УДК 519.6

Метод полиэдральной аппроксимации шара с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры[1]

©2013 г. Г.К. Каменев
(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)
e-mail: gkk@ccas.ru

В работе рассматривается задача полиэдральной аппроксимации многомерного шара. Известно, что норма *f*-вектора (максимальное число граней различных размерностей) аппроксимирующего многогранника растет не медленнее, чем $O(\delta^{(1-d)/2})$, где δ – отклонение в метрике Хаусдорфа и d – размерность пространства. В работе рассматривается итерационный метод построения метрических сетей – метод «Глубоких Ям», состоящий в данной задаче в последовательном пополнении множества вершин многогранника его глубокими ямами в метрике на поверхности шара (т.е. точками поверхности, наиболее удаленными от вершин многогранника). Показано, что мощность гранной структуры построенного многогранника будет иметь оптимальную скорость роста. Показано что, асимптотически, число граней всех размерностей аппроксимирующих многогранников, получаемых в методе, пропорционально числу их вершин. Получены явные выражения для констант, зависящие только от размерности пространства, в том числе при больших размерностях. Получены верхние оценки скорости роста числа граней всех размерностей в зависимости от точности аппроксимации для малых размерностей (*d* от 3 до 5). Библ. 30.

Ключевые слова: выпуклые тела, многомерный шар, аппроксимация многогранниками, покрытия и упаковки на сфере, упаковка шаров в шар, сферические коды, методы полиэдральной аппроксимации, вершины, гиперграни, грани, гранная структура, *f*-вектор, малые размерности

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача полиэдральной аппроксимации выпуклых тел [1], [2] для случая, когда аппроксимируемое тело является многомерным шаром. Эта задача, помимо самостоятельного интереса, актуальна при разработке методов построения сферических покрытий, сеток и упаковок, а также методов полиэдральной аппроксимации гладких и негладких выпуклых тел. В качестве примеров использования теории полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел в прикладных исследованиях можно назвать задачи построения множеств

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00235 и 12-01-00916), ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18, ПФИ ОМН №3.

достижимости динамических систем [3], [4] и множества достижимых критериальных векторов в задачах многокритериальной оптимизации [4].

Аппроксимация многогранниками является традиционным средством теории многомерных выпуклых множеств. Особое внимание при этом уделялось проблеме минимизации сложности описания аппроксимирующих многогранников в виде числа элементов гранной структуры, таких как вершины или гиперграни. Были получены асимптотические оценки минимального числа вершин или гиперграней, необходимого для получения заданной точности аппроксимации (см., например, обзоры в [1], [2]). Вместе с тем, о полной мощности гранной структуры аппроксимирующих многогранников известно в общем случае значительно меньше. Так в работе [5] получены для размерности пространства большей или равной четырем оценки зависимости точности аппроксимации от ограничения на число флагов и, как следствие, – от ограничения на максимальное число граней произвольной размерности. Верхние оценки получены для гладких тел с точностью до неопределенных констант. В [6] в трехмерном случае из формулы Эйлера получена асимптотика для числа ребер (1-мерных граней).

Для выпуклых тел, имеющих гладкую границу, задача полиэдральной аппроксимации оказывается связанной с построением метрических сетей на их поверхности. Выпуклая оболочка такой сети дает аппроксимирующий многогранник. Оказывается, что выпуклая оболочка центров системы поверхностных шаров, дающих оптимальное покрытие поверхности в метрике второй квадратичной формы, асимптотически приводит к отклонению в метрике Хаусдорфа, совпадающему с отклонением многогранников наилучшей аппроксимации (см. обзоры [1], [2]).

Наряду с задачей оценки минимального числа граней, вершин и иных компонентов гранной структуры, необходимых для достижения заданной точности, стоит важная задача разработки *реализуемых на практике методов* полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел, оптимальных или близких к оптимальным. Такая задача возникает во многих приложениях: в теории оптимального управления [3], математическом моделировании [4] и т.п. В рамках этих практических исследований был предложен [7] и разработан (см. подробности в [4]) адаптивный метод «Уточнения Оценок», который показал себя практически пригодным для аппроксимации выпуклых тел достаточно большой размерности.

В [8] предложен метод «Глубоких Ям» (ГЯ) – универсальный адаптивный итерационный метод аппроксимации вполне ограниченных множеств в произвольных метрических пространствах, основанный на построении близких к оптимальным ε-сетей (построения эффективных покрытий и упаковок метрических шаров). Метод ГЯ состоит в последовательном пополнении аппроксимирующей базы (совокупности центров построенной сети) глубокими метрическими ямами аппроксимируемого множества (его точками, наиболее удаленными от базы) – построения так называемой последовательности ГЯ. В [8] показано, что при заданной мощности метрической сети метод ГЯ позволяет строить аппроксимацию с радиусом покрывающих шаров не более чем вдвое большим минимально возможного. В [9] показано, что при аппроксимации гладких тел метод «Уточнения Оценок» порождает на поверхности тела последовательность вершин, асимптотически близкую к последовательности ГЯ в метрике второй квадратичной формы. Как показано в [9], последовательности многогранников, соответствующие последовательностям ГЯ, являются оптимальными по порядку числа вершин аппроксимирующих многогранников. В [10, 11] исследован рост числа гиперграней в классе методов, порождающих последовательности, близкие к последовательностям Глубоких Ям. В этих работах показано, что порядок роста числа гиперграней в выпуклых оболочках точек (вершин) из этих последовательностей тот же, что и порядок роста числа вершин, и является оптимальным.

В настоящей работе рассматривается задача полиэдральной аппроксимации шара. Известно (см. [1], [2], [5]), что норма f-вектора аппроксимирующего многогранника (максимум из числа вершин, гиперграней и граней произвольной размерности) растет от отклонения в метрике Хаусдорфа не медленнее, чем $O(\delta^{(1-d)/2})$, где δ – отклонение многогранника от тела в метрике Хаусдорфа и d – размерность пространства. В работе [12] рассматривались результаты применения метода ГЯ для построения полиэдральной аппроксимации шара с оптимальным порядком роста гранной структуры и были получены некоторые оценки, улучшенные в настоящей статье.

Основной целью настоящей работы является изучение метода ГЯ и основанной на нем полиэдральной аппроксимации многомерных шаров с параметрами гранной структуры, близкими к оптимальным. Заметим, что такой подход может также быть непосредственно использован для построения субоптимальных покрытий и упаковок сферы (см., в частности, [13, 14]).

