УДК 519

ИССЛЕДОВАНИЕ АДАПТИВНОГО ОДНОФАЗНОГО МЕТОДА АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНОЙ ГРАНИЦЫ ПАРЕТО В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ[1]

©2009 г. Г.К. Каменев
(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)
e-mail: gkk@ccas.ru

Рассматривается проблема аппроксимации границы Парето (недоминируемой границы) множества достижимых критериальных векторов в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации. Проблема решается на основе аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП), то есть максимального множества, имеющего ту же границу Парето, что и исходное множество достижимых критериальных векторов. В работе исследуется метод аппроксимации ОЭП, основанный на статистической оценке точности текущей аппроксимации и адаптивном пополнении метрической сети, ОЭП которой аппроксимирует искомое множество. Доказана сходимость метода, получены оценки скорости сходимости и исследована эффективность метода для случая компактного допустимого множества и непрерывных критериальных функций. В частности показано, что рассматриваемый метод сходится по числу итераций k со скоростью не медленнее, чем $o(k^{1/\overline{\mathrm{dm}}\,Y})$, где $\overline{\mathrm{dm}}\,Y$ – верхняя метрическая размерность множества достижимых критериальных векторов. Библ. 14.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, граница Парето, оболочка Эджворта-Парето, метод аппроксимации, статистические оценки, адаптивные методы, скорость сходимости, метрическая размерность

Проблема аппроксимации границы Парето в задачах многокритериальной оптимизации является классической проблемой исследования операций [1-8] и имеет большое прикладное значение, поскольку на использовании информации о границе Парето основаны эффективные средства поддержки принятия решений при нескольких критериях. В частности, аппроксимация границы Парето является центральным этапом метода достижимых целей (МДЦ), в котором выбор целевой точки базируется на компьютерной визуализации многомерной границы Парето [4, 6-8]. Благодаря такой визуализации лицо, принимающее решение, получает в наглядной форме знание о возможных значениях критериев и о замещениях одного критерия другим на границе Парето, что

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2982.2008.1), РФФИ (проекты 07-01-00472, 09-01-00599 и 09-01-12098), ПФИ Президиума РАН П-2 и ПФИ ОМН РАН №3.

должно помочь сознательно выбрать целевую точку.

Для случая выпуклых (в том числе линейных) систем задача аппроксимации и визуализации многомерной границы Парето, являющейся границей выпуклого множества, хорошо изучена и предложены эффективные методы ее решения в задачах многокритериальной оптимизации с числом критериев от двух до семи [4, 6, 7, 8]. В настоящей работе исследуется метод решения этой проблемы для нелинейных математических моделей, для которых граница Парето уже не обязательно является границей выпуклого множества. Предполагается, что математическая модель может быть задана в виде вычислительного модуля (черного ящика), так что не делается предположений о знании (и даже наличии) констант Липшица для функций, используемых в изучаемых моделях.

Проблема, рассматриваемая в статье, математически формулируется следующим образом. Считается, что совокупность допустимых решений задана компактным множеством $X \subset R^n$, а критериальный вектор $y \in R^m$ – вектор-функцией f: $R^n \to R^m$. Определение границы Парето может быть дано следующим образом. Пусть желательно увеличение значений критериев. Тогда точка $y` \in R^m$ доминирует (по Парето) точку $y \in R^m$, если $y` \geq y$ и $y` \neq y$. При этом граница Парето (недоминируемая граница) $P(Y)$ множества достижимых критериальных векторов

$$Y = f(X) = \{y \in R^m: y = f(x), x \in X\}$$

определяется как

$$P(Y) = \{y \in Y: \{ y' \in Y: y' \geq y, y' \neq y \} = \varnothing\}.$$

Решения, порождающие точки границы Парето, называются эффективными по Парето, а их множество обозначается через $P(X)$.

Важную роль в нашем исследовании играет так называемая оболочка Эджворта-Парето (ОЭП) множества Y, под которой понимается множество

$$Y^* = Y + R^m_- = \{y \in R^m: y = y_1 + y_2, y_1 \in Y, y_2 \in R^m_- \},$$

где R^m_- – неположительный конус R^m. Кроме точек, принадлежащих Y, множество Y^* содержит также и недостижимые точки, доминируемые точками множества Y. Важно (см., например, [8]), что $P(Y^*) = P(Y)$, причем Y^* является максимальным множеством R^m, обладающим этим свойством. Аппроксимация ОЭП вместо множества Y или $P(Y)$ позволяет упростить задачу визуализации границы Парето [4, 6-8].

Обзор различных подходов к аппроксимации паретовой границы дан, например, в [10]. В настоящей статье мы исследуем так называемый однофазный адаптивный метод аппроксимации ОЭП. Впервые идея рассматриваемого метода была высказана в [4, стр. 214] в качестве развития метода [11] аппроксимации невыпуклых множеств, заданных нелинейными отображениями, к задаче аппроксимации ОЭП. В [10] дана формулировка однофазного метода, близкая к используемой в настоящей статье, причем он предлагается в контексте многофазных гибридных методов аппроксимации

ОЭП.

