УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ДВУХФАЗНЫХ МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ ОБОЛОЧКИ ЭДЖВОРТА-ПАРЕТО В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

©2011 г. В.Е. Березкин, Г.К. Каменев
(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)
e-mail: gkk@ccas.ru

Изучается сходимость двухфазных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП) в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации. Изучаемые методы основаны на итерационном пополнении конечного множества достижимых критериальных векторов (базы аппроксимации), ОЭП которого аппроксимирует искомое множество. Особенность двухфазных методов состоит в том, что критериальные образы случайно сгенерированных точек пространства решений приближаются к границе Парето на основе локальной оптимизации адаптивно выбираемых сверток критериев. Сходимость двухфазных методов доказана как для абстрактной формы алгоритма, так и для двухфазного метода, основанного на свертке Гермейера. Библ. 17.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, граница Парето, оболочка Эджворта-Парето, метод аппроксимации, двухфазный метод, сходимость, статистические оценки

1. Проблема аппроксимации границы Парето

Проблема аппроксимации границы Парето в задачах многокритериальной оптимизации является классической проблемой исследования операций [1-8] и имеет большое прикладное значение, поскольку на использовании информации о границе Парето основаны эффективные средства поддержки принятия решений при нескольких критериях. В частности, аппроксимация границы Парето является центральным этапом метода достижимых целей / диалоговых карт решений (МДЦ/ДКР), в котором выбор целевой точки базируется на компьютерной визуализации многомерной границы Парето, осуществляемой на основе предварительной аппроксимации множества достижимых критериальных векторов или его оболочки Эджворта-Парето (ОЭП) [4, 6, 7]. Благодаря такой визуализации лицо, принимающее решение, получает в наглядной форме знание о возможных значениях критериев и о замещениях одного критерия другим на границе Парето, что должно помочь сознательно выбрать целевую

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00599, 10-01-00199, 11-01-12136-офи-м-2011 и 12-01-00916), ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18.

точку.

Для случая выпуклых (в том числе линейных) систем задача визуализации многомерной границы Парето, являющейся границей выпуклого множества достижимых критериальных векторов, хорошо изучена и предложены эффективные методы аппроксимации этого множества в задачах с числом критериев от двух до семи [4, 6, 9]. В настоящей работе изучаются двухфазные методы аппроксимации ОЭП, предложенные в [16, 10] для нелинейных математических моделей, для которых ОЭП уже не обязательно является выпуклым множеством. Отметим, что в методах [16, 10] не делается предположений о знании (и даже наличии) констант Липшица для функций, используемых в изучаемых моделях.

Проблема, рассматриваемая в статье, математически формулируется следующим образом. Считается, что совокупность допустимых решений задана компактным множеством $X \subset R^n$, а критериальный вектор $y \in R^m$ – непрерывной вектор-функцией $f: R^n \to R^m$. Пусть желательно увеличение значений критериев. Тогда точка $y' \in R^m$ доминирует (по Парето) точку $y \in R^m$, если $y' \geq y$ и $y' \neq y$. При этом граница Парето (недоминируемая граница) $P(Y)$ множества достижимых критериальных векторов $Y := f(X)$ определяется как

$$P(Y) := \{y \in Y: \{ y' \in Y: y' \geq y, y' \neq y \} = \varnothing\}.$$

Решения, порождающие точки границы Парето, называются эффективными по Парето, а их множество обозначается через $P(X)$. Обзор различных подходов к аппроксимации границы Парето дан, например, в [10].

В данной статье изучается метод аппроксимации оболочки Эджворта-Парето множества Y, под которой понимается множество

$$Y^* := Y + R_-^m = \{y \in R^m : y = y_1 + y_2, y_1 \in Y, y_2 \in R_-^m\},$$

где R_-^m – неположительный конус R^m. Кроме точек, принадлежащих Y, множество Y^* содержит также и недостижимые точки, доминируемые точками множества Y. Важно (см., например, [8]), что $P(Y^*) = P(Y)$, причем Y^* является максимальным множеством R^m, обладающим этим свойством. Аппроксимация Y или Y^* вместо непосредственной аппроксимации границы Парето позволяет избежать проблем, связанных с неустойчивостью множества $P(Y)$ (см., например, [8]). Кроме того, аппроксимация ОЭП вместо множества Y позволяет упростить задачу визуализации границы Парето [4, 6, 7].

Двухфазные методы аппроксимации ОЭП возникли в результате развития стохастического метода [11] аппроксимации невыпуклых множеств, заданных нелинейными отображениями. Формулировка двухфазных методов, близкая к используемой в настоящей статье, дана в [16, 10]. В [14] получен ряд результатов по скорости сходимости двухфазных методов. В [15] подробно исследован однофазный метод, основанный на случайном поиске недоминируемых критериальных векторов. В данной статье эти результаты переносятся на двухфазные методы.

