РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Г.К. Каменев

Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел

ВЦ РАН

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2007

УДК 519.6

Ответственный редактор
доктор физ. матем. наук А.В.Лотов

В работе систематически излагаются основные положения теории оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Введены классы адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, основанные на адаптивных схемах восполнения и отсечения. Введено понятие *H*-методов отсечения и восполнения и исследованы их свойства. Введено понятие более узкого класса H_1-методов отсечения и восполнения с более сильными свойствами. Для *H*- и H_1-методов получены верхние оценки скорости сходимости, исследована их эффективность, доказана оптимальность при аппроксимации различных классов выпуклых тел. Приведены и исследованы конкретные методы полиэдральной аппроксимации, принадлежащие к рассматриваемому классу.

Ключевые слова: выпуклые множества, многогранники, алгоритмы, аппроксимация, скорость сходимости, оптимальность.

Работа публикуется в авторской редакции.

Работа выполнена
– при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-5379.2006.1);
– при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-00472;
– программы фундаментальных исследований РАН №14;
– программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

Рецензенты: И.Г.Поспелов, А.А.Шананин

Научное издание

Введение

Аппроксимация многогранниками является традиционным средством теории выпуклых множеств. Первые аппроксимационные теоремы восходят к Минковскому [1]. В частности, Минковским было доказано, что для каждого выпуклого тела можно найти сходящуюся последовательность выпуклых полиэдров, аппроксимирующих это тело. Эти утверждения широко использовались (см., например, [2]) для получения результатов, связанных с геометрией выпуклых поверхностей. Однако долгое время интерес к задаче был сугубо теоретическим. В настоящее время задача аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками возникает во многих приложениях: в математическом программировании [3], кодировании изображений [4] и др. На целесообразность использования аппроксимации выпуклых компактных тел в многокритериальных задачах принятия решений указывали Н.Н. Моисеев [5] и Г.С. Поспелов [6]. Важное практическое значение вычислительные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел имеют в задачах принятия решений на основе использования математических моделей в методе Обобщенных Множеств Достижимости (ОМД), разрабатываемого в ВЦ РАН, начиная с 70-х годов (обзор этого направления дан в [7], [8], [9], [10]).

Важным отличием адаптивных методов полиэдральной аппроксимации от методов приближенного описания с помощью отдельно взятых выпуклых тел (таких, как симплекс, параллелепипед, эллипсоид, цилиндр: см., например, обзоры теории в [11], [12]) является возможность аппроксимации выпуклых компактных тел с любой степенью точности. За это преимущество, однако, приходится платить высокую цену: как показывают теоретические оценки ([13], [14], [15], [16] и др.), а также экспериментальные и прикладные исследования ([17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]), сложность описания аппроксимирующего многогранника быстро растет с увеличением точности и ростом размерности аппроксимируемого тела.

До 80-х годов прошлого столетия методы построения полиэдральных аппроксимаций выпуклых тел размерности, большей двух, существовали, в основном, "на бумаге" и вытекали из конструкций, использовавшихся при получении соответствующих оценок в теории оптимальной полиэдральной аппроксимации (см. [1], [25], [13], [14], [26] и более поздние работы этого направления [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33]). В 80-х годах стандартный подход к построению многогранников, аппроксимирующих выпуклые множества, стал основываться на расчете значений опорной функции аппроксимируемого множества на некоторой заданной сетке направлений (см., например, [17], [34]). Было, однако, показано [4], [35], что использование заранее заданных (так называемых неадаптивных) сеток направлений не позволяет эффективно аппроксимировать многомерные множества, особенно в негладком случае.

С 80-х годов в ВЦ РАН в рамках метода ОМД развивались теория и практика адаптивных итерационных методов полиэдральной аппроксимации. В частности, был разработан адаптивный метод «Уточнения Оценок» (см. историю его создания в [7]), который показал себя практически пригодным для аппроксимации выпуклых ОМД большой размерности. С обобщения и исследования этого метода на основе теории оптимальной полиэдральной аппроксимации выпуклых тел и было начато развитие теории оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, рассматриваемой в настоящей работе.

Далее во введении будет дан обзор существующих теории и методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел.

0.1. Многогранники наилучшей аппроксимации

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ со скалярным произведением $<\cdot,\cdot>$, расстоянием $\rho(\cdot,\cdot)$, нормой $\|\cdot\|$ и Лебеговой мерой μ. Пусть $B_r(z)$ обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в z, B^d – единичный шар с центром в начале координат, S^{d-1} – сферу направлений, т.е. границу B^d, и пусть $\pi_d := \mu(B^d)$. Для ε, $0 < \varepsilon$, и $X \subset \mathbb{E}^d$ обозначим

$$[X]_\varepsilon := \{x\in\mathbb{E}^d : \rho(x, X) \le \varepsilon\}, \quad (X)_\varepsilon := \{x\in\mathbb{E}^d : \rho(x, X) < \varepsilon\}.$$

Множество $K\subset\mathbb{E}^d$ называется конусом, если для любого $x\in K$ и λ, $0\le\lambda$, справедливо $\lambda x\in K$. Множество $C\subset\mathbb{E}^d$ называется выпуклым, если $(1-\lambda)x+\lambda y \in C$ для всех x, $y\in C$ и $0<\lambda<1$. Выпуклой оболочкой множества $X \subset \mathbb{E}^d$ называется множество conv X, являющееся пересечением всех выпуклых множеств, содержащих X. Выпуклой конической оболочкой множества $X \subset \mathbb{E}^d$ называется множество cone X, являющееся пересечением всех выпуклых конусов, содержащих X. Для двух выпуклых множеств C_1 и C_2 введем обозначение выпуклого множества

$$C_1 + C_2 := \{z \in \mathbb{E}^d \colon z = x + y,\ x \in C_1,\ x \in C_2\}$$

(сумма по Минковскому). Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и выпуклого C обозначим

$$\lambda C := \{z \in \mathbb{E}^d \colon z = \lambda x,\ x \in C\}.$$

Для $\lambda \geq 0$ введем внешнее и внутреннее параллельные множества как

$$C_\lambda := C + B_\lambda(0) = \bigcup_{x \in C} B_\lambda(x)\,, \quad C_{-\lambda} := \{z \in \mathbb{E}^d \colon B_\lambda(\mathrm{z}) \subset C\}.$$

Ясно, что в нашем случае $[C]_\lambda = C_\lambda$, $\lambda \geq 0$. Через proj (x, X) обозначим проекцию точки x на множество X, через card X – мощность множества X.

Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел (ВКТ). В случае $d = 2$ говорят также о выпуклых дисках. Через ∂C обозначим границу тела C, через int C – множество его внутренних точек, через $\omega(C)$ – его асферичность (минимальное отношение радиусов концентрических внешнего $R(C)$ и внутреннего $r(C)$ шаров) и через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем (см. [48]). Обозначим через $\mathscr{C}^s$ класс ВКТ с s раз непрерывно дифференцируемой границей, и пусть $\mathscr{C}_+^s$ – класс ВКТ с s раз непрерывно дифференцируемой границей положительными главными кривизнами, $s \geq 2$. ВКТ из класса $\mathscr{C}_+^2$ называют иногда «овалоидами». ВКТ из класса $\mathscr{C}^s$ мы будем иногда в тексте, для краткости, называть гладкими телами. Для $s \geq 2$ через $r_{\min}(C)$ и $r_{\max}(C)$ обозначим минимальный и, соответственно, максимальный радиусы кривизны ∂C, $C \in \mathscr{C}^s$.

Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P} \subset \mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P \in \mathscr{P}$ через $M^t(P)$ обозначим множество его вершин, а через $m^t(P)$ – число его вершин, через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграниням (граней максимальной размерности), а через $m^f(P)$ - число его гиперграней. Для $C\in\mathscr{C}$ введем класс $\mathscr{P}^i(C)$ внутренних многогранников, вершины которых принадлежат ∂C (вписанных многогранников), и класс $\mathscr{P}^c(C)$ внешних многогранников, гиперграни которых касаются ∂C (описанных многогранников). Определим также классы

$$\mathscr{P}^i{}_m(C) := \{P\in \mathscr{P}^i(C)\colon m^t(P) \le m\},\quad \mathscr{P}^c{}_m(C) := \{P\in \mathscr{P}^c(C)\colon m^f(P) \le m\}.$$ [1]

Рассмотрим традиционные для рассматриваемой задачи метрики на $\mathscr{C}$ (см. [11], [12]): метрику Хаусдорфа (метрику Бляшке)

$$\delta^H(C_1,C_2) := \max\,\{\sup\{\rho(x,\ C_2)\colon x\in C_1\},\ \sup\{\rho(x,\ C_1)\colon x\in C_2\}\}$$

и метрику объема симметрической разности (Никодимову метрику)

$$\delta^S(C_1,C_2) := \mu\,(C_1\Delta C_2),$$

где $C_1\Delta C_2 := (C_1\backslash C_2)\cup(C_2\backslash C_1)$ **.**

В дальнейшем, где это возможно, будем опускать индексные обозначения. Так, через δ будем обозначать δ^H и δ^S, через $\mathscr{P}_m(C)$ будем обозначать $\mathscr{P}^i{}_m(C)$ и $\mathscr{P}^c{}_m(C)$, через $\mathscr{P}(C)$ будем обозначать $\mathscr{P}_m(C)$ для любых $m \ge d+1$, через $M(P)$, $m(P)$ будем обозначать $M^t(P)$, $m^t(P)$ для $P\in\mathscr{P}^i(C)$ и $M^f(P)$, $m^f(P)$ для $P\in\mathscr{P}^c(C)$. Обозначим также

$$\delta(C,\ \mathscr{P}_m(C)) := \inf\,\{\delta(C,\ P)\colon P\in \mathscr{P}_m(C)\}.$$

Пусть $\mathbb{E}_0{}^d := \mathbb{E}^d\backslash\{0\}$,

$$\mathscr{C}_0 := \{C\subset\mathscr{C}\colon \{0\}\ \in \operatorname{int} C\}$$

– класс ВКТ, содержащих внутри себя начало координат, $\mathscr{P}_0 := \mathscr{C}_0\cap\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_0(C) := \mathscr{P}_0\cap\mathscr{P}(C)$,

Для $u \in \mathbb{E}_0{}^d$ введем обозначения опорной функции

$$g(u,\ C) := \max\ \{<u,\ x>\colon x\in C\},$$

опорного полупространства

$$L(u,\ C) := \{x\in\mathbb{E}^d\colon <u,\ x> \le g(u,\ C)\},$$

опорной гиперплоскости

$$l(u,C) := \{x\in\mathbb{E}^d\colon <u,\ x> = g(u,\ C)\},$$

множества точек касания

$$T(u,C) := \{p\in\partial C\colon <u,\ p> = g(u,\ C)\}$$

и конуса внешних единичных нормалей в граничной точке $p\in\partial C$

---

[1] В работах [11], [60] для класса $\mathscr{P}^c{}_m(C)$ используется обозначение $\mathscr{P}^c{}_{(m)}(C)$.

$$S(p,C) := \{u \in S^{d-1}: \langle u, p\rangle = g(u, C)\}.$$

Для произвольного $p \in \mathbb{E}^d$ нам будет удобно использовать обозначения

$$g(u, p) := \langle u, p\rangle,$$

$$l(u, p) := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle = \langle u, p\rangle\},$$

$$L(u, p) := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle \le \langle u, p\rangle\},$$

что, очевидно, не противоречит введенным ранее определениям опорных функции, гиперплоскости и полупространства.

Пусть $C \in \mathscr{C}_0$ и $x \in \mathbb{E}^d$, через

$$g^*(x, C) := \min\{\lambda \ge 0: x \in \lambda C\}$$

обозначим *дистанционную* [48] (*калибровочную* [49] или Минковского) *функцию* для C. Из определения дистанционной функции следует, что

$$g^*(x, C) = ||x||/||x_0||,$$

где $x_0 = [o, x) \cap \partial C$ – точка пересечения луча, исходящего из начала координат и проходящего через x, и границы тела C (см. [48], замечание 11.1). Эту точку x_0 обозначим через

$$t(x, C) := x/g^*(x, C) \in \partial C,\ x \in \mathbb{E}_0^d.$$

Пусть $\omega_0(C)$ есть минимальное отношение радиусов $R_0(C)$ внешнего и $r_0(C)$ внутреннего шаров с центрами в начале координат. Ясно, что $\omega_0(C) \ge \omega(C)$.

Пусть $C \in \mathscr{C}$. Точку $z \in C$ будем называть экстремальной, если она не допускает представления в виде $(1-\lambda)x+\lambda y$, где $x, y \in C$ и $0 < \lambda < 1$. Множество экстремальных точек тела C обозначим через ext C. Точку $z \in C$ будем называть экспонированной, если $C \cap l(u,C) = \{z\}$ для некоторого $u \in S(z,C)$. Множество экспонированных точек тела C обозначим через exp C. Точку $z \in C$ будем называть дальней, если существует шар, описанный вокруг C и содержащий z на своей границе. Множество дальних точек тела C обозначим через exp* C.

Через $\mathrm{const}_{a,b,\ldots}$ будем обозначать положительные константы, зависящие от параметров $a,b, \ldots$.

Пусть задано некоторое $C \in \mathscr{C}$. Классическим результатом теории выпуклых множеств (см. [11], [50]) является тот факт, что для метрики δ (т.е. δ^H и δ^S) в классе $\mathscr{P}_m(C)$ (т.е. $\mathscr{P}^i{}_m(C)$ и $\mathscr{P}^c{}_m(C)$) найдется многогранник Π_m, не обязательно единственный, на котором достигается $\delta(C,\mathscr{P}_m(C))$. Этот многогранник называется *многогранником наилучшей аппроксимации* (МНА) [2]:

$$\delta(C,\ \Pi_m) = \delta(C,\ \mathscr{P}_m(C)).$$

Даже для двумерных тел задача нахождения МНА чрезвычайно сложна (за исключением простейших специальных случаев) ([27], [12]). Вместе с тем МНА могут служить эталоном полиэдральной аппроксимации ВКТ. Поэтому приведем необходимые нам известные оценки зависимости минимальной неточности аппроксимации $\delta(C,\ \mathscr{P}_m(C))$ от числа вершин (гиперграней) МНА m. Прочие сведения о МНА можно почерпнуть из обзоров[27], [12], [50].

Прежде всего, известно, что

$$\lim_{m\to\infty} \delta(C,\mathscr{P}_m) = 0\,. \tag{0.1.1}$$

Впервые этот факт (для внутренних многогранников) доказан, по-видимому, в [1]. Для классов $\mathscr{P}^i{}_m(C)$ и $\mathscr{P}^c{}_m(C)$ это свойство вытекает, например, из следующих верхних оценок, полученных независимо в [13] и [14]:

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}\,. \tag{0.1.2}$$

Нижние оценки скорости сходимости МНА рассмотрим сначала для достаточно гладких тел. Для $C\in\mathscr{C}_+^2$ справедлива следующая оценка, полученная в [15] и [16]:

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \ge \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}\,. \tag{0.1.3}$$

---

[2] Этот результат настолько «классический», что мы нигде не нашли его доказательства. Впрочем, существование МНА нетрудно доказать, перейдя в пространство $\mathbb{E}^{md}$ и рассмотрев, например, множество $C^m\subset\mathbb{E}^{md}$, состоящее из точек с координатами m (d-мерных) точек тела C. Очевидно, что это множество компактно как декартово произведение компактов C. Пусть $c\in\mathbb{E}^{md}$ и t_j: $\mathbb{E}^{md} \to \mathbb{E}^d$ есть проекция j-го d-мерного картежа координат. Тогда

$$\inf\{\delta(C,\ P(c)):\ P(c)=\mathrm{conv}\ \{x_1,\ \ldots\ x_m\},\ x_i=t_j(c),\ c\in\ C^m\}$$

достигается, так как $\delta(C,\ P(c))$ непрерывно зависит от c. При этом возможное совпадение точек не выводит из класса $\mathscr{P}_m(C)$.

Более того, результаты исследований [26], [51] (метрика δ^H и $C\in\mathscr{C}_+^3$) [27], [28], [29], [30] (метрика δ^H и условие $C\in\mathscr{C}_+^2$, а также метрика δ^S), показывают, что для $C\in\mathscr{C}_+^2$ справедливо более сильное утверждение:

$$\delta(C,\mathscr{P}_m)\sim\frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}. \tag{0.1.4}$$

При этом из [26] следует, что (0.1.4) справедливо, если граница ∂C является кусочно-гладкой, т.е. состоит из конечного числа гиперповерхностей класса $\boldsymbol{C}^3$ с положительными главными кривизнами (см. замечание в конце настоящего следующего пункта).

Рассмотрим значения констант из (0.1.4) в асимптотике.

Пусть рассматривается метрика δ^H и $C\in\mathscr{C}^2$. Тогда, согласно [52] (d=2,3), [26], [51] ($\mathscr{C}_+^3$), [29] ($\mathscr{C}_+^2$) и [33] ($\mathscr{C}^2$), справедливо

$$\lim_{m\to\infty}\delta^H(C,\mathscr{P}_m)m^{2/(d-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}, \tag{0.1.5}$$

где ϑ_l есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса (см. [53]), $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x\in\partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Заметим, что точно известны только величины ϑ_1=1 и $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$. Оценки для остальных величин ϑ_l могут быть найдены, например, в [54]. Отметим, что члены следующего порядка малости по m в асимптотике вида (0.1.5) рассмотрены для метрики Хаусдорфа, например, в [55].

Рассмотрим метрику δ^S, и пусть $C\in\mathscr{C}^2$. Тогда, согласно [27], [28], [30] ($\mathscr{C}_+^2$) и [33] ($\mathscr{C}^2$), существуют константы del_{d-1} и div_{d-1} (триангуляционные числа Делоне и Дирихле-Вороного, соответственно), зависящие только от d, что

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^i{}_m)m^{2/(d-1)}=\frac{1}{2}\mathrm{del}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)}, \tag{0.1.6}$$

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^c{}_m)m^{2/(d-1)}=\frac{1}{2}\mathrm{div}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)}. \tag{0.1.7}$$

При этом точно известны только значения $\mathrm{del}_1=1/6$, $\mathrm{del}_2=1/(2\sqrt{3})$,

$\mathrm{div}_1=1/12$, $\mathrm{div}_2=5/(18\sqrt{3})$. Отметим, что члены следующего порядка малости по m в асимптотиках вида (0.1.6)-(0.1.7) рассмотрены для метрики объема, например, в [56].

