УДК 519

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПОРЯДКЕ РОСТА ЧИСЛА ВЕРШИН И ГИПЕРГРАНЕЙ В КЛАССЕ ХАУСДОРФОВЫХ МЕТОДОВ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ[1]

©2010 г. Р.В. Ефремов, Г.К. Каменев

(28933 Mostoles, Madrid (España), Universidad Rey Juan Carlos; 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: gkk@ccas.ru

Рассматриваются вопросы внутренней полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел с дважды непрерывно дифференцируемыми границами и положительными главными кривизнами. Исследуется рост числа гиперграней в классе хаусдорфовых адаптивных методов внутренней полиэдральной аппроксимации, асимптотически оптимальных по порядку роста числа вершин аппроксимирующих многогранников. Показано, что порядок роста числа гиперграней наряду с порядком роста числа вершин является оптимальным. Получены явные выражения для констант в соответствующих оценках. Библ. 33.

Ключевые слова: гладкое выпуклое тело, аппроксимация многогранником, метод аппроксимации, оптимальные методы, скорость сходимости, гранная структура

1. Аппроксимация многогранниками является традиционным средством теории выпуклых множеств. Первые аппроксимационные теоремы восходят к Минковскому [1]. Эти утверждения широко использовались (см., например, [2]) для получения результатов, связанных с геометрией выпуклых поверхностей. Задача аппроксимации с точки зрения сложности аппроксимирующих многогранников в виде числа элементов гранной структуры, таких как вершины или гиперграни, также была исследована. Были получены асимптотические оценки минимального числа вершин или гиперграней, необходимых для получения заданной точности аппроксимации (см., например, обзоры в [3, 4]). Вместе с тем о полной мощности гранной структуры аппроксимирующих многогранников известно значительно меньше. Так в работах [5] получены для размерности пространства большей

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00599 и 10-01-00199), ПФИ Президиума РАН П-14 и ПФИ ОМН РАН №3, Министерства Науки и Инноваций Испании (TIN2008-06796-C04-01/TSI), Департамента Образования автономной области Мадрид (S2009/esp-1594).

или равной четырем оценки зависимости точности аппроксимации от ограничения на максимальное число граней произвольной размерности. Оценки получены для гладких тел с точностью до неопределенных констант. В [6] в трехмерном случае получена асимптотика для числа ребер (1-мерных граней). Из формулы Эйлера следуют в этом случае оценки, аналогичные, полученным в [5].

Наряду с задачей оценки минимального числа граней или вершин, необходимых для достижения заданной точности, стоит практически важная задача разработки оптимальных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Такая задача возникает во многих приложениях: в теории оптимального управления [7], кодировании изображений [8], математическом моделировании [9]. Важное практическое значение вычислительные алгоритмы полиэдральной аппроксимации имеют в задачах многокритериальной оптимизации и принятия решений [10], [11]. В рамках этих исследований был предложен [12] и разработан (см. [10], [11]) адаптивный метод «Уточнения Оценок», который показал себя практически пригодным для аппроксимации выпуклых ОМД большой размерности. В качестве обобщения и исследования этого метода было начато развитие теории оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации: был предложен [13], [14], теоретически [15]-[18] и экспериментально [19] исследован и нашел практическое применение [10], [11] класс хаусдорфовых (или *H*-) методов полиэдральной аппроксимации (см. обзор результатов в [10], [11], [20]).

В [13]-[15] было показано, что при аппроксимации гладких тел хаусдорфовы методы восполнения являются оптимальными по порядку числа вершин аппроксимирующих многогранников. В настоящей работе исследуется рост числа гиперграней в этом классе методов восполнения. Показано, что порядок роста числа гиперграней тот же, что и порядок роста числа вершин, и является оптимальным. Исследования проводятся для случая, когда аппроксимируемые тела имеют дважды непрерывно дифференцируемые границы и положительные главные кривизны. Получены явные выражения для констант в соответствующих оценках.

2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$, расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел. Через ∂C обозначим границу тела C, через int C – множество его внутренних точек, через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем. Обозначим через $\mathscr{C}_+^2$ – класс выпуклых компактных тел с дважды непрерывно дифференцируемой границей и положительными главными кривизнами. Через $R_{\partial C}$ и $r_{\partial C}$ обозначим максимальный и минимальный радиусы кривизны ∂C, $C\in\mathscr{C}_+^2$, соответственно. Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P\in\mathscr{P}$ через $M^t(P)$ обозначим множество его вершин (граней нулевой размерности), а через $m^t(P)$ – число его вершин, через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граням размерности (d-1)), а через $m^f(P)$ – число его гиперграней. Обозначим через $\mathbf{C}(n, k)$ число сочетаний из n по k, через card T – мощность множества T, через $\lfloor\cdot\rfloor$ – ближайшее целое снизу. Обозначим через $B^d(r, z)$ шар в $\mathbb{E}^d$ радиуса r с центром в z, а через $B^d(r)$ шар радиуса r с центром в начале координат, единичный шар обозначим через B^d, и пусть $S^{d-1} := \partial B^d$. Обозначим через cl операцию замыкания и через aff и conv – операции взятия аффинной и выпуклой оболочки, соответственно. Через proj (x, X) обозначим проекцию точки x на множество X. Конусом видимости $K(p, C)$ тела C из точки $p\notin C$ назовем минимальный конус с вершиной в p, содержащий C. Для $C\in\mathscr{C}$ и $u\in\mathbb{E}^d\backslash\{0\}$ введем обозначения опорной функции $g(u, C) := \max\{<u, x>: x\in C\}$ и опорной гиперплоскости $l(u, C) := \{x\in\mathbb{E}^d: <u, x> = g(u, C)\}$.