Рассматриваемые двухфазные методы основаны на итерационном пополнении конечного множества достижимых критериальных векторов (базы аппроксимации), ОЭП которого аппроксимирует множество Y^*. В статье рассматривается абстрактный (идеализированный) вариант двухфазного метода. Идеализация состоит, прежде всего, в том, что на каждой итерации построенная ранее база аппроксимации пополняется единственной точкой Y. Эта точка является наиболее удаленной от построенной аппроксимации среди случайного набора критериальных точек, полученного с использованием средств оптимизации.

Исследование свойств сходимости абстрактного варианта двухфазного метода построения ОЭП может быть основано на теоретическом методе Глубоких Ям [12], позволяющем получать эффективные оценки скорости сходимости для методов аппроксимации вполне ограниченных множеств. Такое исследование проводится в первой половине работы. Двухфазные методы допускают получение статистической оценки качества аппроксимации, позволяющей [11, 12] сформулировать правило остановки расчета и обосновать объем случайной выборки решений, получаемой на каждой итерации метода. Эти вопросы рассматриваются во второй половине работы.

2. Описание двухфазного метода

Приведем математическое описание абстрактного варианта двухфазного метода, в котором опущены технические детали, не используемые в теоретическом исследовании. Отличие двухфазных методов от однофазных состоит в наличие второй фазы – оптимизации случайно сгенерированных точек. Формально вторая фаза метода может быть описана в виде некоторого отображения Φ: $X \to X$, которое приближает образ случайно выбранной точки к недоминируемому множеству $P(Y)$. Это отображение может быть реализовано в виде алгоритма поиска локального экстремума (который в определенных случаях может являться глобальным) некоторой свертки критериев. Примеры отображений будут рассмотрены ниже. Обозначим $Y^{\Phi} := f(\Phi(X))$.

Пусть $d_X(\cdot,\cdot)$ и $d_Y(\cdot,\cdot)$ – метрики в R^n и R^m, соответственно. Пусть задана некоторая база аппроксимации T – конечное подмножество Y. Введем функцию отклонения точки y от ОЭП T^*, как

$$\rho(y, T^*) := \inf\{d_Y(y, t) : t \in T^*\}.$$

Пусть заданы: $\mu_X(\cdot)$, $\mu_X(X)=1$, – вероятностная мера на X, и N – объем контрольной выборки.

АБСТРАКТНЫЙ АДАПТИВНЫЙ ДВУХФАЗНЫЙ МЕТОД

Пусть заданы T_0 – конечное подмножество из Y (исходная база аппроксимации). Рассмотрим k-ую итерацию метода.

Итерация k:

Пусть имеется уже построенная база аппроксимации T_{k-1}. Тогда:

1) Сгенерировать выборку $H_N^k \subset X$ в соответствии с мерой $\mu_X(\cdot)$.

2) Используя методы оптимизации, найти $f(\Phi(H_N^k))$.

3) Определить точку

$$x^{\Phi,k} \in \operatorname*{Arg\,max}_{x \in H_N^k} \rho\big(f(\Phi(x)), T_{k-1}{*}\big)$$

и соответствующее ей максимальное отклонение

$$\rho^{\Phi}{}_{k} = \rho(f(\Phi(x^{\Phi,k})),\ T_{k\text{-}1}{*}).$$

4) Построить новую базу аппроксимации

$$T_k = P\ (T_{k\text{-}1} \cup f(\Phi(x^{\Phi,k}))).$$

Замечания

Описанный абстрактный метод отличается от двухфазных методов [16] следующими особенностями:

1) не уточняется реализация отображения Ф;

2) на шаге 4 база T_k в описанном в [16] методе определяется как $P\ (T_{k\text{-}1} \cup f(\Phi(H_N^k)))$, т.е. при ее построении используется не только точка $f(\Phi(x^{\Phi,k}))$, но и все множество $f(\Phi(H_N^k))$.

3) не описываются правила остановки.

Объем контрольной выборки N является параметром метода. От его величины зависит качество оценки точности аппроксимации и длительность каждой итерации.

3. Метрическая сходимость двухфазного метода

Заметим, что, как и в однофазном методе, точность аппроксимации, полученной на данной итерации рассматриваемого нами метода, достоверно не известна. Пусть в качестве оценки метрической точности принята величина $\rho^{\Phi}{}_{k}$. Покажем, что рассматриваемый метод достигнет заданной величины $\rho^{\Phi}{}_{k}$ за конечное число шагов.