Таким образом, степень $2/(d\text{-}1)$ в оценках (0.1.2)-(0.1.4) для $C\in\mathscr{C}^2$ неулучшаема. Обратимся к нижним оценкам для тел с негладкой границей. Очевидно, что для любого $P\in\mathscr{P}$ справедливо

$$\delta(P, \mathscr{P}_m(C)) = 0,\ m \geq m(P). \qquad (0.1.8)$$

В случае, когда число экстремальных точек аппроксимируемого тела не является конечным, возможны скорости сходимости промежуточные между (0.1.4) и (0.1.8). Согласно [31], при d=2 для произвольного $C\in\mathscr{C}$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C,\mathscr{P}^i{}_m)m^2 = \frac{1}{12}\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/3}\,d\sigma(x)\right)^3, \qquad (0.1.9)$$

где кривизна $k_C(x)$ определена почти везде на границе ∂C и интеграл рассматривается как Лебегов. Соответственно, при условии

$$\int_{\partial C} k_C(x)^{1/3}\,d\sigma(x) = 0 \qquad (0.1.10)$$

мы получаем скорость сходимости со степенью большей, чем $2/(d\text{-}1)$. Однако результат [31] не дает определить эту степень. Существующий аппарат, который позволяет оценивать скорость сходимости МНА в этом случае, вместе с необходимыми для дальнейшего изложения нашими добавлениями излагается в следующем пункте.

0.2. Аппроксимируемость и аппроксимационное число выпуклых компактных тел (ВКТ)

В этом разделе будет изучаться только метрика Хаусдорфа, так как для метрики симметричной разности содержательные результаты в негладком случае отсутствуют. Для характеристики аппроксимационных свойств негладких тел введем следующие понятия. Пусть $C\in\mathscr{C}$. Пусть s>0. Обозначим

$$\underline{a}^s(C) := \liminf_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^s,\quad \overline{a}^s(C) := \limsup_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^s.$$

В [15] для характеристики нижней границы скорости сходимости МНА введена величина

$$\underline{\alpha}(C) := \inf\{s > 0 : \underline{a}^s(C) = 0\}$$

и названа аппроксимационным числом тела C. Поскольку нас интересуют верхние границы скорости сходимости методов полиэдральной аппроксимации (а значит, как эталона и МНА), то назовем эту величину *нижним аппроксимационным числом* C. Введем *верхнее аппроксимационное число тела* C [57] как

$$\overline{\alpha}(C) := \inf\{s > 0 : \overline{a}^s(C) = 0\}.$$

Очевидно, что $\underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C)$, и в случае равенства этих величин можно говорить об *аппроксимационном числе* $\alpha(C)$.

Из (0.1.2) следует, что

$$\overline{\alpha}(C) \le \frac{d-1}{2}, \tag{0.2.1}$$

причем из (0.1.4) следует, что при $C \in \mathscr{C}_+^2$ справедливо $\alpha(C) = (d\text{-}1)/2$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится дать ряд определений из теории размерности Хаусдорфа (см., например, [58], [59]).

Пусть $\mathbb{R}$ – пространство с метрикой ρ. Для $U \subset \mathbb{R}$ через $D(U)$ обозначим диаметр множества

$$D(U) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in U\}$$

(примем, что $D(\varnothing)=0$ и $D(U)^0=1$). Пусть s – произвольное действительное число, $0 \le s < \infty$. Для $A \subset \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\mathbf{m}_s^{\varepsilon}(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} D(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathbb{R}, D(E_i) \le \varepsilon\right\}.$$

Определим s-размерную меру Хаусдорфа как

$$\mathbf{m}_s(A) := \sup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{m}_s^{\varepsilon}(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{m}_s^{\varepsilon}(A).$$

Определим размерность Хаусдорфа как единственное число $\dim A$, такое что $\mathbf{m}_s(A)=\infty$ при $0 \le s < \dim A$ и $\mathbf{m}_s(A)=0$ при $\dim A < s < \infty$. Более формально,

$$\dim A := \sup\{s \ge 0 : \mathbf{m}_s(A) > 0\} = \sup\{s \ge 0 : \mathbf{m}_s(A) = \infty\} =$$
$$= \inf\{s \ge 0 : \mathbf{m}_s(A) < \infty\} = \inf\{s \ge 0 : \mathbf{m}_s(A) = 0\}.$$

В [15] получена нижняя оценка нижнего аппроксимационного числа $\underline{\alpha}(C)$, равная половине хаусдорфовой размерности множества дальних точек C (экстремальных точек, в которых существует внешняя касательная к телу окружность):

$$\underline{\alpha}(C) \geq \frac{1}{2} \dim \exp^* C . \qquad (0.2.2)$$

В работе [15] из (0.2.2), как более общего результата, следует (0.1.3): при $C \in \mathscr{C}_+^2$ имеем $\exp^* C \equiv \partial C$, откуда $\alpha(C) = \underline{\alpha}(C) = (d-1)/2$. При этом, как показано в [15], для любого s, $0 \leq s \leq 1/2$, существует выпуклый диск C, такой что $\underline{\alpha}(C) = s$.

Поскольку для нас важны верхние границы скорости сходимости неточности в методах аппроксимации, то в настоящей работе нас будет интересовать верхняя оценка верхнего аппроксимационного числа $\overline{\alpha}(C)$, для негладких тел более сильная, чем (0.2.1). Для получения верхних оценок использовать аппарат хаусдорфовых мер затруднительно по следующей, например, причине. Пусть имеется счетная совокупность множеств $\{A_i, i=1,2,...\}$ из $\mathbb{R}$. Тогда, согласно, например, [59],

$$\dim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup\{\dim A_i : i = 1,2...\} . \qquad (0.2.3)$$

Поэтому хаусдорфова размерность счетного множества точек равна нулю. Вместе с тем, как мы увидим в нашей работе (см. § 4.7), существуют выпуклые диски со счетным числом дальних точек и ненулевым нижним аппроксимационным числом.

Для получения верхних оценок сходимости методов полиэдральной аппроксимации нами будет использован аппарат метрической размерности, или размерности Минковского (см. гл. 4 или, например, [36], [59]).

В [57] показано (см. в настоящей работе теорему 4.5.1, а также следствие 4.7.1), что, по крайней мере, в плоском случае верхнее аппроксимационное число ВКТ в определенном смысле связано с метрической размерностью его крайних точек. Более подробно этот вопрос обсуждается в главе 4.

Аппроксимационное число недостаточно полно описывает аппроксимационные свойства выпуклого тела. Например, $\alpha(C)=0$ при $C \in \mathscr{P}$, и существуют такие $C \in \mathscr{C} \backslash \mathscr{P}$, причем строго выпуклые и регулярные, что $\underline{\alpha}(C)=0$ [15]. Для характеристики различных способов сходимости величины $\delta(C, \mathscr{P}_m)$ к нулю в [15] предлагается использовать множество хаусдорфовых функций $\boldsymbol{H}$. Элементами $\boldsymbol{H}$ являются неотрицательные возрастающие вещественные функции h, определенные на $[0, +\infty)$, непрерывные справа и удовлетворяющие условию $h(0) = 0$. В этом классе определяется аппроксимируемость тела $C\in\mathscr{C}$ как множество функций

$$\underline{\boldsymbol{A}}(C) := \{h \in \boldsymbol{H} : \underline{a}_h(C) > 0\}\ ,$$

где

$$\underline{a}_h(C) := \liminf_{m\to\infty} mh\big(\delta(C,\mathscr{P}_m)\big).$$

Чем меньше множество $\underline{\boldsymbol{A}}(C)$, тем лучше тело C может быть аппроксимировано многогранниками. Величину $\underline{\boldsymbol{A}}(C)$ мы будем называть *нижней аппроксимируемостью тела C*. Введем также *верхнюю аппроксимируемость тела C* как

$$\overline{\boldsymbol{A}}(C) := \{h \in \boldsymbol{H} : \overline{a}_h(C) > 0\}\ ,$$

где

$$\overline{a}_h(C) := \limsup_{m\to\infty}\ mh\big(\delta(C,\mathscr{P}_m)\big).$$

Очевидно, что $\underline{\boldsymbol{A}}(C) \subseteq \overline{\boldsymbol{A}}(C)$, и в случае совпадения этих множеств можно говорить об *аппроксимируемости* $\boldsymbol{A}(C)$.

В [15] дана нижняя оценка множества $\underline{\boldsymbol{A}}(C)$ для $C\in\mathscr{C}$ (через обобщенную хаусдорфову размерность множества $\exp^*C$) и показано, что $C\in\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда $\underline{\boldsymbol{A}}(C) \equiv \varnothing$. В настоящей работе нас будет интересовать верхняя оценка верхней аппроксимируемости $\overline{\boldsymbol{A}}(C)$, более сильная для негладких тел, чем (0.2.6), и, в частности, равная пустому множеству в классе $\mathscr{P}$.

В заключение пункта определим класс ВКТ, для которого порядок $2/(d\text{-}1)$ является неулучшаемым. Для $0 \le \alpha \le (d\text{-}1)/2$ обозначим

$$\mathscr{C}(\alpha) := \{C\in\mathscr{C}\colon\ \overline{\alpha}(C) = \alpha\}.$$

Обозначим

$$\mathscr{C}_{\#} := \mathscr{C}((d\text{-}1)/2).$$

Из (0.1.3) следует, что $\mathscr{C}_+^2 \subset \mathscr{C}_{\#}$. Пусть также

$$\mathscr{C}_* := \{C\in\mathscr{C}\colon \dim\exp^*C = d\text{-}1\}.$$

Ясно, что $\mathscr{C}_+^2 \subset \mathscr{C}_*$. Однако из

$$C := \bigcap_{i=1}^{n} C_i \in \mathscr{C}, \quad C_i \in \mathscr{C}_+^2$$

также следует, что $C \in \mathscr{C}_*$. Действительно, как нетрудно показать, все точки границы будут в этом случае дальними, т.к. в точке на границе пересечения конечного семейства шаров всегда существует внешний касающийся шар. Исходя из (0.2.2), можно показать также [92], что к $\mathscr{C}_*$ принадлежат также множества с точкой, в окрестности которой граница дважды-непрерывно дифференцируема, а главные кривизны – положительны. Такой случай часто встречается в приложениях. В любом случае, для класса $\mathscr{C}_*$ из (0.2.1)-(0.2.2) следует, что

$$\underline{\alpha}(C) = \overline{\alpha}(C) = \alpha(C) = \frac{d-1}{2}, \quad C \in \mathscr{C}_*. \tag{0.2.7}$$

Поэтому $\mathscr{C}_* \subset \mathscr{C}_\#$. Таким образом, класс $\mathscr{C}_\#$ достаточно широк, чтобы охватить ВКТ, аппроксимация которых требуется в приложениях.

Результаты (0.1.2)-(0.1.7) показывают, что относительно класса $\mathscr{C}_\#$ известно достаточно много. Гораздо меньше известно о классе $\mathscr{C}(\alpha)$, когда $\alpha<(d\text{-}1)/2$. Ясно, что поскольку $\mathscr{P} \subset \mathscr{C}(0)$, то $\mathscr{C}(0) \neq \varnothing$. Из нашей работы [57] (см. следствие 4.7.1) вытекает также, что в плоском случае (d=2) справедливо $\mathscr{C}(\alpha) \neq \varnothing$ при любом α, $0 \le \alpha \le (d\text{-}1)/2$ (следствие 4.7.2). Результат (0.1.9) работы [31] говорит о том, что в плоском случае в класс $\mathscr{C}((d\text{-}1)/2)$ не входят ВКТ с нулевым аффинным периметром (см. условие (0.1.10)). Теория ВКТ из $\mathscr{C}(\alpha)$ при $\alpha<(d\text{-}1)/2$ требует своей разработки. Результаты работ [31] и [57] (см. гл. 4) являются только начальным вкладом в эту теорию.

0.3. Методы полиэдральной аппроксимации и их эффективность

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ имеется некоторый *метод полиэдральной аппроксимации* (МПА), под которым мы будем понимать способ построения последовательности многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$, $P^n \in \mathscr{P}(C)$ ($\mathscr{P}^i{}_m(C)$ или $\mathscr{P}^c{}_m(C)$), сходящейся к телу C в заданной метрике (такую последовательность мы будем называть *аппроксимирующей*). Примером может служить гипотетический метод построения МНА с последовательно растущим числом вершин (гиперграней).

Нас, прежде всего, будет интересовать качество аппроксимации с точки зрения числа вершин и/или гиперграней многогранников, получаемых с помощью данного метода. Надо сказать, что теория эффективности МПА долгое время была развита недостаточно. Причиной было отсутствие реальных МПА, порождающих многогранники, близкие по свойствам к МНА. Ниже приводится классификация МПА, развитая в наших работах по теоретическому [39], [40], [57] и экспериментальному [46], [18], [19], [20] исследованию адаптивных МПА.

Пусть $C \in \mathscr{C}$ и $P \in \mathscr{P}(C)$. Величину

$$\eta(P) := \frac{\delta(C, \mathscr{P}_{m(P)}(C))}{\delta(C, P)}$$

назовем *эффективностью аппроксимации тела C многогранником P* (с точки зрения числа вершин или гиперграней соответственно).

Пусть $\mathrm{F} := \{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$ – сходящаяся к $C \in \mathscr{C}$ последовательность многогранников из $\mathscr{P}(C)$. Величины

$$\underline{\eta}(\mathrm{F}) := \liminf_{n\to\infty} \eta(P^n), \quad \overline{\eta}(\mathrm{F}) := \limsup_{n\to\infty} \eta(P^n)$$

назовем, соответственно, *нижней* и *верхней асимптотической эффективностью аппроксимации тела C последовательностью* F. Если нижняя и верхняя асимптотическая эффективность совпадают, можно говорить об *эффективности аппроксимации тела C*. Наконец, под *эффективностью метода полиэдральной аппроксимации тела C* будем понимать эффективность порождаемой им последовательности многогранников.

Очевидно, что $0 \le \underline{\eta}(F) \le \overline{\eta}(F) \le 1$, причем для любого МНА Π_m, $m=d+1$, $d+2$, ..., эффективность аппроксимации равна единице. Поэтому гипотетический метод построения МНА будем называть *оптимальным*. МПА, порождающий для тела C последовательность с асимптотической эффективностью, равной 1, будем называть *асимптотически оптимальным*.

МПА, порождающий для тела C последовательность с нижней асимптотической эффективностью, большей нуля, будем называть *асимптотически эффективным*. Из (0.1.2)-(0.1.3) следует, что для асимптотически эффективной последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ справедливо

$$\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}. \qquad (0.3.1)$$

Более того, если $C \in \mathscr{C}_+^2$, то

$$\delta(C,P^n) \ge \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}. \qquad (0.3.2)$$

Пусть $C \in \mathscr{C}$ и $\overline{\alpha}(C) > 0$. МПА назовем *оптимальным по порядку числа вершин* (*гиперграней*) *для* C, если он порождает последовательность многогранников с тем же порядком скорости сходимости, что и у МНА. Более формально, МПА назовем оптимальным по порядку числа вершин (гиперграней) для C, если он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$, в которой для любого $s>0$ такого, что

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta,s}}{m^s}, \qquad (0.3.3)$$

справедливо

$$\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}'_{C,d,\delta,s}}{m(P^n)^s}. \qquad (0.3.4)$$

МПА будем называть асимптотически эффективным (оптимальным по порядку) *для класса* $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{C}$, если он является асимптотически эффективным (оптимальным по порядку) для каждого $C \in \mathscr{C}^*$.

Нетрудно видеть, что асимптотически эффективный МПА является (при условии $\overline{\alpha}(C) > 0$) оптимальным по порядку. Вместе с тем заметим, что МПА может быть оптимальным по порядку и иметь, в то же время, асимптотическую эффективность, равную 0. Например, такой случай может иметь место, если $\overline{a}^{-\overline{\alpha}(C)}(C) = 0$, т.е.

$$\limsup_{m\to\infty} m\left[\delta^H(C,\mathscr{P}_m)\right]^{\overline{\alpha}(C)} = 0,$$

в то время как

$$\limsup_{n\to\infty} m(P^n)\left[\delta^H(C,P^n)\right]^{\overline{\alpha}(C)} > 0.$$

Для $C \in \mathscr{C}_+^2$ понятия асимптотической эффективности и оптимальности по порядку совпадают. Совпадают они и для класса ВКТ с частично гладкой границей (см. замечание после неравенства (0.1.4)). Однако для класса $\mathscr{C}_*$, а, следовательно, и для класса $\mathscr{C}_\#$, они могут уже не совпадать. Заметим, наконец, что для того, чтобы некоторый метод был оптимален по порядку в классе $\mathscr{C}_\#$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тела $C \in \mathscr{C}_\#$ в порождаемой методом последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ выполнялось

$$\delta(C, P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}. \tag{0.3.5}$$

Мы рассмотрели МПА с точки зрения их эффективности. Рассмотрим их с точки зрения той информации, которая требуется в процессе их выполнения, прежде всего с точки зрения способа задания аппроксимируемого тела.

ВКТ, полиэдральную аппроксимацию которого следует построить, может быть задано следующими основными способами:

1) функцией принадлежности (в случае неявного способа задания аппроксимируемого тела задача ее вычисления сводится к задаче оптимизации с квадратичным функционалом):

$$\chi(x, C) := \{1\colon x \in C;\ 0\colon x \notin C\};$$

2) аналитически;

3) через опорную или дистанционную (калибровочную) функции, которые могут быть заданы также либо через алгоритм расчета для конкретного аргумента, либо аналитически (сводятся к задаче оптимизации с линейным функционалом);

4) другими, более сложными способами, например, возможностью построения проекции внешней точки на границу аппроксимируемого тела (сводится к задаче оптимизации с квадратичным функционалом).

В задачах принятия решений основным можно считать способ неявного задания аппроксимируемого тела через алгоритм расчета значений его опорной или дистанционной функции.