Для $C\in\mathscr{C}$ введем класс $\mathscr{P}^i(C)$ внутренних многогранников, вершины которых принадлежат ∂C (вписанных многогранников). Определим также классы

$$\mathscr{P}^i{}_m(C) := \{P\in\mathscr{P}^i(C): m^t(P) \le m\},$$
$$\mathscr{P}^i{}_{[m]}(C) := \{P\in\mathscr{P}^i(C): m^f(P) \le m\}.$$

Рассмотрим традиционную (см. [3], [4]) для рассматриваемой задачи метрику Хаусдорфа

$$\delta(C_1, C_2) := \max\{\sup\{\rho(x, C_2): x\in C_1\}, \sup\{\rho(x, C_1): x\in C_2\}\}.$$

Обозначим также величины минимально достижимого отклонения в заданных классах многогранников аппроксимации:

$$\delta(C, \mathscr{P}^i{}_m) := \inf\{\delta(C, P): P\in\mathscr{P}^i{}_m(C)\},$$
$$\delta(C, \mathscr{P}^i{}_{[m]}) := \inf\{\delta(C, P): P\in\mathscr{P}^i{}_{[m]}(C)\}.$$

Известна следующая оценка на эти величины [21], [22], $C\in\mathscr{C}$:

$$\delta(C,\mathscr{P}^i{}_m),\delta(C,\mathscr{P}^i{}_{[m]}) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d}}{m^{2/(d-1)}}, \tag{1}$$

где здесь и далее через $\mathrm{const}_{a,b,\dots}$ обозначаются положительные константы, зависящие только от параметров a,b, ... При аппроксимации достаточно гладких тел известна точная асимптотика [23], $C\in\mathscr{C}_+^2$:

$$\lim_{m\to\infty}\delta(C,\mathscr{P}^i{}_m)m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}, \tag{2}$$

$$\lim_{m\to\infty}\delta(C,\mathscr{P}^i{}_{[m]})m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}, \tag{3}$$

где ϑ_l есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса (см. [24]), $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ –

кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x\in\partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Заметим, что точно известны только величины $\vartheta_1=1$ и $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$. Оценки для остальных величин ϑ_l могут быть найдены, например, в [25]. История получения оценок (2), (3) рассмотрена в обзорах [3], [4]. Отметим, что члены следующего порядка малости по m в асимптотике вида (2), (3) рассмотрены, например, в [26].

Пусть теперь

$$\mathscr{P}^i_{\{m\}}(C) := \mathscr{P}^i_m(C) \cap \mathscr{P}^i_{[m]}(C) \equiv \{P\in\mathscr{P}^i(C)\colon m^t(P) \le m,\, m^f(P) \le m\}$$

– класс аппроксимирующих многогранников с ограничением сложности гранной структуры: числа вершин и гиперграней одновременно, т.е. первого и последнего компонентов вектора чисел граней (или f-вектора) [27]. Обозначим

$$\delta(C, \mathscr{P}^i_{\{m\}}) := \inf\,\{\delta(C, P)\colon P\in\mathscr{P}^i_{\{m\}}(C)\}.$$

Из [5] для $C\in \mathscr{C}_+^2$ и $d\ge4$ вытекают следующие оценки на эту величину:

$$\liminf_{m\to\infty} \delta(C,\mathscr{P}^i_{\{m\}})m^{2/(d-1)} \ge \frac{d}{34e\pi}\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}, \qquad (4)$$

$$\limsup_{m\to\infty} \delta(C,\mathscr{P}^i_{\{m\}})m^{2/(d-1)} \le \mathrm{const}_d\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}. \qquad (5)$$

Оценки (4), (5), в отличие от (2), (3) не являются асимптотически точными, причем верхняя оценка (5) содержит неопределенную явно константу. Заметим, что метод доказательства, использованный в [5], не позволяет для конкретного выпуклого тела явно конструировать аппроксимирующие многогранники, обладающие соответствующими свойствами.

При d=2 число вершин и граней (т.е. ребер) многоугольника совпадают и поэтому для $\delta(C, \mathscr{P}^i_{\{m\}}(C))$ могут быть использованы асимптотики (2) и (3). В [6] в случае d=3 получена асимптотика для ограничения по числу ребер (1-мерных граней). Из формулы Эйлера, связывающей числа вершин, ребер и граней трехмерного выпуклого многогранника, следуют в этом случае утверждения, аналогичные (4) и (5) и для d=3.

Таким образом, для $C\in\mathscr{C}_+^2$ при $d\ge2$ справедливы свойства

$$\delta(C,\mathscr{P}^i_{\{m\}}) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d}}{m^{2/(d-1)}}, \qquad (6)$$

$$\delta(C,\mathscr{P}^i_{\{m\}}) \ge \frac{\mathrm{const}_{C,d}}{m^{2/(d-1)}}. \qquad (7)$$

Верхняя оценка (1) справедлива для всего класса выпуклых тел $\mathscr{C}$. Верхняя оценка (6) справедлива только для класса $\mathscr{C}_+^2$. Из гипотезы П.М.Грубера (см. в [5]) следует предположение о справедливости (6) для всего класса $\mathscr{C}$. Это предположение остается открытым.

3. Рассмотрим теперь одну из общих аппроксимационных схем – схему восполнения [13], [14], [20].

СХЕМА ВОСПОЛНЕНИЯ

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$. Тогда $(n+1)$-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбираем $p_n \in \partial C$.

Шаг 2. Кладем $P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$.

Конкретные методы, основанные на схеме восполнения, можно характеризовать способами решения двух задач: способом выбора $p_n \in \partial C$ и способом построения $P^{n+1} := \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$ в виде, требуемом для продолжения итераций. Такие методы мы будем называть методами восполнения.

Если в некотором методе восполнения многогранник начального приближения P^0 принадлежит $\mathscr{P}^i(C)$, то и $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ для любого n. В этом случае будем говорить, что последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ является последовательностью *восполнения* для C или последовательностью многогранников, *порождаемой* данным методом восполнения для тела C и многогранника начального приближения $P^0 \in \mathscr{P}(C)$.

Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ некоторым методом восполнения, будем называть *хаусдорфовой или* $H(\gamma, C)$*-последовательностью восполнения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ справедливо

$$\delta(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\, \delta(P^n, C). \tag{8}$$

Так как

$$\delta(P^n, P^{n+1}) = \rho(p_n, P^n),$$

то условие (6) может быть переформулировано как

$$\rho(p_n, P^n) \geq \gamma\, \delta(P^n, C).$$

Методы, порождающие H-последовательности восполнения, будем называть хаусдорфовыми (или H-) методами восполнения. Имеет место свойство сходимости H-последовательностей к аппроксимируемым телам: если $\{P^n\}_{n=0,1,...}$, есть H-последовательность для $C \in \mathscr{C}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P^n, C) = 0. \tag{9}$$

Скорость сходимости и асимптотические свойства хаусдорфовых последовательностей и различных конкретных методов, порождающих эти последовательности, подробно изучены в [13]-[18], обзор в [20]. В частности в [18] доказано, что если $\{P^n\}_{n=0,1,...}$, есть H-последовательность восполнения для $C \in \mathscr{C}_+^2$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \delta(C, P^n) m^t(P^n)^{2/(d-1)} \leq \frac{2}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2} \left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)} . \tag{10}$$

Задачей настоящего исследования будет доказательство следующего результата, касающегося числа гиперграней в H-последовательностях восполнения.