В начале работы даются основные определения, и излагается итеративный метод построения метрических сетей – метод Глубоких Ям. Далее исследуются внутренне-геометрические свойства, в частности, скорость сходимости во внутренней метрике сферы. В следующей части исследуются внешне-геометрические свойства выпуклых оболочек сетей, порождаемых рассматриваемым методом, в частности, их скорость сходимости к аппроксимируемому шару в метрике Хаусдорфа. Далее исследуется мощность гранной структуры этих выпуклых оболочек. Показано, что норма f-вектора аппроксимирующих многогранников растет от отклонения в метрике Хаусдорфа не быстрее, чем $O(\delta^{1-d)/2})$, т.е. с оптимальной скоростью. Показано также, что, асимптотически, число граней всех размерностей аппроксимирующих многогранников, получаемых в методе ГЯ, пропорционально числу их вершин. В этом отношении эти многогранники ближе по комбинаторным свойствам к многогранникам, двойственным к так называемым многогранникам усечения [15], на которых достигается минимальные оценки числа граней при заданном числе вершин. В конце работы рассчитаны верхние оценки роста числа граней всех размерностей для d от 3 до 5.

2. Метод Глубоких Ям

Пусть A и U – непустые подмножества метрического пространства $\mathbb{R}$ с метрикой ρ. Множество U называется метрической *ε-сетью* для A, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Множество A называется *вполне ограниченным*, если для любого положительного ε существует конечная ε-сеть для A. Будем считать оптимальной ε-сеть с минимально возможным числом элементов.

Пусть T – конечное подмножество A (*база покрытия*) и card(T) – его мощность, т.е. число элементов. Для $x\in A$ обозначим $\rho(x, T) := \min \{\rho(x, t): t\in T\}$ и пусть $\rho(A, T) := \sup \{\rho(x, T): x\in A\}$. Для ε, $0 < \varepsilon$, пусть $[T]_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}: \rho(x,T) \le \varepsilon\}$, и $(T)_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}: \rho(x,T) < \varepsilon\}$. Для заданного γ , $0 < \gamma \le 1$, обозначим

$$\mathrm{DH}_\gamma(T) := \{x\in A: \rho(x, T) \ge \gamma\, \rho(A, T)\}.$$

В дальнейшем в данной работе будем считать A компактным. В силу конечности T имеем $\rho(A, T) = \max \{\rho(x, T): x\in A\}$, поэтому $\mathrm{DH}_1(T)$ не пусто. Точки $x\in\mathrm{DH}_1(T)$ называются глубокими ямами (deep holes) – см. например, [21], стр. 5. Множество $\mathrm{DH}_1(T)$ назовем *множеством глубоких ям* (ГЯ) базы T и обозначим его через DH(T), а множество $\mathrm{DH}_\gamma(T)$ назовем множеством ГЯ уровня γ.

Опишем метод Глубоких Ям [8] – класс итерационных алгоритмов построения ε-сетей для вполне ограниченных множеств.

Метод Глубоких Ям

> Пусть $t_1\in A$ и $T_1:=\{t_1\}$. Пусть множество T_n построено и $\rho(A, T_n) > 0$. Тогда $T_{n+1}:= T_n\cup\{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1}\in\mathrm{DH}_\gamma(T_n)$.

Метод ГЯ может быть переформулирован для некоторой начальной базы покрытия, состоящей более, чем из одной точки:

> Пусть $T_1\subset A$. Пусть множество T_n построено и $\rho(A, T_n) > 0$. Тогда $T_{n+1}:= T_n\cup\{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1}\in\mathrm{DH}_\gamma(T_n)$.

Если не оговорено специально, мы будем рассматривать этот более общий случай метода ГЯ. Очевидно, что при $\rho(A, T_n) > 0$ справедливо

$$\mathrm{card}\, T_n = \mathrm{card}\, T_1 + n - 1. \qquad (1)$$

Конкретный алгоритм метода ГЯ состоит в уточнении способа выбора $t_1\in A$ ($T_1\subset A$) и присоединяемой точки $t_{n+1}\in\mathrm{DH}_\gamma(T_n)$. Последовательность множеств $\{T_n\}_{n=1,2\ldots}$, порождаемую методом ГЯ для множества A с константой γ, будем называть DH(γ)-*последовательностью*. Для $\gamma=1$ будем говорить о последовательности ГЯ или DH-*последовательности*. В настоящей работе мы будем исследовать только такие последовательности, общий случай рассмотрен в [8].

Пусть $\rho_n := \rho(t_{n+1}, T_n)$. Ясно, что T_n является ρ_n-сетью для A. Пусть $\rho^n := \min\{\rho(t_1, t_2): t_1, t_2 \in T_n\}$; если card $\{T_1\}$=1, будем считать, что $\rho^1 = \rho_1$.

Перечислим некоторые очевидные свойства DH-последовательности.

Свойство 1. *Справедливо* $\rho^n \geq \min\{\rho_n, \rho^1\}$.

Свойство 2. *Пусть для любого* $n \geq 1$ *справедливо* $\rho_n > 0$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0.$$

Из свойства 2 следует сходимость T_n к множеству A при $n \to \infty$ в метрике Хаусдорфа. Поэтому итерации метода ГЯ могут быть прекращены при достижении заданной точности $\rho_n \leq \varepsilon$ или заданной мощности ε-покрытия card T_n.

Скорость сходимости метода ГЯ определяется теоремой 1 из [8] в терминах ε-энтропии и ε-емкости [17]. В настоящей работе будут использованы более традиционные для тории полиэдральной аппроксимации выпуклых тел понятия плотности покрытий и упаковок.

Систему шаров заданного радиуса назовем *покрытием* множества A, если их объединение покрывает это множество. Будем говорить об ε-покрытии, если радиус шаров есть ε. Ясно, что ε -покрытие есть ε-сеть. Систему шаров заданного радиуса назовем *упаковкой* (укладкой) во множестве A, если их центры лежат в этом множестве и их внутренности попарно не пересекаются. Будем говорить об ε-упаковке, если радиус шаров есть ε. При заданном A нас будет интересовать редчайшие (минимальные) покрытия и плотнейшие (максимальные) упаковки. Обозначим через $\mathfrak{n}(\varepsilon, A)$ минимальное число шаров в ε-покрытии множестве A и через $\mathfrak{m}(\varepsilon, A)$ – максимальное число шаров в ε-упаковке во множестве A. Ясно, что T_n является ρ_n-покрытием и $(\rho^n/2)$-упаковкой для A. Поэтому справедливо

Свойство 3.

$$\mathfrak{n}(\rho_n, A) \leq \text{card } T_n \leq \mathfrak{m}(\rho^n/2, A) \leq \mathfrak{m}(\min\{\rho_n, \rho^1\}/2, A).$$

3. Внутренне-геометрические свойства последовательности ГЯ на поверхности сферы

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ с метрикой μ, евклидовой нормой и объемом V. В настоящем исследовании мы будем предполагать, что $d \geq 3$. Обозначим через $B^d(r, z)$ шар в $\mathbb{E}^d$ радиуса r с центром в z, а через $B^d(r)$ шар радиуса r с центром в начале координат, единичный шар обозначим через B^d, и пусть $S^{d-1} := \partial B^d$. Через $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ обозначим объем единичного шара. Нам понадобятся величины $\pi_2 = \pi$, $\pi_3 = 4\pi/3$, $\pi_4 = \pi^2/2$, $\pi_5 = 8\pi^2/15$.