Наконец, рассмотрим различие между *итерационными* (step-by-step [29], [30], [60]; sequential [4], [35]) и неитерационными методами. В итерационных методах шаг за шагом осуществляется уточнение аппроксимации, при этом конечная точность может быть как задана заранее, так и определяться в процессе итераций. Среди итерационных методов выделяются методы *адаптивные* (active [4],

[35]), в которых, в отличие от методов неадаптивных (passive [4], [35]), строится последовательность многогранников, в которой построение описания каждого следующего многогранника существенно зависит от информации об аппроксимируемом теле, полученной на предыдущих итерациях. Так, например, на каждой итерации метода множество вершин (гиперграней) аппроксимирующего многогранника может увеличиваться на одну вершину (гипергрань), причем с учетом информации о близости текущего многогранника к аппроксимируемому телу. Заметим, однако, что гипотетические методы построения МНА не могут принадлежать к классу таких методов, так как множество $M(\Pi_{m+1})$ существенно отличается от $M(\Pi_m)$ (все вершины и гиперграни «сдвинуты»). В этом легко убедиться на примере правильных n- и $(n+1)$-угольников, являющихся МНА для круга.

Иногда ([4], [35]) различают *бесконечно продолжимые* и *конечные* итерационные методы. В последних в алгоритме метода существенно используется параметры, связанные с пороговой (конечной) аппроксимацией.

Пусть аппроксимируемое тело задано через опорную или дистанционную (калибровочную) функции и аппроксимирующий многогранник P построен некоторым МПА. Обозначим через $m^g(P)$ и $m^{g^*}(P)$ число вычислений опорной и дистанционной функции тела C, необходимое для построения P. Ясно, что для построения одной вершины (гиперграни) требуется как минимум один расчет опорной (дистанционной) функции. Пусть теперь $C \in \mathscr{C}$. По аналогии с определением оптимальности методов по порядку числа вершин (гиперграней) МПА назовем *оптимальным по порядку числа вычислений опорной* (*дистанционной*) *функции*, если он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$, в которой для любого $s>0$ такого, что выполняется (0.3.3), справедливо и

$$\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta,s}}{m^g(P^n)^s} \qquad (\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta,s}}{m^{g^*}(P^n)^s}). \tag{0.3.6}$$

0.4. Обзор известных методов полиэдральной аппроксимации

Приведем краткий обзор известных МПА. Значительная часть из них не носит практического характера и содержится в доказательствах различных утверждений, касающихся возможностей аппроксимации ВКТ многогранниками. Мы приводим эти методы для полноты картины.

1) Классическим примером служит МПА, с помощью которого в [1] была доказана возможность аппроксимации ВКТ многогранниками с любой степенью точности. В этом методе аппроксимируемое тело задается своей характеристической функцией, рассматривается метрическая ε-сеть, и в качестве аппроксимации берется выпуклая оболочка тех ее узлов, которые принадлежат аппроксимируемому телу. Нетрудно видеть, что в этом случае для построения полиэдральной аппроксимации с точностью ε в метрике Хаусдорфа требуется $O(\varepsilon^{-1/d})$ вычислений характеристической функции, при этом число вершин может оказаться не меньше $O(\varepsilon^{-1/(d-1)})$.

2) Примерами асимптотически оптимальных методов служат теоретические конструкции, использованные в [26], [51] и [27], [28], [29], [30] для получения асимптотических оценок, соответственно, (0.1.5) и (0.1.6)-(0.1.7). Для метрики Хаусдорфа они состоят в распределении вершин (точек касания) на поверхности тела, равномерном в смысле минимального покрытия поверхности одинаковыми шарами в метрике II квадратичной формы. Для метрики объема они состоят в распределении вершин (точек касания) на поверхности тела, равномерном в смысле минимизации объема, соответствующего триангуляции Делоне (разбиению Дирихле-Вороного) в метрике II квадратичной формы. Заметим, что конкретный вид таких множеств неизвестен даже для сферы S^2.

Единственным асимптотически оптимальным методом, который может использоваться на практике, является метод «баланса ошибок» из работы [25] для аппроксимации гладких выпуклых дисков с аналитически заданным вдоль границы интегралом от степенной функции кривизны (в этой работе получен первоначальный, двумерный вариант асимптотических оценок (0.1.5) и (0.1.6)-(0.1.7)). Обобщением этого аналитического подхода в тех же рамках двумерных гладких тел является работа [61], в которой рассматриваются асимптотически эффективные методы. Для метрики объема в случае произвольных двумерных тел метод «баланса ошибок» используется в [31], где получена оценка (0.1.9). Непонятно, однако, насколько эффективным является этот метод в случае выполнения условия (0.1.10) (см. замечание после (0.1.9)).

Для получения в этом «теоретическом» подходе конструктивных многомерных методов в [50], [60] предлагается метод проекции на тело точек, равномерно распределенных на гиперплоскостях, касательных к аппроксимируемому телу. Когда этих гиперплоскостей много и проектируемые точки расположены близко к аппроксимируемому телу, распределение их проекций будет «почти равномерным». Естественно, что этот МПА может быть использован только для аппроксимации тел из класса $\mathscr{C}^2$, причем ограниченность его применимости в реальных задачах очевидна.

3) «Конструктивным (well-defined) в некоторых случаях и «почти» конструктивным в других» является, по словам авторов, метод [62], [63], требующий знания (аналитического задания) объема произвольных l-мерных, $l \leq d$-1, сечений аппроксимируемого тела вдоль соответствующих осей координат. Такой метод сходится для произвольных тел в метрике объема со скоростью $O(m^{-2/(d-1)})$, где m – число вершин (гиперграней). При этом константа при $m^{-2/(d-1)}$ неизвестна, что затрудняет не только оценку эффективности метода, но и контроль над точностью аппроксимации. В работе [21] этот метод применен для аппроксимации эллипсоидов произвольной размерности (в этом случае объем требуемых сечений эллипсоидов задается простой аналитической формулой). К сожалению, по словам авторов, рассматриваемый подход «встретит большие препятствия в случае общих выпуклых тел». Таким образом, этот МПА не может применяться в большинстве приложений.

4) Не являются асимптотически эффективными также стохастические методы аппроксимации (сходимость вида $O(m^{--2/(d+1)})$ для метрики объема и $O(m^{-2/d(d+1)})$ – для метрики Хаусдорфа, см. [60]). В этом подходе вместо точности аппроксимации рассматривается ее математическое ожидание при аппроксимации выпуклой оболочкой случайных точек, распределенных внутри или на поверхности тела.

3) Из работ [13], [14], в которых получена оценка (0.1.2), можно вывести оптимальный по порядку в классе $\mathscr{C}_{\#}$ неадаптивный МПА. Этот метод основан на «равномерном» распределении точек на по-

верхности описанного шара и дальнейшем проектировании их на поверхность тел. Он требует нахождения проекции точки на поверхность ВКТ, что не всегда возможно в приложениях. Эффективность такого метода, как нетрудно видеть, зависит от асферичности аппроксимируемого тела[3].

4) В ряде работ рассматриваются неадаптивные МПА, основанные на вычислении опорной функции аппроксимируемого тела в узлах сетки, априорно заданной на единичной сфере направлений. После нахождения опорных гиперплоскостей в направлении узлов сетки и соответствующих им точек касания в качестве аппроксимации предлагается брать их пересечение или выпуклую оболочку этих точек. К числу таких работ принадлежат, например, [17] и [34]. При условии «равномерности» выбора узлов сетки направлений (см. сноску к предыдущему пункту) эти МПА являются асимптотически эффективными только в случае аппроксимации тел из класса $\mathscr{C}_+^2$.

Как показано в [4], [35], никакой неадаптивный метод аппроксимации, основанный на вычислении опорной функции в узлах сетки направлений, не может быть оптимальным по порядку при аппроксимации негладких тел. Этим указанные методы отличаются от неадаптивных МПА, рассмотренных в предыдущем пункте, в которых вместо вычисления опорной функции использовалась операция проектирования на аппроксимируемое тело.

Если, однако, известно, что аппроксимируемое тело является сильно выпуклым или пересечением сильно выпуклых тел[4], то, со-

---

[3] Задача «равномерного» распределения точек на поверхности многомерной сферы близка к проблеме минимального покрытия пространства шарами и сводится к построению минимального покрытия сферы поверхностными «кругами» равного диаметра. Эта задача изучается в рамках теории покрытий для сферических кодов (см. [54]). В настоящей работе мы не будем рассматривать эту сложную проблему. Заметим, что рассматриваемые нами АМПА дают, при аппроксимации шара, достаточно хорошее распределение вершин на его поверхности (см. [19], а также лемму 2.4.2).

[4] Пусть $C\in\mathscr{C}$. Назовем C ν-выпуклым множеством, если для любых $x,y\in C$ справедливо $B_{\nu\|x-y\|/2}((x+y)/2)\subset C$. Назовем *$C$ сильно выпуклым*, если оно ν-выпукло при некотором $\nu>0$. Множество сильно выпуклых компактных тел обозначим через $\mathscr{C}^{\circ}$. Согласно [34], сильно выпуклыми являются

гласно [34], неадаптивный МПА, основанный на вычислении опорной функции в узлах сетки направлений, оказывается оптимальным по порядку. При этом для оценки точности аппроксимации требуется знать параметр выпуклости, что возможно не во всех приложениях.

5) Промежуточное место между адаптивными и неадаптивными МПА занимает метод [4], в котором рассматривается способ построения аппроксимирующих внешних многогранников. Каждый следующий многогранник образуется из предыдущего путем пересечения его с некоторым опорным к аппроксимируемому телу полупространством. В этом методе направление нормали, задающее это полупространство, выбирается из узлов априорно заданной регулярной сетки на поверхности сферы направлений с учетом теоретической оценки локального отклонения уточняемого многогранника от аппроксимируемого тела. В [35] показано, что метод из [4] является субоптимальным по порядку числа гиперграней аппроксимирующего многогранника и числа вычислений опорной функции аппроксимируемого множества. Под субоптимальностью понимается при этом оптимальность с точностью до неустранимого логарифмического мультипликативного фактора, т. е. сходимость в метрике Хаусдорфа вида $O(m^{-2/(d-1)} \log m)$, где m – число гиперграней. Как нам представляется, появление этого фактора обусловлено априорным выбором сетки направлений, используемой, однако, адаптивно. Субоптимальные свойства метода из [4], [35] справедливы для плоских и трехмерных тел с гладкими и негладкими границами. При размерности пространства большей, чем три, субоптимальность сохраняется только при аппроксимации тел класса $\mathscr{C}_+^2$.

6) Рассмотрим теперь адаптивные методы полиэдральной аппроксимации (АМПА), обобщением которых явился класс методов, рассматриваемый в настоящей работе. В этих методах тело приближается последовательностью внутренних многогранников. В качестве нового аппроксимирующего многогранника выбирается выпуклая оболочка прежнего и не принадлежащей ему точки тела, выбранной из определенных соображений. В [64], [65], [66], [67] построенный

выпуклые тела вида $\{x \in \mathbb{E}^d: F(x) \le 0\}$, $F \in \boldsymbol{C}^2(\mathbb{E}^d)$, а также пересечения конечного числа тел этого вида.

многогранник уточняется в направлении той его гиперграни, где достигается наибольшее его отклонение от аппроксимируемого тела. Отметим, что эта идея впервые предложена, по-видимому, в [68], где рассматриваются несколько отличная двумерная задача – построение эффективной границы для выбора решения при двух критериях качества. Подход [68] получил также развитие для трехмерных задач (см. [69]), хотя способ решения не позволяет распространить его на большие размерности. Метод [64], [65], [66], [67] получил в дальнейшем развитии название метода «Уточнения Оценок» (УО) (см. историю этого вопроса в [7]).

В работе [70], вышедшей значительно позже указанных работ, предложено несколько методов, являющихся двумерными вариантами метода УО и метода из [4] и названных автором «сэндвичевыми» (sandwich) алгоритмами. Следует отметить, однако, что в работе [70] рассматриваются и некоторые другие принципы адаптации (чем, например, присоединение дальней точки). Однако эти принципы не могут быть распространены на многомерный случай. Аналогичные «сендвичевым» идеи рассматриваются и в работе [71]. Дальнейшего распространения на аппроксимацию более чем двумерных тел «сэндвичевы» алгоритмы не получили.

7) Метод УО был исследован и обобщен в наших работах [46], [18], [40]. В [37], [38] был введен класс АМПА, характеризуемых через H-схемы. Теория АМПА из этого класса был развита в работах [37], [38], [39], [42], [57], [43], [44], [45]. Для H-методов полиэдральной аппроксимации были получены верхние оценки скорости сходимости для произвольных ВКТ, была доказана оптимальность по порядку в классе $\mathcal{C}_{\#}$, были получены независящие от тела (в т.ч. от его асферичности) оценки асимптотической эффективности в классе $\mathcal{C}_{+}^{2}$. В рамках указанного подхода в [38], [41], [57], [43], [44], [45] были предложены новые методы аппроксимации, в том числе – оптимальные по числу вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого тела. Изложению этой теории и посвящена, в основном, настоящая работа.

Глава 1. Адаптивные методы полиэдральной аппроксимации (АМПА)

В первой главе будут введены классы адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, которые будут исследоваться в диссертации, а также приведены примеры конкретных методов из этих классов.

1.1. Итерационные методы и общие аппроксимационные схемы

Введем наиболее широким образом понятие итерационного (шагового, step-by-step, sequential) метода полиэдральной аппроксимации (с последовательно растущим числом вершин или гиперграней).

Определение 1.1.1. *Итерационным методом аппроксимации ВКТ $C \in \mathscr{C}$ вписанными (описанными) многогранниками* (с последовательно растущим числом вершин (гиперграней)) назовем совокупность из N отображений вида

$$\mathscr{P}_{m(P^0)+n-1}(C) \times (\Omega)^n \to \mathscr{P}_{m(P^0)+n}(C), n = 1,2,...,N, \qquad (1.1.1)$$

где P^0 – многогранник начального приближения, $P^0 \in \mathscr{P}(C)$, Ω – «информационное пространство» (см. [72]), состоящее из сведений об аппроксимируемом теле, которые могут быть получены на итерациях метода, а $(\cdot)^n$ есть n-кратное декартово произведение. Например, Ω может иметь вид

$$\{(u, g(u, C), p): u \in U, p \in T(u, C)\},$$

где U – конечное или бесконечное подмножество сферы направлений S^{d-1}.

Заметим, что введенное определение итерационного метода не предполагает обязательного увеличения на каждой итерации числа вершин (гиперграней) аппроксимирующих многогранников. Возможно даже уменьшение их фактического числа (см. определение класса многогранников $\mathscr{P}_m(C)$ в п. 0.1.1). Не требуется также частичного совпадения множества вершин на ближайших итерациях (т.е. множество вершин может полностью меняться от итерации к итерации). В определении речь идет о последовательном расширении класса аппроксимирующих многогранников (т.е. возможностей аппроксимации) за счет увеличения возможного числа вершин (гиперграней). С одной стороны, такое широкое определение итерационного метода позволяет включить в них (хотя бы условно) даже неадаптивные методы (например, переход от сетки направлений с n узлами к сетке с n+1 узлом) и методы построения МНА (задача перехода от многогранника Π_n к построению Π_{n+1}). С другой стороны, это определение позволяет дать общие оценки сложности рассматриваемых методов на основе теории оптимальной полиэдральной аппроксимации ВКТ (см. § 0.2).

В настоящей работе мы, как правило, будем рассматривать выпуклые тела, заданные своей опорной или дистанционной (калибровочной) функциями. Обозначим через $m^g(P)$ и $m^{g^*}(P)$ число вычислений опорной и дистанционной функции тела C, соответственно, необходимое для построения некоторым методом аппроксимирующего многогранника P. Для определенности, будем считать, что при вычислении опорной функции тела $g(u, C)$ находится одновременно некоторая точка касания из множества $T(u, C)$. Будем также считать, что при вычислении дистанционной функции тела $g^*(u, C)$ (фактически – граничной точки $u/g^*(u, C)$) находится некоторая внешняя нормаль в этой точке из множества $S(u/g^*(u, C), C)$). Число задач выпуклой оптимизации на множестве C, необходимое для построения аппроксимирующего многогранника P, обозначим через $m^{\text{opt}}(P)$. Ясно, что в нашей постановке

$$m^{\text{opt}}(P) = m^g(P) + m^{g^*}(P).$$

Ограничимся рассмотрением только случая, когда отображения (1.1.1) не зависят от N, т.е. случая *бесконечно-продолжимых* итерационных алгоритмов ([4]).

Конкретный *алгоритм* полиэдральной аппроксимации определяется способом выбора многогранника начальной аппроксимации P^0 и реализацией отображений (1.1.1) на итерациях, снимающей возможную неоднозначность порождаемой методом последовательности многогранников. В настоящей работе мы, как правило, будем употреблять термины метод и алгоритм как синонимы.

Из определения непосредственно следует, что, чем меньше итераций требует данный метод для достижения некоторой точности, тем меньшее число экспериментов с объектом аппроксимации, определяемых пространством $\mathbf{\Omega}$, он потребует и тем меньшее максимально возможное число вершин (гиперграней) будет иметь аппроксимирующий многогранник. Поэтому представляет также интерес изучение способов конструирования методов, оптимальных по числу итераций, вне зависимости от конкретного вида отображений (1.1.1). В случае, когда получение информации об аппроксимируемом теле требует значительных затрат времени и/или ресурсов, помимо эффективности с точки зрения числа вершин или гиперграней можно рассматривать эффективность с точки зрения числа итераций (шагов). Как и для задачи выпуклого программирования, в „интерпретации «шаг есть эксперимент с реальным объектом» такой подход, как правило, естествен, если сам объект сложен и трудности, связанные с обработкой данных эксперимента, малы по сравнению с проведением самого эксперимента" [72].

Определим теперь *общие аппроксимационные схемы* – схему восполнения [46], [18], [38] и схему отсечения [73].

Схема восполнения

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$. Тогда $(n+1)$-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбираем $p_n \in \partial C$.

Шаг 2. Кладем $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$.