Теорема 1. *Пусть* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H(\gamma, C)$*-последовательность восполнения. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\delta(C,P^n)m^f(P^n)^{\frac{2}{d-1}}\le\frac{2\theta(d,\gamma,C)^{2/(d-1)}}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}},\tag{11}$$

где $\theta(d,\gamma,C)=\mathbf{C}\big(\phi(d,\gamma,C),d-1\big)$ *и*

$$\phi(d,\gamma,C)=\left\lfloor\left(\frac{5}{1-\sqrt{1-\gamma}}\frac{R_{\partial C}}{r_{\partial C}}\right)^{d-1}\right\rfloor.$$

Сравнение верхних оценок (10) и (11) с нижней оценкой (7) показывает, что порядок роста числа вершин и гиперграней в H-последовательностях восполнения является оптимальным в классе $\mathscr{C}_+^2$.

4. Идея доказательства основана на оценке увеличения числа гиперграней аппроксимирующего многогранника на итерации схемы восполнения. Обозначим через $\Phi(P)$ множество всех граней многогранника P. Обозначим через $\Phi_{d-1}(P)$ множество $(d-1)$-мерных граней (гиперграней) многогранника P. Пусть $F\in\Phi_{d-1}(P)$. Аффинную оболочку $\mathit{aff}\,F$ гиперграни F можно представить в виде пары $(r_F; u_F)$, где $u_F\in M^f(P)$ и r_F такое, что для любой точки $q\in\mathit{aff}\,F$ выполняется $<u_F, q> = r_F$.

Обозначим

$$\partial P_p^+ := \{F\in\Phi_{d-1}(P): <u_F, p> > r_F\},$$
$$\partial P_p^0 := \{F\in\Phi_{d-1}(P): <u_F, p> = r_F\},$$
$$\partial P_p^- := \{F\in\Phi_{d-1}(P): <u_F, p> < r_F\}.$$

Пусть

$$M^t(p, P) := \{t\in M^t(P), t\in F_1\cap F_2: F_1\in\partial P_p^+,\ F_2\in\partial P_p^-\}$$

и $m^t(p, P) := \mathrm{card}\ M^t(p, P)$. Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $P\in\mathscr{P}$, $p\notin P$, $P' = \mathrm{conv}\ \{p, P\}$. *Тогда*

$$m^f(P') - m^f(P)\le \mathbf{C}(m^t(p, P), d-1).$$

Доказательство. Согласно [28], для $f\in\Phi(P)$ справедливо $f\in\Phi(P')$ тогда и только тогда, когда существует $F\in\Phi_{d-1}(P)$ такая, что $f\subset F$ и $F\in\partial P_p^-$. Кроме того, если $f\in\Phi(P)$, то $\mathrm{conv}\ \{p, f\}\in\Phi(P')$ тогда и только тогда, когда:

а) либо существуют $F_1, F_2 \in \Phi(P)$ такие, что $f\subset F_1\cap F_2$ и $F_1\in\partial P_p^+$, $F_2\in\partial P_p^-$;

б) либо $p\in\mathrm{aff}\ (f)$.

Случай б) число гиперграней не увеличивает. Поэтому остальные новые гиперграни многогранника P' представляют собой выпуклые оболочки точки p и (d-2)-мерных граней многогранника P, вершины которых все лежат во множестве $M^t(p, P)$. Каждая (d-2)-мерная грань образуется из d-1 различных вершин, откуда вытекает утверждение леммы.■

5. Поскольку доказательство в общем случае достаточно громоздко, рассмотрим сначала для иллюстрации важный частный случай аппроксимации многомерного шара. Впервые он рассмотрен в [29]. Оценим рост числа гиперграней для $H(1, B^d)$-последовательностей восполнения. Этот случай можно изучить, используя более простые и наглядные конструкции.

Теорема 2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H(1, B^d)$*-последовательность восполнения. Тогда существует* $N>0$ *такое, что для любого* $n\geq N$ *выполняется*

$$m^f(P^{n+1}) - m^f(P^n) \leq \mathbf{C}(5^{d-1}, d-1).$$

Сначала опишем кратко ход доказательства. Идея состоит в оценке на основе леммы 1 числа вершин многогранника P^n, которые могут участвовать в образовании новых граней. Множество таких вершин обозначим через $T(n) := M^t(p_n, P^n)$. Мы построим более широкое множество – сферический шар $\Omega_B(n)$ на сфере S^{d-1}, который содержит множество $T(n)$. Затем мы рассмотрим еще более широкое множество – шар $\Omega_B{}^*(n)$, который содержит все сферические шары с центрами из множества $T(n)$ и одинаковым радиусом μ_{n+1}, равным половине минимального сферического расстояния между вершинами P^{n+1}. Далее мы покажем, что радиус $\nu_n{}^*$ шара $\Omega_B{}^*(n)$ не более чем в 5 раз превосходит величину μ_{n+1}. Оценив число шаров с центрами из $T(n)$, вложенных в шар $\Omega_B{}^*(n)$, получим искомую оценку. Число шаров оценивается просто из отношения поверхностного объема шара $\Omega_B{}^*(n)$ к объему сферического шара радиуса μ_{n+1} на сфере S^{d-1}.

Обозначим $\delta(n) := \delta(B, P^n)$. Для $\delta(n) < 1$ пусть

$$\Omega_B(n) := \mathrm{cl}\,(S^{d-1} \setminus K(p_n, B^d(1 - \delta(n)))).$$

Лемма 2 [14]**.** *Пусть* $C\in\mathscr{C}$, $r>0$ *и* z *такие, что* $B^d(r, z)\subset C$. *Тогда для любого* $C'\in\mathscr{C}$ *такого, что* $C'\subset C$ *и* $\delta(C', C) < r$, *имеем* $B^d(r - \delta(C', C), z)\subset C'$.

Лемма 3. *Пусть дана* $H(1, B^d)$*- последовательность восполнения. Тогда*

$$T(n) \subset \Omega_B(n).$$

Доказательство. В силу леммы 2 выполняется включение $B^d(1 - \delta(n))\subset P^n$, так что

$$K(p, B^d(1 - \delta(n))) \subset K(p, P^n). \tag{12}$$

Рассмотрим множество $\Omega_1(n) := \mathrm{cl}\,(S^{d-1} \setminus K(p, P^n))$. Из определения $T(n)$ следует, что $T(n)\subset\Omega_1(n)$, а из (12) следует $\Omega_1(n)\subset\Omega_B(n)$, что доказывает утверждение леммы.■

Пусть $x,y\in S^{d-1}$. Обозначим через $\mu(x, y)$ геодезическое расстояние между x и y на сфере S^{d-1}. Величина $\mu(x, y)$ есть угол между векторами x, y.