Рассмотрим поверхность сферы S^{d-1} как метрическое пространство $\mathbb{R}$ с внутренней метрикой ρ, совпадающей с минимальным углом между точками.

И пусть на множестве S^{d-1} рассматриваются редчайшие ε-покрытия мощности $\mathfrak{n}(\varepsilon, S^{d-1})$ и плотнейшие ε-упаковки мощности $\mathfrak{m}(\varepsilon, S^{d-1})$ в метрике ρ.

Обозначим через ϑ_d плотность покрытия и через δ_d – плотность упаковки пространства $\mathbb{E}^d$ шарами фиксированного радиуса [18]. Оценкам величин ϑ_d и δ_d, посвящена обширная литература [16]. Точно известны только величины δ_1=1, $\delta_2=\pi/\sqrt{12}$ и ϑ_1=1, $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$. При $d\to\infty$ справедливо

$$\frac{d}{e\sqrt{e}} \le \vartheta_d\,,\ \delta_d \le \frac{1}{2^{0.5990d}}.$$

Плотность покрытия ϑ_d и плотность упаковки δ_d определены для пространства $\mathbb{E}^d$, однако они применены и «в малом». Для любого выпуклого множества D в $\mathbb{E}^d$ с внутренним радиусом, большим 2, справедливо (см. (8.9), (8.10) [19]):

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mathfrak{n}(\varepsilon, D)\varepsilon^d = \vartheta_d \frac{V(D)}{\pi_d}; \tag{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mathfrak{m}(\varepsilon, D)\varepsilon^d = \delta_d \frac{V(D)}{\pi_d}. \tag{3}$$

Из того, что в малом поверхность сферы евклидова, следует (см., например, лемму 4 [20] для покрытий и [21], стр. 333 для упаковок), что и для сферы во внутренней метрике ρ справедливы аналогичные (2)-(3) асимптотические соотношения, в которых объем $V(D)$ заменен на поверхностный объем сферы $d\pi_d$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mathfrak{n}(\varepsilon, S^{d-1})\varepsilon^{d-1} = \vartheta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}; \tag{4}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \mathfrak{m}(\varepsilon, S^{d-1})\varepsilon^{d-1} = \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}. \tag{5}$$

Пусть на S^{d-1} задана DH-последовательность в метрике ρ.

Теорема 1. *Справедливо*

$$\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \le \liminf_{n\to\infty} n\rho_n{}^{d-1},$$

$$\limsup_{n\to\infty} n\rho_n{}^{d-1} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{d-1}.$$

Доказательство. Переходя к приделу в левом неравенстве свойства 3, получаем, с учетом свойств 2, (1) и (4), первое утверждение теоремы.

В силу свойств 1 и 3, начиная с некоторого номера, справедливо

$$\text{card}\, T_n \le \mathfrak{m}(\rho_n/2, A),$$

откуда из (1) и (5) вытекает второе утверждение теоремы. ☐

4. Внешне-геометрические свойства последовательности ГЯ

Утверждения теоремы 1 относятся к «внутренней» геометрии поверхности сферы. Рассмотрим свойства, относящиеся к «внешней» геометрии: для последовательности многогранников с вершинами в точках последовательности ГЯ исследуем точность аппроксимации ими единичного шара B^d в объемлющем пространстве $\mathbb{E}^d$.

Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел. На $\mathscr{C}$ рассмотрим метрику Хаусдорфа:

$$\delta(C_1,C_2) := \max\,\{\sup\{\rho(x, C_2): x\in C_1\}, \sup\{\rho(x, C_1): x\in C_2\}\}.$$

Через ∂C обозначим границу тела C, через int C – множество его внутренних точек, через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем. Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P\in\mathscr{P}$ через $M^t(P)$ обозначим множество его вершин (граней нулевой размерности), а через $m^t(P)$ – число его вершин, через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граням размерности $(d$-1$)$), а через $m^f(P)$ – число его гиперграней. Обозначим через $\mathbf{C}(n, k):=\binom{n}{k}$ число сочетаний из n по k, через card T – мощность множества T, через $\lfloor\cdot\rfloor$ – ближайшее целое снизу. Обозначим через cl операцию замыкания и через aff и conv – операции взятия аффинной и выпуклой оболочки, соответственно. Через proj (x, X) обозначим проекцию точки x на множество X. Конусом видимости $K(p, C)$ тела C из точки $p\notin C$ назовем минимальный конус с вершиной в p, содержащий C.

Для $C\in\mathscr{C}$ и $u\in\mathbb{E}^d\backslash\{0\}$ введем обозначения опорной функции $g(u, C) := \max\,\{<u, x>: x\in C\}$, опорного полупространства $L(u, C) := \{x\in\mathbb{E}^d: <u, x> \le g(u, C)\}$, опорной гиперплоскости $l(u, C) := \{x\in\mathbb{E}^d: <u, x> = g(u, C)\}$, множества точек касания $T(u,C) := \{p\in\partial C: <u, p> = g(u, C)\}$ и конуса внешних единичных нормалей в граничной точке $S(p,C) := \{u\in S^{d\text{-}1}: <u, p> = g(u, C)\}$, где $p\in\partial C$. Для произвольного $p\in\mathbb{E}^d$ нам будет удобно использовать обозначения $g(u, p) := <u, p>$, $l(u, p) := \{x\in\mathbb{E}^d: <u, x> = <u, p>\}$, $L(u, p) := \{x\in\mathbb{E}^d: <u, x> \le <u, p>\}$.

Через $\mathscr{P}(B^d)$, $\mathscr{P}(B^d)\subset\mathscr{P}$, обозначим класс вписанных в единичный шар многогранников, т.е. многогранников, чьи вершины лежат на поверхности сферы $S^{d\text{-}1}$. Обозначим $\rho(P) := \rho(S^{d\text{-}1}, M^t(P))$, $P\in\mathscr{P}(B^d)$.