Рассматриваемый метод основан на адаптивном пополнении метрической сети, ОЭП которой аппроксимирует множество Y^*. В статье изучается идеализированный вариант метода, в котором на каждой итерации существующая метрическая сеть T_k пополняется единственной критериальной точкой Y, наиболее удаленной от $P(T_k)$ среди критериальных точек, соответствующих полученной на итерации случайной выборке решений заданного объема. Таким образом, рассматриваемый метод является реализацией для задачи построения ОЭП так называемого Метода Глубоких Ям [11] для аппроксимации вполне ограниченных множеств, позволяющего получать эффективные оценки скорости сходимости. Рассматриваемый метод также допускает статистическую оценку качества аппроксимации, позволяющую [11-12] сформулировать правило остановки расчета. В настоящей статье будет доказана сходимость этого однофазного адаптивного метода, а также получены оценки скорости сходимости.

Приведем теперь математическое описание идеализированного метода, в котором опущены технические детали, не используемые в теоретическом исследовании.

1. Адаптивный однофазный метод аппроксимации ОЭП

Пусть X – множество допустимых решений, компакт, $X\subset R^n$, $X\neq\varnothing$, и R^m – пространство критериев. Рассмотрим f – отображение $X\to R^m$, ставящее в соответствие решению $x\in X$ критериальный вектор $y=f(x)$. Для определенности будем считать, что решается задача многокритериальной максимизации. Обозначим через $Y := f(X) = \{ y=f(x)\text{: } x\in X \}$ – множество достижимых критериев, т.е. образ множества X при отображении f.

Пусть $d_X(\cdot,\cdot)$ и $d_Y(\cdot,\cdot)$ – метрики в R^n и R^m, соответственно. Пусть $(V)_\varepsilon$ – открытая ε-окрестность множества V, т.е. множество

$$(V)_\varepsilon = \{y\in R^m\text{: } \exists v\in V,\ d_Y(v, y)<\varepsilon\}.$$

Введем функцию отклонения точки y от множества T^*, $T\subset R^m$, как

$$\rho(y, T^*) := \inf\{ d_Y(y, t)\text{: } t\in T^* \}.$$

Пусть $U\subset R^m$ – некоторая аппроксимация множества Y^*. Пусть на борелевской σ-алгебре множества решений $\mathscr{B}(X)$ задана вероятностная мера $\mu_X(\cdot)$, $\mu_X(X)=1$.

Рассмотрим адаптивный однофазный метод аппроксимации ОЭП множества достижимых критериальных векторов и приведем его описание.

АДАПТИВНЫЙ ОДНОФАЗНЫЙ МЕТОД

Пусть заданы T_0 – конечное подмножество из Y, N – объем контрольной выборки и вероятностная мера $\mu_X(\cdot)$. Рассмотрим k-ую итерацию метода.

Итерация k:

Пусть имеется уже построенная база аппроксимации T_{k-1}. Тогда:

1) Сгенерировать выборку $H_N^{\,k}\subset X$ в соответствии с мерой $\mu_X(\cdot)$ и

рассчитать образы $f(H_N^k)$.

2) Найти точку

$$x^k \in \operatorname*{Arg\,max}_{x \in H_N^k} \rho\left(f(x), T_{k-1}{*} \right)$$

и соответствующее ей максимальное отклонение

$$\rho_k = \rho\,(f(x^k),\ T_{k\text{-}1}{*})$$

3) Построить новое множество

$$T_k = P(T_{k\text{-}1} \cup f(x^k)).$$

Замечания

Данный метод отличается от описанного в [10] однофазного метода следующими упрощениями:

1) На шаге 3 к базе $T_{k\text{-}1}$ в описанном в [10] методе добавляется не только точка $f(x_k)$, но и все недоминируемые образы выборки H_N^k, а затем исключаются доминируемые точки.

2) В приведенном методе не описываются правила остановки.

Объем контрольной выборки N является параметром метода. От его величины зависит качество оценки точности аппроксимации, длительность каждой итерации, скорость сходимости, и эффективность алгоритма. Ниже будут рассмотрены вопросы, связанные с выбором этого параметра.

Заметим, что, в силу постановки задачи, точность аппроксимации, полученной на данной итерации рассматриваемого нами метода, достоверно не известна. Например, в качестве оценки точности можно принять величину ρ_k. Рассмотрим, прежде всего, что будет означать тот или иной выбор оценки точности аппроксимации.

2. Точность аппроксимации

В методах автоматической аппроксимации ОЭП важнейшую роль играют способы остановки процесса при достижении требуемых показателей точности аппроксимации. В связи с этим, прежде всего, опишем используемые нами способы оценки точности аппроксимации множества Y^* множеством T^*, а затем перейдем к описанию и исследованию свойств метода.

