УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ДВУХФАЗНЫХ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ ОБОЛОЧКИ ЭДЖВОРТА-ПАРЕТО[1]

©2012 г. Г.К. Каменев
(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)
e-mail: gkk@ccas.ru

Изучается скорость сходимости и эффективность двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации. Особенность двухфазных методов состоит в том, что критериальные образы случайно сгенерированных точек пространства решений приближаются к границе Парето на основе локальной оптимизации адаптивно выбираемых сверток критериев. Показано, что скорость сходимости двухфазных методов определяется метрическими свойствами множества локальных экстремумов сверток критериев, в частности, его верхней метрической размерностью. Проведено изучение эффективности двухфазных методов, т.е. их сравнение с гипотетическими оптимальными методами того же класса. Показано, что эффективность двухфазных методов определяется отношением ε-энтропии и ε-емкости множества локальных экстремумов сверток критериев. Библ. 18.

Ключевые слова: нелинейная многокритериальная оптимизация, граница Парето, оболочка Эджворта-Парето, метод аппроксимации, локальная оптимизация, статистические оценки, адаптивные методы, двухфазные методы оптимизации, скорость сходимости, эффективность метода, ε-сети, ε-энтропия, ε-емкость

1. Методы аппроксимации оболочки Эджворта-Парето

Проблема аппроксимации и изучения границы Парето в задачах многокритериальной оптимизации является классической проблемой исследования операций и имеет большое прикладное значение [1-7]. Одним из подходов к решению этой проблемы в многомерном случае являются методы, основанные на аппроксимации множества достижимых критериальных векторов или его оболочки Эджворта-Парето (ОЭП), которая, помимо всех достижимых критериальных векторов, содержит и все доминируемые ими точки пространства критериев [3, 5, 6]. В этих методах предварительная аппроксимация ОЭП используется для интерактивной визуализации границы Парето. Для случая выпуклых (в том числе линейных) систем проблема аппроксимации множества достижимых критериальных

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-12136-офи-м и 12-01-00916), ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18.

векторов и его ОЭП хорошо изучена, и предложены эффективные методы аппроксимации в задачах с числом критериев от двух до семи [3, 6, 8].

В настоящей работе изучаются двухфазные методы аппроксимации ОЭП, предложенные в [9, 10] для нелинейных математических моделей, для которых ОЭП уже не обязательно является выпуклым множеством. Отметим, что в методах [9, 10] не делается предположений о знании функций, используемых в моделях изучаемых систем: эти методы пригодны для моделей типа «черного ящика».

Проблема, рассматриваемая в статье, математически формулируется следующим образом. Считается, что совокупность допустимых решений задана компактным множеством $X \subset R^n$, а критериальный вектор $y \in R^m$ – некоторым отображением (заданным, возможно, в виде неизвестного алгоритма типа «черный ящик») $f: R^n \to R^m$. В дальнейшем будем предполагать, что множество достижимых критериальных векторов $Y := f(X)$ компактно. Пусть желательно увеличение значений критериев. Тогда точка $y' \in R^m$ доминирует (по Парето) точку $y \in R^m$, если $y' \geq y$ и $y' \neq y$. При этом граница Парето (недоминируемая граница) $P(Y)$ множества достижимых критериальных векторов определяется как

$$P(Y) := \{y \in Y \colon \{ y' \in Y \colon y' \geq y, y' \neq y \} = \varnothing\}.$$

Решения, порождающие точки границы Парето, называются эффективными по Парето, а их множество обозначается через $P(X)$. Обзор различных подходов к аппроксимации границы Парето дан, например, в [10]. Под ОЭП понимается множество

$$Y^* := Y + R_-^m = \{y \in R^m : y = y_1 + y_2, y_1 \in Y, y_2 \in R_-^m\},$$

где R_-^m – неположительный конус R^m. Как уже говорилось, кроме точек, принадлежащих Y, множество Y^* содержит также и недостижимые точки, доминируемые точками множества Y. Важно (см., например, [7]), что $P(Y^*) = P(Y)$, причем Y^* является максимальным множеством из R^m, обладающим этим свойством. Отметим, что аппроксимация Y или Y^* вместо непосредственной аппроксимации границы Парето позволяет избежать проблем, связанных с неустойчивостью множества $P(Y)$ (см., например, [7]). С другой стороны, аппроксимация ОЭП вместо множества Y позволяет упростить задачу визуализации границы Парето [3, 5, 6].

Двухфазные методы аппроксимации ОЭП были предложены в [9, 10] на основе развития стохастического метода [11, 12] аппроксимации невыпуклых множеств, заданных нелинейными отображениями. В [13] подробно исследован однофазный метод, основанный на случайном поиске недоминируемых критериальных векторов, в том числе изучены его скорость сходимости и эффективность. В данной статье проводится аналогичное исследование скорости сходимости и эффективности двухфазных методов.

Рассматриваемые двухфазные методы основаны на аппроксимации множества Y^* оболочкой Эджворта-Парето конечного множества достижимых критериальных векторов (базы аппроксимации) и на итерационном пополнении базы аппроксимации. В [14] рассматривается абстрактный (идеализированный) вариант двухфазного метода, отличающегося от двухфазного метода [9, 10], прежде всего, тем, что на каждой итерации построенная ранее база аппроксимации пополняется единственной точкой Y. Эта точка является наиболее удаленной от построенной аппроксимации среди набора критериальных точек, полученного с использованием средств оптимизации (парето-приближающего отображения). В [14] рассмотрены примеры парето-приближающих отображений, доказана сходимость двухфазного метода. Целью настоящей статьи является дальнейшее исследование абстрактного (идеализированного) двухфазного метода – получение оценок его скорости сходимости. Также исследуется его эффективность, т.е. проводится сравнение его с гипотетическими оптимальными методами того же класса.

Исследование скорости сходимости и эффективности абстрактного варианта двухфазного метода построения ОЭП основано на теоретическом методе Глубоких Ям [12], позволяющем получать эффективные оценки скорости сходимости для методов аппроксимации вполне ограниченных множеств. Такое исследование проводится в первой половине работы.