Лемма 1. *Пусть* $P\in\mathscr{P}(B^d)$. *Пусть* $p\in S^{d\text{-}1}$ *такая, что* $\mu(p, P)=\delta(P, B^d)$. *Пусть* q=proj(p, P), $u=(p\text{-}q)/\|p\text{-}q\|$. *Тогда* $p\in T(u, B^d)$ *и*

$$g(u, B^d) - g(u, P) = \delta(P, B^d).$$

Доказательство. Так как $u \in S(q, P)$, то $q \in T(u, P)$. Покажем, что $p \in T(u, B^d)$. Действительно, если существует $x \in B^d \setminus L(u, p)$, то $\mu(x, P) > \mu(p, P)$, что по условию леммы невозможно. Итак, $p \in l(u, B^d)$ и поэтому $p \in T(u, B^d)$. Поэтому прямая (p, q) нормальна к $l(u, P)$ и к $l(u, B)$. Поэтому $g(u, B^d) - g(u, P) = \mu(p, q) = \delta(P, B^d)$. □

Следующая теорема имеет аналог в [19], лемма 6.5.2.

Теорема 2. *Пусть* $P \in \mathscr{H}(B^d)$. *Тогда*

$$\delta(P, B^d) = 1 - \cos \rho(P).$$

Доказательство. 1). Докажем, что $\delta(P, B^d) \geq 1 - \cos \rho(P)$. Пусть $p^* \in \mathrm{DH}(M^t(P))$ и $u^* = p^*$. Тогда по свойству шара $p^* \in T(u^*, B^d)$. Имеем $M^t(P) \cap l(u^*, P) \neq \varnothing$. Пусть $p \in M^t(P) \cap l(u^*, P)$. Для любого $q \in M^t(P) \setminus l(u^*, P)$ справедливо $\rho(p^*, q) > \rho(p^*, p)$. Поэтому $\rho(p^*, p) = \rho(P)$. Поэтому

$$g(u^*, B^d) - g(u^*, P) = 1 - \cos \rho(P).$$

Отсюда

$$\delta(P, B^d) \geq g(u^*, B^d) - g(u^*, P) = 1 - \cos \rho(P).$$

2). Докажем, что $\delta(P, B) \leq 1 - \cos \rho(P)$.

Пусть $p^* \in S$ такая, что $\mu(p^*, P) = \delta(P, B)$. Пусть $q^* = \mathrm{proj}(p^*, P)$, $u^* = (p^* - q^*)/\|p^* - q^*\|$. Тогда по лемме 1 справедливо $p^* \in T(u^*, B^d)$, откуда из свойства шара $u^* = p^*$. По лемме 1 справедливо $g(u^*, B^d) - g(u^*, P) = \delta(P, B^d)$. Имеем $M^t(P) \cap l(u^*, P) \neq \varnothing$. Пусть $p \in M^t(P) \cap l(u^*, P)$. Тогда

$$g(u^*, B^d) - g(u^*, P) = 1 - \cos \rho(p^*, p).$$

Для любого $q \in M^t(P) \setminus l(u^*, P)$ справедливо $\rho(p^*, q) > \rho(p^*, p)$. Поэтому $\rho(p^*, p) \leq \rho(P)$. Поэтому $\cos \rho(p^*, p) \geq \cos \rho(P)$. Итак,

$$\delta(P, B) = g(u^*, B) - g(u^*, P) = 1 - \cos \rho(p^*, p) \leq 1 - \cos \rho(P). \ \square$$

Обозначим $P_n := \mathrm{conv}\, T_n$.

Свойство 3. *Для* $n \geq 2d$-1 *справедливо*

$$P_n \in \mathscr{H}(B^d).$$

Доказательство. Для любого подмножества S^{d-1}, лежащего в одной гиперплоскости, всегда имеется глубокая яма на расстоянии, не меньшем $\pi/2$. Поэтому максимальное число начальных точек в последовательности глубоких ям, которые могут лежать в центральном сечении сферы, есть (согласно [21], (61)) $2(d-1)$. □

Множества P_n будем называть многогранниками ГЯ. Пусть $h_n := \delta(P_n, B^d)$. Из теоремы 2 и свойства 3 вытекает следующее утверждение.

Свойство 4. *Для* $n \geq 2d$-1 *справедливо*

$$h_n = 1 - \cos \rho_n.$$

Теорема 3. *Справедливо*

$$\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{-(d-1)/2} \le \liminf_{n\to\infty} nh_n^{(d-1)/2};$$

$$\limsup_{n\to\infty} nh_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}.$$

Доказательство. По свойству 2 при $n\to\infty$ справедливо $\rho_n \to 0$, откуда из свойства 4 вытекает $\rho_n \approx (2h_n)^{1/2}$, откуда из теоремы 1 вытекает утверждение доказываемой теоремы. □

5. Гранная структура многогранников ГЯ

Исследуем свойства гранной структуры многогранников МГЯ P_n. Согласно (1), число вершин P_n есть card $T_1 + n - 1$. Согласно [10], [11], рост числа $m^f(P_n)$ гиперграней P_n может быть оценен как

$$\limsup_{n\to\infty} m^f(P_n)h_n^{(d-1)/2} \le \vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}\mathbf{C}\left(5^d, d-1\right).$$

Из сравнения этого результата и теоремы 3 видно, что порядок роста числа гиперграней в P_n совпадает с порядком роста числа вершин и является оптимальным. В настоящей работе мы улучшим константу в этой оценке, а также в оценках [12], и получим новые верхние оценки на рост числа граней других размерностей.

Обозначим через $\Phi(P)$ множество всех граней многогранника P. Обозначим через $\Phi_i(P)$ множество i-мерных граней многогранника P, $i=0, \ldots d-1$. Обозначим через $f_i :=$ card $(\Phi_i(P))$. Тогда $f(P) := (f_i)_{i=0, \ldots d-1}$ будет представлять из себя f-вектор (или вектор чисел граней) многогранника P. Обозначим через $f^*_i(m, d)$ и $f^{**}_i(m, d)$ минимальное и максимальное возможное число i-мерных граней многогранника с m вершинами. Существуют различные оценки этих величин [22]. Очевидной оценкой является $f^{**}_i(m, d) \le \mathbf{C}(m, i+1)$.

Пусть $F\in\Phi_{d-1}(P)$. Аффинную оболочку $\mathit{aff}\,F$ гиперграни F можно представить в виде пары $(r_F; u_F)$, где $u_F\in M^f(P)$ и r_F такое, что для любой точки $q\in \mathit{aff}\,F$ выполняется $\langle u_F, q\rangle = r_F$.