Когда речь идет об аппроксимации множества в метрических пространствах, традиционно ставится задача построения метрической ε-сети, т.е. конечного множества $T \subset Y$ такого, что $Y \subset (T)_\varepsilon$, где ε – требуемая точность аппроксимации. В связи с тем, что способ задания множества Y не позволяет использовать такие сети, применяемый в рассматриваемом методе способ оценки качества построенной аппроксимации T^* основывается на использовании статистического подхода. Статистическое оценивание осуществляется на основе генерирования случайных точек множества допустимых решений X в соответствии с некоторой вероятностной мерой μ_X.

Прежде всего, сформулируем требования к оценке качества аппроксимации. Во-первых, эта оценка должна быть *монотонной*, то есть если аппроксимация T_2^* более точна, чем T_1^* ($T_1^* \subset T_2^*$), то значение оценки качества T_2^* должно быть больше, чем для T_1^*. Во-вторых, она должна быть *действенной*, то есть должна различать «хорошие» и «плохие» аппроксимации. В-третьих, оценка должна быть *реализуема* в реальных задачах.

Используемая концепция построения статистической оценки качества аппроксимации компактного множества Y была введена и обоснована в работах [11, 12], в которой статистическое оценивание базируется на понятии *полноты аппроксимации*. В [10] это понятие применено к задаче аппроксимации ОЭП.

Для $U \subset R^m$ такого, что $f^{-1}(U \cap Y) \in \mathscr{B}(X)$, определим (см. [11]) величину

$$\eta(U) := \mu_X(f^{-1}(U \cap Y))$$

как *полноту аппроксимации* Y^* множеством U.

Для определения полноты аппроксимации Y^* множеством $U \subset R^m$ таким, что прообраз множества $U \cap Y$ в X измерим, используем выборку $H_N \subset X$ объема N из случайных точек, полученных в соответствии с мерой $\mu_X(\cdot)$. Пусть случайная величина $\eta^N(U) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i$ – среднее арифметическое случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, определенных следующим образом:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & f(x_i) \in U \\ 0, & f(x_i) \notin U \end{cases}, \quad x_i \in H_N .$$

Реализацию величины $\eta^N(U)$ на выборке H обозначим $\eta_H^N(U)$ и назовем *выборочной полнотой аппроксимации* Y^* множеством U.

Заметим, что величины ξ_i – бернуллиевские независимые, одинаково распределенные случайные величины с параметром $p := \eta(U)$.

Рассмотрим схему Бернулли $<\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}>$ с N испытаниями, где $\Omega = \{\omega: \omega = (\xi_1, \ldots, \xi_N)\}$, $\mathscr{A} = \{A: A \subseteq \Omega\}$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = p^{\sum \xi_i} q^{N - \sum \xi_i}$, $p = \eta(U)$, $q = 1 - p$. Обозначим через $\mathbf{P}(\eta(U) \geq \eta^N(U) - \delta)$ вероятность

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega\mathbf{:}\ \eta(U) > \eta^N(U) - \delta,\ \eta^N(U) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i\right\}\right).$$

Приведем теперь основную теорему методики оценки качества аппроксимации ОЭП [12] с помощью функции полноты [11]. Из доказательства видно, что она применима и в случае аппроксимации ОЭП.

Теорема 1. *Пусть множество* $f^{-1}(U \cap Y)$ *измеримо и* $\delta > 0$, *тогда*

$$\mathbf{P}(\eta(U) > \eta^N(U) - \delta) \geq 1 - \exp(-2N\delta^2).$$

Доказательство. Для математического ожидания и дисперсии взвешенной суммы бернуллиевских случайных величин ξ_i, т.е. случайной величины $\eta^N(U)$, справедливо [13]:

$$\mathbf{M}(\eta^N(U)) = p,\ \ \mathbf{D}(\eta^N(U)) = pq/N.$$

Легко заметить, что в силу того, что $0 \le p \le 1$,

$$\mathbf{D}(\eta^N(U)) \le 1/(4N).$$

В силу экспоненциального неравенства Чебышева [13, стр. 80] справедливо

$$\mathbf{P}(\eta^N(U) - \eta(U) \ge \delta) \le \exp(-2N\delta^2),$$

и для $0 < \delta \le \eta^N(U)$ получаем искомое неравенство. ■

Случайную величину $\eta^N(U) - \delta$ назовем *оценкой полноты аппроксимации* Y^* множеством U, а величину $\mathbf{P}\{\omega\colon \eta(U) > \eta^N(U) - \delta\}$ назовем *надежностью оценки полноты* $\eta(U)$. Заметим, что, увеличивая объем выборки N, можно сделать надежность оценки сколь угодно близкой к единице, а, уменьшая величину δ, саму оценку можно сделать сколь угодно точной. Реализацию случайной величины $\eta_H^N(U) - \delta$ на выборке H назовем *выборочной оценкой полноты аппроксимации* Y^* множеством U. По теореме 1 надежность такой выборочной оценки не меньше

$$\chi(\delta, N) = 1 - \exp(-2N\delta^2)$$

и зависит не от самой выборки, а только от ее объема.