Введем обозначение для метрического шара на S^{d-1}: $D_B^{\mu}(p, \nu) := \{x \in S^{d-1}: \mu(p, x) \le \nu\}$, $p \in S^{d-1}$. Введем также обозначения:

$$\mu_n := \frac{1}{2}\min\{\mu(p_1, p_2): p_1, p_2 \in M^t(P^n), p_1 \ne p_2\},\ n \ge 0,$$

$$\mu_n^* := \frac{1}{2}\min\{\mu(p_n, p): p \in M^t(P^n)\},\ n \ge 1.$$

Заметим, что для любого $N \ge 1$ справедливо

$$\mu_{N+1} = \min\{\mu_0, \min\{\mu_n^*, 1 \le n \le N\}\}. \tag{13}$$

Далее, для любых $n' > n \ge 1$ выполняется $\mu_{n'}^* \le \mu_n^*$. Отсюда и из (13) следует, что

$$\mu_{n+1} = \min\{\mu_0, \mu_n^*\}. \tag{14}$$

Лемма 4. *Пусть дана $H(1, B^d)$- последовательность восполнения. Тогда существует $N > 0$ такое, что для любого $n \ge N$ выполняется*

$$\mu_{n+1} = \arccos(1 - \delta(n)) / 2.$$

Доказательство. Заметим, что в $H(1, B^d)$-последовательности для любого $n > 0$ справедливо

$$g(p_n, B^d) - g(p_n, P^n) = \delta(n). \tag{15}$$

Заметим, что $g(p_n, P^n) = \max\{<p_n, p>: p \in M^t(P^n)\}$. Пусть $p(n) \in M^t(P^n)$ такая, что $<p_n, p(n)> = \max\{<p_n, p>: p \in M^t(P^n)\}$. Тогда из (15) следует, что

$$<p_n, p(n)> = 1 - \delta(n). \tag{16}$$

Поскольку $\cos(\mu(p_n, p(n))) = <p_n, p(n)>$, то из (16) следует

$$\mu(p_n, p(n)) = \arccos(1 - \delta(n)). \tag{17}$$

Пусть $l_n := l(p_n, P^n)$. Гиперплоскость l_n отделяет p_n от P^n и проходит через $p(n)$. Кроме того, легко видеть, что для любой точки $x \in B^d \cap l_n$ справедливо

$$\mu(p_n, x) = \mu(p_n, p(n)). \tag{18}$$

Итак, не существует такой точки $p \in M^t(P^n)$, что выполняется $\mu(p_n, p) < \mu(p_n, p(n))$. Отсюда и из (17) следует

$$\mu_n^* = \mu(p_n, p(n))/2 = \arccos(1 - \delta(n))/2. \tag{19}$$

В силу (9) и (17) существует $N > 0$ такое, что для любого $n \ge N$ выполняется $\mu_0 > \mu_n^*$ поэтому утверждение леммы непосредственно следует из (14) и (19).■

Найдем теперь радиус ν_n^* сферического шара $\Omega_B^*(n) := D_B^{\mu}(p_n, \nu_n^*)$, который содержит все сферические шары с центрами из множества $T(n)$ и одинаковым радиусом μ_{n+1}.

Лемма 5. *Пусть дана $H(1, B^d)$- последовательность восполнения. Тогда существует N, такое, что для любого $n \ge N$ выполняется*:

$$\nu_n^* \le 5\mu_{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим сечение шара B^d двумерной плоскостью, проходящей через начало координат и точку p_n (см. рис. 1). Обозначим через отрезок [C, D] двумерное сечение гиперплоскости $l_n := l(p_n, P^n)$, через $[p_n$, B] – отрезок двумерного сечения поверхности конуса $K(p_n, B^d(1 - \delta(n)))$, заключенный в B^d, через [B, E] – соответствующий отрезок двумерного сечения гиперплоскости, проходящей через $(S^{d-1} \cap \partial K(p_n, B^d(1 - \delta(n)))) \setminus \{p_n\}$.

Из (18) и (19) следует, что для любой точки $x \in B^d \cap l_n$ справедливо $\mu(p_n, x) = 2\mu_n^*$. Итак, $\mu(p_n, \mathrm{C}) = 2\mu_n^*$. Легко видеть, что $\mu(\mathrm{C}, \mathrm{B}) = \mu(p_n, \mathrm{C})$. По определению $\Omega_B^*(n)$ имеем $\nu_n^* \le \mu(p_n, \mathrm{B}) + \mu_n^* = 5\mu_n^*$.■

Доказательство теоремы 2. По лемме 1 справедлива оценка

$$m^f(P^{n+1}) - m^f(P^n) \le \mathbf{C}(\mathrm{card}\, T(n), d\text{-}1).$$

Найдем оценку для card $T(n)$. Легко видеть, что для любых несовпадающих $p_1, p_2 \in M^t(P^{n+1})$, $n \ge 0$, справедливо

$$\mathrm{int}\, D_B^{\mu}(p_1, \mu_{n+1}) \cap \mathrm{int}\, D_B^{\mu}(p_2, \mu_{n+1}) = \varnothing. \qquad (20)$$

С другой стороны

$$\cup\{D_B^{\mu}(t, \mu_{n+1}) \colon t \subset [\Omega_B(n) \cap M^t(P^{n+1})]\} \subset D_B^{\mu}(p_n, \nu_n^*). \qquad (21)$$

Поэтому в силу (20), (21) справедливо неравенство

$$\mathrm{card}\, T(n) \le \sigma(D_B^{\mu}(p_n, \nu_n^*)) \,/\, \sigma(D_B^{\mu}(p_n, \mu_{n+1})). \qquad (22)$$

Объем сферического метрического шара $D_B^{\mu}(p, \mu)$ при $0 \le \mu \le \pi/2$ можно оценить через объем его проекции на касательную гиперплоскость в точке p и объем боковой части, соединяющей проекцию с границей шара, как

$$(\sin \mu)^{d-1} \pi_{d-1} \le \sigma(D_B^{\mu}(p, \mu)) \le [1 + (d\text{-}1) \sin(\mu/2)]\, (\sin \mu)^{d-1} \pi_{d-1}. \qquad (23)$$

Используя эту формулу, оценку для ν^*_n, полученную в лемме 5, и малость μ_{n+1}, следующую из леммы (4), преобразуем (22) к следующему виду:

$$\mathrm{card}\, T(n) \le (\sin(5\mu_{n+1}) / \sin \mu_{n+1})^{d-1} + \psi(n),$$

где $\psi(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, учитывая целочисленность card $T(n)$, получаем утверждение теоремы. ■

6. Найдем теперь **о**ценку изменения числа граней на итерации H-схемы восполнения, аналогичную полученной в теореме 2, но для случая произвольных выпуклых компактных тел с гладкой границей и произвольных хаусдорфовых схем. Ход доказательства в целом будет повторять доказательство теоремы 2, но усложняются конструкции и оценки.