Двумерная иллюстрация работы схемы восполнения приведена на рис. 1.1.1.

Конкретные методы, основанные на схеме восполнения, можно характеризовать способами решения двух задач:

1) способом выбора $p_n \in \partial C$;
2) способом построения $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$ в требуемом виде.

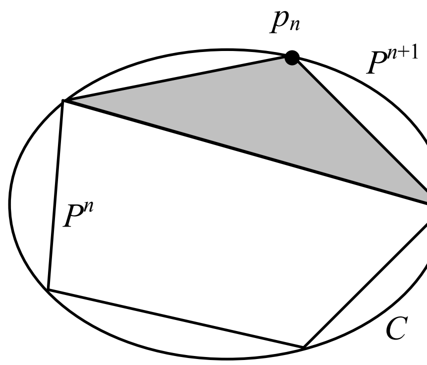

Рис. 1.1.1. Схема восполнения

Схема отсечения

Пусть построен $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$. Тогда $(n+1)$-я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбирается направление $u_n \in S^{d-1}$;

Шаг 2. Кладется $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$.

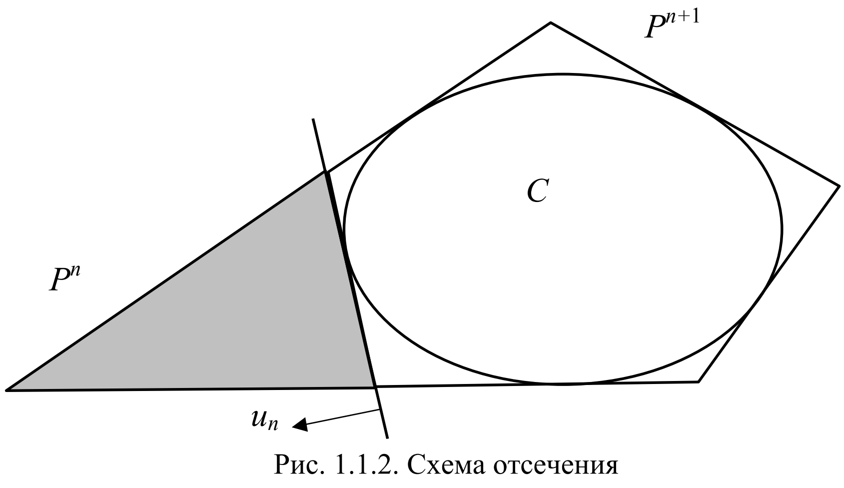

Рис. 1.1.2. Схема отсечения

Двумерная иллюстрация работы схемы отсечения приведена на рис. 1.1.2. Конкретные МПА, основанные на схеме отсечения, можно характеризовать способами решения задач:

1) способом выбора $u_n \in S^{d\text{-}1}$;

2) способом построения $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в требуемом виде.

Очевидно, что если в схеме восполнения (или отсечения) $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ (или $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$), то $P^{n+1} \in \mathscr{P}^i(C)$ (или $P^{n+1} \in \mathscr{P}^c(C)$). Если в некоторой реализации схемы восполнения многогранник начального приближения P^0 принадлежит $\mathscr{P}^i(C)$ ($\mathscr{P}^c(C)$), то и $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ ($P^n \in \mathscr{P}^c(C)$) для любого n. В этом случае будем говорить, что последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ является последовательностью *восполнения* (*отсечения*) для C или последовательностью многогранников, *порождаемой* данной схемой для тела C и многогранника начального приближения $P^0 \in \mathscr{P}(C)$.

Ясно, что для последовательности восполнения справедливо неравенство

$$m^t(P^n) \le m^t(P^0) + n, \tag{1.1.2}$$

а для последовательности отсечения – неравенство

$$m^f(P^n) \le m^f(P^0) + n. \tag{1.1.3}$$

Из этих свойств сразу следует, что при $n \ge N > 0$, $m(P^N) > m(P^0)$, справедливо неравенство

$$n \ge m(P^n)\left(1 - \frac{m(P^0)}{m(P^N)}\right). \tag{1.1.4}$$

Будем говорить, что итерационный метод аппроксимации $C \in \mathscr{C}$ *использует* или *реализует* некоторую итерационную схему, если он определяется набором отображений, удовлетворяющих свойствам рассматриваемой схемы. Если для любого $C \in \mathscr{C}$ схема восполнения или отсечения порождает последовательность многогранников, сходящуюся к C в метрике δ, то схему и порождаемую ею последовательность будем называть *аппроксимирующими.*

1.2. Хаусдорфовы (*H*-) схемы и последовательности

1.2.1. *H*-схемы

Приведем определения классов последовательностей вписанных и описанных многогранников, неявно характеризующих классы адаптивных методов полиэдральной аппроксимации (АМПА), порождающих их.

Определение 1.2.1. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ некоторой реализацией схемы восполнения, будем называть *хаусдорфовой или* $H(\gamma, C)$-*последовательностью восполнения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ справедливо

$$\delta^H(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C). \qquad (1.2.1)$$

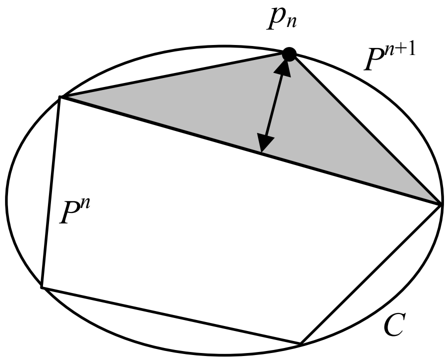

Рис. 1.2.1. H-схема восполнения

Двумерная иллюстрация работы H-схемы восполнения приведена на рис. 1.2.1. Так как

$$\delta^H(P^n, P^{n+1}) = \rho(p_n, P^n),$$

то условие (1.2.1) может быть переформулировано как

$$\rho(p_n, P^n) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C). \qquad (1.2.2)$$

Определение 1.2.2. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ некоторой реализацией схемы восполнения, будем называть $H_1(\gamma, C)$-*последовательностью восполнения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ для некоторого $u_n\in S(p_n, C)$ справедливо

$$g(u_n, C) - g(u_n, P^n) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C). \qquad (1.2.3)$$

Двумерная иллюстрация работы H_1-схемы восполнения приведена на рис. 1.2.2. Так как $u_n\in S(p_n, C)$, то $p_n\in T(u_n, C)$, поэтому

$$g(u_n, p_n) - g(u_n, P^n) = g(u_n, C) - g(u_n, P^n),$$

и условие (1.2.3) может быть переформулировано как

$$g(u_n, p_n) - g(u_n, P^n) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C). \qquad (1.2.4)$$

Так как

$$\rho(p_n, P^n) \geq g(u_n, p_n) - g(u_n, P^n),$$

то $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения есть $H(\gamma, C)$-последовательность.

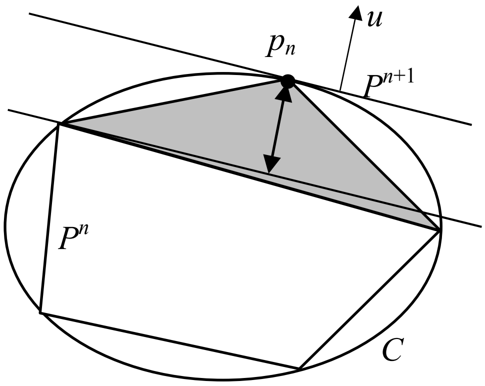

Рис. 1.2.2. H_1-схема восполнения

Определение 1.2.3. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ схемой отсечения, будем называть *$H(\gamma,C)$-последовательностью отсечения*, если существует константа $\gamma>0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ справедливо (1.2.1).

Двумерная иллюстрация работы H-схемы отсечения приведена на рис. 1.2.3. Так как

$$\delta^H(P^{n+1}, P^n) \geq g(u_n, P^n) - g(u_n, P^{n+1}) = g(u_n, P^n) - g(u_n, C),$$

то из

$$g(u_n, P^n) - g(u_n, C) \geq \gamma\, \delta^H(P^n, C) \qquad (1.2.5)$$

следует условие (1.2.1).

Определение 1.2.4. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}_0$ и $P^0 \in \mathscr{P}_0^c(C)$ схемой отсечения, будем называть *$H_1(\gamma, C)$-последовательностью отсечения*, если существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $n = 0, 1, ...$ для некоторого $p_n \in T(u_n, C)$ справедливо

$$g(u_n, t(p_n, P^n)) - g(u_n, C) \geq \gamma\delta(P^n, C). \qquad (1.2.6)$$

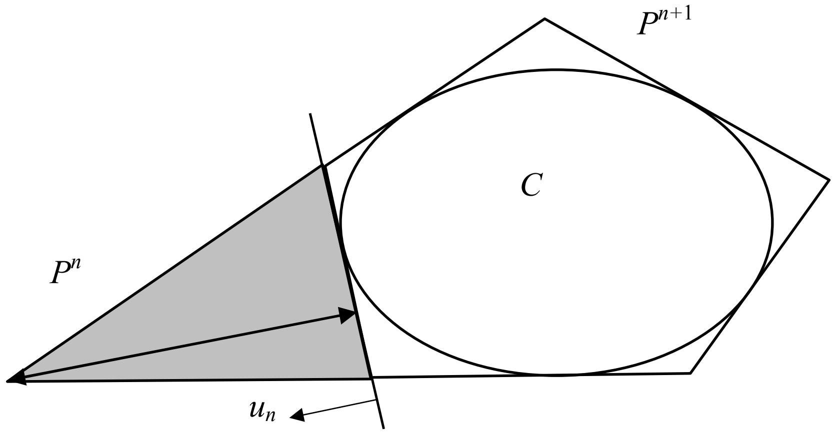

Рис. 1.2.3. H-схема отсечения

Двумерная иллюстрация H_1-схемы отсечения приведена на рис. 1.2.4. Так как

$$g(u_n, P^n) \geq g(u_n, t(p_n, P^n))$$

и

$$\delta(P^{n+1}, P^n) \geq g(u_n, P^n) - g(u_n, C),$$

то очевидно, что $H_1(\gamma, C)$-последовательность отсечения, есть, в то же время, $H(\gamma, C)$-последовательность отсечения.

Определение 1.2.5. Последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$, порождаемую для $C \in \mathscr{C}$ схемой восполнения (отсечения), будем называть *асимптотической $H(\gamma,C)$-последовательностью ($H_1(\gamma,C)$-последовательностью) восполнения (отсечения)*, если для любого ε, $0<\varepsilon<\gamma$, существует номер N такой, что последовательность $\{P^{N+n}\}_{n=1,2,...}$ является $H(\gamma-\varepsilon,C)$-последовательностью ($H_1(\gamma-\varepsilon,C)$-последовательностью) восполнения (отсечения).

Итерационную схему аппроксимации будем называть *(асимптотической) H- (H_1-) схемой для класса тел $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{C}$* (с константой γ), если для каждого $C \in \mathscr{C}^*$ она является (асимптотической) H- (H_1-) схемой с одной и той же константой γ. Очевидно, что (асимптотическая) H- (H_1-) схема для класса тел $\mathscr{C}^*$ с константой γ_1 является H- (H_1-) схемой для класса тел $\mathscr{C}^*$ с константой γ_2, где $\gamma_1 > \gamma_2$.

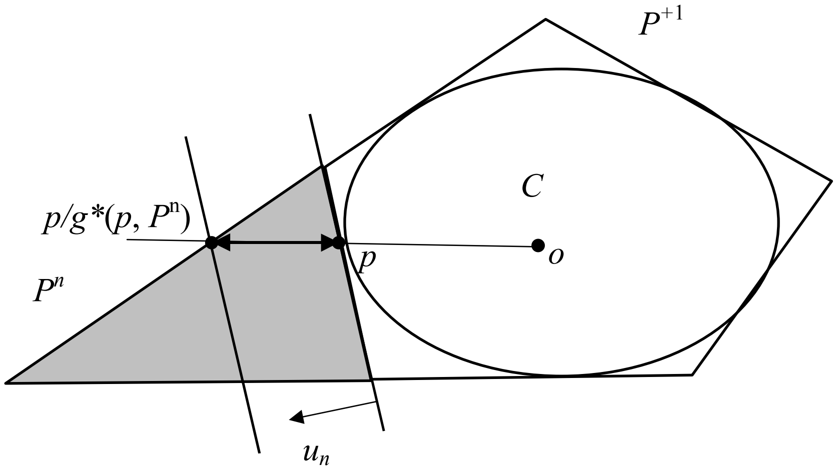

Рис. 1.2.4 H_1-схема отсечения

1.2.2. Базовые методы

Покажем, что H-схемы для любого класса тел $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{C}$ существуют (вопрос о существовании H_1-схем будет рассмотрен в следующем разделе, где будут приведены конкретные примеры). Для доказательства нам понадобятся следующие, «базовые» адаптивные методы [46] [18], [38]:

БАЗОВЫЙ МЕТОД ВОСПОЛНЕНИЯ (БВ)

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. Найти $p_n \in \partial C$: $\rho(p_n, P^n) = \delta^H(P^n, C)$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \text{conv}\ \{p_n, P^n\}$.

БАЗОВЫЙ МЕТОД ОТСЕЧЕНИЯ (БО)

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. Найти $u_n := \arg\max\ \{g(u, P^n) - g(u, C)\colon u \in S^{d-1}\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$.

Метод БВ обозначим через $M_{БВ}$, а метод БО обозначим через $M_{БО}$.

Теорема 1.2.1. *Для любого* $C\in\mathscr{C}$ *и* $P^0\in\mathscr{P}(C)$ *метод* $M_{БВ}$ *(*$M_{БО}$*) порождает* $H(1, C)$*-последовательность восполнения (отсечения).*

Доказательство. Утверждение теоремы для алгоритма БВ очевидно, а для алгоритма БО следует из (1.2.5) и того, что, согласно [48] (247), для любых $C_1,C_2\in\mathscr{C}$ справедливо

$$\delta^H(C_1, C_2) = \max \{| g(u, C_1) - g(u, C_2) |: u\in S^{d-1}\}. \qquad (1.2.7)$$

Теорема 1.2.1 доказана.

Покажем, что H- (а, следовательно, и H_1-) схемы являются аппроксимирующими, т.е. для любого ВКТ порождают в рассматриваемых метриках сходящиеся последовательности многогранников.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$, *есть H-последовательность для* $C\in\mathscr{C}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\delta(P^n, C) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала метрику Хаусдорфа. Для схем восполнения утверждение теоремы следует из компактности C, а для схемы отсечения – из компактности P^0. Действительно, для схемы восполнения рассмотрим последовательность точек $\{p_n\}_{n=1,2,...}$, присоединяемых к внутренним многогранникам на итерациях схемы восполнения, а для схемы отсечения – последовательность точек p_n, $p_n\in P^n$: $\rho(p_n, P^{n+1})=\delta^H(P^{n+1}, P^n)$. В силу компактности соответствующих множеств справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\rho(p_n, \{p_i\}_{i=1,...,n-1}) = 0.$$

Но $\rho(p_n, \{p_i\}_{i=1,2,...n-1})\geq\delta^H(P^{n+1}, P^n)$, откуда, с учетом (1.2.1), получаем $\lim_{n\to\infty}\delta^H(P^n, C) = 0$.

Из сходимости в метрике Хаусдорфа следует сходимость в метрике объема симметрической разности. Действительно, согласно [48] (341), для любого $C\in\mathscr{C}$ справедливо

$$\sigma(C) = \lim_{\lambda\to+0}\frac{\mu(C_\lambda)-\mu(C)}{\lambda}. \qquad (1.2.8)$$

Но для схем восполнения $P^n \subset C \subset [P^n]_\lambda = P^n{}_\lambda$, где $\lambda = \delta^H(C, P^n)$. Поэтому $\delta^S(P^n, C) = \mu(C) - \mu(P^n) \le \mu(P^n{}_\lambda) - \mu(P^n)$ и сходимость в метрике объема симметрической разности следует из конечности предела (1.2.8). Совершенно аналогично для схем отсечения $C \subset P^n \subset [C]_\lambda = C_\lambda$ и $\delta^S(P^n, C) = \mu(P^n) - \mu(C) \le \mu(C_\lambda) - \mu(C)$, откуда вытекает сходимость по объему.

Теорема 1.2.2 полностью доказана.

1.3. Хаусдорфовы АМПА

1.3.1. Хаусдорфовы методы

Методы, реализующие H-схемы, будем называть *хаусдорфовыми* (или H-) *методами.* Класс методов, использующих H-схему восполнения или отсечения (т.е. порождающих H-последовательности восполнения или отсечения с константой γ для $C \in \mathscr{C}$), будем обозначать через $\mathfrak{H}(\gamma, C)$. Если необходимо, будем различать *класс H-методов* восполнения $\mathfrak{H}^i(\gamma, C)$ и – отсечения $\mathfrak{H}^c(\gamma, C)$. Очевидно, что при $\gamma_1 \ge \gamma_2$ справедливо

$$\mathfrak{H}(\gamma_1, C) \subset \mathfrak{H}(\gamma_2, C).$$

Если для некоторой константы γ, некоторого класса $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{C}$ и некоторого метода М справедливо $\text{М} \in \mathfrak{H}(\gamma, C)$ для любого $C \in \mathscr{C}^*$, то будем писать $\text{М} \in \mathfrak{H}(\gamma, \mathscr{C}^*)$.

Из теоремы 1.2.1 сразу вытекают

Следствие 1.3.1. $\text{М}_{\text{БВ}} \in \mathfrak{H}^i(1, \mathscr{C})$, $\text{М}_{\text{БО}} \in \mathfrak{H}^c(1, \mathscr{C})$.

Следствие 1.3.2. $\mathfrak{H}(1, \mathscr{C}) \neq \varnothing$.

Класс методов, использующих H_1-схемы восполнения или отсечения (т.е. порождающих H_1-последовательности восполнения или отсечения с константой γ для тела $C \in \mathscr{C}$), будем обозначать через $\mathfrak{H}_1(\gamma, C)$. Если необходимо, будем различать *класс H_1-методов* восполнения $\mathfrak{H}^i{}_1(\gamma, C)$ и – отсечения $\mathfrak{H}^c{}_1(\gamma, C)$. Если для некоторой константы γ, некоторого класса $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{C}$ и некоторого метода М справедливо $\text{М} \in \mathfrak{H}_1(\gamma, C)$ для любого $C \in \mathscr{C}^*$, то будем писать $\text{М} \in \mathfrak{H}_1(\gamma, \mathscr{C}^*)$.