Обозначим $\eta := 1-\delta$, тогда неравенство теоремы можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{P}(\eta(U) > \eta^N(U) + \eta - 1) \ge 1 - \exp(-2N(1-\eta)^2).$$

Пусть для некоторой выборки H имеем $\eta_H^N(U)=1$. Получаем в этом случае выборочную оценку полноты в виде $\eta(U)>\eta$, где $0\le\eta<1$, и надежность этой оценки не менее

$$\chi^*(\eta, N) = 1 - \exp(-2N(1-\eta)^2).$$

Величину $\chi^*(\eta, N)$ назовем *предельной надежностью* оценки полноты $\eta(U)$ величиной η, $1 > \eta > 0$. Заметим, что, увеличивая объем тестовой выборки N, можно для любой η сделать величину предельной надежности сколь угодно близкой к единице.

Определим естественное требование к вектор-функции $f(x)$, которое позволит в дальнейшем исследовать свойства рассматриваемых методов аппроксимации.

Условие (*)

Будем говорить, что отображение f удовлетворяет условию (*), если для любого конечного множества T из Y и для любого $\varepsilon>0$ справедливо $f^{-1}((T^*)_\varepsilon \cap Y) \in \mathscr{B}(X)$.

Примером выполнения условия (*) может послужить случай, когда отображение f непрерывно.

Рассмотрим для множества Y некоторую базу аппроксимации T (т.е. конечное подмножество Y), и рассмотрим для множества $(T^*)_\varepsilon$ выборочную полноту на некоторой выборке $H_N \subset X$ как функцию от ε, т.е. рассмотрим функцию $\eta_H^N(\varepsilon) := \eta_H^N((T^*)_\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Заметим, что в силу определения функция $\eta_H^N(\varepsilon)$ является монотонной, поскольку $(T^*)_{\varepsilon'} \subseteq (T^*)_{\varepsilon''}$ при $\varepsilon' \leq \varepsilon''$.

В случае, когда отображение f удовлетворяет условию (*), множества $f^{-1}((T^*)_\varepsilon \cap Y)$ измеримы и для произвольного $0<\varepsilon \leq \varepsilon_{\max}$ по теореме 1 имеем оценку полноты в виде $\eta((T^*)_\varepsilon) > \eta_H^N(\varepsilon) - \delta$ при надежности не менее $1\text{-}\exp(-2N\delta^2)$, $0<\delta\leq 1$. Поскольку в силу ограниченности Y для базы T всегда найдется такое $\varepsilon_{\max}$, для которого $Y \subseteq (T^*)_{\varepsilon_{\max}}$, то значения функции $\eta_H^N(\varepsilon)$, при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ будут равняться единице. Оценка полноты аппроксимации Y^* множеством $(T^*)_{\varepsilon_{\max}}$ в виде величины η будет в этом случае определяться надежностью, равной предельной надежности $\chi^*(\eta, N)$.

Итак, в случае выполнения условия (*), с учетом требований к качеству аппроксимации задачу построения аппроксимации ОЭП можно переписать в следующем виде: требуется для любых заданных величин $\varepsilon>0$ и $1>\eta>0$ описать алгоритм построения аппроксимации множества Y^* с заданной *точностью* ε и *полнотой* η, т.е. множества T_k^* со свойством $\eta((T_k)_\varepsilon^*) > \eta$.

3. Основные свойства метода

Покажем, что рассматриваемый метод достигнет заданной точности за конечное число шагов (свойство конечности) и что аппроксимация, построенная им, будет достаточно близка к Y^* (свойство сходимости).

Прежде всего покажем, что рассматриваемый метод сойдется за конечное число итераций.

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon>0$ существует минимальный номер $K(\varepsilon)$ такой, что $\rho_{K(\varepsilon)+1} < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть это не так, т.е. для фиксированного $\varepsilon>0$ и всех k: $\rho_k \geq \varepsilon$. Рассмотрим последовательность множеств T_k^*. Множество $(T_k^* \cap Y)$ для каждого k будет пополняться точкой из Y, удаленной от этого множества на расстояние не меньше, чем ε. Таким образом мы получаем бесконечную последовательность точек, принадлежащих Y и отстоящих друг от друга на расстояние не меньше, чем ε. По условию теоремы, множество Y – компакт, значит, из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Но у построенной нами последовательности любая из ее точек отстоит от других не меньше, чем на ε, поэтому сходящейся подпоследовательности выделить нельзя. Получаем противоречие. ■

Доказанная выше теорема не учитывает полноту аппроксимации. Теперь для заранее заданной величины $\varepsilon>0$ на итерации $K(\varepsilon)$ найдем предельную надежность оценки полноты построенной аппроксимации $\eta(T^*)$ величиной η, $0<\eta<1$.