Двухфазные методы допускают получение статистической оценки качества аппроксимации, позволяющей [11, 12] сформулировать правило остановки расчета и обосновать объем случайной выборки, генерируемой на каждой итерации метода. Исследование скорости сходимости и эффективности двухфазных методов в условиях статистического оценивания качества аппроксимации рассматривается во второй половине работы.

2. Адаптивный двухфазный метод аппроксимации ОЭП

Приведем математическое описание абстрактного варианта [14] двухфазного метода из [9, 10]. Отличие двухфазных методов от однофазных состоит в наличие второй фазы – оптимизации случайно сгенерированных точек. Формально вторая фаза метода может быть описана в виде некоторого отображения $\Phi: X \to X$, которое приближает образ случайно выбранной точки к недоминируемому множеству $P(Y)$. Это отображение реализовано в виде алгоритма поиска локального экстремума (который в определенных случаях может являться глобальным) некоторой свертки критериев. Примеры отображений рассмотрены в [14]. Обозначим $Y^{\Phi} := f(\Phi(X))$.

Пусть $d_X(\cdot,\cdot)$ и $d_Y(\cdot,\cdot)$ – метрики в R^n и R^m, соответственно. Пусть задана некоторая база аппроксимации T – конечное подмножество Y. Для T можно рассмотреть ОЭП в виде $T^* := N + R_-^m$. Введем отклонение точки y от T^*, как

$$\rho(y, T^*) := \inf\{d_Y(y, t) \colon t \in T^*\}.$$

Пусть заданы: $\mu_X(\cdot)$, $\mu_X(X)=1$, – вероятностная мера на X, и N – объем случайной выборки, генерируемой на каждой итерации метода.

АБСТРАКТНЫЙ АДАПТИВНЫЙ ДВУХФАЗНЫЙ МЕТОД

Пусть заданы T_0 – конечное подмножество из Y (исходная база аппроксимации). Рассмотрим k-ую итерацию метода.

Итерация k:

Пусть имеется уже построенная база аппроксимации T_{k-1}. Тогда:

1) Сгенерировать выборку $H_N^k \subset X$ в соответствии с мерой $\mu_X(\cdot)$.

2) Используя методы оптимизации, найти $\Phi(H_N^k)$; рассчитать $f(\Phi(H_N^k))$.

3) Определить точку

$$x^{\Phi,k} \in \operatorname*{Arg\,max}_{x \in H_N^k} \rho\big(f(\Phi(x)), T_{k-1}{*}\big)$$

и соответствующее ей максимальное отклонение

$$\rho^{\Phi}{}_k = \rho(f(\Phi(x^{\Phi,k})), T_{k-1}{*}).$$

4) Построить новую базу аппроксимации

$$T_k = P\,\big(T_{k-1} \cup f(\Phi(x^{\Phi,k}))\big).$$

Объем выборки N является параметром метода. От его величины зависит свойства построенной аппроксимации и трудоемкость каждой итерации. Вопрос о выборе этого параметра обсуждается в разделе 5.

Заметим, что, как и в однофазном методе [13], метрическая точность аппроксимации, полученной на данной итерации рассматриваемого нами метода, достоверно не известна. Тем не менее, справедлива следующая теорема, характеризующая сходимость метода с точки зрения величины $\rho^{\Phi}{}_k$.

Теорема 1 [14]. *Для любого $\varepsilon>0$ существует минимальный номер $K(\varepsilon)$ такой, что $\rho^{\Phi}{}_{K(\varepsilon)+1} < \varepsilon$.*

3. Скорость сходимости двухфазного метода

Когда речь идет об аппроксимации вполне ограниченного множества в метрических пространствах, традиционно [15] ставится задача построения ε-сети, т.е. такого конечного подмножества пространства, что любая точка аппроксимируемого множества расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки сети. Скорость сходимости в этом случае определяется характером увеличения точности (уменьшения величины ε) от мощности ε-сети (т.е. числа элементов в ней). При этом свойства сходимости методов аппроксимации ε-сетями множества A определяются его метрическими свойствами, в частности, минимальным числом точек ε-сети (ε-энтропией).

Для множества $A \subset R^m$ введем следующие обозначения [15]. Пусть $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ – минимальное число точек ε-сети для A, $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ – минимальное число множеств диаметра не более чем 2ε, покрывающих множество A. Различие между $\mathfrak{N}^R$ и $\mathfrak{N}$ определяется тем, что при подсчете величины $\mathfrak{N}^R$ точки сети (центры покрывающих шаров радиуса ε) всегда принадлежат метрическому пространству, в котором находится A, а для расчета величины $\mathfrak{N}$ это требование не является обязательным. В нашем случае, когда A рассматривается как подмножество метрического пространства R^m, величины

$\mathfrak{N}^R$ и $\mathfrak{N}$ совпадают. Множество называется *ε-различимым*, если любые две его различные точки находятся на расстоянии, большем чем ε. Обозначим через $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A.

Будем в дальнейшем через log обозначать $\log_2$. Величина $\log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ называется *ε-энтропией*. Величина $\log \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ называется *относительной ε-энтропией*. Величина $\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ называется *ε-емкостью* A [15].

Отметим некоторые свойства функций $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ как функций ε [15]: они являются невозрастающими и непрерывными справа, причем

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}(\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\varepsilon, A).$$

Нижняя и верхняя метрическая размерности (или размерности Минковского) вполне ограниченного множества A определяются [15] как

$$\underline{\mathrm{dm}}\, A := \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)}{-\log\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)}{-\log\varepsilon},$$

$$\overline{\mathrm{dm}}\, A := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)}{-\log\varepsilon} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)}{-\log\varepsilon}$$

При равенстве верхней и нижней метрических размерностей говорят о метрической размерности $\mathrm{dm}\, A$.

Очевидно, что для конечного множества A справедливо $\mathrm{dm}\, A=0$. Метрическая размерность счетного множества может быть отличной от нуля. Метрическая размерность может быть дробным числом. Для любого ограниченного множества в R^m справедливо $\overline{\mathrm{dm}}\, A \le m$, для любого ограниченного множества в R^m , содержащего внутреннюю точку, справедливо $\mathrm{dm}\, A=m$ [15].