Теорема 3. *Пусть $C \in \mathscr{C}_+^2$ и $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ есть $H(\gamma, C)$-последовательность восполнения. Тогда существует $N > 0$ такое, что для любого $n \ge N$ выполняется*

$$m^f(P^{n+1}) - m^f(P^n) \le \mathbf{C}(\phi(d, \gamma, C), d\text{-}1),$$

где функция $\phi(\cdot)$ определена в утверждении теоремы 1.

Внутренним шаром качения (внутренним шаром Бляшке, см. [30]-[33]) для тела C в точке $p \in \partial C$ называют шар $B_i(p) := B^d(r_{\partial C}, o_i(p))$, такой что

$B_i(p)\subset C$ и $p\in B_i(p)\cap\partial C$. При этом радиус $r_{\partial C}$ является максимальным, при котором указанные включения выполняются для любого $p\in \partial C$. Внешним шаром качения (внешним шаром Бляшке) для тела C в точке $p\in\partial C$ называют шар $B_e(p) := B^d(R_{\partial C}, o_e(p))$, такой что $C\subset B_e(p)$ и $p\in B_e(p)\cap\partial C$. При этом радиус $R_{\partial C}$ является минимальным, при котором указанные включения выполняются для любого $p\in\partial C$. Обозначим через $\mu^e(\cdot, \cdot)$ и $\mu^i(\cdot, \cdot)$ геодезические метрики на $B_e(p)$ и $B_i(p)$, соответственно. Обозначим через $D^\mu{}_e(p, r)$ и $D^\mu{}_i(p, r)$ геодезические шары радиуса r с центром в p, соответственно на $B_e(p)$ и $B_i(p)$. Обозначим через $\mu(\cdot, \cdot)$ геодезическое расстояние на ∂C. Введем обозначение для метрического шара на ∂C: $D^\mu(p, \nu) := \{x\in\partial C\colon \mu(p, x)\le\nu\}$. Введем также аналогично предыдущему пункту обозначения μ_n и μ_n*. Для этих величин также будут справедливы утверждения (13) и (14).

Определим, как и при рассмотрении случая аппроксимации шара, множество $T(n) := M^t(p_n, P^n)$. Обозначим $\delta(n) := \delta(C, P^n)$. Для $\delta<r_{\partial C}$ введем обозначение $B_{i,\delta}(p) := B^d(r_{\partial C} - \delta, o_i(p))$. Для $\delta(n) < r_{\partial C}$ обозначим

$$\Omega(n) := \mathrm{cl}\,(\partial C \setminus K(p_n, B_{i,\delta(n)}(p))).$$

Заметим, что в силу гладкости соответствующих множеств $\sigma(\Omega(n))$ существует.

Лемма 6. *Пусть* $\delta(n) < r_{\partial C}$. *Тогда*

$$T(n) \subset \Omega(n).$$

Доказательство. В силу леммы 2 выполняется включение $B_{i,\delta(n)}(p)\subset P^n$, так что

$$K(p, B_{i,\delta(n)}(p)) \subset K(p, P^n). \tag{24}$$

Рассмотрим множество $\Omega_1(n) := \mathrm{cl}\,(\partial C \setminus (K(p, P^n))$. Из определения $T(n)$ следует, что $T(n)\subset\Omega_1(n)$, а из (24) следует $\Omega_1(n)\subset\Omega(n)$, что доказывает утверждение леммы.■

Рассмотрим вместо $\Omega(n)$ более широкое множество

$$\Omega^*(n) := \Omega(n) \cup \left(\bigcup_{x\in\partial\Omega(n)} D^\mu(x, \mu_{n+1}) \right).$$

Заметим, что в силу построения $\sigma(\Omega^*(n))$ существует. Для любых несовпадающих $p_1, p_2 \in M^t(P^{n+1})$, $n\ge0$, справедливо

$$\mathrm{int}\, D^\mu(p_1, \mu_{n+1}) \cap \mathrm{int}\, D^\mu(p_2, \mu_{n+1}) = \varnothing.$$

С другой стороны, из леммы 6 следует

$$\cup\{D^\mu(t, \mu_{n+1})\colon t\in T(n)\} \subset \Omega^*(n).$$

Поэтому

$$\mathrm{card}\, T(n) \le \sigma(\Omega^*(n)) / \sigma(D^\mu(p_n, \mu_{n+1})). \tag{25}$$

Оценим множество $\Omega^*(n)$ сверху множеством, поверхностный объем которого можно легко рассчитать.

Пусть

$$\Omega_1(n) := \mathrm{cl}\,(\partial B_e(p_n) \setminus K\,(p_n, B_{i,\delta(n)}(p_n))).$$

Рассмотрим множество

$$\Omega_2(n) := \Omega_1(n) \cup \left(\bigcup_{x\in\partial\Omega_1(n)} D^{\mu}{}_e(x, \mu_{n+1}) \right).$$

Множество $\Omega_2(n)$ есть шар $D^{\mu}{}_e(p_n, R_n)$ некоторого радиуса R_n, причем

$$\sigma(\Omega^*(n)) < \sigma(\Omega_2(n)). \tag{26}$$

Оценим μ_{n+1} и R_n.

Лемма 7. *Справедлива оценка*

$$\left[1-\sqrt{1-\gamma}\right]\frac{\sqrt{2r_{\partial C}}}{2}\sqrt{\delta(n)}+o(\sqrt{\delta(n)}) \le \mu_{n+1} \le \frac{\sqrt{2R_{\partial C}}}{2}\sqrt{\delta(n)}+o(\sqrt{\delta(n)})$$