Лемма 1. Пусть отображение f удовлетворяет условию (*). Тогда для любых ε, η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, надежность выборочной оценки полноты в виде

$\eta((T_{K(\varepsilon)}{*})_{\varepsilon}) > \eta$ не меньше $\chi^*(\eta, N)$.

Доказательство. Для выборки $H := H_N^{K(\varepsilon)}$ справедливо $\eta^N{}_H((T_{K(\varepsilon)}{*})_{\varepsilon}) = 1$, поэтому утверждения леммы следуют из определения величины $\chi^*(\eta, N)$. ■

Сходимость алгоритма, т.е. сходимость аппроксимаций $\{T_k{*}\}$ к Y^*, будем с заданной надежностью оценивать по сходимости величин $\eta(T_k{*})$ к единице. Покажем, что при достаточном числе итераций найдется величина $\eta(T_k{*})$ с заданной надежностью достаточно близкая к единице.

Теорема 3. *Пусть отображение f удовлетворяет условию (*). Тогда для любых* ε, η, $\varepsilon > 0$, $1 > \eta > 0$, *существует минимальный номер* $K(\varepsilon, \eta) \le K(\varepsilon)$ *такой, что надежность выборочной оценки полноты в виде* $\eta((T_{K(\varepsilon,\eta)}{*})_{\varepsilon}) > \eta$ *не меньше* $\chi^*(\eta, N)$.

Доказательство. Пусть величина $K(\varepsilon)$ определена как в теореме 2. Для выборки $H := H_N^{K(\varepsilon)}$ справедливо $\eta^N{}_H((T_{K(\varepsilon)}{*})_{\varepsilon}) = 1$. Поэтому $K(\varepsilon, \eta) \le K(\varepsilon)$. Величина надежности этой оценки полноты следует из леммы 1.■

Заметим, что из определения величины $K(\varepsilon, \eta)$ не следует, что $\rho_{K(\varepsilon,\eta)+1} < \varepsilon$, т.к. событие $\eta((T_{K(\varepsilon,\eta)}{*})_{\varepsilon}) > \eta$ не предполагает обязательно выполнения этого свойства. Однако, так как $\eta^N{}_H((T_{K(\varepsilon)}{*})_{\varepsilon}) = 1$ то, как и указано в утверждении теоремы, выполняется $K(\varepsilon, \eta) \le K(\varepsilon)$.

4. Скорость сходимости метода

Скорость сходимости рассматриваемого метода будем исследовать по методике [12]. Для некоторого множества $A \subset R^m$ введем следующие обозначения [14]. Пусть $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ – минимальное число точек ε-сети для A, $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ – минимальное число множеств диаметра не более чем 2ε, покрывающих множество A. Множество называется *ε-различимым*, если любые две его различные точки находятся на расстоянии, большем чем ε. Обозначим через $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A.

Величины $\log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ ($\log \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$) и $\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ назовем, соответственно, (*относительной*) *ε-энтропией* и *ε-емкостью* A (под log здесь и далее понимается $\log_2$).

Отметим некоторые свойства функций $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ как функций ε [14]: они являются невозрастающими и непрерывными справа, причем

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}(\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\varepsilon, A).$$

Обозначим

$$\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A) := \liminf_{v \to 0+} \mathfrak{M}(\varepsilon - v, A).$$

Нижняя и верхняя метрическая размерности вполне ограниченного множества A определяются как

$$\underline{\mathrm{dm}}\, A := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

$$\overline{\mathrm{dm}} A := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

При равенстве верхней и нижней метрических размерностей говорят о метрической размерности dm A.

Оценим число итераций, за которое рассматриваемый метод достигнет заранее заданной точности $\varepsilon>0$.

Теорема 4. *Пусть* $\varepsilon>0$. *Тогда*

$$K(\varepsilon) \leq \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y) \leq \mathfrak{M}(\rho_{K(\varepsilon)+1}, Y),$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 2.*

Доказательство. На каждой итерации алгоритма $k<K(\varepsilon)$ к базе T_k добавляется точка, удаленная от T_k* на расстояние ρ_k, не меньшее, чем ε. Эта точка будет удалена и от T_k на расстояние не меньшее, чем $\rho_k \geq \varepsilon$. Поскольку все добавляемые точки принадлежат Y, то их количество ограничено $\widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y)$, откуда и следует первое утверждение теоремы. Остается заметить, что $\rho_{K(\varepsilon)+1} < \varepsilon$.■

Теперь оценим число итераций, за которое алгоритм сойдется с заданной полнотой.