Таким образом, оптимальная асимптотическая скорость сходимости методов аппроксимации множества A метрическими сетями определяется ее верхней метрической размерностью $\overline{\mathrm{dm}}\, A$.

Оценим число итераций, за которое рассматриваемый нами двухфазный метод достигнет заранее заданной точности $\varepsilon>0$. Обозначим

$$\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A) := \liminf_{\nu\to 0+} \mathfrak{M}(\varepsilon - \nu, A).$$

Пусть в качестве оценки метрической точности аппроксимации двухфазным методом принята величина $\rho^{\Phi}{}_k$. Скорость сходимости рассматриваемого метода будем исследовать по методике [12, 13].

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon>0$. *Тогда*

$$K(\varepsilon) \le \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi}) \le \mathfrak{M}(\rho^{\Phi}{}_{K(\varepsilon)+1}, Y^{\Phi}),$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. На каждой итерации алгоритма $k<K(\varepsilon)$ к базе T_k добавляется точка, удаленная от $T_k{}^*$ на расстояние $\rho^{\Phi}{}_k$, не меньшее, чем ε. Эта точка будет удалена и от T_k на расстояние не меньшее, чем $\rho^{\Phi}{}_k \ge \varepsilon$.

Поскольку все добавляемые точки принадлежат Y^{Φ}, то их количество ограничено $\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi})$, откуда и следует первое утверждение теоремы. Остается заметить, что $\rho_{K(\varepsilon)+1} < \varepsilon$. ■

Таким образом, верхняя оценка скорости сходимости двухфазного метода определяется метрическими свойствами множества Y^{Φ}: максимальной мощностью его ε-различимого подмножества (ε-емкостью).

Рассмотрим теперь асимптотические оценки скорости сходимости.

Следствие 1. *Существуют* $\varepsilon_1>0$ *и* $c>0$ *такие, что при* $\varepsilon \le \varepsilon_1$ *справедливо*

$$K(\varepsilon) \le c/\varepsilon^m,$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. Согласно [15], для ограниченного множества Y^{Φ} в R^m существуют $\varepsilon_2>0$ и $c_1>0$ такие, что при $\varepsilon \le \varepsilon_2$ справедливо $\mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi}) \le c_1/\varepsilon^m$, откуда, с учетом свойства $\mathfrak{M}(2\varepsilon, Y^{\Phi}) \le \mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi})$ и теоремы 2 получаем утверждение следствия. ■

Множество измеримо по Жордану, если оно измеримо по Лебегу и граница его имеет меру ноль. Для измеримых по Жордану множеств определим его объем $\mathrm{Vol}(\cdot)$, равный его мере Лебега. В случае если $\mathrm{Vol}(Y^{\Phi})$ существует и отличен от нуля, метрическая размерность этого множества равна m, что и определяет скорость сходимости двухфазного метода. Поведение же энтропийных характеристик, а, следовательно, и константы в оценках скорости сходимости рассматриваемого метода, зависят от метрики пространства. Рассмотрим сначала наиболее простой случай метрики Чебышева. Для положительных функций $h(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ обозначим $h \sim g$, если $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (f/g) = 1$.

Следствие 2. *Пусть* $d_Y(y', y'') := \max\limits_i \{ |y_i' - y_i''| \}$, $y', y'' \in R^m$, *и пусть существует* $\mathrm{Vol}(Y^{\Phi})>0$. *Тогда справедливо*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} K(\varepsilon)\varepsilon^m \le 2^m \mathrm{Vol}(Y^{\Phi}),$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. В [15] показано, что при условиях теоремы

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, Y^{\Phi}) \sim \mathrm{Vol}(Y^{\Phi}) \frac{1}{\varepsilon^m}.$$

Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 2. ■

Рассмотрим евклидову метрику. Обозначим через $\delta(m)$ максимальную плотность укладки пространства R^m евклидовыми шарами [16] и пусть π_m – объем единичного шара в R^m.

Следствие 3. *Пусть* $d_Y(y', y'') := (\sum_i (y_i' - y'')^2)^{1/2}$, $y', y'' \in R^m$, *и пусть существует* $\mathrm{Vol}(Y^\Phi)>0$. *Тогда справедливо*

$$\limsup_{\varepsilon \to +0} K(\varepsilon)\varepsilon^m \le \frac{2^m \delta(m)}{\pi_m} \mathrm{Vol}(Y^\Phi),$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. По теореме 9 из [15] в рассматриваемом случае справедливо

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, Y^\Phi) \sim \delta(m) \frac{\mathrm{Vol}(Y^\Phi)}{\pi_m} \frac{1}{\varepsilon^m}.$$

Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 2. ■

Величина $\delta(m)/\pi_m$, входящая в оценку следствия 3, носит название центральной плотности укладки пространства R^m евклидовыми шарами. При $m \le 23$ ее величина меньше единицы (при $m=2$ она меньше 0.29, при $m=3$ – 0.19, ..., при $m=7$ – 0.07) [17]. Поэтому при $m \le 23$ оценка следствия 3 для евклидовой метрики лучше оценки следствия 2 для метрики Чебышева.

Сравним теперь результат следствия 2 для метрики Чебышева с аналогичным результатом по скорости сходимости однофазного метода [13]:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} K(\varepsilon)\varepsilon^m \le \mathrm{Vol}(Y) 2^m.$$

Если $\mathrm{Vol}(Y^\Phi)$ много меньше $\mathrm{Vol}(Y)$, то оценка скорости сходимости по числу итераций для двухфазного метода оказывается значительно лучшей.

