно [31], следствие 19.6, выполняется

$$f^*_i(m, d) \geq \varphi_{d-1-i}(d, m),\ i=1, \dots, d-1, \qquad (32)$$

где

$$\varphi_0(d, m) = (d-1)m - (d+1)(d-2);$$

$$\varphi_i(d, m) = \mathbf{C}(d, i+1)m - \mathbf{C}(d+1, i+1)(d-1-i),\ i=1, \dots, d-2.$$

Добавим сюда обозначение

$$f^*_0(m, d) = m := \varphi_{d-1}(d, m).$$

Получаем

$$\|f^*(m, d)\| = O(m). \qquad (33)$$

Согласно [31], соотношения (32) выполняются как равенства для многогранников, двойственных к так называемым многогранникам усечения [31], и при $d \geq 4$ только для них. Это многогранники, получающиеся из симплексов путем последовательного добавления пирамид над гипергранями; их также называют многогранниками пирамидальной надстройки.

Итак, для многогранников, порождаемых методом УО при аппроксимации шара, и многогранников пирамидальной надстройки справедлив одинаковый порядок роста мощности гранной структуры в зависимости от числа вершин (см. (31) и (33)), что и указывает на их комбинаторную близость.

9. Заключение

В настоящей работе были получены новые оценки скорости сходимости метода УО при аппроксимации шара по мощностям всех компонентов гранной структуры аппроксимирующих многогранников. Было также проведено сравнение этих многогранников с многогранниками, обладающими экстремальными мощностями гранной структуры. Сравнение со свойствами многогранников наилучшей аппроксимации будет проведено в отдельной статье.

Список литературы

1. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
2. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37.
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
4. *Лотов А.В.* О понятии обобщенных множеств достижимости и их построении для линейных управляемых систем // Доклады АН СССР, 1980. Т. 250, № 5, с. 1081-1083.
5. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. / Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. М.: Наука, 1997. 239 с.
6. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
7. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
8. *Каменев Г.К.* Исследование итерационных методов аппроксимации выпуклых множеств многогранниками. Москва: ВЦ АН СССР, 1986.
9. *Каменев Г.К.* Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т.34. N4. С. 608-616.
10. *Каменев Г.К.* Эффективные алгоритмы аппроксимации негладких выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39. N3. С. 423-427.

11. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 23-32.
12. *Каменев Г.К.* Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т. 48. N5. С. 35-50.
13. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Об оптимальном порядке роста числа вершин и гиперграней в классе хаусдорфовых методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011, Т. 51. N6. С. 1018-1031.
14. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007. – 230 с.
15. *Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т.32. N6. С.857-866.
16. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2010. – 118 с.
17. *Böröczky K. Jr*. Polytopal Approximation Bounding the Number of *k*-Faces // J. of Approx. Theory. 2000, V. 102. P. 263-285.
18. *Böröczky K. Jr., Fodor F., Vígh V.* Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges // Beit. Alg. Geom. 2008. 49. P. 177-193.
19. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т.41. N11. С. 1751-1760.
20. *Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Построение субоптимальных покрытий многомерной единичной сферы // Доклады Академии наук. 2012. Т.444. N2. С. 153-155.
21. *Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Итеративный метод построения покрытий многомерной единичной сферы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013, Т. 53. N2. С. 181-194.
22. *Каменев Г.К.* Полиэдральная аппроксимация шара Методом Глубоких Ям с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры // Труды Межд. конфер. «Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления (NUMGRID2010)», Москва, 11-13 октября 2010г. М.: Изд. Фолиум, 2010. С. 47-52.
23. *Каменев Г.К.* Метод полиэдральной аппроксимации шара с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014, Т. 54. N8. С. 1235-1248.
24. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
25. *Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.

26. *Grünbaum B.* Convex Polytopes. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 221. Springer. New York / Berlin /London. 2003.
27. *Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных схем аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Матем. моделирование и дискретная оптимизация. М.: ВЦ АН СССР, 1988. С. 3-9.
28. *Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.
29. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
30. *McMullen P.* The maximum numbers of faces of convex polytope // Mathematica, 1970. T. 17. P. 179-184.
31. *Брёнстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
32. *Seidel R.* The upper bound theorem for polytopes: an easy proof of its asymptotic version // Computational Geometry: Theory and Applications, 1995. T. 5. P. 115-116.