Теорема 5. *Пусть отображение f удовлетворяет условию (*). Тогда для любых* ε,η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, *справедливо*

$$K(\varepsilon,\eta) \leq \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y) \leq \mathfrak{M}(\rho_{K(\varepsilon)+1}, Y),$$

где величина $K(\varepsilon,\eta)$ *определена в теореме 3.*

Доказательство. Из утверждения теоремы 3 следует, что $K(\varepsilon,\eta) \leq K(\varepsilon)$. Далее утверждение теоремы следует из теоремы 4. ■

Таким образом, сходимость алгоритма А1 определяется метрическими свойствами множества Y, его ε-емкостью.

Следствие 1. Пусть $d_Y(y', y'') := \max_i \{ | y_i' - y_i'' | \}, y', y'' \in R^m$ и существует шар (куб) радиуса R, который содержит в себе множество Y. Тогда для $\forall \varepsilon>0$ справедливо

$$K(\varepsilon) \leq (2(R+\varepsilon)/\varepsilon)^m,$$

где величина $K(\varepsilon)$ определена в теореме 2.

Доказательство

Пусть B_R – шар радиуса R, содержащий в себе множество Y. Заметим, что единичным шаром в пространстве R^m с такой метрикой является куб, поэтому пространство R^m является *разложимым*, то есть оно может быть разложено без перекрытий на единичные кубы так, что расстояние между центрами кубов равняется диаметру кубов. В силу этого величина $\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon,Y) \le \tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon,B_R)$ не может превышать числа открытых шаров радиуса $\varepsilon/2$, содержащихся в $B_{R+\varepsilon}$, поэтому $\tilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon,Y) \le (2(R+\varepsilon)/\varepsilon)^m$. Откуда из теоремы 4 и получаем утверждение следствия. ■

Следствие 2. Пусть отображение f удовлетворяет условию (*). Пусть $d_Y(y',y'') := \max_i\{|y_i' - y_i''|\}$, $y',y'' \in R^m$ и существует шар радиуса R, который содержит в себе множество Y. Тогда для любых ε,η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, справедливо

$$K(\varepsilon,\eta) \le (2(R+\varepsilon)/\varepsilon)^m,$$

где величина $K(\varepsilon,\eta)$ определена в теореме 3.

Доказательство. Из утверждения теоремы 3 следует, что $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$. Далее утверждение теоремы вытекает из следствия 1 теоремы 4. ■

Для положительных функций $f(\varepsilon)$ и $g(\varepsilon)$ обозначим $f \sim g$, если $\lim_{\varepsilon\to 0+}(f/g) = 1$. Обозначим через $\mathrm{Vol}(\cdot)$ объем в R^m.

Следствие 3. Пусть $d_Y(y',y'') := \max_i\{|y_i' - y_i''|\}$, $y',y'' \in R^m$, и пусть определен объем $\mathrm{Vol}(Y)$ в R^m, $\mathrm{Vol}(Y)>0$. Тогда справедливо

$$\limsup_{\varepsilon\to+0} K(\varepsilon)\varepsilon^m \le \mathrm{Vol}(Y)2^m,$$

где величина $K(\varepsilon)$ определена в теореме 2.

Доказательство

В [14] показано, что в рассматриваемом случае

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon,Y) \sim \mathrm{Vol}(Y)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m,$$

где через $\mathrm{Vol}(\cdot)$ обозначен объем в R^m. Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 4. ■

Следствие 4. Пусть $d_Y(y',y'') := \max_i\{|y_i' - y_i''|\}$, $y',y'' \in R^m$, и пусть $\mathrm{Vol}(Y)$ – объем Y в R^m, $\mathrm{Vol}(Y)>0$. Пусть отображение f удовлетворяет условию (*). Тогда для любого η, $1>\eta>0$, справедливо

$$\limsup_{\varepsilon\to+0} K(\varepsilon,\eta)\varepsilon^m \le \mathrm{Vol}(Y)2^m,$$

где величина $K(\varepsilon,\eta)$ определена в теореме 3.

Доказательство. Из утверждения теоремы 3 следует, что $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из следствия 2 теоремы 4. ■

Приведенные следствия дают достаточно грубую оценку скорости сходимости рассматриваемого метода. Дело в том, что множество Y как образ нелинейного отображения f может иметь метрические свойства, отличные от метрических свойств пространства R^m. Например, если размерность пространства решений n меньше размерности пространства критериев m, то множество $Y=f(X)$ может представлять собой n-мерное многообразие, вложенное в пространство R^m. Теоремы 4 и 5 показывают, что скорость сходимости метода определяется метрическими свойствами именно множества Y (его ε-емкостью), а не окружающего его пространства. Следующие теоремы показывают, что скорость сходимости рассматриваемого метода можно охарактеризовать через метрическую размерность множества Y.