Кратко остановимся на случае, когда $\mathrm{Vol}(Y^\Phi)$ существует и равен нулю. Вообще говоря, следствия 1-3 дают достаточно грубую оценку скорости сходимости рассматриваемого метода. Дело в том, что множество Y^Φ как образ множества Y при нелинейном отображения $f\Phi$, приближающем решения к границе Парето или даже выводящем на него (случай $Y^\Phi \equiv P(Y)$), может иметь метрические свойства, существенно отличные от метрических свойств пространства R^m. Например, нетрудно видеть, что метрическая размерность границы компактного выпуклого множества Y не превосходит величины m-1. Поскольку $P(Y) \subset \partial Y$, то в случае, когда $Y^\Phi \equiv P(Y)$, скорость сходимости двухфазного метода будет определяться следующей теоремой 3 (при $\overline{\mathrm{dm}}\, Y^\Phi \le m$-1).

Теорема 2 показывает, что скорость сходимости метода определяется метрическими свойствами именно множества Y^Φ (его ε-емкостью), а не окружающего его пространства. Следующая теорема показывает, что асимптотическую скорость сходимости рассматриваемого метода можно охарактеризовать через верхнюю метрическую размерность множества Y^Φ.

Лемма 1 [11]. *Для любого ограниченного множества* A *и* $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, A$ *справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)\varepsilon^{\alpha} = 0 .$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$. *Тогда справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha} = 0 ,$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 1.*

Доказательство. По теореме 2 имеем

$$K(\varepsilon) \le \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi}) ,$$

откуда с учетом результатов теоремы 2 и леммы 1 получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha} \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y)\varepsilon^{\alpha} = 0 . \ \blacksquare$$

Заметим, что результат теоремы 3 нельзя интерпретировать как существование константы c>0 такой, что $K(\varepsilon) \le c\varepsilon^{-\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}}$, так как придел в утверждении теоремы при $\alpha = \overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$ может не существовать. Но если говорить несколько упрощенно, теорема 3 показывает, что рассматриваемый метод сходится по числу итераций k со скоростью не медленнее, чем $O(k^{-1/\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}})$. Например, для случая выпуклого множества Y и $Y^{\Phi} \equiv P(Y)$ этот результат означает сходимость двухфазного метода по числу итераций k со скоростью не медленнее, чем $O(k^{-1/(m-1)})$.

Для конечных множеств метрическая размерность равна нулю. Бывают также случаи, когда аппроксимируемые бесконечные множества имеют центры с экспоненциально быстрым сгущением, метрическая размерность равна нулю, но $\mathfrak{N}(\varepsilon, \cdot) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, В таких случаях метрическая размерность недостаточно хорошо описывает энтропийные свойства аппроксимируемого множества, однако результат теоремы 2 сохраняет свою силу. В частности, в случае, когда $\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$=0, результат этой теоремы указывает на сверхполиномиальную (например, экспоненциальную) сходимость. Более подробное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

4. Эффективность двухфазного метода

Понятие эффективности метода аппроксимации отражает сравнение его с другими методами, выполняющими задачу аппроксимации для тех же объектов. Сравнение может осуществляться как по показателям трудоемкости аппроксимации до одной и той же точности, так и по показателям итоговой сложности конструируемого аппроксимирующего объекта. Сравнение может осуществляться как с гипотетическими «наилучшими» методами среди всех возможных, так и с методами, использующими получение информации об объекте аппроксимации из того же класса свойств, что и метод, эффективность которого исследуется.

Сравним аппроксимацию множества Y^*, построенную с помощью рассматриваемого адаптивного двухфазного метода, с аппроксимацией, построенной с помощью любого другого (гипотетического) метода построения метрических ε-сетей для множества Y^{Φ}. Пусть S_ε есть произвольная ε-сеть для Y^{Φ}. Обозначим через card (T) мощность (количество элементов) множества T.

Определение 1. Под *эффективностью* двухфазного метода *по мощности ε-сети* будем понимать величину

$$\mathrm{H}(\varepsilon) := \frac{\operatorname{card} S_\varepsilon}{\operatorname{card} T_{K(\varepsilon)}},$$

где величина $K(\varepsilon)$ определена в теореме 1.

Теорема 4.

$$\mathrm{H}(\varepsilon) \geq \frac{\mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi})}{\operatorname{card} T_0 + \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi})}.$$

Доказательство. По определению $\operatorname{card} S_\varepsilon \geq \mathfrak{N}\left(\varepsilon, Y^{\Phi}\right)$. По построению card $T_{K(\varepsilon)} \leq K(\varepsilon)$ + card T_0, откуда, с учетом теоремы 2, получаем утверждение теоремы. ■

Из теоремы 4 следует, что эффективность двухфазного метода определяется отношением ε-энтропии и ε-емкости множества Y^{Φ}. Поведение этих метрических свойств множеств может быть достаточно нерегулярным. Для общего случая справедлив результат следующей теоремы.

Лемма 2 [11]. *Для любого ограниченного A справедливо*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)}{-\log \varepsilon} = \overline{\operatorname{dm}}\, A.$$

Теорема 5. *Пусть* $\alpha > \overline{\operatorname{dm}}\, Y^{\Phi} - \underline{\operatorname{dm}}\, Y^{\Phi}$. *Тогда справедливо*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{H}(\varepsilon) \varepsilon^{-\alpha} = \infty,$$

Доказательство. По теореме 4 имеем

$$\mathrm{H}(\varepsilon) \geq \frac{\mathfrak{N}\left(\varepsilon, Y^{\Phi}\right)}{\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi}) + \operatorname{card} T_0}.$$

Обозначим $\delta := [\alpha - (\overline{\operatorname{dm}}\, Y^{\Phi} - \underline{\operatorname{dm}}\, Y^{\Phi})] / 4$. По определению верхней и нижней размерности и по лемме 2 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливо

$$\frac{\log \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi})}{-\log \varepsilon} \leq \overline{\operatorname{dm}}\, Y^{\Phi} + \delta, \quad \frac{\log \mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi})}{-\log \varepsilon} \geq \underline{\operatorname{dm}}\, Y^{\Phi} - \delta.$$

Поэтому, обозначая $\exp(x) := 2^x$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{H}(\varepsilon)\varepsilon^{-\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\left(\frac{\log \mathrm{H}(\varepsilon)}{-\log(\varepsilon)} + \alpha\right)(-\log(\varepsilon))\right) \geq$$

$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\left(\alpha + \frac{\log \mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi}) - \log \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi})}{-\log(\varepsilon)}\right)(-\log(\varepsilon))\right) \geq$$

$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\left(\alpha + (\underline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi} - \delta) - (\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi} + \delta)\right)(-\log(\varepsilon))\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\frac{\alpha - (\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi} - \underline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi})}{2}(-\log(\varepsilon))\right) \geq$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{\alpha - (\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi} - \underline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi})}{2}} = \infty . \ ■$$

Из теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть существует* $\mathrm{dm}\, Y^{\Phi}$. *Тогда для любых* $\alpha>0$ *и* $C>0$ *существует* $\varepsilon_0>0$ *такое, что при* $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ *справедливо* $\mathrm{H}(\varepsilon)\geq C\varepsilon^{\alpha}$.