Теорема 1. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует минимальный номер* $K(\varepsilon)$ *такой, что* $\rho^{\Phi}{}_{K(\varepsilon)+1} < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть это не так, т.е. для фиксированного $\varepsilon>0$ и всех k: $\rho^{\Phi}{}_{k} \geq \varepsilon$. Рассмотрим последовательность множеств $T_k{*}$. Множество $T_k{*} \cap Y$ для каждого k будет пополняться точкой $f(\Phi(x^{\Phi,k}))$ из Y, удаленной от этого множества на расстояние не меньше, чем ε. Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность точек, принадлежащих Y и отстоящих друг от друга на расстояние не меньше, чем ε. Это противоречит компактности Y. ■

4. Парето-приближающие отображения

4.1. Определение парето-приближающего отображения

Как уже говорилось, отличие двухфазных методов от однофазных состоит в использовании некоторого метода оптимизации случайно сгенерированных точек, абстрактно описанного в виде отображения Ф. Формально, однофазный метод является частным случаем двухфазного, при котором оптимизация не совершается, т.е. Ф является тождественным отображением. Основное преимущество двухфазного метода состоит в концентрации случайных точек вместо множества $f(X)$ в множестве $f(\Phi(X))$. Сформулируем условие, при котором такой подход к исследованию границы Парето является обоснованным.

Определение 1. Отображение Φ: $X \to X$ такое, что $P(Y) \subset Y^{\Phi}$, будем называть *парето-приближающим*.

Заметим в частности, что Φ является парето-приближающим, если для любого $x^{\circ} \in P(X)$ справедливо $\Phi(x^{\circ}) = x^{\circ}$.

Свойство 1. *Пусть* Φ *– парето-приближающее. Тогда* $Y^* \equiv (Y^{\Phi})^*$.

Эти свойства непосредственно вытекают из определения парето-приближающего отображения и того, что $Y = f(X)$ и Φ: $X \to X$.

Из свойства 1 вытекает, что для парето-приближающих отображений двухфазный метод может, формально, рассматриваться как однофазный метод, в котором критериальное отображение f заменено на композицию отображений $f\Phi$. Следует, однако, помнить, что эта формальная композиция отображений по существу состоит из компонентов с принципиально различными свойствами: расчет вектора функции f типа «черный ящик» и алгоритма локальной оптимизации Φ.

Реализация отображения Φ может быть основана на различных идеях. В [16] предлагается строить такое отображение на основе локальной оптимизации некоторой скалярной функции, представляющую собой свертку $\varphi(f(x))$ компонент вектора критериев $f(x)$, зависящую от исходной точки $x^0 \in H_N$. Отметим, что свертка критериев оптимизации $\varphi(y)$ может быть выбрана в соответствии с возможностями и целями пользователя. В результате применения градиентной процедуры можно найти локальный экстремум свертки, который обозначим $x' \in X$. Заметим, что он зависит от начальной точки $x^0 \in H_N$. Полагаем $x' = \Phi(x^0)$. Приведем примеры наиболее характерных сверток.

4.2. Использование свертки Чебышева

В [16] было предложено минимизировать свертку, основанную на функции Чебышева [3]:

$$\varphi(f(x)) = \max\,\{\alpha_j\,(y_j^* - f_j(x)),\ j=1,2,..,m\},$$

где α_j – параметры, y_j^* – «идеальная» точка. Предполагается, что $f_j(x) \le y_j^*$ для всех $x \in X$. Величины α_j определяются исходной точкой $x^0 \in H_N$:

$$\alpha_j = [y_j^* - f_j(x^0)]^{-1},\ j=1,2,..,m.$$

Если же $f_j(x^0) = y_j^*$, то оптимизация точки x^0 не производится. Благодаря индивидуальному выбору величин α_j происходит движение текущей точки из

$f(x^0)$ в направлении точки y_j*, что способствует ее смещению в сторону границы Парето текущей аппроксимации.

4.3. Использование свертки Гермейера

Реализация отображения Φ может быть основана на локальной максимизации свертки, предложенной Ю.Б. Гермейером [17], а именно

$$\varphi(f(x))=\min\{\frac{(f_i(x)-y_i^Z)}{(f_i(x^0)-y_i^Z)},\ i=1,2,..,m\},$$

где x^0 – начальная точка оптимизации, y^Z – «нулевая» точка. Предполагается, что $f(x^0)>y^Z$ для всех $x^0\in X$. Благодаря индивидуальному выбору весов $(f_i(x^0)-y_i^Z)$ происходит движение текущей точки из $f(x^k)$ в направлении, противоположном y^Z.