Доказательство. Пусть $p^* := \mathrm{proj}\,(p_n, P^{\,n})$ и $u^* := (p_n\text{-}p^*)/\|p_n\text{-}p^*\|$. Пусть $l^* := l(u^*, P^n)$. Гиперплоскость l^* отделяет p_n от P^n. Обозначим через $\pi(u, v)$ двумерную плоскость определенную векторами u и v (возможно неоднозначно при их совпадении) и проходящую через p_n. Пусть $\pi^* := \pi(u^*, p_n\text{-}o_i(p_n))$ (см. рис. 2). Тогда $o_i(p_n)\in\pi^*$. Обозначим через A точку p^* – основание проекции p_n на P^n и через B – основание проекции $o_i(p_n)$ на l^*. Тогда A,B$\in\pi^*$. Пусть $\{x_1, x_2\} := \partial B_i(p_n)\cap l^*\cap\pi^*$ и D := argmin $\{\rho(x_1, p_n), \rho(x_2, p_n)\}$. Тогда, по построению,

$$\mu^i(p_n, \mathrm{D}) \le \mu^i(p_n, x) \tag{27}$$

для любого $x\in\partial B_i(p_n)\cap l^*$. Так как радиус кривизны во всех точках ∂C превышает $r_{\partial C}$, то для любых $x\in\partial B_i(p_n)\cap l^*$ и $y\in\partial C\cap l^*\cap\pi(u^*, x - o_i(p_n))$, выполняется

$$\mu^i(p_n, x) \le \mu(p_n, y). \tag{28}$$

Так как $M^t(P^n)\cap l^*\neq\varnothing$, то по определению μ_n^* выполняется

$$\min\{\mu(p_n, y)\colon y\in\partial C\cap l^*\} \le \min\{\mu(p_n, y)\colon y\in M^t(P^n)\cap l^*\} = 2\mu_n^*. \tag{29}$$

Из (27), (28), (29) следует, что

$$\mu_n^* \ge \mu^i(p_n, \mathrm{D})/2 \ge \rho(p_n, \mathrm{D})/2 = (x^2 + w^2)^{1/2}/2, \tag{30}$$

где $x := \rho(\mathrm{A}, \mathrm{D})$, $w := \rho(p_n, \mathrm{A})$.

По построению

$$w \ge \gamma\delta(n). \tag{31}$$

Оценим x снизу:

$$x = \rho(\mathrm{B}, \mathrm{D}) - \rho(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = (r^2 - h^2)^{1/2} - (r^2 - (h+w)^2)^{1/2},$$

где $h := \rho(o_i(p_n), \mathrm{B})$, $r := r_{\partial C}$. В силу (31) имеем $x \ge x_1(h)$, где

$$x_1(h) := (r^2 - h^2)^{1/2} - (r^2 - (h+\gamma\delta(n))^2)^{1/2},$$

причем $r\text{-}\delta(n) \le h \le r\text{-}\gamma\delta(n)$. Найдем такое h_0, что

$$x_1(h_0) = \min\{x_1(h)\colon r\text{-}\delta(n) \le h \le r\text{-}\gamma\delta(n)\}.$$

Функция $x_1(h)$ убывающая на $0 \le h \le r\text{-}\gamma\delta(n)$, т.к.

$$\frac{dx_1}{dh} = \frac{h+\gamma\delta(n)}{[r^2-(h+\gamma\delta(n))^2]^{1/2}} - \frac{h}{[r^2-h^2]^{1/2}} \ge 0\,.$$

Таким образом, $h_0 = r\text{-}\delta(n)$. Итак,

$$x \ge x_1(h_0) = [r^2 - (r\text{-}\delta(n))^2]^{1/2} - [r^2 - (r\text{-}\delta(n)+\gamma\delta(n))^2]^{1/2} =$$
$$= (2r\delta(n))^{1/2}\,[(1\text{-}\delta_1(n))^{1/2} - (1\text{-}\gamma)^{1/2}(1\text{-}(1\text{-}\gamma)\delta_1(n))^{1/2}],$$

где $\delta_1(n):=\delta(n)/(4r)$. Отсюда

$$x \ge (2r\delta(n))^{1/2}\,[1\text{-}\,(1\text{-}\gamma)^{1/2} - \gamma\delta_1(n) + o(\delta_1(n))]. \qquad (32)$$

Из (30), (31), (32) и (14) следует левое неравенство утверждения леммы.

Рассмотрим нормальное направление $u_n\in S^{d\text{-}1}$ к ∂C в точке p_n, и пусть $l_n := l(u_n, P^n)$. Пусть $y_1\in\partial B_e(p_n)\cap l_n\cap\pi(u_n, p_n\text{-}o_e(p_n))$.

Заметим, что для любого $y\in\partial B_e(p_n)\cap l_n$ справедливо

$$\mu^e(p_n, y) = \mu^e(p_n, y_1). \qquad (33)$$

Кроме того, для любых $x\in\partial C\cap l_n\cap\pi(u_n, y - o_i(p_n))$ выполняется

$$\mu(p_n, x) \le \mu^e(p_n, y). \qquad (34)$$

Гиперплоскость l_n отделяет p_n от P^n. Так как $M^t(P^n)\cap l_n \ne\varnothing$, то по определению μ_n^* из (34) следует

$$\mu_n^* \le \mu^e(p_n, y)/2. \qquad (35)$$

Пусть E – основание проекции $o_e(p_n)$ на l_n (см. рис. 2). Заметим, что $\rho(o_e(p_n), \mathrm{E}) \ge R_{\partial C} \text{-}\delta(n)$, и из (33), (34), (35) вытекает

$$\mu_n^* \le \mu^e(p_n, y_1)/2 = R_{\partial C} \arccos\,(\rho(o_e(p_n), \mathrm{E})/R_{\partial C})/2 \le$$
$$\le R_{\partial C} \arccos\,(1 - \delta(n)/R_{\partial C})/2 =$$
$$= \frac{1}{2} R_{\partial C} \arcsin\left(2\frac{\delta(n)}{R_{\partial C}} - \left(\frac{\delta(n)}{R_{\partial C}}\right)^2\right)^{1/2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2R_{\partial C}}}{2}\sqrt{\delta(n)} + o(\sqrt{\delta(n)})\,.$$

Правое неравенство в утверждения леммы доказано.■

Лемма 8. *Справедлива оценка*

$$R_n \le \frac{5\sqrt{2}}{2}\frac{R_{\partial C}}{\sqrt{r_{\partial C}}}\sqrt{\delta(n)} + o(\sqrt{\delta(n)})\,.$$

Доказательство. Для произвольных двух точек u и v через $[u, v)$ обозначим луч, исходящий из u и проходящий через v. Пусть $\delta(n) < r_{\partial C}$. Возьмем произвольную $y'\in\partial K(p_n, B_{i,\delta(n)}(p_n))\cap\partial B_e(p_n)$, $y'\ne p_n$. Обозначим

$$x' := [p_n, y')\cap\partial B_i(p_n),\ z' := [p_n, y')\cap\partial C,\ q := [p_n, y')\cap\partial B_{i,\delta(n)}(p).$$