Таким образом, при существовании метрической размерности $\mathrm{dm}\, Y^{\Phi} = \overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi} = \underline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$ эффективность метода по числу вершин $\mathrm{H}(\varepsilon)$ падает с уменьшением ε медленнее, чем ε^{α} для любого малого положительного α. При дополнительных предположениях о регулярности поведения энтропийных характеристик удается получить более сильные результаты.

Следствие 5. *Пусть существует* $\mathrm{dm}\, Y^{\Phi}$ *и константы* $C_1, C_2 >0$ *такие что* $C_1/\varepsilon^{\mathrm{dm}\, Y^{\Phi}} \leq \mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi}) \leq C_2/\varepsilon^{\mathrm{dm}\, Y^{\Phi}}$. *Тогда справедливо*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathrm{H}(\varepsilon) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{dm}\, Y^{\Phi}} \frac{C_1}{C_2} .$$

Доказательство. По теореме 4 имеем

$$\mathrm{H}(\varepsilon) \geq \frac{\mathfrak{N}\left(\varepsilon, Y^{\Phi}\right)}{\widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi}) + \mathrm{card}\, T_0} .$$

В силу свойств монотонности для любого $\gamma>0$ справедливо $\widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi}) \leq \mathfrak{M}(\gamma\varepsilon, Y^{\Phi}) \leq \mathfrak{N}(\gamma\varepsilon/2, Y^{\Phi})$. Отсюда, в силу произвольности γ, получаем утверждение следствия. ■

Таким образом, в этом случае эффективность двухфазного метода всегда положительна и больше некоторой пороговой величины поэтому имеет смысл говорить об *асимптотической эффективности* изучаемого метода по мощности сети, т.е. о величине $\liminf_{\varepsilon\to +0} \mathrm{H}(\varepsilon)$.

Согласно [15] условия следствия 5 выполняются для Y^{Φ}, имеющего внутреннюю точку в R^m. В этом случае $\mathrm{dm}\, Y^{\Phi} = m$. Можно также показать, что условия следствия 5 выполняются для границы выпуклого телесного множества Y. В этом случае $\mathrm{dm}\,\partial Y = m$-1. Поскольку $P(Y)\subset\partial Y$, то в случае, когда $Y^{\Phi}\equiv P(Y)$ и содержит внутреннюю точку, асимптотическая эффективность двухфазного метода будет определяться следствием 5 с $\mathrm{dm}\, Y^{\Phi} = m$-1.

В случае наличия дополнительной информации об асимптотическом поведении энтропийных характеристик, может быть получена конкретная оценка асимптотической эффективности двухфазного метода.

Следствие 6. *Пусть* $d_Y(y', y'') := \max\limits_i \{ | y_i' - y_i'' | \}$, $y', y'' \in R^m$, *и пусть существует* $\mathrm{Vol}(Y^{\Phi})>0$. *Тогда*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathrm{H}(\varepsilon) \ge \frac{1}{2^m}.$$

Доказательство. В [15] показано, что в рассматриваемом случае

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, Y^{\Phi}) \sim \mathrm{Vol}(Y^{\Phi})\frac{1}{\varepsilon^m}, \quad \mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi}) \sim \mathrm{Vol}(Y^{\Phi})\frac{1}{\varepsilon^m}.$$

Далее рассуждаем как при доказательстве следствия 5. ■

Следствие 7. *Пусть* $d_Y(y', y'') := \left(\sum\limits_i (y_i' - y'')^2 \right)^{1/2}$, $y', y'' \in R^m$, *и пусть существует* $\mathrm{Vol}(Y^{\Phi})>0$. *Тогда*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathrm{H}(\varepsilon) \ge \frac{\vartheta(m)}{\delta(m)}\frac{1}{2^m},$$

где $\vartheta(m)$ *– минимальная плотность покрытия, а* $\delta(m)$ *– максимальная плотность укладки пространства* R^m *шарами* [16].

Доказательство. По теореме 9 из [15] в рассматриваемом случае справедливо

$$\mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi}) \sim \vartheta(m)\frac{\mathrm{Vol}(Y^{\Phi})}{\pi_m}\frac{1}{\varepsilon^m}, \ \mathfrak{M}(2\varepsilon, Y^{\Phi}) \sim \delta(m)\frac{\mathrm{Vol}(Y^{\Phi})}{\pi_m}\frac{1}{\varepsilon^m},$$

где π_m – объем единичного шара в R^m. Далее рассуждаем, как при доказательстве следствия 5. ■

Из неравенства Роджерса (теоремы 7.1 и 8.1 из [16]) $\vartheta(m)/\delta(m)\ge[2m/(m+1)]^{m/2}$ вытекает следующая оценка асимптотической эффективности

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathrm{H}(\varepsilon) \ge \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m/2} \frac{1}{2^{m/2}}.$$

При больших m получаем

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathrm{H}(\varepsilon) \ge \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{1}{2^{m/2}}, \ m >>1.$$

Из следствия 7 и оценок на плотности, например [16], следует, что эффективность метода при размерности m=2 не меньше приблизительно 0.33, при m=3 – 0.23, при m=4 – 0.16, при m=5 – 0.11. Как показывают следствия 6 и 7, асимптотическая эффективность двухфазного метода снижается с ростом размерности множества Y^{Φ}. Вместе с тем, порядок скорости сходимости остается оптимальным и определяется (теорема 3) метрической размерностью множества Y^{Φ}.