Если величина константы γ в некотором утверждении значения не имеет, класс H- (H_1-) методов будем обозначать через $\mathfrak{H}(\mathscr{C}^*)$

($\mathfrak{H}_1(\mathscr{C}^*)$).

Класс методов, использующих асимптотические H-схемы восполнения или отсечения (т.е. порождающих асимптотические H-последовательности восполнения или отсечения с константой γ для тела $C\in\mathscr{C}$), будем обозначать через ${}^a\mathfrak{H}(\gamma, C)$. Если необходимо, будем различать *класс асимптотических H-методов* восполнения ${}^a\mathfrak{H}^i(\gamma, C)$ и отсечения ${}^a\mathfrak{H}^c{}_1(\gamma, C)$. Если для некоторой константы γ, некоторого класса $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$ и некоторого метода М справедливо $М\in{}^a\mathfrak{H}(\gamma, C)$ для любого $C\in\mathscr{C}^*$, то будем писать $М\in{}^a\mathfrak{H}(\gamma, \mathscr{C}^*)$. Совершенно аналогично определим *класс асимптотических H_1-методов* ${}^a\mathfrak{H}_1(\gamma, C)$ и обозначение $М\in{}^a\mathfrak{H}_1(\gamma, \mathscr{C}^*)$. Ясно, что для любых $C\in\mathscr{C}$ и γ справедливо $\mathfrak{H}(\gamma, C)\subset{}^a\mathfrak{H}(\gamma, C)$.

Если величина константы γ в некотором утверждении значения не имеет, класс асимптотических H- (H_1-) методов будем обозначать через ${}^a\mathfrak{H}(\mathscr{C}^*)$ (${}^a\mathfrak{H}_1(\mathscr{C}^*)$).

В настоящем разделе будут рассмотрены конкретные методы, реализующие H- и H_1- схемы восполнения и отсечения.

Заметим, прежде всего, что приведенные выше (раздел 2 настоящей главы) базовые методы допускают и другую формулировку.

БАЗОВЫЙ$_1$ МЕТОД ВОСПОЛНЕНИЯ (БВ$_1$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, C) - g(u, P^n): u\in S^{d-1}\}$.

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \operatorname{conv} \{p_n, P^n\}$.

Действительно, из (1.2.7) следует, что в этом случае $\rho(p_n,P^n) = \delta^H(P^n,C)$. Наоборот, пусть $\rho(p_n, P^n) = \delta^H(P^n,C)$ и $p^* := \operatorname{proj}(p_n, P^n)$. Тогда для $u_n:=(p_n - p^*)/\| p_n - p^*\|$ справедливо $g(u_n, C) - g(u_n, P^n) = \delta^H(P^n,C)$ и, кроме того, $p_n\in T(u_n, C)$, что доказывает эквивалентность двух формулировок метода БВ.

БАЗОВЫЙ$_1$ МЕТОД ОТСЕЧЕНИЯ (БО$_1$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения

P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $p_n \in \partial P^n$: $\rho(p_n, C) = \delta^H(P^n, C)$.

b). Положить $u_n = (p_n - \text{proj}\,(p_n, C))/\|\, p_n - \text{proj}\,(p_n, C)\|$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$.

Действительно, если

$$u_n := \arg\max \{g(u, P^n) - g(u, C): u \in S^{d-1}\}$$

и $p_n \in T(u_n, P^n)$, то $\rho(p_n, C) = \delta^H(P^n, C)$. Наоборот, пусть $\rho(p_n, C) = \delta^H(P^n, C)$ и $p^* := \text{proj}\,(p_n, C)$. Тогда для $u_n := (p_n - p^*)/\|\, p_n - p^*\|$ справедливо $g(u_n, C) - g(u_n, P^n) = \delta^H(P^n, C)$, что доказывает эквивалентность двух формулировок метода БО.

Из описания метода БВ$_1$ и определения H_1-последовательности восполнения (1.2.3) непосредственно вытекают следующие теорема и следствия.

Теорема 1.3.1. *Для любого* $C \in \mathscr{C}$ *и* $P^0 \in \mathscr{P}^{\boldsymbol{i}}(C)$ *метод* $\text{М}_{\text{БВ}}$ *порождает* $H_1(1, C)$*-последовательность восполнения.*

Следствие 1.3.3. $\text{М}_{\text{БВ}} \in \mathfrak{H}^{\boldsymbol{i}}{}_1(1, \mathscr{C})$.

Следствие 1.3.4. $\mathfrak{H}^{\boldsymbol{i}}{}_1(1, \mathscr{C}) \neq \varnothing$.

Базовый метод восполнения (БВ) требует нахождения хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми вложенными компактами. Как это видно из его второго описания (БВ$_1$), эта задача требует информации о значении опорной функции на всей сфере направлений. Т.е. в этом случае информационное множество $\boldsymbol{\Omega}$ принимает вид $\{(u, g(u, C), p): u \in S^{d-1}, p \in T(u, C)\}$. Задача нахождения хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми компактами в общем случае слишком сложна, чтобы использоваться в приложениях.

1.3.2. Метод «Уточнения Оценок»

Следующий метод «Уточнения Оценок» (УО) (см. историю его создания в [7] и § 0.4) требует на каждой итерации метода конечного числа вычислений опорной функции и является в настоящее время основным АМПА, используемым на практике. Первоначально метод УО был сформулирован для аппроксимации проекций выпуклых множеств. Мы приводим упрощенное описание этого метода, рассчитанное на аппроксимацию произвольных ВКТ и исследование его скорости сходимости, предложенное в [46], [18], [40].

МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК (УО)

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, C) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Метод УО обозначим через $\mathrm{M}_{\text{УО}}$. Двумерная иллюстрация работы метода УО приведена на рис. 1.3.2.1.

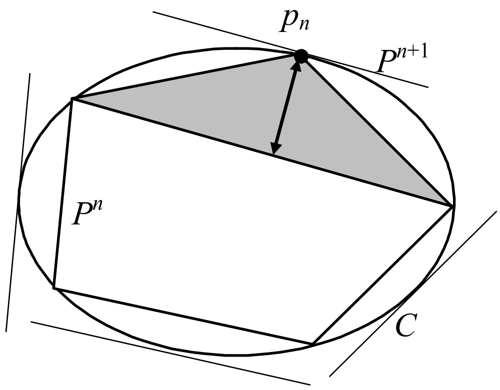

Рис. 1.3.2.1. Метод Уточнения Оценок

На шаге 1а) метода УО требуется рассчитать значения опорной функции аппроксимируемого тела на множестве $M^f(P^n)$. Т.е. в этом случае информационное множество $\mathbf{\Omega}$ имеет вид $\{(u, g(u, C), p): u \in U, p \in T(u, C)\}$, где U – конечное подмножество сферы направлений S^{d-1}. Ясно, что при конкретной реализации метода достаточно вычислять значения опорной функции на множестве $M^f(P^n) \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} M^f(P^i)$. Кроме того, необходимо найти множество $M^f(\mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\})$. Эта задача может быть решена, например, методами свертывания систем линейных неравенств (см. [8], [7]).

Далее, на каждой итерации метода УО, помимо внутренней оценки множества C многогранником P^n, имеется информация о многограннике внешней аппроксимации:

$$\overline{P}^n := \{x \in \mathbb{E}^d :< u, x >\leq g(u, C), u \in M^f(P^n)\}.$$

Используя идею предварительной оценки значений опорной функции $g(u,C)$ для $u \in M^f(P^n)$ на многограннике $\overline{P}^{n-1}$, $g(u, C) \leq g(u, \overline{P}^{n-1})$, можно еще больше сократить число вычислений опорной функции аппроксимируемого множества [46]. Существуют и другие способы предварительной оценки значений $g(u,C)$ (см., например, метод О.Л.Черных в [8] и [7]). Тем не менее, как показывает практика (см., например, [18], [22], а также п. 5.4.2), число вычислений опорной функции аппроксимируемого тела в методе УО остается значительным.

В настоящей работе мы не рассматриваем технические подробности способов выбора многогранника начальной аппроксимации P^0, а также методов поддержания выпуклой оболочки многогранника при последовательном присоединении к нему вершин (об этих способах и методах см., например, [74], [75], [76], [8], [7], [9], [10]).

Дальнейшая часть пункта будет посвящена доказательству принадлежности метода УО к классу хаусдорфовых АМПА. В частности, покажем, что при достаточной точности аппроксимации метод УО можно считать реализацией H_1-схемы с константой $\gamma = 1/\omega(C)$, а при $C \in \mathscr{C}^2$ – H_1-схемы с константой $\gamma = 1$.

Пусть $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ и $P \in \mathscr{P}$. Для исследования метода УО введем и изучим некоторые свойства функции

$$\delta_P(C_1, C_2) = \max\{| g(u, C_1) - g(u, C_2) |: u \in M^f(P)\}.$$

Прежде всего, отметим, что для последовательности $\{P^n\}_{n=1,2,\ldots}$, порождаемой для $C \in \mathscr{C}$ методом УО, при $n=0,1,\ldots$ справедливо

$$g(u_n, C) - g(u_n, P^n) = \delta_{P^n}(P^n, P^{n+1}) = \delta_{P^n}(P^n, C). \tag{1.3.1}$$

Кроме того, функция $\delta_P(\cdot,\cdot)$ является псевдометрикой на $\mathscr{C}$ (т.е. ее значения всегда неотрицательны, $\delta_P(C, C) = 0$ для любого $C \in \mathscr{C}$ и выполняется неравенство треугольника). С учетом (1.2.7) получаем

$$\delta_P(C_1, C_2) \leq \delta^H(C_1, C_2). \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.3.2. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$, $P\in\mathscr{P}$. *Тогда*

$$\delta^H(P, C)/\omega(P) \le \delta_P(P, C) \le \delta^H(P, C). \qquad (1.3.3)$$

Пусть, кроме того, $C\in\mathscr{C}_+^2$, $P\in\mathscr{P}^i(C)$ *и* $\delta^H(P, C) < r_{\min}(C)$, *тогда*

$$\delta^H(P, C) - \delta^H(P, C)^2/r_{\min}(C) \le \delta_P(P, C) \le \delta^H(P, C). \qquad (1.3.4)$$

Доказательство теоремы основано на следующих ниже леммах. Пусть $x\in\partial P$. Обозначим

$$M^f(x, P) := \{u\in M^f(P): x\in T(x, P)\},$$

$$\xi(x, P) := \min\{\|u\|: u\in\operatorname{conv} M^f(x, P)\},$$

$$\xi(P) := \min\{\xi(x, P) : x\in\partial P\}.$$

Пусть $K\subset\mathbb{E}^d$ – конус. Через $K^* := \{x\in\mathbb{E}^d: <x, y>\le 1, y\in K\}$ обозначим сопряженный конус для K. Пусть $X\in\mathscr{C}$ и $x\in\mathbb{E}^d$, $x\notin X$, тогда конусом видимости X из точки x назовем пересечение всех гиперпространств, опорных одновременно к X и x.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $B_r(z)\subset P$ *и* $x\in\partial P$. *Тогда*

$$\xi(x, P) \ge r/\rho(x, z). \qquad (1.3.5)$$

Доказательство. Пусть R – конус видимости $B_r(z)$ из точки x. Так как $R\subset\bigcap_{u\in M^f(x,P)} L(u,P)$, то $\operatorname{conv} M^f(x, P)\subset(R\text{-}x)^*$, где $(R\text{-}x)^*$ – сопряженный конус для конуса $K := R\text{-}x$, т.е. для R, сдвинутого вершиной в начало координат. Поэтому $\xi(x, P)$ не меньше высоты «круговой» пирамиды с конусом K^* при вершине и образующей единичной длины.

Рассмотрим сечение указанной пирамиды двумерной плоскостью, проходящей через прямую $(0, z\text{-}x)$. Из подобия треугольников получаем утверждение леммы.

Лемма 1.3.1 доказана.

Лемма 1.3.2. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$ *и* $P\in\mathscr{P}$. *Тогда*

$$\xi(P)\delta^H(P, C) \le \delta_P(P, C). \qquad (1.3.6)$$

Доказательство. Пусть $u\in S^{d\text{-}1}$, $x\in T(u, P)$. По теореме Фаркаша (см., например, [77], теорема 2.7) $u\in\operatorname{cone} M^f(x, P)$, т.е. допускает представление $u=\sum_{w\in M^f(x,P)}\lambda w, \lambda\ge 0$. Поэтому $u=v/\|v\|$, где $v\in\operatorname{conv} M^f(x, P)$. Далее

$g(u, C) - g(u, P) = [g(v, C) - g(v, P)] / \|v\| \le [g(v, C) - g(v, P)] / \xi(x, P)$.
Пусть $M^f(x, P) := \{u^1, \ldots , u^N\}$. Тогда существует разложение v в выпуклую комбинацию

$$v = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u^i, \lambda \ge 0, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 .$$

Так как $x \in T(v, P)$, то

$$g(v,P) = < v, x > = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i < u^i, x > = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i g(u^i, P) .$$

В силу выпуклости опорной функции

$$g(v,P) \le \sum_{i=1}^{N} \lambda_i g(u^i, C) .$$

Поэтому

$$g(u,C) - g(u,P) \le \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (g(u^i,C) - g(u^i,C)) / \xi(x,P) \le$$

$$\le \max\{g(u',C) - g(u',P) : u' \in M^f(x,P)\} / \xi(x,P) \le \delta_p(P,C) / \xi(P).$$

Последняя оценка не зависит от u. Беря максимум по $u \in S^{d-1}$ и учитывая (1.2.7), получаем утверждение леммы.

Лемма 1.3.2 доказана.

Лемма 1.3.3. *Пусть $P \in \mathscr{P}$. Тогда*

$$\xi(P) \ge 1/\omega(P). \qquad (1.3.7)$$

Утверждение леммы непосредственно вытекает из леммы 1.3.1.

Теорема Бляшке о качении ([78], [79], [80], [81], [82]). *Пусть $C \in \mathscr{C}_+^2$ и $x \in \partial C$. Тогда для любого $r \le r_{\min}(C)$ существует $z \in C$ такая, что $B_r(z) \subset C$ и $x \in B_r(z)$. Кроме того, для любого $r \ge r_{\max}(C)$ существует $z \in \mathbb{E}^d$ такая, что $C \subset B_r(z)$ и $x \in B_r(z)$.*

Лемма 1.3.4. *Пусть $C \in \mathscr{C}$, $z \in C$ и r, $r > 0$, такие, что $B_r(z) \subset C$. Тогда для любого $C' \in \mathscr{C}$ такого, что $C' \subset C$ и $r' := \delta^H(C', C) < r$, имеем $B_{r-r'}(z) \subset C'$.*

Доказательство. Для $\varepsilon>0$ обозначим $(C)_{-\varepsilon} := \{x\in\mathbb{E}^d: B_\varepsilon(x)\subset C\}$. Докажем, что $B_{r-r'}(z)\subset(C)_{-r'}\subset C'$. Тем самым утверждение леммы будет доказано.

Пусть $x\in B_{r-r'}(z)$, но $x\notin(C)_{-r'}$. Тогда $B_{r'}(x)\subset B_r(z)\subset C$, получили противоречие. Значит, $B_{r-r'}(z)\subset(C)_{-r'}$.

Пусть $x\in(C)_{-r'}$, но $x\notin C'$. По определению x, $B_{r'}(x)\subset C$. Пусть $x' :=$ proj (x, C') и l – луч с началом в x', проходящий через x. Обозначим через x'' точку пересечения l с $\partial B_{r'}(x)$ такую, что $x\in[x', x'']$. Ясно, что $x''\in C$. Тогда $\delta^H(C', C) \geq \rho(x'', C') = \rho(x', x'') > r'$, получили противоречие. Значит, $(C)_{-r'}\subset C'$.

Лемма 1.3.4 доказана.

Лемма 1.3.5. *Пусть* $C\in\mathscr{C}_+^2$, $P\in\mathscr{P}^i(C)$. *Тогда для любого* ε, $\delta^H(P,C) \leq \varepsilon < r_{\min}(C)$*, выполняется*

$$\xi(P) \geq (r_{\min}(C) - \varepsilon) / r_{\min}(C). \tag{1.3.8}$$

Доказательство. Пусть $x\in\partial P$ *и* y – ближайшая к x точка ∂C. Обозначим $r_{\min}(C)$ через r и $\rho(x, y)$ через ρ. Согласно теореме о качении Бляшке существует $z\in C$ такая, что $B_r(z)\subset C$ и $y\in B_r(z)$. Пусть $u\in S^{d-1}$ такая, что $y\in T(u, C)$. Тогда $B_r(z)$ и $B_\rho(x)$ имеют в точке y общую касательную гиперплоскость $l(u, C)$. Поэтому x и z лежат на одном луче, выходящем из точки y. Согласно лемме 1.3.4 справедливо $B_{r-\varepsilon}(z)\subset P$. Но $x\in\partial P$, поэтому $x\in[y, z]$. Подставляя в (1.3.5) радиус шара $r-\varepsilon$ и $r \geq \rho(x, z)$, получаем $\xi(x, P)\geq(r-\varepsilon)/r$. Последняя оценка не зависит от x, что доказывает (1.3.8).

Лемма 1.3.5 доказана.

Доказательство теоремы 1.3.2. Утверждение (1.3.3) следует непосредственно из (1.3.6) и (1.3.7), а утверждение (1.3.4) следует из (1.3.6) и (1.3.8).

Теорема 1.3.2 доказана.