В силу подобия треугольников с вершинами в p_n, $o_e(p_n)$, y' и в p_n, $o_i(p_n)$, x' (см. рис. 2), справедливо

$$\mu^e(p_n, y') = 2R_{\partial C}\arccos(1 - \delta(n)/r_{\partial C}) =$$

$$= 2R_{\partial C}\arcsin\left(2\frac{\delta(n)}{r_{\partial C}} - \left(\frac{\delta(n)}{r_{\partial C}}\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\frac{R_{\partial C}}{\sqrt{r_{\partial C}}}\sqrt{\delta(n)} + o(\sqrt{\delta(n)}).$$

Тогда в силу последнего равенства и леммы 7 выполняется

$$R_n = \mu^e(p_n, y') + \mu_{n+1} \le$$

$$\le 2\sqrt{2}\,\frac{R_{\partial C}}{\sqrt{r_{\partial C}}}\sqrt{\delta(n)} + \frac{\sqrt{2R_{\partial C}}}{2}\sqrt{\delta(n)} + o(\sqrt{\delta(n)}) \le$$

$$\le \frac{5\sqrt{2}}{2}\,\frac{R_{\partial C}}{\sqrt{r_{\partial C}}}\sqrt{\delta(n)} + o(\sqrt{\delta(n)}).\blacksquare$$

Доказательство теоремы 3.

По лемме 1 справедлива оценка

$$m^f(P^{n+1}) - m^f(P^n) \le \mathbf{C}(\mathrm{card}\, T(n), d\text{-}1).$$

В силу (25), (26) справедливо неравенство

$$\mathrm{card}\, T(n) \le \sigma(\Omega_2(n)) \,/\, \sigma(D^{\mu}_i(p_n, \mu_{n+1})), \tag{36}$$

где $\Omega_2(n)$ есть шар $D^{\mu}_e(p_n, R_n)$ радиуса R_n.

Объем сферического метрического шара $D^{\mu}_e(p_n, \mu)$ при $0 \le \mu/R_{\partial C} \le \pi/2$ можно оценить через объем его проекции на касательную гиперплоскость в точке p и объем боковой части, соединяющей проекцию с границей шара, как

$$\sigma(D^{\mu}_e(p_n, \mu)) \le \pi_{d\text{-}1}R_{\partial C}^{\,d\text{-}1}\sin^{d\text{-}1}(\mu/R_{\partial C})[1 + (d\text{-}1)\sin(\mu/(2R_{\partial C}))]. \tag{37}$$

Объем сферического метрического шара $D^{\mu}_i(p_n, \mu)$ при $0\le\mu/r_{\partial C}\le\pi/2$ можно оценить как

$$\pi_{d\text{-}1}r_{\partial C}^{\,d\text{-}1}\sin^{d\text{-}1}(\mu/r_{\partial C}) \le \sigma(D^{\mu}_i(p_n, \mu)). \tag{38}$$

Используем (36), подставляя для μ в (37) оценку R_n из леммы 8, а в (38) нижнюю оценку μ_{n+1} леммы 7, получаем, учитывая малость μ_{n+1}:

$$\mathrm{card}\, T(n) \le \left(\frac{5}{1-\sqrt{1-\gamma}}\,\frac{R_{\partial C}}{r_{\partial C}}\right)^{d-1} + \psi(n),$$

где $\psi(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда, учитывая целочисленность card $T(n)$, получаем утверждение теоремы. ■

7. Перейдем теперь к доказательству основного утверждения работы.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(n) := m^f(P^{n+1}) - m^f(P^n)$. В силу теоремы 2, существует N, такое, что при $n\ge N$ выполняется

$$f(n) \le \theta(d, \gamma, C), \tag{39}$$

где $\theta(d, \gamma, C) := \mathbf{C}(\phi(d, \gamma, C), d\text{-}1)$ и функция $\phi(d, \gamma, C)$ определена в утверждении теоремы. Для $n>N$ перепишем $m^f(P^n)$ в виде

$$m^f(P^n) = m^f(P^0) + \sum_{k=0}^{N-1} f(k) + \sum_{k=N}^{n} f(k).$$

В силу (39) выполняется

$$\sum_{k=N}^{n} f(k) \le (n - N + 1)\theta(d, \gamma, C).$$

Заметим далее, что для $H(\gamma, C)$-последовательностей и $C \in \mathscr{C}_+^2$ выполняется ([18], (2.9); [20], лемма 2.4.4;)

$$m^t(P^n) = m^t(P^0) + n.$$

Тогда для $m^f(P^n)$ получается оценка

$$m^f(P^n) \le \left(m^f(P^0) + \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \right) + \left[m^t(P^n) - \left(m^t(P^0) + N - 1 \right) \right] \theta(d, \gamma, C).$$

Откуда

$$m^f(P^n) \le \left(m^f(P^0) + \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \right) + m^t(P^n)\theta(d, \gamma, C). \tag{40}$$

Легко видеть, что для любого $d \ge 2$ и $x, y \ge 0$ справедливо неравенство

$$(x + y)^{2/(d-1)} \le x^{2/(d-1)} + y^{2/(d-1)} + 2(xy)^{1/(d-1)}. \tag{41}$$

Поскольку в силу (10) справедливо

$$\lim_{n \to \infty} \delta(C, P^n) m^t(P^n)^{1/(d-1)} = 0,$$

то из (40), (41) получим

$$\limsup_{n \to \infty} \delta(C, P^n) m^f(P^n)^{\frac{2}{d-1}} \le \theta(d, \gamma, C)^{2/(d-1)} \limsup_{n \to \infty} \delta(C, P^n) m^t(P^n)^{\frac{2}{d-1}},$$

откуда, с учетом (10), получается утверждение теоремы. ■

8. В настоящей работе был исследован рост числа гиперграней в классе хаусдорфовых методов восполнения. Было показано, что порядок роста числа гиперграней тот же, что и порядок роста числа вершин, и является оптимальным. Полученные результаты могут быть использованы для исследования сложности конкретных методов из рассматриваемого класса с точки зрения числа вычислений опорной функции аппроксимируемого тела, в частности, широко используемого в приложениях метода «Уточнения Оценок».

Список литературы

1. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. P. 447-496.
2. *Александров А.Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948.
3. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
4. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37
5. *Böröczky K. Jr.* Polytopal Approximation Bounding the Number of *k*-Faces // J. of Approx. Theory. 2000, V. 102. P. 263-285.
6. *Böröczky K.J., Fodor F., Vígh V.* Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges // Beit. Alg. Geom, 2008. 49. P. 177-193.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
8. *Sonnevend G.* An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on [0, l] // Appl. Math. and Optimizat. 1983. № 10. P. 127-142.
9. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
10. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
11. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
12. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
13. *Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных схем аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Матем. моделирование и дискретная оптимизация. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1988. С. 3-9.
14. *Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.
15. *Каменев Г.К.* Об эффективности хаусдорфовых алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 5. С. 796-805.
16. *Каменев Г.К.* Эффективные алгоритмы внутренней полиэдральной аппроксимации негладких выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 3. С. 446-450.