5. Статистическое оценивание точности аппроксимации в двухфазном методе

Рассмотрим статистический подход к оценке точности аппроксимации множества Y*, получаемой в двухфазном методе. Статистическое оценивание точности может осуществляться на основе выборок случайных точек множества допустимых решений X, полученных на итерациях метода в соответствии с вероятностной мерой μ_X. Используемая концепция была введена и обоснована в работах [11, 12] для оценки качества аппроксимации неявно заданных множеств в теоретическом методе Глубоких Ям. В этом подходе статистическая оценка точности базируется на понятии *полноты аппроксимации*. В [10] это понятие применено к задаче аппроксимации ОЭП. В [12] рассматриваемый подход был использован при исследовании однофазного метода. Обобщим этот статистический способ оценки точности аппроксимации на случай двухфазного метода.

Пусть на борелевской σ-алгебре множества решений $\mathscr{B}(X)$ задана вероятностная мера μ_X, $\mu_X(X)=1$.

Определение 2. Для $U\subset R^m$ такого, что $\Phi^{-1}[f^{-1}(U\cap Y^\Phi)]\in\mathscr{B}(X)$, величину

$$\eta^\Phi(U):=\mu_X(\Phi^{-1}[f^{-1}(U\cap Y^\Phi)])$$

будем называть *полнотой аппроксимации* Y* множеством U, *порождаемой отображением* Φ.

Для расчета полноты аппроксимации Y* множеством $U\subset R^m$ с измеримым прообразом $\Phi^{-1}(f^{-1}(U\cap Y^\Phi))$, используем выборку $H_N\subset X$ объема N из случайных точек, полученных в соответствии с мерой $\mu_X(\cdot)$. Пусть случайная величина $\eta^{\Phi,N}(U)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^\Phi$ – среднее случайных величин $\xi_1^\Phi,\ldots,$ ξ_N^Φ, определенных следующим образом:

$$\xi_i^{\Phi} = \begin{cases} 1, & f(\Phi(x_i)) \in U \\ 0, & f(\Phi(x_i)) \notin U \end{cases}, \ x_i \in H_N.$$

Определение 3. Реализацию величины $\eta^{\Phi,N}(U)$ на выборке H будем обозначать $\eta_H{}^{\Phi,N}(U)$ и называть *выборочной полнотой аппроксимации* Y^* множеством U, *порождаемой отображением* Φ.

Рассмотрим схему Бернулли [13, стр. 57] $<\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}>$ с N испытаниями, где $\Omega = \{\omega\colon \omega=(\xi_1{}^{\Phi},\ldots, \xi_N{}^{\Phi})\}$, $\mathscr{A} = \{A\colon A \subseteq \Omega\}$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^{\sum \xi_i^{\Phi}} q^{N-\sum \xi_i^{\Phi}}$, $p=\eta^{\Phi}(U)$, $q=1-p$. Обозначим через $\mathbf{P}\ (\eta^{\Phi}(U) \geq \eta^{\Phi,N}(U) - \delta)$ вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega:\ \eta^{\Phi}(U) > \eta^{\Phi,N}(U) - \delta\}).$$

Приведем теперь основную теорему методики оценки качества аппроксимации с помощью выборочной функции полноты в двухфазном методе.

Теорема 2. *Пусть множество* $\Phi^{-1}(f^{-1}(U \cap Y^{\Phi}))$ *измеримо и* $\delta>0$, *тогда*

$$\mathbf{P}(\eta^{\Phi}(U) > \eta^{\Phi,N}(U) - \delta) \geq 1 - \exp(-2N\delta^2).$$

Доказательство. Для математического ожидания и дисперсии взвешенной суммы бернуллиевских случайных величин ξ_i^{Φ}, т.е. случайной величины $\eta^{\Phi,N}(U)$, справедливо [13]:

$$\mathbf{M}(\eta^{\Phi,N}(U)) = p,\ \ \mathbf{D}(\eta^{\Phi,N}(U)) = pq/N.$$

Легко заметить, что в силу того, что $0 \leq p \leq 1$,

$$\mathbf{D}(\eta^{\Phi,N}(U)) \leq 1/(4N).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева [13, стр. 80] справедливо

$$\mathbf{P}(\eta^{\Phi,N}(U) - \eta^{\Phi}(U) \geq \delta) \leq \exp(-2N\delta^2),$$

и для $0 < \delta \leq \eta^{\Phi,N}(U)$ получаем искомое неравенство. ■

Определение 4. Случайную величину

$$\eta^{\Phi,N}(U) - \delta$$

будем называть *оценкой полноты* $\eta^{\Phi}(U)$.

Определение 5. Вероятность

$$\mathbf{P}(\eta^{\Phi}(U)>\eta^{\Phi,N}(U)-\delta)$$

будем называть *надежностью оценки полноты* $\eta^{\Phi}(U)$.