Обозначим

$$\partial P_p^{+} := \{F\in\Phi_{d-1}(P)\colon \langle u_F, p\rangle > r_F\},$$
$$\partial P_p^{0} := \{F\in\Phi_{d-1}(P)\colon \langle u_F, p\rangle = r_F\},$$
$$\partial P_p^{-} := \{F\in\Phi_{d-1}(P)\colon \langle u_F, p\rangle < r_F\}.$$

Пусть

$$M^t(p, P) := \{t\in M^t(P), t\in F_1\cap F_2\colon F_1\in\partial P_p^{+},\ F_2\in\partial P_p^{-}\}$$

и $m^t(p, P) :=$ card $M^t(p, P)$.

Лемма 2. *Пусть* $P\in\mathscr{P}$, $p\notin P$, $P' =$ conv $\{p, P\}$. *Тогда для* i, $d-1 \ge i \ge 1$, *справедливо*

$$f^i(P') - f^i(P) \le \min\{f^{**}_{i-1}(m^t(p, P), d), f^{**}_i(m^t(p, P)+1, d)\}$$

Доказательство. Согласно [23], для $f \in \Phi(P)$ справедливо $f \in \Phi(P')$ тогда и только тогда, когда существует $F \in \Phi_{d-1}(P)$ такая, что $f \subset F$ и $F \in \partial P_p^-$. Кроме того, если $f \in \Phi(P)$, то conv $\{p, f\} \in \Phi(P')$ тогда и только тогда, когда:
а) либо существуют $F_1, F_2 \in \Phi(P)$ такие, что $f \subset F_1 \cap F_2$ и $F_1 \in \partial P_p^+$, $F_2 \in \partial P_p^-$,
б) либо $p \in \mathrm{aff}\,(f)$.

Случай б) число граней не увеличивает. Поэтому остальные новые i-грани многогранника P' представляют собой выпуклые оболочки точки p и (i-1)-мерных граней многогранника P, вершины которых все лежат во множестве $M^t(p, P)$. Это дает первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из того, что число новых i-граней не может превышать максимально возможное для многогранника с $m^t(p, P)+1$ вершиной. ☐

Обозначим $T(n) := M^t(t_{n+1}, P_n)$ и оценим для последовательности $\{P_n\}$ величину $m_n := m^t(t_{n+1}, P_n) = \mathrm{card}\, T(n)$. Для $h_n < 1$ обозначим

$$\Omega_B(n) := \mathrm{cl}\ (S^{d-1} \setminus K(t_{n+1}, B^d(1 - h_n))).$$

Лемма 3. *Существует $N > 0$ такое, что для любого $n \ge N$ выполняется*

$$T(n) \subset \Omega_B(n).$$

Доказательство. По лемме 2 из [24] выполняется включение $B^d(1 - h_n) \subset P_n$, так что

$$K(p, B^d(1 - h_n)) \subset K(t_{n+1}, P_n).$$

Рассмотрим множество $\Omega_1(n) := \mathrm{cl}\ (S^{d-1} \setminus K(t_{n+1}, P_n))$. Из определения $T(n)$ следует, что $T(n) \subset \Omega_1(n)$, при этом $\Omega_1(n) \subset \Omega_B(n)$. ☐

Оценим число m_n. Через $m^*(R, d) := \mathfrak{m}(1, B^d(R))$ обозначим максимальное число открытых единичных шаров, которые можно упаковать в шар радиуса R. Существуют различные оценки этих величины $m^*(R, d)$ (см., например, сводку в [19], п.8.5). К сожалению, значимые оценки существуют только для $R \le 3$. Очевидной оценкой является $m^*(R, d) \le R^d$.

Лемма 4. *Для любого малого $\nu > 0$ существует $N > 0$ такое, что для любого $n \ge N$ справедливо*

$$m_n \le m^*(5+\nu, d\text{-}1) - 1.$$

Доказательство. По лемме 3 при достаточно больших n справедливо $T(n) \subset \Omega_B(n)$. Пусть l – касательная гиперплоскость к B^d в точке t_{n+1}. Проекция $\Omega_B(n)$ на l есть d-1 шар радиуса $R := 2\rho_n + o(\rho_n)$. Пусть $T'(n)$ есть проекция $T(n)$ на l. Точки $T'(n)$ отстоят друг от друга на расстоянии не менее, чем $r := \rho_n + o(\rho_n)$. При этом в центре находится шар радиуса $r/2$, содержащий точку t_{n+1}. Таким образом, $m_n \le m^*(5+o(\rho_n), d\text{-}1)$-1. ☐

Обозначим $\underline{f_n^i} := \mathrm{card}\ (\Phi_i(P_n))$ и $f_n := f(P_n)$. Обозначим

$$m^{**}(d) := \limsup_{\nu \to +0} m^*(5+\nu, d).$$

Таким образом, в последовательности ГЯ на поверхности сферы по лемме 4 величина $m^{**}(d\text{-}1)\text{-}1$ есть асимптотическая оценка числа вершин m_n многогранника P_n, видимых из присоединяемой точки t_{n+1}.

Теорема 4. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^i}{n} \le \min\{ f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1, d), f_i^{**}(m^{**}(d-1), d)\},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^i}{f_n^0} \le \min\{ f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1, d), f_i^{**}(m^{**}(d-1), d)\}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает непосредственно из лемм 2 и 4. Второе утверждение вытекает из первого утверждения и (1). □

Теорема 5. *Для* i, d-1 ≥ i ≥ 1, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le$$

$$\le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \min\{ f_{i-1}^{**}(m^{**}(d-1)-1, d), f_i^{**}(m^{**}(d-1), d)\}.$$

Кроме того,

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает непосредственно из теорем 3 и 4. Второе утверждение содержится в теореме 3 и добавлено для полноты описания свойств f-вектора. □

6. Вычисление асимптотической оценки числа вершин, видимых из ГЯ

Получим теперь конкретные оценки величины $m^{**}(d)$. В силу того, что, как уже отмечалось, $m^*(R, d) \le R^d$, грубой оценкой является

$$m^{**}(d) \le 5^d = 2^{2.322d}. \tag{6}$$

Пусть d=2. Известно, что 19 единичных кругов могут быть упакованы в круг радиуса не менее 4.86, наилучшая известна упаковка (предположительно оптимальная) 20 кругов имеет радиус 5.12 [25], так что можно предположить, что $m^{**}(2) \le 20$. Оценка (6) гарантирует $m^{**}(2) \le 25$.