17. *Каменев Г.К.* Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 10. С. 1464-1474.
18. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 23-32.
19. *Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 6. С. 857-866.
20. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007, 230 с.
21. *Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д.* О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский матем. ж. 1975. Т. 26. № 5. С.1110-1112.
22. *Dudley R.* Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // J. Approximat. Theory. 1974. V. 10. P. 227-236; Corr., ibid, 1979. V. 26. P. 192-193.
23. *Gruber P.M.* Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies I // Forum Math. 1993. N5. P. 281-297.
24. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
25. *Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.
26. *Böröczky K.Jr.* About the Error Term for Best Approximation with Respect to the Hausdorff Related Metrics // Discrete Comput. Geom. 2001. V. 25. P. 293-309.
27. *Брёнстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников. М.: Мир, 1988.
28. *McMullen P. and Shephard G.C.* Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture. Cambridge University Press. Cambridge, England. 1971.
29. *Efremov R.V., · Kamenev G.K.* Properties of a method for polyhedral approximation of the feasible criterion set in convex multiobjective problems // Ann. Oper. Res. 2009. 166. P. 271–279.
30. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
31. *Koutroufiotis D.* On Blaschke's rolling theorems // Arch. Math. 1972. V. 23. P. 655-660.
32. *Schneider R.* Closed convex hypersurfaces with curvature restrictions. // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. P. 1201-1204.
33. *Leichtweiß K.* Convexity and Differential Geometry. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Science Publishers B.V. 1993. Ch. 4.1. P. 1045-1080.

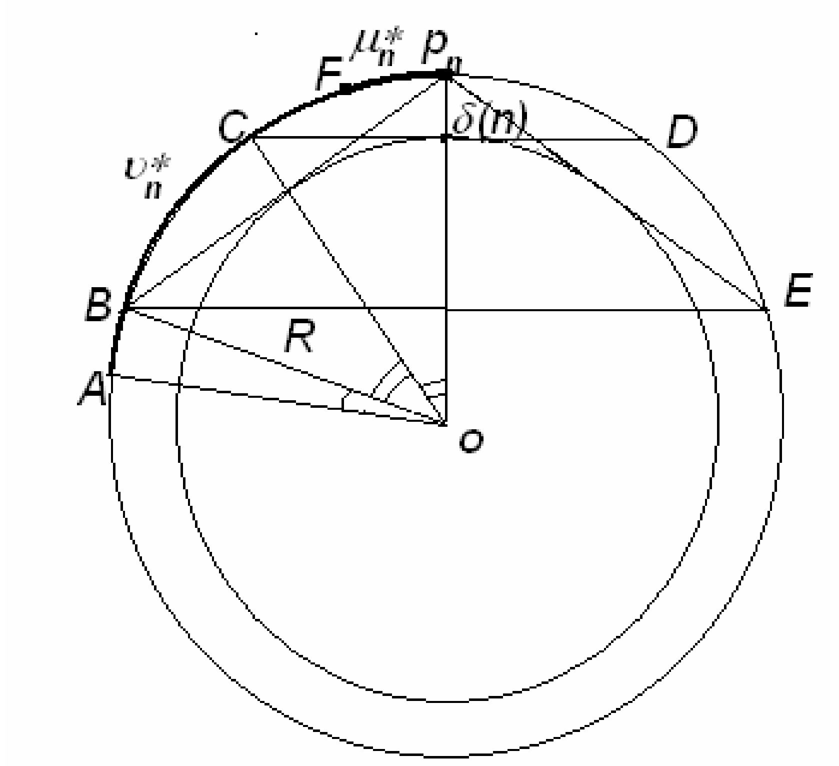
μ_n^*
p_n
F
C
$\delta(n)$
D
υ_n^*
B
E
R
A
o

Рис. 1.

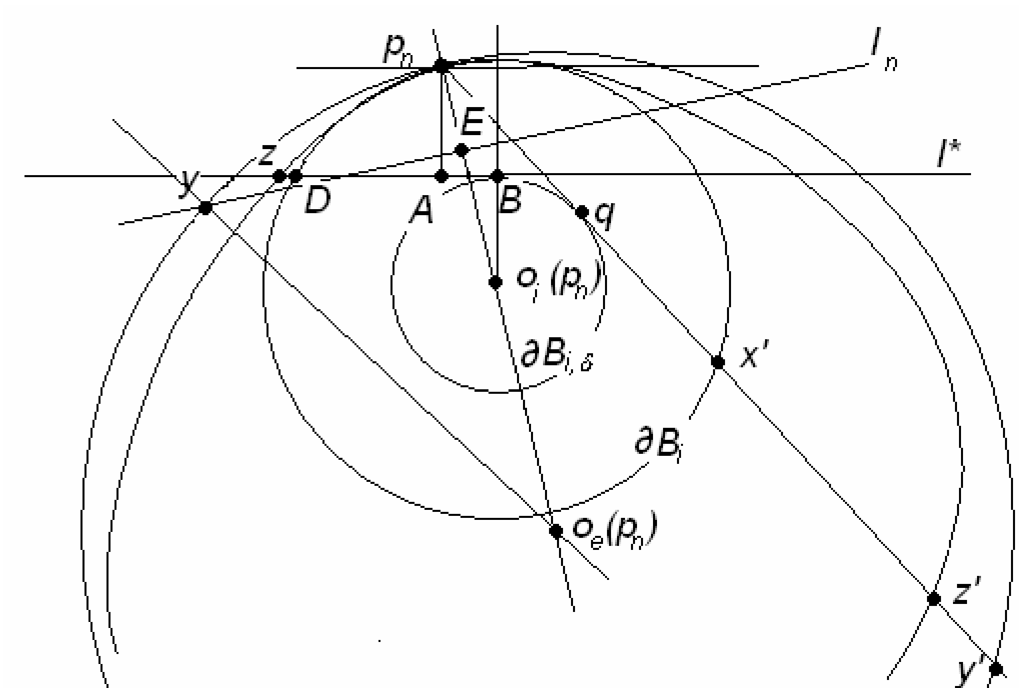
p_n
l_n
E
l^*
z
y
D
A
B
q
$o_i(p_n)$
$\partial B_{i,\delta}$
x'
∂B_i
$o_e(p_n)$
z'
y'
∂C
∂B_e

Рис. 2.