Теорема 1.3.3. *Для любых* $C\in\mathscr{C}$ *и* $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ *метод* $\mathrm{M_{YO}}$ *порождает* $H_1(r/R, C)$*-последовательность восполнения, где* $\gamma(P^0, C) := r/R$, *и* $B_r(z)\subset P^0\subset C\subset B_R(z)$, $z\in\operatorname{int} P^0$, *таким образом*

$$\mathrm{M_{YO}}\in\mathfrak{H}^i{}_1(\gamma(P^0, C), C).$$

Доказательство. Из (1.3.1) и (1.3.3) следует, что для $n = 0,1,...$

справедливо

$$\delta^H(P^n, P^{n+1}) \geq \delta_{P^n}(P^n, P^{n+1}) = \delta_{P^n}(P^n, C) \geq \delta^H(P^n, C)/\omega(P^n).$$

Но $\omega(P^n) \leq \gamma = R/r$, где R и r определены в утверждении теоремы. Поэтому $\delta^H(P^n, P^{n+1}) \geq \gamma\delta^H(P^n, C)$. Это означает, что $М_{УО}$ порождает $H(r/R, C)$-последовательность восполнения. Кроме того, для p_n и u_n, выбираемых на шаге 1 итерации метода УО, справедливо $p_n \in T(u_n, C)$, а значит, $u_n \in S(p_n, C)$ и, по (1.3.1), $g(u_n, C) - g(u_n, P^n) \geq \gamma\delta^H(P^n, C)$. Это означает, что $М_{УО}$ порождает $H_1(r/R, C)$-последовательность восполнения.

Теорема 1.3.3 доказана.

Следствие 1.3.5. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2\ldots}$ *– последовательность многогранников, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}$ *и любого* $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ *методом* $М_{УО}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P^n, C) = 0. \tag{1.3.9}$$

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теорем 1.2.2 и 1.3.3.

Теорема 1.3.4. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2\ldots}$ *– последовательность многогранников, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}$ *и любого* $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ *методом* $М_{УО}$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер* N *такой, что* $\{P^n\}_{n=N,N+1\ldots}$ *есть* $H_1((1 - \varepsilon)/\omega(C), C)$*-последовательность восполнения*.

Доказательство. Пусть $z \in C$, r, R таковы, что $B_r(z) \subset C \subset B_R(z)$ и $\omega(C) = R/r$. Из (1.3.9) следует, что для любого ε', $0<\varepsilon'$, существует N такой, что $\delta^H(P^n, C) \leq \varepsilon'$. Выберем $\varepsilon' := r\varepsilon < r$. По лемме 1.3.4 справедливо $B_{r-\varepsilon'}(z) \subset P^N$. По теореме 1.3.3 получаем, что $\{P^n\}_{n=N,N+1\ldots}$ есть H_1-последовательность восполнения с константой $(r-\varepsilon')/R = (1-\varepsilon)\omega(C)$.

Теорема 1.3.4 доказана.

Следствие 1.3.6. *Для любого* $C \in \mathscr{C}$ *и любого* $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ *выполняется*

$$М_{УО} \in {}^{a}\mathfrak{H}^{i}_{1}(1/\omega(C), C).$$

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.3.4.

Теорема 1.3.5. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2...}$ *– последовательность многогранников, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *и любого* $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ *методом* $M_{УО}$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер N такой, что* $\{P^n\}_{n=N,N+1...}$ *есть* $H_1(1 - \varepsilon, C)$*-последовательность восполнения.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon' := r_{\min}(C)\varepsilon < r_{\min}(C)$. Из (1.3.9) следует, что существует N такой, что $\delta^H(P^N, C)\le\varepsilon'$. Из (1.3.1) и (1.3.4) следует, что для $n = N, N + 1, \ldots$ справедливо

$$\delta^H(P^n, P^{n+1}) \ge \delta_{P^n}(P^n, P^{n+1}) = \delta_{P^n}(P^n, C) \ge$$

$$\ge \delta^H(P^n, C)(1 - \frac{\varepsilon'}{r_{\min}(C)}) = (1-\varepsilon)\delta^H(P^n, C).$$

Теорема 1.3.5 доказана.

Следствие 1.3.7. $M_{УО}\in {}^a\mathfrak{H}^i{}_1(1, \mathscr{C}_+^2)$.

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 1.3.5.

1.3.3. Методы «Уточнения Внешних Оценок»

Приведем теперь аналоги метода УО, сформулированные в [57] на основе теории двойственности АМПА (см. гл. 3), которые позволяют строить H_1-последовательности отсечения.

ПЕРВЫЙ МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ВНЕШНИХ ОЦЕНОК (УВО$_1$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ в виде множества $M^t(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. a). Найти $p_n := \arg\max \{\rho(p, p/g^*(p,C)) : p\in M^t(P^n)\}$.

b). Найти $u_n\in S(p_n / g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

Метод УВО$_1$ обозначим через $M_{УВО1}$. Двумерная иллюстрация работы метода УВО$_1$ приведена на рис. 1.3.3.1.

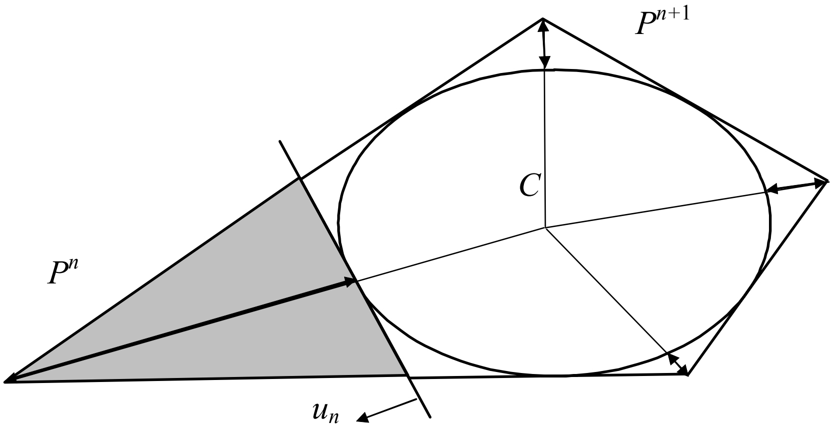

Рис. 1.3.3.1. Первый метод Уточнения Внешних Оценок

Таким образом, в этом методе сначала находится вершина внешнего многогранника, наиболее отстоящая (вдоль луча из начала координат) от аппроксимируемого тела, и в качестве отсекающей плоскости выбирается опорная в точке пересечения соответствующего луча с телом.

Второй Метод Уточнения Внешних Оценок (УВО$_2$).

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ в виде множества $M^t(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти

$$p_n := \arg\max \{g(u(p), p) - g(u(p), C): p\in M^t(P^n),$$
$$\text{где } u(p)\in S(p/g^*(p, C), C)\}.$$

b). Положить $u_n := u(p_n)\in S(p_n /g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

Метод УВО$_2$ обозначим через $\text{М}_{\text{УВО2}}$. Двумерная иллюстрация работы метода УВО$_2$ приведена на рис. 1.3.3.2.

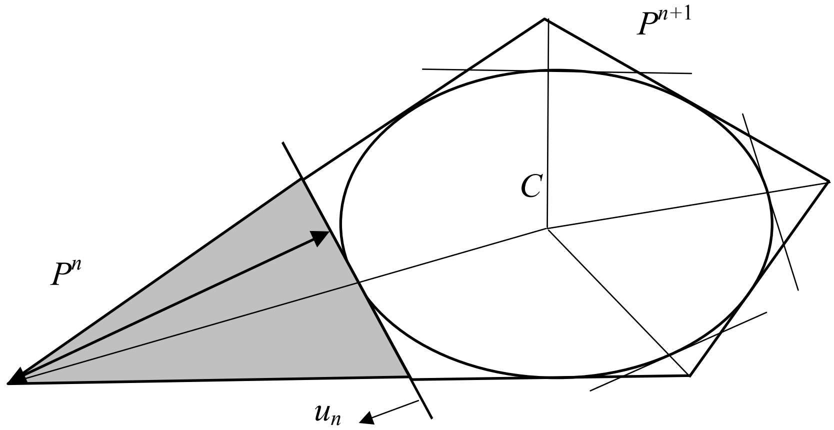

Рис. 1.3.3.2. Второй метод Уточнения Внешних Оценок

Таким образом, в этом методе для каждой вершины внешнего многогранника сначала находится некоторая опорная гиперплоскость в точке пересечение луча, соединяющего начало координат с данной вершиной. Среди них в качестве отсекающей выбирается опорная гиперплоскость, от которой соответствующая ей вершина лежит на наибольшем расстоянии.

На шаге 1а) методов УВО$_1$ и УВО$_2$ требуется для нахождения точки $t(p_n, C) = p_n/g^*(p_n, C)$ найти значение дистанционной функции аппроксимируемого тела на множестве $M^t(P^n)$, т.е. решить конечное число задач выпуклой оптимизации. Из определения дистанционной функции следует, что в этом случае информационное множество Ω имеет вид $\{(p, g^*(u, C), u)\colon p\in U, u\in S(p/g^*(p,C), C)\}$, где U – конечное подмножество сферы направлений S^{d-1}. Ясно, что при конкретной реализации методов достаточно вычислять значения дистанционной функции на множестве $M^t(P^n)\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}M^t(P^i)$. Кроме того, необходимо найти множество $M^t(P^n\cap L(u_n, C))$. Эта задача может быть решена, например, методами свертывания систем линейных неравенств (см. [8], [7], [9], [10]).

Лемма 1.3.6. *Пусть* $C\in\mathscr{C}_0$, $p\notin C$, $u\in S(p/g^*(p,C), C)$. *Тогда*

$$g(u, p) - g(u, C) \geq \rho(p, t(p, C))/\omega_0(C). \qquad (1.3.10)$$

Доказательство. Пусть $p' := t(p, C) = p/g^*(p, C)$. Тогда $u\in S(p', C)$. Поэтому из подобия треугольников получаем

$$\rho(p, t(p, C))/\|p'\| = \rho(p, l(u, C))/\rho(0, l(u, C)).$$

Но $\rho(p, l(u, C)) = g(u, p) - g(u, C)$, $\rho(0, l(u, C)) = g(u, C) \geq r_0(C)$, $\|p'\| \leq R_0(C)$.

Лемма 1.3.6 доказана.

Теорема 1.3.6. *Для любых* $C\in\mathscr{C}_0$ *и* $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ *методы* $М_{УВО1}$ *и* $М_{УВО2}$ *порождают* $H_1(1/\omega_0(C), C)$*-последовательности отсечения, т.е.*

$$М_{УВО1}, М_{УВО2}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C).$$

Доказательство. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть рассматриваемая последовательность многогранников. Для p_n и u_n, определенных в формулировках методов $УВО_1$ и $УВО_2$, по лемме 1.3.6 справедливо

$$g(u_n, p_n) - g(u_n, C) \geq \frac{1}{\omega_0(C)}\rho(p_n, t(p_n, C)) =$$

$$= \frac{1}{\omega_0(C)}\max\{\rho(p, t(p, C)) : p\in M^t(P^n)\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\omega_0(C)}\max\{\rho(p, C) : p\in M^t(P^n)\} = \frac{\delta(P^n, C)}{\omega_0(C)}.$$

Таким образом, $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H(1/\omega_0(C), C)$-последовательность. Пусть $q_n := t(p_n, C)$. Тогда $p_n = t(q_n, P^n)$ и $u_n\in S(q_n, C)$, откуда

$$g(u_n, t(q_n, P^n)) - g(u_n, C) \geq \gamma\delta(P^n, C)$$

при $\gamma = 1/\omega_0(C)$, что характеризует $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ как H_1-последовательность.

Теорема 1.3.6 доказана.

Следствие 1.3.8. *Для любого* $C\in\mathscr{C}_0$

$$\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C) \neq\varnothing.$$

Лемма 1.3.7. *Пусть* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+{}^2$, $p\notin C$, $u\in S(p/g^*(p,C), C)$ и $h := g(u, p) - g(u, C)$ *и* $r:=r_{\min}(C)$. *Тогда*

$$\rho(p, C) \leq [(r + h)^2 + h^2 (\omega_0(C)^2 - 1)]^{1/2} - r. \qquad (1.3.11)$$

Доказательство. Пусть $p' := t(p, C) = p/g^*(p, C)$. Тогда $u\in S(p', C)$.

Пусть $B_r(z)$ такой, что $B_r(z)\subset C$, $p'\in B_r(z)$ (по теореме о качении Бляшке такой шар всегда существует). Ясно, что $B_r(z)$ касается $l(u, C)$ в точке p'. Тогда

$$\rho(p, C) \le \rho(p, z) - r = [(r + h)^2 + \rho(p, p')^2 - h^2]^{1/2} - r.$$

Но, по лемме 1.3.6, $\rho(p, p') \le \omega_0(C)\, h$, откуда получаем утверждение леммы.

Лемма 1.3.7 доказана.

Теорема 1.3.7. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2,\dots}$ *последовательность многогранников, порождаемая методом* $\mathrm{M}_{\text{УВО2}}$ *для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$, $P^0\in\mathscr{P}_0$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует* N *такое, что* $\{P^n\}_{n=N,N+1,\dots}$ *является* $H_1(1-\varepsilon, C)$*-последовательностью отсечения.*

Доказательство. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ есть рассматриваемая последовательность многогранников. Прежде всего докажем, что для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при $n\ge N$ для любых $p\in M^t(P^n)$ и $u\in S(p', C)$, $p' := t(p, C) = p/g^*(p, C)$ справедливо

$$\rho(p, C) \le (1+\varepsilon)[g(u, p) - g(u, C)].$$

Обозначим $h := g(u, p) - g(u, C)$. В силу сходимости $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ величина h может быть сделана сколь угодно малой для всех $p\in M^t(P^n)$, и $u\in S(p', C)$. По лемме 1.3.7 имеем

$$\rho(p, C) \le [(r + h)^2 + h^2\,(\omega_0(C)^2 - 1)]^{1/2} - r \le (1 + \varepsilon)\, h$$

при достаточно малом h.

Далее, пусть ε задано в условии теоремы и N такое, что при $n\ge N$ для любых $p\in M^t(P^n)$ и $u\in S(p', C)$, $p' := t(p, C) = p/g^*(p, C)$, справедливо

$$\rho(p, C) \le (1-\varepsilon)^{-1}[g(u, p) - g(u, C)].$$

Тогда

$$\delta(P^n, C) = \max\,\{\rho(p, C)\colon p\in M^t(P^n)\} \le$$
$$\le (1-\varepsilon)^{-1} \max\,\{g(u(p), p) - g(u(p), C)\colon p\in M^t(P^n),\ u(p)\in S(p/g^*(p, C), C)\},$$

откуда $(1-\varepsilon)\ \delta(P^n, C) \le g(u_n, p_n) - g(u_n, C)$, где p_n и u_n, определены в формулировке метода УВО_2.

Теорема 1.3.7 доказана.

Итак, метод отсечения УВО_2 в гладком случае асимптотически порождает $H_1(1, C)$-последовательность отсечения. Таким образом, метод УВО_2 обладает свойствами, аналогичными свойствам метода

«Уточнения Оценок» (УО). Из доказанной теоремы непосредственно вытекают

Следствие 1.3.9. $\mathrm{M}_{\text{УВО2}} \in {}^{a}\mathfrak{H}^{c}_{1}(1, \mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_+^2)$.

Следствие 1.3.10. ${}^{a}\mathfrak{H}^{c}_{1}(1, \mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_+^2) \neq \varnothing$.

1.4. Нехаусдорфовы АМПА

В предыдущем параграфе был рассмотрен ряд АМПА, относящихся к классу хаусдорфовых или H-методов. Во всех этих методах число вычислений опорной или дистанционной функции на каждой из итераций (т.е. при увеличении на единицу числа вершин или гиперграней аппроксимирующего многогранника) оставалось значительным. Каждая такая задача требует решения задачи выпуклой оптимизации линейного функционала на аппроксимируемом множестве. В то же время во многих приложениях (в том числе и в задачах принятия решений) большое значение имеет проблема построения аппроксимации с минимально возможным числом решений таких задач. Для решения этой проблемы в [46], [41] был предложен метод «Сближающихся Многогранников» (СМ). В этом методе аппроксимируемое тело приближается парой из вписанного и описанного многогранников. На каждой итерации к множеству вершин вписанного многогранника добавляется одна вершина и к множеству гиперграней описанного многогранника добавляется одна гипергрань. В методе СМ вместо расчета значений опорной функции аппроксимируемого тела существенно используются значения опорных функций аппроксимирующих многогранников. Поэтому на каждой итерации вычисляется только одно значение опорной функции аппроксимируемого тела. Благодаря такой особенности, метод СМ в гладком случае оказывается оптимальным не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого тела. К сожалению, для негладких тел оптимальной по порядку скорости сходимости по указанным параметрам получить не удается.

Метод Сближающихся Многогранников (СМ)

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ построены $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ и

$Q^n \in \mathscr{P}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n)\colon u \in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить $P^{n+1} := \mathrm{conv}\, \{p_n, P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n \cap L(u_n, C)$.

Метод СМ обозначим через M_{CM}. Двумерная иллюстрация работы метода СМ приведена на рис. 1.4.1.