Заметим, что, увеличивая объем выборки N, можно сделать надежность оценки сколь угодно близкой к единице, а, уменьшая величину δ, саму оценку можно сделать сколь угодно точной.

Определение 6. Реализацию случайной величины $\eta^{\Phi,N}(U) - \delta$ на выборке H в виде

$$\eta_H{}^{\Phi,N}(U) - \delta$$

будем называть *выборочной оценкой полноты* $\eta^{\Phi}(U)$.

По теореме 2 надежность такой выборочной оценки не меньше

$$\chi(\delta, N) = 1 - \exp(-2N\delta^2)$$

и зависит не от самой выборки, а только от ее объема.

Обозначим $\eta:=1-\delta$, тогда неравенство теоремы 2 для обобщенной полноты можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{P}^{\Phi}\mathbf{(}\eta^{\Phi}(U) > \eta^{\Phi,N}(U) + \eta-1\mathbf{)} \geq 1 - \exp(-2N(1-\eta)^2).$$

Пусть для некоторой выборки H^* имеем $\eta_{H^*}{}^{\Phi,N}(U)=1$. Получаем в этом случае для H^* выборочную оценку полноты в виде

$$\eta^{\Phi}(U)>\eta,$$

где $0\leq\eta<1$, и надежность этой оценки не менее $\chi^*(\eta, N) = 1 - \exp(-2N(1-\eta)^2)$:

$$\mathbf{P(}\eta^{\Phi}(U)>\eta\mathbf{)}\geq \chi^*(\eta, N).$$

Определение 7. Величину $\chi^*(\eta, N)$ будем называть *предельной надежностью оценки полноты* $\eta^{\Phi}(U)$ величиной η, $1 > \eta > 0$.

Заметим, что, увеличивая объем тестовой выборки N, можно для любой η сделать величину предельной надежности сколь угодно близкой к единице.

Для исследования двухфазного метода определим условие, аналогичное условию (*) [15], но для суперпозиции функций $f\Phi$.

Для множества $V\subset R^m$ обозначим через $(V)_\varepsilon$ его открытую ε-окрестность, т.е. множество

$$(V)_\varepsilon := \{y\in R^m: \exists v\in V, d_Y(v, y)<\varepsilon\}.$$

Условие (**)

Будем говорить, что для отображений f и Φ выполняется условие (**), если для любого конечного множества T из Y^{Φ} и для любого $\varepsilon>0$ справедливо $\Phi^{-1}(f^{-1}((T^*)_\varepsilon\cap Y^{\Phi}))\in\mathscr{B}(X)$.

Пример парето-приближающего отображения, для которого выполняется условие (**), приводится в п. 7.

Рассмотрим некоторую базу аппроксимации T из Y^{Φ} (т.е. конечное подмножество Y^{Φ}), и рассмотрим для множества $(T^*)_\varepsilon$ функцию $\eta_H{}^{\Phi,N}(\varepsilon)$ от аргумента ε, полученную на некоторой выборке $H \subset X$ объема N:

$$\eta_H{}^{\Phi,N}(\varepsilon) := \eta_H{}^{\Phi,N}((T^*)_\varepsilon),\ \varepsilon>0.$$

Заметим, что в силу определения функция $\eta_H{}^{\Phi,N}(\varepsilon)$ является монотонной, поскольку $(T^*)_{\varepsilon'}\subseteq (T^*)_{\varepsilon''}$ при $\varepsilon' \leq \varepsilon''$.

В случае, когда выполняется условие (**), для произвольного ε, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_{\max}$, по теореме 2 имеем выборочную оценку полноты в виде

$$\eta^{\Phi}((T^*)_\varepsilon)>\eta_H{}^{\Phi,N}(\varepsilon)-\delta$$

при надежности не менее

$$1-\exp(-2N\delta^2),\ 0<\delta\leq1.$$

Поскольку в силу ограниченности $Y^{Φ}$ для базы T всегда найдется такое $\varepsilon_{\max}$, для которого $Y^{Φ} \subseteq (T^*)_{\varepsilon_{\max}}$, то значения функции $\eta_H{}^{Φ,N}(\varepsilon)$, при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ будут равняться единице. Оценка полноты аппроксимации Y^* множеством $(T^*)_{\varepsilon_{\max}}$ в виде величины η будет в этом случае определяться надежностью, равной предельной надежности $\chi^*(\eta, N)$:

$$\mathbf{P}(\eta^{Φ}((T^*)_{\varepsilon_{\max}}) > \eta) \geq \chi^*(\eta, N).$$

Итак, в случае выполнения условия (**), с учетом требований к качеству аппроксимации задачу построения аппроксимации ОЭП двухфазным методом можно переписать в следующем виде:

требуется для любых заданных величин ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, построить аппроксимацию множества Y^* с *точностью* ε, т.е. в виде множества $(T^*)_{\varepsilon}$, и *полнотой* η, т.е. со свойством $\eta^{Φ}((T^*)_{\varepsilon}) \geq \eta$.