Пусть d=3. Оптимальные упаковки в сферу известны для 12 единичных сфер. Для 68 единичных шаров известна упаковка в шар радиуса 5.007 [36], так что можно считать, что $m^{**}(3) \le 68$. Оценка (6) гарантирует $m^{**}(3) \le 125$.

Получим оценку общего характера, лучшую, чем в (6).

Обозначим через $A(d, \varphi)$ максимальное число непересекающихся открытых сферических шапочек углового диаметра φ (наибольшую *мощность сферического кода* с минимальным углом φ [16]). Очевидно, что

$A(d, \varphi) = \mathfrak{m}(\varphi/2, S^{d-1})$, где упаковки берутся в поверхностной метрике. Оценкам величины $A(d, \cdot)$ посвящена обширная литература (см. [16]). В частности, при $\varphi<63°$ и $d\to\infty$ справедливо [27]

$$\frac{1}{d}\log_2 A(d,\varphi) \le -\frac{1}{2}\log_2(1-\cos\varphi) - 0.0990\,. \qquad (7)$$

Лемма 5. *Для любого целого* $K>2$ *выполняется*

$$m^*(5, d) \le KA(d-1, \varphi_K),$$

где $\cos \varphi_K = 7/8+1/(2K^2)$.

Доказательство. Пусть T – искомая плотнейшая упаковка центров единичных шаров в $B^d(5)$. Во внутреннюю часть $B^d(2)$ центры шаров не попадают. Разобьем $B^d(4) \setminus \mathrm{int}\, B^d(2)$ на K сферических слоев толщиной $s := 2/K$ (в первый слой включим также центры шаров, лежащие на поверхности $B^d(2)$). Рассмотрим часть множества T, попавшую в некоторый слой. Шары радиуса 1 с центрами в точках этого множества образуют сферические шапочки несколько уменьшенного радиуса на границе следующего слоя. Достаточно рассмотреть худший случай – последний слой шара $B^d(4)$. В этом случае число точек, попавших в него, ограничено величиной $A(d-1, \varphi_K)$, где

$$\sin(\varphi_K/2) \ge (1-s^2)^{1/2}/4 = (1-4K^{-2})^{1/2}/4.$$

Поэтому

$$\cos\varphi_K = 1-2\sin^2(\varphi_K/2) \le 1-(1-4K^{-2})/8,$$

откуда следует утверждение леммы. ☐

Используем приведенную выше оценку на величину $m^*(5, d)$.

Следствие 1. *При* $d\to\infty$ *справедливо*

$$m^{**}(d) \le \min\{11\ 2^{1.4305(d-1)}, 3\ 2^{1.8193(d-1)}\}. \qquad (8)$$

Доказательство. Возьмем в лемме 5 величину K=11. Тогда можно положить $\cos \varphi_K = 0.88$, что соответствует $\varphi_K \approx 28.5°$, и при $d\to\infty$ по оценке (7) справедливо

$$\frac{1}{d}\log_2 A(d,\varphi_k) \le -\frac{1}{2}\log_2 0.12 - 0.0990\,.$$

Таким образом, $A(d, \varphi_K) \le 2^{1,4305d}$, и из леммы 5 и определения величины $m^{**}(d)$ получаем первое утверждение следствия.

Возьмем K=3. Тогда можно положить $\cos \varphi_K = 0.93$, что соответствует $\varphi_n \approx 21.47°$, и при $d\to\infty$ по оценке (7) справедливо $A(d, \varphi_K) \le 3\ 2^{1.8193d}$, откуда получаем второе утверждение следствия. ☐

Отметим, что оценка (8) следствия 1 значительно лучше (6), однако она справедлива только для больших размерностей. Получим оценки для средних размерностей. Согласно [19] при $d\ge4$ и $\varphi<90°$ справедливо

$$A(d, \varphi) < 23\,(d-1)^{3/2} \sin^{-(d-1)}(\varphi/2)\, 2^{-(d-1)/2}. \qquad (9)$$

Следствие 2. *При* $d\ge5$ *справедлива оценка*

$$m^{**}(d) \le \min\{253\,(d-2)^{3/2}\, 2^{1.523(d-2)}, 69\,(d-2)^{3/2}\, 2^{1.924(d-2)}\}. \qquad (10)$$

Доказательство. Положим K=11. Тогда $\cos\,\varphi_K = 0.88$, что соответствует $\varphi_K \approx 28.5°$ и (9) дает оценку $A(d,\ \varphi_K) \le 23\ (d\text{-}1)^{3/2}\ 2^{1.523(d-1)}$.

Возьмем K=3. Тогда можно положить $\cos\,\varphi_K = 0.93$, что соответствует $\varphi_n \approx 21.47°$. Таким образом, $A(d,\ \varphi_K) \le 23\ (d\text{-}1)^{3/2}\ 2^{1.924(d-1)}$.

Из этих оценок величины $A(d,\ \varphi_K)$, леммы 5 и определения величины $m^{**}(d)$ получаем утверждение следствия. ☐

Полученные оценки (6), (8) и (10) по-разному растут с ростом размерности, однако при малых размерностях предпочтительнее оказывается грубая оценка (6). При $d \ge 14$ оценка (10) предпочтительнее (6). Оценка (8) дает хорошие результаты, однако ее использование при малых размерностях не является обоснованным. Итак, в дальнейшем при малых размерностях для числа видимых вершин имеем следующие оценки:

— при d=3 – $m^{**}(d\text{-}1) \le 25$ (предположительно 20);
— при d=4 – $m^{**}(d\text{-}1) \le 125$ (предположительно 68);
— при d=5 – $m^{**}(d\text{-}1) \le 625$ (465 по второй оценке из (8));
— при d=6 – $m^{**}(d\text{-}1) \le 3125$ (1564 по первой оценке из (8)).