5. Статистическое оценивание качества аппроксимации в двухфазном методе

Рассмотрим вопросы скорости сходимости и эффективности двухфазного метода при статистическом подходе к оценке качества аппроксимации множества Y^*. Этот подход может быть строго обоснован при некоторых дополнительных предположениях о свойствах применяемого в двухфазном методе отображения Ф.

Пусть отображение Ф: $X \to X$ такое, что $P(Y) \subset Y^{\Phi}$. Такое отображение будем называть *парето-поглощающим*. Заметим в частности, что Ф является парето-поглощающим, если для любого $x \in P(X)$ справедливо $\Phi(x)=x$. В дальнейшем исследовании мы будем исходить из того, что Ф – парето-поглощающее отображение. В силу компактности Y для такого отображения справедливо свойство $Y^* \equiv (Y^{\Phi})^*$ [14].

Статистическое оценивание качества аппроксимации осуществляется на основе выборок случайных точек множества допустимых решений X, полученных на итерациях метода в соответствии с вероятностной мерой μ_X. Используемая концепция была введена и обоснована в работах [11, 12] для оценки качества аппроксимации неявно заданных множеств в теоретическом методе Глубоких Ям. В этом подходе статистическая оценка точности базируется на понятии *полноты аппроксимации*. В [10] это понятие применено к задаче аппроксимации ОЭП. В [12] рассматриваемый подход был использован при исследовании однофазного метода, а в [14] обобщен на случай двухфазного метода. Приведем его основные положения.

Пусть на борелевской σ-алгебре множества решений $\mathscr{B}(X)$ задана вероятностная мера μ_X, $\mu_X(X)=1$.

Определим условие, необходимое для исследования двухфазного метода при статистическом подходе к оценке качества аппроксимации множества Y^* [14].

Для множества $V \subset R^m$ обозначим через $(V)_{\varepsilon}$ его открытую ε-окрестность, т.е. множество

$$(V)_{\varepsilon} := \{y \in R^m \colon \exists v \in V,\ d_Y(v, y) < \varepsilon\}.$$

Условие (**)

Будем говорить, что для отображений f и Ф выполняется условие (**), если для любого конечного множества T из Y^{Φ} и для любого ε>0 справедливо

$\Phi^{-1}(f^{-1}((T^*)_\varepsilon \cap Y^\Phi)) \in \mathscr{B}(X)$.

Пример парето-поглощающего отображения, для которого выполняется условие (**), приводится в [14]. В дальнейшем в данном разделе будем считать, что условие (**) выполнено.

Рассмотрим некоторую базу аппроксимации T из Y^Φ (т.е. конечное подмножество Y^Φ). Пусть задано некоторое $\varepsilon>0$. Рассмотрим вероятность того, что критериальная точка, соответствующая образу решения $x\in X$ при отображении Φ, находится не далее, чем на расстоянии ε от ОЭП базы аппроксимации T. Таким образом нас будут интересовать вероятность того, что из $x\in X$ следует $f(\Phi(x))\in(T^*)_\varepsilon$. Эту величину можно рассматривать как вероятность (по мере μ_X на множестве решений) того, что из $y\in Y^*$ следует $y\in(T^*)_\varepsilon$, и считать характеристикой полноты аппроксимации Y^*.

Определение 2. Для $\varepsilon>0$ величину

$$\eta^\Phi(\varepsilon) := \mu_X(\Phi^{-1}[f^{-1}((T^*)_\varepsilon \cap Y^\Phi)])$$

будем называть *полнотой аппроксимации* Y^* множеством $(T^*)_\varepsilon$.

Таким образом, $\eta^\Phi(\varepsilon)$ как функция от ε есть функция распределения случайной величины, равной расстоянию от образа $f\Phi$ случайной точки из X до множества T^* – ОЭП базы покрытия T. При этом величина $1-\eta^\Phi(\varepsilon)$ есть ошибка I рода, т.е. вероятность (по мере на множестве решений) ошибки в гипотезе о том, что из $y\in Y^*$ следует $y\in(T^*)_\varepsilon$.

Для расчета полноты аппроксимации Y^* множеством $(T^*)_\varepsilon$ используем выборку $H_N \subset X$ объема N из случайных точек, полученных в соответствии с мерой $\mu_X(\cdot)$. Пусть случайная величина $\eta^{\Phi,N}(\varepsilon) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^\Phi(\varepsilon)$ – среднее случайных величин $\xi_1^\Phi(\varepsilon),\ldots, \xi_N^\Phi(\varepsilon)$, определенных следующим образом:

$$\xi_i^\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & f(\Phi(x_i)) \in (T^*)_\varepsilon \\ 0, & f(\Phi(x_i)) \notin (T^*)_\varepsilon \end{cases}, \quad x_i \in H_N .$$

Определение 3. Реализацию случайной величины $\eta^{\Phi,N}(\varepsilon)$ на некоторой выборке H объема N будем обозначать $\eta_H^{\Phi,N}(\varepsilon)$ и называть *выборочной полнотой аппроксимации* Y^* множеством $(T^*)_\varepsilon$.

Заметим, что в силу определения функция $\eta_H^{\Phi,N}(\varepsilon)$ является монотонной, поскольку $(T^*)_{\varepsilon'} \subseteq (T^*)_{\varepsilon''}$ при $\varepsilon' \le \varepsilon''$. Нас будут интересовать различные оценки полноты $\eta^\Phi(\varepsilon)$ через реализации $\eta_H^{\Phi,N}(\varepsilon)$ случайной функции $\eta^{\Phi,N}(\varepsilon)$ и их надежность.

Приведем теперь основную теорему методики построения надежных оценок полноты аппроксимации с помощью выборок, полученных в двухфазном методе.