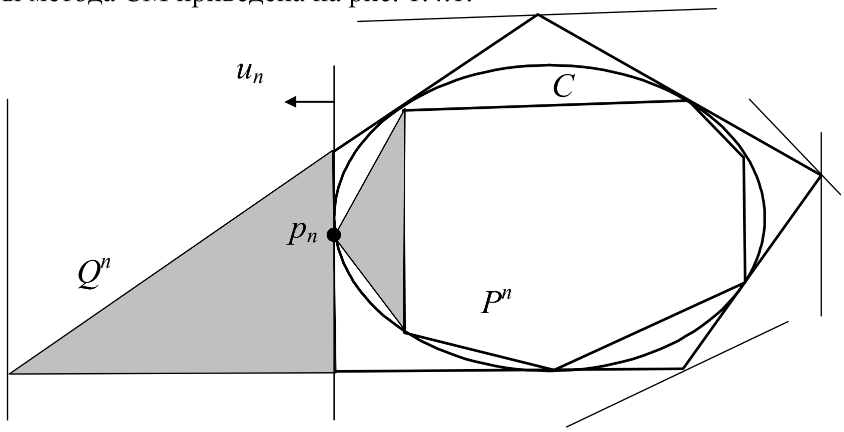

Рис. 1.4.1. Метод Сближающихся Многогранников

Таким образом, в этом методе сначала в множестве нормалей к гиперграням внутреннего многогранника находится направление (нормаль), на котором достигается максимальное отклонение между внешним и внутренним многогранниками. Далее, в этом направлении находится опорная гиперплоскость к аппроксимируемому телу и точка касания, которая присоединяется к множеству вершин внутреннего многогранника, причем внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью тела с этой нормалью. Ясно, что для последовательности восполнения $\{P^n\}_{n=1,2,\dots}$, генерируемой методом СМ, справедливо неравенство

$$m^t(P^n) \le m^t(P^0) + n, \qquad (1.4.1)$$

а для последовательности отсечения $\{Q^n\}_{n=1,2,\dots}$, генерируемой методом СМ, – неравенство

$$m^f(Q^n) \le m^f(Q^0) + n. \qquad (1.4.2)$$

Заметим далее, что в случае метода СМ информационное множество Ω имеет вид $\{(g(u_n, C), p), p \in T(u_n, C)\}$, где u_n, – единственная точка на сфере направлений S^{d-1}. Поэтому на каждой итерации вычисляется только одно значение опорной функции аппроксимируемого тела, и для последовательности пар многогранников $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,...}$, генерируемой методом СМ, справедливо

$$m^g(P^n) \le m^g(P^0) + n, \quad m^g(Q^n) \le m^g(Q^0) + n. \tag{1.4.3}$$

Благодаря такой особенности, метод СМ, как будет показано ниже (см. п. 2.6.4), в гладком случае оказывается оптимальным не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого тела. К сожалению, для негладких тел оптимальной по порядку скорости сходимости по указанным параметрам получить не удается.

Метод СМ, как и хаусдорфовы методы, основан на общих адаптивных схемах восполнения и отсечения. Вместе с тем, как нетрудно видеть, он не принадлежит к классу *H*-методов. Действительно, каково бы ни было отклонение внешнего аппроксимирующего многогранника от внутреннего в выбранном на шаге 1а направлении, величина $\delta(P^n, C)$ (либо $\delta(Q^n, C)$) может быть сколь угодно малой.

В главе 3 будут рассмотрены методы отсечения, двойственные к методу СМ (методы СМ* и ДСМ). Эти методы основаны на вычислении дистанционной функции аппроксимируемого множества и обладают достоинствами и недостатками, аналогичными методу СМ. В частности, в гладком случае они оказываются оптимальными не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого тела.

Чтобы предотвратить включение в описание аппроксимирующих многогранников неэффективных вершин или гиперграней в [46] и [83] был предложен ряд модификаций метода СМ, основанных на идее [46] порогового условия включения вершин и гиперграней в описание аппроксимирующих многогранников. Опишем одну из таких модификаций.

Ниже приводится «Модифицированный метод Сближающихся Многогранников» (метод МСМ), предложенный Л.В.Бурмистровой в [83], в несколько видоизмененной формулировке.

Пусть задан пороговый параметр алгоритма λ, $0 < \lambda < 1$.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СБЛИЖАЮЩИХСЯ МНОГОГРАННИКОВ (МСМ)

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ построены $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ и $Q^n \in \mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

a). Найти $u_n := \arg\max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

c). Если

$$g(u_n, p_n) - g(u_n, P^n) \geq \lambda\,[g(u_n, Q^n) - g(u_n, P^n)],$$

то

$$\text{построить } P^{n+1} := \operatorname{conv}\{p_n, P^n\},$$
$$\text{положить } Q^{n+1} := Q^n$$

иначе

$$\text{построить } Q^{n+1} := Q^n \cap L(u_n, C),$$
$$\text{положить } P^{n+1} := P^n.$$

Метод МСМ обозначим через $\mathrm{M}_{\mathrm{MCM}}$.

Таким образом, в этом методе сначала в множестве нормалей к гиперграням внутреннего многогранника находится направление u_n, на котором достигается максимальное отклонение между внешним и внутренним многогранниками. Далее, в направлении u_n находятся опорная гиперплоскость к аппроксимируемому телу и точка касания p_n. Если эта точка находится на достаточно большом, сравнительно с отклонением многогранников, расстоянии от внутреннего многогранника (определяется параметром λ), то p_n присоединяется к множеству вершин внутреннего многогранника. В противном случае внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью тела с этой нормалью.

Для метода МСМ удалось в негладком случае доказать оптимальность по порядку числа вершин внутреннего многогранника. Однако оптимальной по порядку скорости сходимости по числу гиперграней и числу вычислений опорной функции для этой модификации, как и для метода СМ, в негладком случае получить не удается. Поэтому указанные модификации метода СМ не решают проблему построения методов, оптимальных по порядку числа решений задач оптимизации на аппроксимируемом теле, и далее подробно рассматриваться не будут. Методы, действительно решающие эту задачу, будут рассмотрены в главе 3 в рамках теории двойственности АМПА. Эти методы, однако, потребуют задания аппроксимируемого тела одновременно через опорную и дистанционную функции. Метод же СМ требует вычисления только опорной функции аппроксимируемого тела, а двойственные к нему – только дистанционной функции.

Итак, в настоящей главе был введен класс итерационных МПА с растущим числом вершин и гиперграней, основанный на общих аппроксимационных схемах восполнения и отсечения. Затем были введены классы H и H_1-схем (последовательностей), характеризующие соответствующие классы хаусдорфовых методов полиэдральной аппроксимации. Был сформулирован ряд методов восполнения и отсечения, для которых было доказано, что они являются хаусдорфовыми. Был приведен также пример нехаусдорфового АМПА, основанного одновременно на схеме восполнения и отсечения. В следующей главе будет произведено исследование скорости сходимости рассмотренных методов, а также изучена их эффективность.

Глава 2. Теория сходимости АМПА

Вторая глава посвящена исследованию скорости сходимости, доказательству оптимальности и расчету эффективности (т.е. сравнению со скоростью сходимости МНА) хаусдорфовых АМПА.

2.1. Теоретические основы исследования АМПА

В первых четырех параграфах настоящей главы рассматриваются методы исследования скорости сходимости АМПА. В каждом случае (при исследовании скорости сходимости конкретного класса алгоритмов при аппроксимации конкретного класса ВКТ) наиболее сильные оценки удается получить одним из следующих методов:

– *метод изменения объема на итерациях* является хронологически первым и наиболее общим методом исследования МПА и дает наиболее сильные оценки при исследовании скорости сходимости H-схем, при исследовании скорости сходимости на начальном этапе аппроксимации, а также нехаусдорфовых АМПА;

– *метод упаковок нормалей* на внешне-параллельном множестве дает наиболее сильные оценки при исследовании скорости сходимости H_1-схем при аппроксимации негладких тел;
– *метод Глубоких Ям* позволяет получить наиболее сильные результаты для скорости сходимости хаусдорфовых алгоритмов в гладком случае;
– *комбинация* метода Глубоких Ям с методом упаковок нормалей позволяет получить новые оценки скорости сходимости МНА при аппроксимации негладких дисков (этот вопрос будет рассмотрен в главе 4).

Рассмотрим сначала последовательно аппарат каждого из указанных методов, а затем применим эти методы для исследования целых классов АМПА и конкретных алгоритмов.

2.2. Метод изменения объема на итерациях АМПА

В настоящем разделе излагается метод изменения объема на итерациях АМПА, разработанный в работах [46], [37], [38]. Основной задачей раздела является доказательство следующих двух теорем о сходимости H-последовательностей многогранников.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$-*последовательность восполнения (отсечения) для* $C\in\mathscr{C}$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_1(\gamma, C)\, k(n)^{1/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_2(\gamma, C)\, k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_1(\gamma, C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\left(\frac{\sigma(C)}{\gamma}\right)^d\right\}^{1/(d-1)}\omega(C)\,,$$

$$\lambda_2(\gamma, C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)}{\gamma^d}\right\}^{1/(d-1)}\omega(C)\,.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$-

последовательность восполнения (отсечения) для $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_3(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_4(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_3(\gamma, C) = \left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)^{(d+1)/2}}{\gamma^d}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_4(\gamma, C) = \left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)}{\gamma^d}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Метод изменения объема состоит в оценке изменения объема аппроксимирующего многогранника на каждой итерации и получении на этой основе скорости уменьшения отклонения многогранника от аппроксимируемого тела. Для оценки изменения объема используется шар, вписанный в многогранник, вернее, часть конуса его видимости, присоединяемая или отсекаемая на итерации. Раньше всего такая техника применялась, насколько нам известно, в работе [73] при исследовании общей схемы отсечения, а также в работе [3] при доказательстве сходимости одного метода оптимизации. В гладком случае применение теоремы Бляшке о качении (см. пункт 1.3.2) позволяет использовать факт расширения конуса видимости внутреннего шара при уменьшении отклонения по Хаусдорфу многогранника от аппроксимируемого тела для существенного улучшения оценки скорости сходимости [46], [18], [37], [38].

Лемма 2.2.1. *Пусть дан шар* $B_r(z)$, *точка y вне его и гиперплоскость L, разделяющая их и находящаяся от y на расстоянии h. Тогда L отсекает от конуса видимости из точки y пирамиду с объемом, не меньшим*

$$\frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\left(\frac{\rho(y,z)}{r}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2} h^d.$$

Доказательство. Пусть начало координат совпадает с точкой y и ось x_d направлена к точке z. Обозначим $\alpha = r[\rho(y, z)^2 - r^2]^{-1/2}$. Тогда уравнение конуса будет

$$\sum_{i=1}^{d-1} x_i^2 - (\alpha\, x_d)^2 \le 0\,.$$

Выберем оси координат $x_1, \dots, x_{d\text{-}1}$ так, чтобы уравнение L имело вид

$$x_{d\text{-}1}\sin\beta + x_d\cos\beta = h,\ 0 \le \beta < \pi/2.$$

Так как L отделяет y от $B_r(z)$, то в сечении конуса гиперплоскостью всегда будет эллипсоид. Обозначим его E. Тогда отсекаемый объем $h\sigma(E)/d$. Найдем минимум $\sigma(E)$ при допустимых β. В проекции E на подпространство переменных $x_1, \dots, x_{d\text{-}1}$ будет эллипсоид $\widetilde{E}$. Ясно, что $\sigma(\widetilde{E}) \le \sigma(E)$, причем при β=0 имеет место равенство. Описание $\widetilde{E}$ можно получить, выразив x_d из уравнения для L и подставив в неравенство, описывающее конус. Нетрудно показать, что $\widetilde{E}$ может быть описан каноническим образом:

$$\sum_{i=1}^{d-2}\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{\widetilde{x}_{d-1}^2}{b^2} \le 1\,,$$

где

$$\widetilde{x}_{d-1} = x_{d-1} + \alpha^2 h\sin\beta/\xi^2,\ \xi = [1-\alpha^2(\mathrm{tg}\beta)^2]^{1/2},$$
$$a = \alpha\, h/(\xi\cos\beta),\ b = \alpha\, h/(\xi^2\cos\beta).$$

Поэтому

$$\sigma(\widetilde{E}) = \pi_{d-1}\alpha^{d-2}b = \pi_{d-1}h^{d-1}\alpha^{d-1}/\{[1-\alpha^2(\mathrm{tg}\beta)^2]^{d/2}\cos\beta^{d-1}\}\,.$$

Минимум $\sigma(\widetilde{E})$ достигается при β=0, совпадает с $\sigma(E)$ и равен $\pi_{d-1}h^{d-1}\alpha^{d-1}$.

Лемма 2.2.1 доказана.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2\dots}$ *– аппроксимирующая последовательность многогранников, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}$ *некоторой адаптивной схемой. Тогда при* $\delta^H(P^n, C) < \varepsilon r$, $0 < \varepsilon < 1$, *справедливо*

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \ge \lambda_5(\varepsilon)[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d,$$

где

$$\lambda_5(\varepsilon) := \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\frac{r}{R}(1-\varepsilon)\right]^{d-1},$$

и r *и* R *– радиусы концентрических внутреннего и внешнего шаров* *для C. Кроме того, при любом n* ≥ 0 *справедливо*

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \geq \lambda'_5[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d,$$

где

$$\lambda'_5 := \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\frac{r'}{R'+\delta^H(C,P^0)}\right]^{d-1},$$

r′ и R′ – радиусы концентрических шаров, внутреннего для P^0 и C и внешнего для C.

Доказательство. Пусть $z\in C$ такая, что $B_r(z)\subset C\subset B_R(z)$. Рассмотрим сначала последовательность, порождаемую аппроксимирующей схемой отсечения (см. иллюстрацию на рис. 2.2.1).

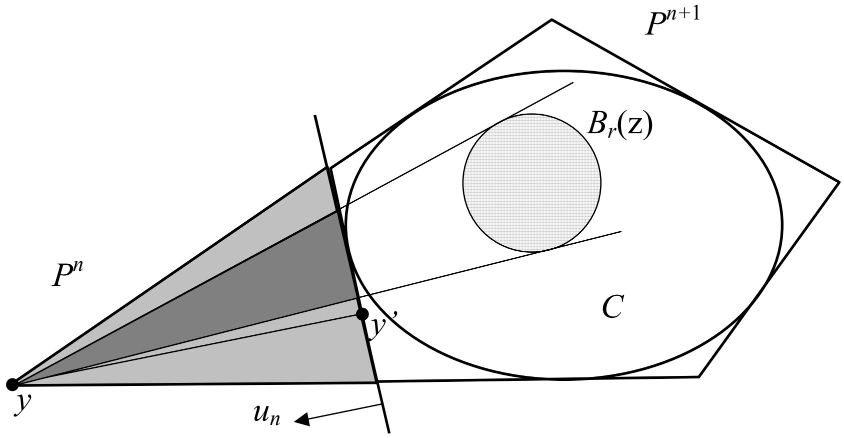

Рис. 2.2.1. Метод изменения объема для схемы отсечения ($\mathscr{C}$)

Пусть $P^{n+1} = P^n\cap L(u_n, C)$, $y\in P^n$ такая, что $\rho(y, P^{n+1}) = \delta^H(P^n, P^{n+1})$, и y' := proj (y, P^{n+1}) – проекция y на P^{n+1}. Тогда $\delta^S(P^n, P^{n+1})$ больше, чем объем части конуса видимости шара $B_r(z)$ из точки y, отсекаемой опорной к P^{n+1} гиперплоскостью $L:=L((y-y')/\|y-y'\|, P^{n+1})$. По построению, $\rho(y, L) = \delta^H(P^n, P^{n+1})$ и, по условию, $\rho(y, z) \leq R + \delta^H(P^n, C)$. Поэтому из леммы 2.2.1 следует, что

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\left(\frac{R+\varepsilon r}{r}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2} [\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d .$$

При $0 \leq \varepsilon < 1$ имеем $(1-\varepsilon)^{-1}\geq 1+\varepsilon$, поэтому $(R+\varepsilon r)/r \leq R/[r(1-\varepsilon)]$, что и доказывает первое утверждение леммы для схем отсечения.

Рассмотрим теперь случай схемы восполнения (см. иллюстрацию на рис. 2.2.2). Пусть $P^{n+1} = \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$, $p' := \mathrm{proj}\,(p_n, P^n)$ – проекция p_n на P^n и $L{:=}L((p_n - p')/\| p_n - p'\|, P^n)$. Тогда $\rho(p_n, L) = \delta^H(P^n, P^{n+1})$. По условию и лемме 1.3.4 имеем $B_{r(1-\varepsilon)}(z) \subset P^n$, поэтому $\delta^S(P^n, P^{n+1})$ больше, чем объем части конуса видимости $B_{r(1-\varepsilon)}(z)$ из точки p_n, отсекаемой гиперплоскостью L, причем $\rho(p_n, z) \le R$. Из леммы 2.2.1 тогда следует, что

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \ge \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\left(\frac{R}{r(1-\varepsilon)}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2} [\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d .$$

Первое утверждение леммы доказано.

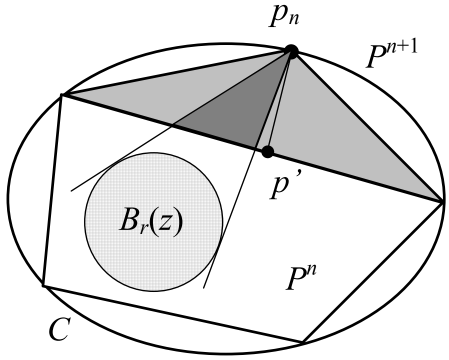

Рис. 2.2.2. Метод изменения объема для схемы восполнения ($\mathscr{C}$)

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что в случае схемы отсечения имеем $\rho(y, z) \le R' + \delta^H(P^0, C)$ для любого $n \ge 0$, а в случае схемы восполнения из точки p_n шар радиуса r' виден при любом $n \ge 0$. Далее рассуждаем, как при доказательстве первого утверждения.

Лемма 2.2.2 полностью доказана.

Лемма 2.2.3. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2\ldots}$ – $H(\gamma, C)$*-последовательность для* $C \in \mathscr{C}^2$*. Тогда при* $\delta^H(P^n, C) < \varepsilon\, r_{\min}(C)$, $0 < \varepsilon < 1$, *справедливо*

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \ge \lambda_6(\varepsilon)[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^{(d+1)/2},$$

где

$$\lambda_6(\varepsilon) := \frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{\gamma\, r_{\min}(C)}{2}\right)^{(d-1)/2}(1-\varepsilon)^{d-1}.$$

Доказательство. Обозначим $r{:=}r_{\min}(C)$. Так, $C\in\mathscr{C}^2$, то, по теореме Бляшке о качении (см. п. 1.3.2), для любой точки $x\in\partial C$ существует $z\in C$ такая, что $B_r(z)\subset C$ и $x\in B_r(z)$.