При этом предполагается, что выполнение требований по точности и полноте аппроксимации должно быть проверено с *надежностью* χ, $1>\chi>0$. Например, для некоторой выборки H объема N, такого что $\chi \leq \chi^*(\eta, N)$, должно быть зафиксировано событие $\eta_H{}^{Φ,N}((T^*)_{\varepsilon})=1$.

6. Сходимость двухфазного метода по полноте аппроксимации

Выше было показано, что двухфазный метод достигнет заданной метрической точности за конечное число шагов. Однако доказанная выше теорема 1 не учитывает полноту аппроксимации. Покажем теперь, что аппроксимация, построенная двухфазным методом, будет достаточно близка к Y^* по полноте аппроксимации.

Пусть задана величина $\varepsilon>0$ и на итерации $K(\varepsilon)$ двухфазного метода построена аппроксимация $T_{K(\varepsilon)}{}^*$. Найдем предельную надежность оценки полноты $\eta(T_{K(\varepsilon)}{}^*)$ величиной η, $0<\eta<1$.

Лемма 1. *Пусть для отображений f и Ф выполняется условие (**). Тогда для любых* ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, *надежность выборочной оценки полноты в виде* $\eta^{Φ}((T_{K(\varepsilon)}{}^*)_{\varepsilon}) > \eta$ *не меньше* $\chi^*(\eta, N)$.

Доказательство. Для выборки $H:=H_N{}^{K(\varepsilon)}$ справедливо $\eta_H{}^{Φ,N}((T_{K(\varepsilon)}{}^*)_{\varepsilon}) = 1$, поэтому утверждение леммы следует из определения величины $\chi^*(\eta, N)$. ■

Сходимость метода (т.е. сходимость аппроксимаций $\{T_k{}^*\}$ к Y^*,) по полноте аппроксимации, порожденной отображением Ф, будем оценивать по сходимости величин $\eta^{Φ}(T_k{}^*)$ к единице. Напомним, что это обосновано для парето-приближающих отображений. Следующая теорема утверждает, что найдется номер итераций k, для которого величина $\eta^{Φ}(T_k{}^*)$ с заданной надежностью будет достаточно близка к единице.

Теорема 3. *Пусть для отображений f и Ф выполняется условие (**). Тогда для любых* ε и η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, *существует минимальный номер* $K(\varepsilon, \eta)$,

$K(\varepsilon, \eta) \le K(\varepsilon)$, *такой, что надежность выборочной оценки полноты в виде* $\eta^{\Phi}((T_{K(\varepsilon,\eta)}^*)_\varepsilon) > \eta$ *не меньше* $\chi^*(\eta, N)$.

Доказательство. Пусть величина $K(\varepsilon)$ определена как в теореме 1. Для выборки $H := H_N^{K(\varepsilon)}$ справедливо $\eta_H^{\Phi,N}((T_{K(\varepsilon)}^*)_\varepsilon) = 1$. Поэтому $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$. Величина надежности этой оценки полноты следует из леммы 1.■

Заметим, что из определения величины $K(\varepsilon,\eta)$ не следует, что $\rho_{K(\varepsilon,\eta)+1} < \varepsilon$, т.к. событие $\eta^{\Phi}((T_{K(\varepsilon,\eta)}^*)_\varepsilon) > \eta$ не предполагает обязательно выполнения этого свойства. Однако, так как $\eta_H^{\Phi,N}((T_{K(\varepsilon)}^*)_\varepsilon) = 1$ то, как и указано в утверждении теоремы, выполняется $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$.

7. Исследование парето-приближающего отображения, основанного на свертке Гермейера

Приведем пример исследования конкретного отображения Φ, используемого в двухфазных методах. Докажем, что оно является парето-приближающим и рассмотрим свойства критериальных отображений f, при выполнении которых выполняется условие (**).

В дополнение к определению множества точек, недоминируемых по Парето, обозначим через

$$S(Y) := \{v \in Y : \{v' \in Y : v' > v\} = \varnothing\}$$

множество точек из Y, недоминируемых по Слейтеру. Заметим, что $P(Y) \subseteq S(Y)$.

Рассмотрим отображение $\Phi\colon X \to X$, заданное сверткой Гермейера, в котором результатом оптимизации свертки является глобальный максимум:

$$\Phi(x^0) \in \operatorname*{Arg\,max}_{x \in X} \varphi'(x, x^0, y^Z), \qquad (***)$$

где $y^Z \in R^m$ и

$$\varphi'(x, x^0, y^Z) = \min_{i=1,\dots m} \frac{f_i(x) - y_i^Z}{f_i(x^0) - y_i^Z}.$$

Теорема 4. *Пусть отображение* Φ *удовлетворяет условию (***), и для всех* $x \in X$ *выполнено* $f(x) > y^Z$. *Тогда* Φ – *парето-приближающее отображение*.