7. Вычисление асимптотических оценок скорости роста компонент *f*-вектора многогранников ГЯ

Для получения конкретных асимптотических оценок скорости роста компонентов гранной структуры многогранников ГЯ при аппроксимации шара на основе теоремы 4, необходимы оценки величин максимального числа i-граней d-многогранника, имеющего не более m вершин, т.е. величин $f^{**}_i(m,\ d)$. Как уже говорилось, грубой оценкой этой величины является

$$f^{**}_i(m,\ d) \le \mathbf{C}(m,\ i+1)\ ,\ i=1,\ \dots\ ,\ d\text{-}1.$$

Обозначим $d^* := \lfloor d/2 \rfloor$, $d^{**} := \lfloor (d\text{-}1)/2 \rfloor$. По теореме о максимальном числе граней [28] справедливо

$$f^{**}_i(m,\ d) \le \mathbf{\Phi}_{d-1-i}(d,\ m),\ i=1,\ \dots\ ,\ d\text{-}1, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{\Phi}_0(d,\ m) = \mathbf{C}(m\text{-}d^{**}\text{-}1,\ d^*) + \mathbf{C}(m\text{-}d^*\text{-}1,\ d^{**});$$

$$\mathbf{\Phi}_i(d,\ m) = \mathbf{C}(m,\ d\text{-}i) + \mathbf{C}(m\text{-}d+i\text{-}1,\ i)\mathbf{C}(m\text{-}d+d^*,\ d^*\text{-}i) -$$

$$- \sum_{j=d^{**}+1}^{d-i} \mathbf{C}(d-j,i)\mathbf{C}(m-d+j-1,j),\ i=1,\ \dots\ ,\ d^*;$$

$$\mathbf{\Phi}_i(d,\ m) = \mathbf{C}(m,\ d\text{-}i)\ ,\ i=d^{**}+1,\ \dots\ ,\ d\text{-}2.$$

Добавим сюда очевидное обозначение

$$f^{**}_0(m,\ d) = m := \mathbf{\Phi}_{d-1}(d,\ m).$$

Оценка (11) достигается на смежностных симплициальных многогранниках, в частности, на циклическом многограннике. Согласно [29] и [28], стр. 258:

$$f^{**}_{d\text{-}1}(m, d) \le 2\sum_{j=0}^{d^*}\mathbf{C}(m, j) = O(m^{d^*}). \qquad (12)$$

Обозначим $\|f^{**}(m, d)\|$:= max $\{f^{**}_i(m, d), i\text{=}0, 1, \dots, d\text{-}1\}$. Согласно [29],

$$f^{**}_i(m, d) \le \mathbf{C}(d, \ i)\, f^{**}_{d\text{-}1}(m, d),\ i\text{=}1, \dots, d\text{-}2. \qquad (13)$$

Поэтому из (12) и (13) вытекает [29] свойство

$$\|f^{**}(m, d)\| = O(m^{d^*}). \qquad (14)$$

Приведем теперь оценки максимального числа i-граней для малых размерностей d.

Справедливо [22]:

$$f^{**}_1(m, 3) \le 3m\text{-}6,\ f^{**}_2(m, 3) \le 2m\text{-}4;$$
$$f^{**}_1(m, 4) \le m(m\text{-}1)/2,\ f^{**}_2(m, 4) \le m(m\text{-}3),\ f^{**}_3(m, 4) \le m(m\text{-}3)/2;$$
$$f^{**}_1(m, 5) \le m(m\text{-}1)/2,\ f^{**}_2(m, 5) \le 2m(m\text{-}6), \qquad (15)$$
$$f^{**}_3(m, 5) \le 5m(m\text{-}7)/2\text{+}30,\ f^{**}_4(m, 5) \le m(m\text{-}7)/2\text{+}12.$$

Для получения асимптотических оценок скорости роста компонентов гранной структуры многогранников необходимо в оценки (11) подставить оценки (6), (8) и (10) числа видимых вершин, полученные в предыдущем пункте. Обозначим

$$\mathbf{R}_i(m, d) := \min\{\mathbf{\Phi}_{d\text{-}i}(d, m\text{-}1), \mathbf{\Phi}_{d\text{-}1\text{-}i}(d, m)\},\ i\text{=}1, \dots, d\text{-}1.$$

Из оценок (6), (8), (10), (11) и теорем 4 и 5 вытекают следующие утверждения

Теорема 6. *Для* i, $d\text{-}1 \ge i \ge 1$, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{f_n^0} = \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{n} \le \mathbf{R}_i(m^{**}(d-1), d),$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}\mathbf{R}_i(m^{**}(d-1), d).$$

Следствие 3. *Для* i, $d\text{-}1 \ge i \ge 1$, *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{f_n^0} = \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{n} \le \mathbf{R}_i(2^{2.322(d-1)}, d),$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}2^{(d-1)/2}\mathbf{R}_i(2^{2.322(d-1)}, d).$$

Следствие 4. *Для* i, $d\text{-}1 \ge i \ge 1$, *при* $d\to\infty$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{f_n^0} = \limsup_{n\to\infty}\frac{f_n^i}{n} \le \mathbf{R}_i(11\cdot 2^{1.4305d}, d),$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \mathbf{R}_i(11\cdot 2^{1.4305d}, d).$$

Обозначим $\|f_n\|$:= max $\{f_n^i$, i=0, 1, … , d-1$\}$. Чтобы получить следующее следствие, в теоремах 4 и 5 учтем асимптотику (14), первую оценку в (8), а также оценку $\delta_{d-1}\le 2^{-0.599d}$ и свойство [19], стр. 180:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{d+2}} < \frac{\pi_{d+1}}{\pi_d} < \sqrt{\frac{2\pi}{d+1}}.$$

Следствие 5. *При $d\to\infty$ справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{n} \le O(2^{0.7153d^2}),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{f_n^0} \le O(2^{0.7153d^2}),$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\| h_n^{(d-1)/2} \le O(2^{0.7153d^2}).$$

Из теоремы 6 и следствий 3-5 вытекает, что, асимптотически, число граней всех размерностей многогранников ГЯ пропорционально числу их вершин. В этом отношении эти многогранники ближе по комбинаторным свойствам к многогранникам, двойственным к так называемым многогранникам усечения [38], на которых достигается минимальные оценки $f^*_i(m, d)$ числа i-граней при заданном числе вершин m.

Приведем теперь асимптотические скорости сходимости для малых размерностей, полученные при подстановке величин $m^{**}(d\text{-}1)$, полученные в конце предыдущего пункта, в оценки (15) и теоремы 4 и 5.