Рассмотрим схему Бернулли [18, стр. 57] $<\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}>$ с N испытаниями, где $\Omega = \{\omega\colon \omega=(\xi_1^\Phi,\ldots, \xi_N^\Phi)\}$, $\mathscr{A} = \{A\colon A\subseteq\Omega\}$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^{\sum \xi_i^\Phi} q^{N-\sum \xi_i^\Phi}$, $p=\eta^\Phi(\varepsilon)$,

q=1-p. Для заданного δ>0 обозначим через **P** $(\eta^{\Phi}(\varepsilon) \geq \eta^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta)$ вероятность $\mathbf{P}(\{\omega: \eta^{\Phi}(\varepsilon) > \eta^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta\})$.

Определение 4. Для заданного δ>0 вероятность

$$\mathbf{P}(\eta^{\Phi}(\varepsilon) > \eta^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta)$$

будем называть *надежностью оценки* полноты $\eta^{\Phi}(\varepsilon)$ величиной $\eta^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta$.

Теорема 6 [14]. *Пусть задано* δ>0. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\eta^{\Phi}(\varepsilon) > \eta^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta) \geq \chi(\delta, N),$$

где $\chi(\delta, N) := 1 - \exp(-2N\delta^2)$.

Здесь и далее через $\exp(x)$ обозначена функция e^x.

Итак, согласно теореме 6 оценка полноты $\eta^{\Phi}(\varepsilon)$ случайной величиной $\eta^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta$ имеет надежность не меньше, чем $\chi(\delta, N)$. Реализация этой оценки на выборке H объема N будет иметь вид $\eta_H^{\Phi,N}(\varepsilon) - \delta$.

Заметим, что, увеличивая объем выборки N, можно сделать надежность оценки сколь угодно близкой к единице, а уменьшая величину δ, саму оценку можно сделать сколь угодно точной.

Обозначим η:=1–δ. Пусть для некоторой выборки H* имеем $\eta_{H^*}^{\Phi,N}(\varepsilon)$=1. Получаем в этом случае для H* реализацию выборочной оценки полноты в виде $\eta^{\Phi}(\varepsilon) > \eta$, где $0 \leq \eta < 1$, и надежность этой оценки не менее $\chi^*(\eta, N) = 1 - \exp(-2N(1-\eta)^2)$: $\mathbf{P}(\eta^{\Phi}(\varepsilon) > \eta) \geq \chi^*(\eta, N)$.

Определение 5. Величину $\chi^*(\eta, N)$ будем называть *предельной надежностью оценки полноты* $\eta^{\Phi}(\varepsilon)$ величиной η, $1 > \eta > 0$.

Поскольку в силу ограниченности Y^{Φ} для любой базы T всегда найдется такое $\varepsilon_{\max}$, для которого $Y^{\Phi} \subseteq (T^*)_{\varepsilon_{\max}}$, то значения функции $\eta_H^{\Phi,N}(\varepsilon)$, при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ для любой выборки H будут равняться единице. Оценка полноты аппроксимации Y* множеством $(T^*)_{\varepsilon_{\max}}$ в виде величины η будет в этом случае определяться надежностью, равной предельной надежности $\chi^*(\eta, N)$:

$$\mathbf{P}(\eta^{\Phi}((T^*)_{\varepsilon_{\max}}) > \eta) \geq \chi^*(\eta, N),$$

что и обосновывает определение этой величины как «предельная».

Заметим, что, увеличивая объем тестовой выборки N, можно для любой η сделать величину предельной надежности сколь угодно близкой к единице. С другой стороны, при фиксированном объеме выборки N оценки полноты аппроксимации величиной η становятся при приближении ее к 1 все менее надежными (величина предельной надежности $\chi^*(\eta, N)$ падает).

Итак, в случае выполнения условия (**), с учетом требований к качеству аппроксимации задачу построения аппроксимации ОЭП двухфазным методом можно сформулировать в следующем виде:

требуется для любых заданных величин ε и η, ε>0, 1>η>0, построить аппроксимацию множества Y* с *точностью* ε, т.е. в виде множества

$(T^*)_\varepsilon$, и *полнотой* η, т.е. со свойством $\eta^\Phi((T^*)_\varepsilon)\geq\eta$.
При этом предполагается, что выполнение требований по точности и полноте аппроксимации должно быть проверено с заданной *надежностью* χ, $1>\chi>0$. Например, для некоторой выборки H объема N, такого что $\chi \leq \chi^*(\eta, N)$, должно быть зафиксировано событие $\eta_H^{\Phi,N}((T^*)_\varepsilon)=1$.

Приведенная выше теорема 1 показывает, что двухфазный метод достигнет заданной величины $\rho^\Phi{}_k$ за конечное число шагов. Однако это свойство не учитывает полноту аппроксимации. Следующая теорема говорит о том, что аппроксимация, построенная двухфазным методом, будет достаточно близка к Y^* по полноте аппроксимации.

Пусть задана величина $\varepsilon>0$ и на итерации $K(\varepsilon)$ двухфазного метода построена аппроксимация $T_{K(\varepsilon)}{}^*$. Прежде всего найдем предельную надежность оценки полноты $\eta(T_{K(\varepsilon)}{}^*)$ величиной η, $0<\eta<1$.

Лемма 3 [14]. *Пусть для отображений f и Φ выполняется условие (**). Тогда для любых ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, надежность выборочной оценки полноты в виде $\eta^\Phi((T_{K(\varepsilon)}{}^*)_\varepsilon)>\eta$ не меньше $\chi^*(\eta, N)$.*

Следующая теорема утверждает, что для любых заданных величин ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, найдется номер итерации $K(\varepsilon, \eta)$, для которого задача построения аппроксимации множества Y^* с точностью ε, и полнотой η будет решена с заданным уровнем надежности. Напомним, что это справедливо для парето-поглощающих отображений [14].