Лемма 2. Пусть $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, A$. Тогда справедливо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)\varepsilon^{\alpha} = 0.$$

Доказательство. В силу монотонности

$$\mathfrak{M}(\varepsilon, A) \le \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\varepsilon/2, A).$$

Поэтому

$$\frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \le \frac{\log \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \le \frac{\log \frac{2}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon/2, A)}{\log \frac{2}{\varepsilon}},$$

откуда

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = \overline{\mathrm{dm}}\, A.$$

По определению верхней размерности существует ε_0 такое, что при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ справедливо

$$\frac{\log \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \le \overline{\mathrm{dm}}\, A + \frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, A}{2}.$$

Поэтому, обозначая $\exp_2(x) := 2^x$, получаем

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)\varepsilon^{\alpha} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \exp_2\left[(\log \varepsilon)\left(\alpha - \frac{\log \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}\right)\right] \le$$

$$\le \limsup_{\varepsilon \to 0} \exp_2\left[(\log \varepsilon)\left(\frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, A}{2}\right)\right] =$$

$$= \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, A}{2}} = 0. \blacksquare$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\,Y$. *Тогда справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha} = 0,$$

где величина $K(\varepsilon)$ *определена в теореме 2.*

Доказательство. По теореме 4 имеем

$$K(\varepsilon) \le \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y),$$

откуда с учетом результатов теоремы 2 и леммы 2 получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon)\varepsilon^{\alpha} \le \limsup_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y)\varepsilon^{\alpha} = 0. \blacksquare$$

Теорема 7. *Пусть отображение f удовлетворяет условию* (*). *Тогда для любых* η, $1 > \eta > 0$, *и* α, $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\,Y$, *справедливо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K(\varepsilon,\eta)\varepsilon^{\alpha} = 0,$$

где величина $K(\varepsilon,\eta)$ *определена в теореме 3.*

Доказательство. Из утверждения теоремы 3 следует, что $K(\varepsilon,\eta) \le K(\varepsilon)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теоремы 6. ■

Результаты теорем 6 и 7 показывают (несколько упрощенно говоря), что рассматриваемый метод сходится по числу итераций k со скоростью не медленнее, чем $o(k^{1/\overline{\mathrm{dm}}\,Y})$. Заметим, что в случае, когда $\overline{\mathrm{dm}}\,Y = 0$, результаты указанных теорем указывают на сверхполиномиальную сходимость.

Пусть теперь τ – среднее время вычисления функции $f(x)$. Тогда из теорем 4 и 5 следует, что временная сложность аппроксимации множества Y^* с точностью ε (в виде T^*) не превышает $\tau N \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y)$, или, асимптотически, $o(N\varepsilon^{-\overline{\mathrm{dm}}\,Y})$. При этом, если отображение f удовлетворяет условию (*), то полнота множества $(T^*)_{\varepsilon}$ больше η с надежностью не меньшей $\chi^*(\eta, N)$. Таким образом, чем больше параметр метода N, тем медленнее сходимость метода, но тем выше надежность оценки точности построенной аппроксимации.

5. Эффективность метода

Сравним построенную с помощью рассматриваемого адаптивного однофазного метода аппроксимацию с аппроксимацией множества Y^*, построенной с помощью любого другого (гипотетического) метода построения метрических ε-сетей для множества Y.

Теорема 8. *Пусть S есть произвольная* ε*-сеть для Y и величина* $K(\varepsilon)$ *определена как в теореме 2. Тогда*

$$\frac{\mathrm{card}\,S}{\mathrm{card}\,T_{K(\varepsilon)}} \ge \frac{\mathfrak{N}^{R}(\varepsilon, Y)}{\mathrm{card}\,T_0 + \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y)}.$$

Доказательство. По определению $\operatorname{card} S \geq \mathfrak{N}^R(\varepsilon, Y)$. По построению card $T_{K(\varepsilon)} \leq K(\varepsilon)$ + card T_0 , откуда, с учетом теоремы 4 получаем утверждение теоремы. ■

Теорема 9. *Пусть отображение f удовлетворяет условию* (*). *Пусть заданы произвольные ε, η, ε>0, 1>η>0, пусть S есть произвольная ε-сеть для Y и величина K(ε,η) определена как в теореме 3. Тогда*

$$\frac{\operatorname{card} S}{\operatorname{card} T_{K(\varepsilon,\eta)}} \geq \frac{\mathfrak{N}^R(\varepsilon, Y)}{\operatorname{card} T_0 + \widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, Y)}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 5 совершенно аналогично доказательству теоремы 8. ■

Следствие 5. Пусть $d_Y(y', y'') := \max\limits_i \{|y_i' - y_i''|\}$, $y', y'' \in R^m$, и пусть Vol(Y)>0. Пусть S есть произвольная ε-сеть для Y, и величина $K(\varepsilon)$ определена как в теореме 2. Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{card} S}{\operatorname{card} T_{K(\varepsilon)}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Доказательство. В [14] показано, что в рассматриваемом случае

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, Y) \sim \operatorname{Vol}(Y)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m, \quad \mathfrak{N}(\varepsilon, A) \sim \operatorname{Vol}(A)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^m.$$