Доказательство. Согласно [17] при условиях теоремы справедливо $Y^{\Phi} \equiv S(Y)$. Но $P(Y) \subseteq S(Y)$, что доказывает теорему. ■

Пусть $z \in R^m$ и $V \subset R^m$. Обозначим через $\boldsymbol{K}(z, V)$ конус видимости множества V из точки z, т.е. множество точек лучей, начинающихся в z и пересекающих V. Заметим, что $\boldsymbol{K}(z, V)$ – не обязательно выпуклый.

Теорема 5. *Пусть отображение* Φ *удовлетворяет условию (***), критериальное отображение f непрерывно, для всех* $x \in X$ *выполнено* $f(x) > y^Z$, *и* $Y \subseteq \boldsymbol{K}(y^Z, S(Y))$. *Тогда отображение* $f\Phi$ *обладает свойством (**)*.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $f(\Phi(x))$ непрерывно, т.е. для любого замкнутого $V \subseteq Y^{\Phi}$ его полный прообраз $\Phi^{-1}(f^{-1}(V))$ также является замкнутым. Без ограничения общности будем рассматривать случай с $y^Z=0$. Тогда

$$\varphi(x, x^0) = \varphi'(x, x^0, 0) = \min_i \frac{f_i(x)}{f_i(x^0)},$$

где $f(x^0)>0$ для $x^0 \in X$.

Обозначим через $L(y')$ прямую в R^m, проходящую через $y^Z=0$ и $y' \neq 0$. Заметим, что для любой точки $y \in L(y^0)$ для любых i и $j \in \{1, \ldots, m\}$ справедливо

$$\frac{y_i}{y_i^0} = \frac{y_j}{y_j^0}.$$

Поэтому при $y^0=f(x^0)$, где $x^0 \in X$, для $x \in f^{-1}(L(f(x^0)) \cap Y)$ для любых i и $j \in \{1,\ldots,m\}$ имеет место

$$\frac{f_i(x)}{f_i(x^0)} = \frac{f_j(x)}{f_j(x^0)} = \varphi(x, x^0).$$

Согласно [17] при выполнении $f(x)>y^Z$ для всех $x \in X$ справедливо $Y^{\Phi} \equiv S(Y)$. Следующая лемма показывает, что при $y^Z=0$ для получения $\Phi(\tilde{x})$ по $\tilde{x} \in X$ надо сдвинуть точку $f(\tilde{x})$ вдоль $L(f(\tilde{x}))$ до пересечения с $S(Y)$ и найти один из прообразов полученной точки.

Лемма 2. *Пусть отображение* Φ *удовлетворяет условию (***),* $y^Z=0$, $f(x)>0$ *для всех* $x \in X$,*и* $Y \subseteq \boldsymbol{K}(0, S(Y))$. *Тогда для любого* $y' \in S(Y)$ *справедливо*

$$\Phi^{-1}(f^{-1}(y')) \equiv f^{-1}(L(y') \cap Y).$$

Доказательство. 1) Пусть $y' \in S(Y)$ и $\tilde{x} \in f^{-1}(L(y') \cap Y)$. Покажем, что $\tilde{x} \in \Phi^{-1}(f^{-1}(y'))$, т.е. $y'=f(\Phi(\tilde{x}))$. Обозначим $y''=f(\Phi(\tilde{x}))$ и предположим, что $y'' \neq y'$. Поскольку $y' \in S(Y)$, то найдется $j_0 \in \{1,\ldots,m\}$ такое, что $y'_{j_0} > y''_{j_0}$. Отсюда

$$\frac{y'_{j_0}}{f_{j_0}(\tilde{x})} > \frac{y''_{j_0}}{f_{j_0}(\tilde{x})}.$$

Поскольку $f(\tilde{x}) \in L(y')$, то

$$\frac{y'_{j_0}}{f_{j_0}(\tilde{x})} = \frac{y'_i}{f_i(\tilde{x})} = \varphi(x', x^0),$$

где $x' \in f^{-1}(y')$. С другой стороны,

$$\frac{y''_{j_0}}{f_{j_0}(\tilde{x})} \geq \min_i \frac{y''_i}{f_i(\tilde{x})} = \varphi(x'', \tilde{x}),$$

где $x''\in f^{-1}(y')$. Таким образом, $\varphi(x',\tilde{x})>\varphi(x'',\tilde{x})$, что противоречит $y''=f(\Phi(\tilde{x}))$.