Пусть d=3. Тогда лучшая оценка получается непосредственно из свойств (15), где $\delta_2\approx 0.907$:

$$f_n^1 \le 3f_n^0\text{-}6,\ f_n^2 \le 2f_n^0\text{-}4;$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^1}{f_n^0} \le 3,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^2}{f_n^0} \le 2;$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0 h_n \le 7.2552,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1 h_n \le 21.77,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^2 h_n \le 14.52.$$

Пусть d=4. Тогда, полагая m=$m^{**}(d\text{-}1)$ =68, из свойств (15) и теорем 4 и 5, где $\delta_3\le 0.774$, получаем:

$$f^{**}_1(m, 4) \le m(m\text{-}1)/2,\ f^{**}_2(m, 4) \le m(m\text{-}3),\ f^{**}_3(m, 4) \le m(m\text{-}3)/2;$$

$$\mathbf{R}_1(m, 4)=m\text{-}1,\ \mathbf{R}_2(m, 4)=(m\text{-}1)(m\text{-}2)/2,\ \mathbf{R}_3(m, 4)=m(m\text{-}3)/2,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^1}{f_n^0} \le 67,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^2}{f_n^0} \le 2211,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^3}{f_n^0} \le 2210;$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0(h_n)^{3/2} \le 10.312,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1(h_n)^{3/2} \le 691.0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^2(h_n)^{3/2} \le 22800,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^3(h_n)^{3/2} \le 22790.$$

Пусть d=5. Тогда, полагая $m=m^{**}(d-1)=625$, из свойств (15) и теорем 4 и 5, где $\delta_4 \le 0.648$, получаем:

$$f^{**}_1(m, 5) \le m(m-1)/2,\ f^{**}_2(m, 5) \le 2m(m-6),$$

$$f^{**}_3(m, 5) \le 5m(m-7)/2+30,\ f^{**}_4(m, 5) \le m(m-7)/2+12;$$

$$\mathbf{R}_1(m, 5)=m-1,\ \mathbf{R}_2(m, 5)=(m-1)(m-2)/2,$$

$$\mathbf{R}_3(m, 5)=2(m-1)(m-7),\ \mathbf{R}_4(m, 5)=m(m-7)/2+12.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^1}{f_n^0} \le 624,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^2}{f_n^0} \le 194376,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^3}{f_n^0} \le 771264,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{f_n^4}{f_n^0} \le 193137;$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^0(h_n)^2 \le 13.823,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^1(h_n)^2 \le 6435,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^2(h_n)^2 \le 2004400,\ \limsup_{n\to\infty} f_n^3(h_n)^2 \le 7953251,$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^4(h_n)^2 \le 1991623.$$

8. Заключение

Теорема 6 и следствия 3-5 асимптотически характеризует мощность гранной структуры многогранников, порождаемых методом «Глубоких Ям». При этом порядок роста нормы f-вектора в зависимости от точности аппроксимации шара в метрике Хаусдорфа (третье утверждения следствие 5) оказывается оптимальным и равным $(1-d)/2$.

Результаты теорем 4 и 6 свидетельствуют о том, что, асимптотически, число граней всех размерностей аппроксимирующих многогранников, получаемых в методе, пропорционально числу их вершин. В этом отношении многогранники, получаемые в методе, ближе по комбинаторным свойствам к многогранникам, на которых достигается минимальные оценки числа граней при заданном числе вершин. Эти результаты говорят о хорошей масштабируемости задачи: сложность гранной структуры растет с той же скоростью, что и число вершин, так что сложность локальной карты аппроксимирующего многогранника вблизи любой его вершины определяется сверху константами, зависящими только от размерности.

Как уже говорилось во введении, метод «Глубоких Ям» является теоретическим обобщением широко используемого на практике метода

«Уточнения Оценок» – адаптивного метода полиэдральной аппроксимации. Можно показать, что метод «Уточнения Оценок» позволяет на каждой итерации находить глубокую яму текущего аппроксимирующего многогранника. Поэтому из результатов настоящей работы вытекают комбинаторные свойства и скорости сходимости многогранников, порождаемых методом «Уточнения Оценок». Этот вопрос, а также обсуждение полученных результатов в контексте результатов об оптимальной полиэдральной аппроксимации выпуклых тел выходят, однако, за рамки настоящего исследования и будут рассмотрены в отдельной работе.

Список литературы

1. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
2. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37
3. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
4. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
5. *Böröczky K. Jr.* Polytopal Approximation Bounding the Number of *k*-Faces // J. of Approx. Theory. 2000, V. 102. P. 263-285.
6. *Böröczky K. Jr., Fodor F., Vígh V.* Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges // Beit. Alg. Geom, 2008. 49. P. 177-193.
7. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
8. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т.41. N11. С. 1751-1760.
9. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007, 230 с.
10. *Efremov R.V., Kamenev G.K.* Properties of a method for polyhedral approximation of the feasible criterion set in convex multiobjective problems // Ann. Oper. Res. 2009. 166. P. 271–279.
11. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Об оптимальном порядке роста числа вершин и гиперграней в классе хаусдорфовых методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 6. С. 1018-1031.

12.*Каменев Г.К.* Полиэдральная аппроксимация шара Методом Глубоких Ям с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры // Труды Межд. конфер. «Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления (NUMGRID2010)», Москва, 11-13 октября 2010г. М.: Изд. Фолиум, 2010. С. 47-52.
13.*Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Построение субоптимальных покрытий многомерной единичной сферы // Доклады АН, 2012, том 444, № 2, с. 153–155.
14.*Каменев Г.К., Лотов А.В., Майская Т.С.* Итеративный метод построения покрытий многомерной единичной сферы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013, Т. 53. N2. С. 181-194.
15.*Брёнстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
16.*Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.
17.*Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* $\mathcal{E}$-энтропия и $\mathcal{E}$-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.
18.*Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
19.*Böröczky K. Jr*. Finite Packing and Covering. Cambridge University Press. Cambridge/New York/Melbourne/Madrid/Cape Town/Singapore. 2004.
20.*Schneider R.* Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder // Math. Ann. 1981. Bd. 256. № 3, S. 289-301.
21.*Яглом И.М.* Некоторые результаты, касающиеся расположений в *n*-мерном пространстве. / *Том Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Изд. Физ.-мат. лит., 1958.
22.*Grünbaum B.* Convex Polytopes. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 221. Springer. New York / Berlin /London. 2003.
23.*McMullen P. and Shephard G.C.* Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture. Cambridge University Press. Cambridge, England. 1971.
24.*Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.
25.*Graham, R. L.; Lubachevsky, B. D.; Nurmela, K. J.; Östergård, P. R. J.* Dense packings of congruent circles in a circle. Discrete Math. 1998, 181, no. 1-3, 139-154.
26.*Pfoertner, H.* Densest Packings of *n* Equal Spheres in a Sphere of Radius 1. Largest Possible Radii. 2008 (http://www.randomwalk.de/sphere/insphr/spisbest.txt)
27.*Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.* О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Пробл. передачи информ., 1978. Т. 14, вып. 1, с. 3-25.
28.*McMullen P.* The maximum numbers of faces of convex polytope // Mathematica, 1970. T. 17. P. 179-184.

29. *Seidel R.* The upper bound theorem for polytopes: an easy proof of its asymptotic version // Computational Geometry: Theory and Applications, 1995. T. 5. P. 115-116.
30. *Ziegler G.M.* Lectures on Polytopes. Revised First Edition. Graduate texts in mathematics, 152. Springer, 1995.