По определению $\operatorname{card} S \geq \mathfrak{N}^R(\varepsilon, Y) \geq \mathfrak{N}(\varepsilon, Y)$, по построению card $T_{K(\varepsilon)} \leq K(\varepsilon)$ + card T_0, сравнивая эти два неравенства, получаем

$$\frac{\operatorname{card} S}{\operatorname{card} T_{K(\varepsilon)}} \geq \frac{\mathfrak{N}(\varepsilon, Y)}{K(\varepsilon) + \operatorname{card} T_0}.$$

Тогда из следствия 3 вытекает

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{card} S}{\operatorname{card} T_{K(\varepsilon)}} \geq \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\mathfrak{N}(\varepsilon, Y)}{K(\varepsilon) + \operatorname{card} T_0} =$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\mathfrak{N}(\varepsilon, Y)}{K(\varepsilon)\left(1 + \dfrac{\operatorname{card} T_0}{K(\varepsilon)}\right)} \geq \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{Vol}(Y)\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^m}{\operatorname{Vol}(Y)\left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)^m \left(1 + \dfrac{\operatorname{card} T_0}{K(\varepsilon)}\right)} =$$

$$= \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2^m \left(1 + \dfrac{\operatorname{card} T_0}{K(\varepsilon)}\right)^m} = \left(\frac{1}{2}\right)^m,$$

так как в условиях теоремы $K(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. ■

Следствие 6. Пусть $d_Y(y', y'') := \max_i \{ | y'_i - y''_i | \}$, $y', y'' \in R^m$, и пусть Vol(Y)>0. Пусть отображение f удовлетворяет условию (*). Пусть для произвольных ε, η, $\varepsilon>0$, $1>\eta>0$, S есть произвольная ε-сеть для Y и величина $K(\varepsilon, \eta)$ определена как в теореме 3. Тогда

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\operatorname{card} S}{\operatorname{card} T_{K(\varepsilon,\eta)}} \geq \left(\frac{1}{2} \right)^m .$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 5 совершенно аналогично доказательству теоремы 8. ■

Приведенные следствия дают асимптотическую оценку скорости сходимости рассматриваемого метода в случае, когда определен m-мерный ненулевой объем множества Y. Эта оценка зависит только от размерности пространства критериальных векторов m. Вместе с тем теорема 7 показывает, что эффективность метода определяется метрическими свойствами множества Y, а не объемлющего его пространства R^m. Поэтому в случае, когда метрическая размерность dm Y существует и отлична от нуля, можно ожидать, что асимптотическое поведение эффективности метода можно охарактеризовать через величину dm Y. Мы не будем, однако, подробно останавливаться на этом вопросе.

6. Заключение

Полученные в работе оценки показывают, что скорость сходимости рассмотренного адаптивного однофазного метода определяется метрическими свойствами множества достижимых критериальных векторов Y. Показано, что рассмотренный однофазный метод построения ОЭП является эффективным в классе методов построения метрических ε-сетей для множества Y. Вместе с тем граница Парето является лишь частью этого множества, имеющей, как правило, меньшую чем Y или даже равную нулю метрическую размерность. Поэтому естественно предположить, что для построения эффективных методов аппроксимации границы Парето в общем случае необходимы средства получения точек самой границы Парето или близких к ней, т.е. средства глобальной или локальной оптимизации. Наличие таких средств в рассмотренном однофазном методе не предполагалось. В [10] предложены многофазные и гибридные адаптивные методы аппроксимации ОЭП, в которых адаптивная аппроксимация осуществляется на основе комбинации статистической оценки качества текущей аппроксимации, случайного поиска, локальной оптимизации, адаптивного сжатия области поиска решения и генетических подходов к оптимизации. Получение оценок скорости сходимости этих методов может быть проведено на основе концепции, предложенной в настоящей работе, и будет составлять предмет дальнейших исследований.

Список литературы

1. *Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В.* Декомпозиция в задачах проектирования. Известия АН. Серия Техн. Киб., 1979. № 2. С. 7-17.
2. *Евтушенко Ю.Г. и Потапов М.А.* Методы численного решения многокритериальных задач. ДАН, 1986, т. 291, 25-29.
3. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. М.: Радио и связь, 1992.
4. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. и Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
5. *Miettinen K.* Nonlinear multiobjective optimization. Boston: Kluwer, 1999.
6. *Lotov A., Bushenkov V., and Kamenev G.* Feasible Goals Method. Search for Smart Decisions. Computing Center RAS, Moscow, 2001.
7. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K.* Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
8. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений. М: изд. Макс Пресс, 2008.
9. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. Вычислительный центр РАН, Москва, 2007, 230 с.
10. *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ., 2006. Т. 46, N11, С. 2009-2023.
11. *Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л.* Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей. Матем. моделирование, 1992, № 3, 105-118.
12. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т.41. N11. С. 1751-1760.
13. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М. «Наука». 1980.
14. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* E-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.