2) Пусть $y'\in S(Y)$ и $\tilde{x}\in\Phi^{-1}(f^{-1}(y'))$. Покажем, что $\tilde{x}\in f^{-1}(L(y')\cap Y)$. Пусть $f(\tilde{x})\notin L(y')$. Тогда, в силу предположения леммы, прямая $L(f(\tilde{x}))$ пересекается с $S(Y)$ в некоторой точке $y''\neq y'$. Тогда $\varphi(x'',\tilde{x})>\varphi(x',\tilde{x})$, где $x''\in f^{-1}(y'')$ и $x'\in f^{-1}(y')$. Поэтому $x'\neq\Phi(\tilde{x})$, откуда $\tilde{x}\notin\Phi^{-1}(f^{-1}(y'))$. ■

Лемма 3. *Пусть отображение* Φ *удовлетворяет условию (***),* $y^Z=0$*,* f *непрерывно,* $f(x)>0$ *для всех* $x\in X$*,и* $Y\subseteq \boldsymbol{K}(0,\ S(Y))$. *Тогда отображение* $f\Phi$ *непрерывно*.

Доказательство. Пусть $V\subseteq S(Y)$ – произвольное замкнутое множество. Покажем, что $\Phi^{-1}(f^{-1}(V))$ также замкнуто. Обозначим $K_V:=\boldsymbol{K}(0,\ V)$. Из леммы 2 следует, что

$$\Phi^{-1}(f^{-1}(V)) = \{x\in X\colon f(x)\in K_V\cap Y\},$$

т.е. $\Phi^{-1}(f^{-1}(V))\equiv f^{-1}(K_V\cap Y)$.

В силу замкнутости V конус K_V тоже замкнут. Поэтому $K_V\cap Y$ замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств. В силу непрерывности отображения f множество $f^{-1}(K_V\cap Y)$ также замкнуто. Таким образом, множество $\Phi^{-1}(f^{-1}(V))$ замкнуто для любого замкнутого $V\subseteq S(Y)\equiv Y^{\Phi}$. Поэтому отображение $f(\Phi(x))$ непрерывно. ■

Доказательство теоремы 5. Предположение $y^Z=0$ не является ограничительным, поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из леммы 3 и конечности множества T. ■

8. Заключение

В настоящей работе был рассмотрен абстрактный вариант двухфазного метода, предложенного в [16, 10]. Была доказана его сходимость, рассмотрены различные варианты приближающих отображений, приведен пример исследования одного из таких отображений, теоретически обосновывающий его использование в практике аппроксимации границы Парето.

Полученные результаты позволяют исследовать и скорость сходимости двухфазного метода, однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной статьи. Заметим также, что рассматриваемый метод может быть использован и для аппроксимации ОЭП выпуклых множеств, заданных нелинейными отображениями, не позволяющими непосредственно рассчитывать опорные элементы.

Авторы благодарят А.В. Лотова за плодотворное обсуждение материала статьи.

Список литературы

1. *Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В*. Декомпозиция в задачах проектирования // Известия АН. Серия Техн. Киб. 1979. N2. С. 7-17.
2. *Евтушенко Ю.Г. и Потапов М.А.* Методы численного решения многокритериальных задач. // Доклады Академии наук. 1986. Т. 291. С. 25-29.
3. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. М.: Радио и связь, 1992.
4. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997. – 239 с.
5. *Miettinen K.* Nonlinear multiobjective optimization. Boston: Kluwer, 1999.
6. *Lotov A., Bushenkov V., and Kamenev G.* Feasible Goals Method. Search for Smart Decisions. М.: Вычислительный центр РАН, 2001. – 239 с.
7. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. – 310 pp.
8. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М: Макс Пресс, 2008. – 197 с.
9. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2007. – 230 с.
10. *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46. N 11. С. 2009-2023.
11. *Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л.* Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Матем. моделирование, 1992. N3, 105-118.
12. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001. Т. 41. N 11. С. 1751-1760.
13. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М. «Наука». 1980.
14. *Березкин В.Е.* Методы аппроксимации границы Парето в нелинейных хадачах многокритериальной оптимизации Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 2008.
15. *Каменев Г.К.* Исследование адаптивного однофазного метода аппроксимации многомерной границы Парето в нелинейных системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009. Т. 49. N 12. С. 2103-2113.
16. *Лотов А.В., Каменев Г.К., Березкин В.Е.* Аппроксимация и визуализация Паретовой границы для невыпуклых многокритериальных задач // Доклады Академии наук. 2002. Т.386. N 6. С. 738-741.
17. *Гермейер Ю.Б.* Исследование операций. М.: Наука, 1970.