Теорема 7 [14]. *Пусть для отображений f и Φ выполняется условие (**). Тогда для любых ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, существует минимальный номер $K(\varepsilon, \eta)$, $K(\varepsilon, \eta)\leq K(\varepsilon)$, такой, что надежность выборочной оценки полноты в виде $\eta^\Phi((T_{K(\varepsilon,\eta)}{}^*)_\varepsilon) > \eta$ не меньше $\chi^*(\eta, N)$.*

Заметим, что из определения величины $K(\varepsilon,\eta)$ не следует, что $\rho_{K(\varepsilon,\eta)+1} < \varepsilon$, т.к. условие $\eta^\Phi((T_{K(\varepsilon,\eta)}{}^*)_\varepsilon) > \eta$ не предполагает обязательно выполнения этого свойства. Однако, так как по определению величины $K(\varepsilon)$ фиксируется событие $\eta_H{}^{\Phi,N}((T_{K(\varepsilon)}{}^*)_\varepsilon) = 1$ то, как и указано в утверждении теоремы, выполняется $K(\varepsilon,\eta)\leq K(\varepsilon)$.

6. Скорость сходимости и эффективность двухфазного метода при статистическом оценивании качества аппроксимации

Прежде всего, оценим число итераций, за которое двухфазный метод сойдется при заданной полноте.

Теорема 8. *Пусть для отображений f и Φ выполняется условие (**). Тогда для любых ε,η, $\varepsilon>0$, $1>\eta> 0$, справедливо*

$$K(\varepsilon,\eta)\leq \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^\Phi) \leq \mathfrak{M}(\rho^\Phi{}_{K(\varepsilon)+1}, Y^\Phi),$$

где величина $K(\varepsilon,\eta)$ *определена в теореме 7.*

Доказательство. Из утверждения теоремы 7 следует, что $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$. Далее утверждение теоремы следует из теоремы 2. ■

Рассмотрим асимптотические оценки скорости сходимости для заданной полноты аппроксимации. Совершенно аналогично величине $K(\varepsilon)$ формулируются для величины $K(\varepsilon,\eta)$ утверждение следствий 1-3. Следующая теорема показывает, что асимптотическую скорость сходимости рассматриваемого метода при заданной полноте аппроксимации можно охарактеризовать через верхнюю метрическую размерность множества Y^{Φ}.

Теорема 9. *Пусть для отображений* f *и* Φ *выполняется условие (**). Тогда для любых* η, $1>\eta>0$, *и* α, $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$, *справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon,\eta)\varepsilon^{\alpha} = 0,$$

где величина $K(\varepsilon,\eta)$ *определена в теореме 7.*

Доказательство. Из утверждения теоремы 7 следует, что $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теоремы 3. ■

Следующая теорема характеризует эффективность двухфазного метода при статистическом подходе к оценке качества аппроксимации множества Y^*. Пусть S_ε есть произвольная ε-сеть для Y^{Φ}.

Теорема 10. *Пусть для отображений* f *и* Φ *выполняется условие (**). Пусть заданы произвольные* ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, *и величина* $K(\varepsilon,\eta)$ *определена как в теореме 7. Тогда*

$$\frac{\mathrm{card}\, S_\varepsilon}{\mathrm{card}\, T_{K(\varepsilon,\eta)}} \ge \frac{\mathfrak{N}(\varepsilon, Y^{\Phi})}{\mathrm{card}\, T_0 + \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y^{\Phi})}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 8 совершенно аналогично доказательству теоремы 4. ■

Совершенно аналогично величине $K(\varepsilon)$ формулируются для величины $K(\varepsilon,\eta)$ и утверждения теоремы 5 и следствий 4-7.

7. Заключение

Кратко сравним однофазный и двухфазный методы. Прежде всего, в этих методах используются разные условия остановки. В обоих рассматриваемых методах метрическая точность построенных аппроксимаций достоверно не известна. Согласно [13], для однофазного метода точность аппроксимации характеризуется величиной $\rho_k = \rho(f(x^k), T_{k-1}^*)$. Для двухфазного метода точность аппроксимации характеризуется величиной $\rho^{\Phi}{}_k = \rho(f(\Phi(x^{\Phi,k})), T_{k-1}^*)$, что позволяет лучше оценивать близость построенной аппроксимации к множеству Y^*. Далее, сложность аппроксимации (скорость сходимости по числу итераций) однофазным методом определяется объемом множества Y или, асимптотически, величиной $\overline{\mathrm{dm}}\, Y$. Сложность аппроксимации двухфазным методом определяется объемом множества Y^{Φ} или, асимптотически, величиной $\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$. Объем множества Y^{Φ} может быть существенно меньше объема Y (величина $\overline{\mathrm{dm}}\, Y^{\Phi}$ может быть существенно меньше величины $\overline{\mathrm{dm}}\, Y$). При этом, однако, среднее время нахождения образа $\Phi(\cdot)$, т.е. среднее время решения задачи оптимизации на итерациях двухфазного метода, может значительно превышать среднее время вычисления функции f на итерациях метода однофазного.

Список литературы

1. *Евтушенко Ю.Г. и Потапов М.А.* Методы численного решения многокритериальных задач. // Доклады Академии наук. 1986. Т. 291. С. 25-29.
2. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. М.: Радио и связь, 1992.
3. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997. – 239 с.
4. *Miettinen K.* Nonlinear multiobjective optimization. Boston: Kluwer, 1999.
5. *Lotov A., Bushenkov V., and Kamenev G.* Feasible Goals Method. Search for Smart Decisions. M.: Вычислительный центр РАН, 2001. – 239 с.
6. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. – 310 pp.
7. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М: Макс Пресс, 2008. – 197 с.
8. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2007. – 230 с.
9. *Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е.* Аппроксимация и визуализация Паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // Доклады Академии наук. 2002. Т.386. N 6. С. 738-741.
10. *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46. N 11. С. 2009-2023.
11. *Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л.* Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Матем. моделирование, 1992. N3, 105-118.
12. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001. Т. 41. N 11. С. 1751-1760.
13. *Каменев Г.К.* Исследование адаптивного однофазного метода аппроксимации многомерной границы Парето в нелинейных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009. Т. 49. N 12. С. 2103-2113.

14. *Березкин В.Е., Каменев Г.К.* Исследование сходимости двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. N 6. С. 990-998.
15. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. Е*-энтропия и *ε*-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.
16. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
17. *Conway J.H., Sloane N.J.A.* Sphere Packings, Lattices and Groups. Third Edition. Springer, 1999.
18. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М. «Наука». 1989.