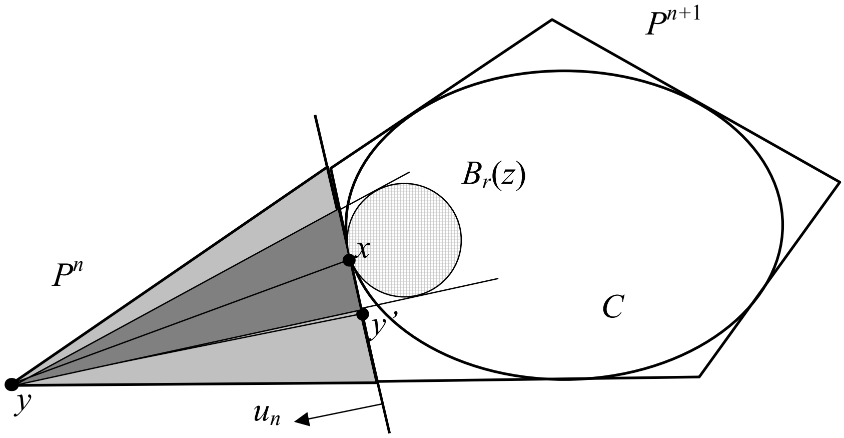

Рис. 2.2.3. Метод изменения объема для схемы отсечения ($\mathscr{C}^2$)

Рассмотрим схему отсечения (см. иллюстрацию на рис. 2.2.3). Пусть $P^{n+1} = P^n\cap L(u_n, C)$, $y\in P^n$ такая, что $\rho(y, P^{n+1}) = \delta^H(P^n, P^{n+1})$, $y' := \text{proj}\,(y, P^{n+1})$ – проекция y на P^{n+1}, $x{:=}\ \text{proj}\,(y, C)$ – проекция y на C и $z\in C$ такая, что $B_r(z)\subset C$, $x\in B_r(z)$. Тогда $\delta^S(P^n, P^{n+1})$ больше, чем объем части конуса видимости шара $B_r(z)$ из точки y, отсекаемой опорной к P^{n+1} гиперплоскостью $L{:=}L((y-y')/\|y-y'\|, P^{n+1})$. По построению, $\rho(y, L) = \delta^H(P^n, P^{n+1})$. Обозначим $r'{:=}\delta^H(P^n, C)$. По определению H-последовательностей (1.2.1) $r' \le \delta^H(P^n, P^{n+1})/\gamma$. По построению $\rho(y, z) \le r + r'$. Поэтому из леммы 2.2.1 следует, что

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \ge \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\left(\frac{r+r'}{r}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2}[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d.$$

Учитывая, что $(r + r')^2/r^2 - 1 = r'(2r + r')/r^2$, имеем

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{\gamma r^2}{2r+r'}\right)^{(d-1)/2} [\delta^H(P^n, P^{n+1})]^{(d+1)/2}.$$

Рассмотрим схему восполнения (см. иллюстрацию на рис. 2.2.4). Пусть $P^{n+1} = \mathrm{conv}\,\{p_n, P^n\}$, $p' := \mathrm{proj}\ (p_n,\ P^n)$ – проекция p_n на P^n, $L:=L((p_n - p')/\| p_n - p'\|, P^n)$ и $z \in C$ такая, что $B_r(z) \subset C$, $p_n \in B_r(z)$. Имеем $\rho(p_n, L) = \delta^H(P^n, P^{n+1})$.

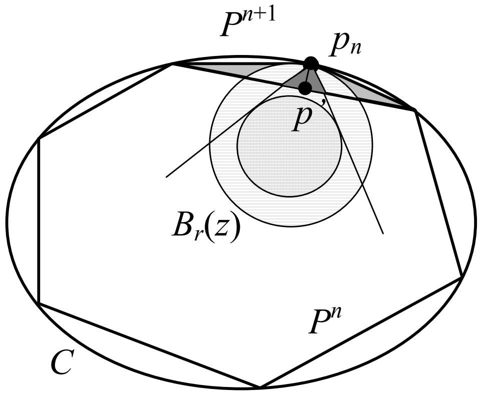

Рис. 2.2.4. Метод изменения объема для схемы восполнения ($\mathscr{C}^2$)

Обозначим $r':=\delta^H(P^n, C)$. По определению H-последовательностей (1.2.1) $r' \leq \delta^H(P^n, P^{n+1})/\gamma$. По условию и лемме 1.3.4 имеем $B_{r-r'}(z) \subset P^n$, поэтому $\delta^S(P^n, P^{n+1})$ больше, чем объем части конуса видимости этого шара из точки p_n, отсекаемой гиперплоскостью L, причем $\rho(p_n, z) \leq r$. Из леммы 2.2.1 тогда следует, что

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\left(\frac{r}{r-r'}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2} [\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d \geq$$

$$\geq \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\frac{\gamma(r-r')^2}{2r-r'}\right]^{(d-1)/2} [\delta^H(P^n, P^{n+1})]^{(d+1)/2}.$$

При $r' < r$ непосредственно проверяется, что $r^2/(2r + r') \geq (r - r')^2/(2r - r')$. Так как $r' < \varepsilon r$, то $(r - r')^2/(2r - r') \geq r(1-\varepsilon)^2/2$, откуда получаем утверждение леммы для последовательностей, порождаемых как схемами восполнения, так и схемами отсечения.

Лемма 2.2.3 доказана.

Следующая лемма необходима для получения оценок скорости сходимости последовательностей отклонений многогранников в метриках объема $\{a_n\}$ и Хаусдорфа $\{b_n\}$.

Лемма 2.2.4. *Пусть* $\{a_n\}_{n=0,1,2...}$ *и* $\{b_n\}_{n=0,1,2...}$ *– невозрастающие последовательности положительных чисел, и пусть существуют константы* c_1, $c_2 > 0$ *и* $\beta > 1$ *такие, что* $a_n - a_{n+1} \geq c_1 b_n^{\beta}$ *и* $c_2 b_n \geq a_n$ *при* n=0,1,2.... *Тогда для любого* $n \geq 0$ *справедливо*

$$a_n \leq [\lambda_7^{(\beta-1)} n + a_0^{(1-\beta)}]^{1/(1-\beta)}.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ *существует номер* n_0*, зависящий только от* ε, β, c_1, c_2 *и* a_0*, для которого при* $n \geq n_0$ *справедливо*

$$a_n \leq (1+\varepsilon) / [\lambda_7\, n^{1/(\beta-1)}], \quad b_n \leq (1+\varepsilon) / [\lambda_8\, n^{1/(\beta-1)}],$$

где

$$\lambda_7 = \left[\frac{(\beta-1)c_1}{c_2^{\beta}}\right]^{1/(\beta-1)}, \qquad \lambda_8 = \left[\frac{(\beta-1)c_1}{\beta c_2}\right]^{1/(\beta-1)}.$$

Доказательство.[5] По условию, $a_n - a_{n+1} \geq c a_n^{\beta}$, где $c := c_1/c_2^{\beta} > 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{a} = -ca^{\beta}$. При $\beta > 1$ его общее решение будет иметь вид

$$a(t) = [(\beta - 1)ct + c_0]^{1/(1-\beta)},$$

где c_0 – произвольная константа. При $\beta > 1$ функция $a(t)$ строго выпукла и ее график лежит выше касательной к любой своей точке. Для интегральной кривой, проходящей через точку (n, a_n), касательная к ней в этой точке будет определяться уравнением

$$a_k(t) = a_n - ca_n^{\beta}(t - n).$$

Точка $(n + 1, a_{n+1})$ лежит, по условию леммы, не выше касательной, а значит, ниже кривой. Рассматриваемое дифференциальное уравнение 1-го порядка, поэтому его интегральные кривые не пересекаются. Следовательно, интегральная кривая, проходящая через точку (0,

[5] Идея доказательства этой леммы предложена И.Г. Поспеловым.

a_0), лежит выше точек (n, a_n) при любых номерах $n \geq 0$. Для этой кривой $a(0) = a_0 = c_0^{1/(1-\beta)}$. Таким образом,

$$a_n \leq a(n) = [(\beta - 1)cn + a_0^{1-\beta}]^{1/(1-\beta)},$$

что доказывает первое утверждение леммы.

Выберем теперь n_0 так, чтобы

$$\left[1 + \frac{a_0^{1-\beta}}{(\beta-1)cn_0}\right]^{1/(1-\beta)} - 1 \leq \varepsilon .$$

Получаем $a_n \leq (1+\varepsilon)[(\beta-1)cn]^{1/(1-\beta)}$, т.е. второе утверждение леммы, для любого $n \geq n_0$.

Пусть теперь $n \geq n_0$. Для любого $m<n$ имеем, по условию,

$$a_m - a_n \geq \sum_{i=m}^{n-1} c_1 b_i^\beta \geq (n-m)c_1 b_n^\beta$$

в силу невозрастания b_n. Согласно второму утверждению леммы, имеем

$$(1 + \varepsilon) / [\lambda_7\, m^{1/(\beta-1)}] \geq a_m \geq (n - m)\, c_1 b_n^\beta.$$

Чтобы получить лучшую оценку, найдем максимум величины $m^{1/(\beta-1)}(n - m)$. Он приходится на $m=n/\beta$. Положим $\widetilde{m} = [n/\beta]$ (ближайшее целое слева). Тогда

$$b_n^\beta \leq (1+\varepsilon)[\lambda_7 \widetilde{m}^{1/(\beta-1)} c_1 (n - \widetilde{m})]^{-1} \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon)\left[\lambda_7 \beta^{1/(1-\beta)} \frac{(\beta-1)c_1}{\beta} n^{\beta/(\beta-1)}\right]^{-1}.$$

Поэтому $b_n \leq (1 + \varepsilon)^{1/\beta} [\lambda_8\, n^{1/(\beta-1)}]^{-1}$, где

$$\lambda_8 = \left\{\left[\frac{(\beta-1)c_1}{c_2^\beta}\right]^{1/(\beta-1)} \beta^{1/(1-\beta)} \frac{(\beta-1)c_1}{\beta}\right\}^{1/\beta} =$$

$$= \left[\frac{(\beta-1)c_1}{\beta c_2}\right]^{1/(\beta-1)}.$$

Остается заметить, что $(1 + \varepsilon)^{1/\beta} \leq 1 + \varepsilon$, так как $\beta>1$.

Лемма 2.2.4 доказана**.**

Доказательство теоремы 2.2.1. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H(\gamma, C)$-последовательность. Пусть $z\in C$ такая, что $B_r(z)\subset C\subset B_R(z)$ и $R/r = \omega(C)$. По теореме 1.2.2 F сходится к C в метрике Хаусдорфа. Поэтому для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<1$, существует номер n_1 такой, что при $n \geq n_1$ имеем $\delta^H(P^n, C)<\varepsilon_1 r$. Согласно лемме 2.2.2, при этих условиях

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \geq \lambda_5(\varepsilon_1)[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d \geq \lambda_5(\varepsilon_1)[\gamma\delta^H(P^n, C)]^d.$$

Из монотонности по включению последовательности F вытекает, что $\delta^S(P^n, P^{n+1}) = \delta^S(P^n, C) - \delta^S(C, P^{n+1})$. Обозначим $\delta^S(P^n, C)$ через a_n, $\delta^H(P^n, C)$ через b_n. Тогда

$$a_n - a_{n+1} \geq \lambda_5(\varepsilon_1)[\gamma b_n]^d.$$

Согласно свойствам $\sigma(C)$ (см. (1.2.8)), для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует номер n_2, при котором $a_n \leq [\sigma(C) + \varepsilon_2]b_n$, где $n \geq n_2$. Кроме этого, члены последовательностей $\{a_n\}_{n=0,1,2...}$ и $\{b_n\}_{n=0,1,2...}$ положительны и не возрастают. Поэтому для $n \geq n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ справедливы условия леммы 2.2.4 с константами $c_1 = \lambda_5(\varepsilon_1)\gamma^d$, $c_2 = \sigma(C) + \varepsilon_2$ и $\beta = d$. Таким образом, для любого $\varepsilon_3 > 0$ существует номер $n_4 \geq n_3$, для которого

$$a_n = \delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_3)\left[(d-1)\lambda_5(\varepsilon_1)\left(\frac{\gamma}{\sigma(C)+\varepsilon_2}\right)^d n\right]^{1/(1-d)} =$$

$$= (1+\varepsilon_3)\left[(d-1)\frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{r}{R}\right)^{d-1}(1-\varepsilon_1)^{d-1}\left(\frac{\gamma}{\sigma(C)+\varepsilon_2}\right)^d n\right]^{1/(1-d)}$$

при $n \geq n_4$. Выберем ε_1, ε_2 и ε_3 так, чтобы

$$(1 + \varepsilon_3)[1 + \varepsilon_2/\sigma(C)]^{d/(d-1)}(1 - \varepsilon_1)^{-1} \leq 1 + \varepsilon.$$

Тогда, обозначая

$$\lambda_1(\gamma) = \left[(d-1)\frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{r}{R}\right)^{d-1}\left(\frac{\gamma}{\sigma(C)}\right)^d\right]^{1/(1-d)},$$

получаем $\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_1(\gamma)n^{1/(1-d)}$ при $n \geq n_0:=n_4$. Первое утверждение теоремы для $k(n):=n$ доказано.

Согласно лемме 2.2.4, при $n \geq n_0$ имеем

$$b_n = \delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon_3)\left[\frac{(d-1)}{d}\frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{r}{R}\right)^{d-1}\frac{(1-\varepsilon_1)^{d-1}\gamma^d}{\sigma(C)+\varepsilon_2}n\right]^{1/(1-d)}.$$

Поскольку

$$[1 + \varepsilon_2/\sigma(C)]^{1/(d-1)} \le [1 + \varepsilon_2/\sigma(C)]^{d/(d-1)},$$

то при $n \ge n_0$ имеем $\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_2(\gamma)n^{1/(1-d)}$, где

$$\lambda_2(\gamma) = \left[\frac{(d-1)}{d}\frac{\pi_{d-1}}{d}\frac{\gamma^d}{\sigma(C)}\right]^{1/(1-d)}\frac{R}{r},$$

что доказывает второе утверждение теоремы для $k(n):=n$.

Утверждения теоремы для $k(n):=m^t(P^n)$ в случае последовательности восполнения ($k(n):=m^f(P^n)$ в случае последовательности отсечения) следует далее из свойства (1.1.4) при выборе n_0, таком что величина

$$\frac{1}{[1-m(P^0)/m(P^{n_0})]^{1/(d-1)}}-1$$

будет достаточно мала.

Теорема 2.2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.2. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ есть $H(\gamma, C)$-последовательность для $C\in\mathscr{C}^2$. По теореме 1.2.2 F сходится к C в метрике Хаусдорфа. Поэтому для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<1$, существует номер n_1 такой, что при $n \ge n_1$ имеем $\delta^H(P^n, C)<\varepsilon_1 r_{\min}(C)$. Согласно лемме 2.2.3, при этих условиях

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \ge \lambda_6(\varepsilon_1)[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^{(d+1)/2} \ge \lambda_5(\varepsilon_1)\,[\gamma\delta^H(P^n, C)]^{(d+1)/2}.$$

Из монотонности по включению последовательности F вытекает, что $\delta^S(P^n, P^{n+1}) = \delta^S(P^n, C) - \delta^S(C, P^{n+1})$. Обозначим $\delta^S(P^n, C)$ через a_n, $\delta^H(P^n, C)$ через b_n. Тогда

$$a_n - a_{n+1} \ge \lambda_6(\varepsilon_1)[\gamma b_n]^{(d+1)/2}.$$

Согласно свойствам $\sigma(C)$ (см. (1.2.8)), для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует номер n_2, при котором $a_n \le [\sigma(C) + \varepsilon_2]b_n$, где $n \ge n_2$. Кроме этого, члены последовательностей $\{a_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ и $\{b_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ положительны и не возрастают. Поэтому для $n \ge n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ справедливы условия леммы 2.2.4 с константами $c_1 = \lambda_6(\varepsilon_1)\gamma^{(d+1)/2}$, $c_2 = \sigma(C) + \varepsilon_2$ и $\beta = (d+1)/2$. Таким образом, для любого $\varepsilon_3 > 0$ существует номер $n_4 \ge n_3$, для которого

$$a_n = \delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon_3)\left[\frac{d-1}{2}\lambda_6(\varepsilon_1)\left(\frac{\gamma}{\sigma(C)+\varepsilon_2}\right)^{(d+1)/2} n\right]^{2/(1-d)} =$$

$$= (1+\varepsilon_3)\left[\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{\gamma r_{\min}(C)}{2}(1-\varepsilon_1)^2\right)^{(d-1)/2}\left(\frac{\gamma}{\sigma(C)+\varepsilon_2}\right)^{(d+1)/2} n\right]^{2/(1-d)}$$

при $n \ge n_4$. Выберем ε_1, ε_2 и ε_3 так, чтобы

$$(1+\varepsilon_3)[1+\varepsilon_2/\sigma(C)]^{(d+1)/(d-1)}(1-\varepsilon_1)^{-2} \le 1+\varepsilon.$$

Тогда, обозначая

$$\lambda_3(\gamma) = \left[\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\frac{\gamma^d}{\sigma^{(d+1)/2}(C)}\right]^{2/(1-d)}\frac{2}{r_{\min(C)}},$$

получаем $\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_3(\gamma)n^{2/(1-d)}$ при $n \ge n_0 := n_4$. Первое утверждение теоремы для $k(n) := n$ доказано.

Согласно лемме 2.2.4, при $n \ge n_0$ имеем

$$b_n = \delta^H(P^n, C) \le$$

$$\le (1+\varepsilon_3)\left\{\frac{d-1}{d+1}\frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\frac{\gamma\, r_{\min}(C)}{2}(1-\varepsilon_1)^2\right)^{(d-1)/2}\frac{\gamma^{(d+1)/2}}{\sigma(C)+\varepsilon_2}n\right\}^{2/(1-d)}.$$

Поскольку

$$[1+\varepsilon_2/\sigma(C)]^{2/(d-1)} \le [1+\varepsilon_2/\sigma(C)]^{(d+1)/(d-1)},$$

то при $n \ge n_0$ имеем $\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_2(\gamma)n^{2/(1-d)}$, где

$$\lambda_4(\gamma) = \left[\frac{d-1}{d+1}\frac{\pi_{d-1}}{d}\frac{\gamma^d}{\sigma(C)}\right]^{2/(1-d)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

что доказывает второе утверждение теоремы для $k(n) := n$.

Утверждения теоремы для $k(n) := m^t(P^n)$ в случае последовательности восполнения ($k(n) := m^f(P^n)$ в случае последовательности отсечения) следует далее из свойства (1.1.4) при выборе n_0, таком что величина

$$\frac{1}{[1-m(P^0)/m(P^{n_0})]^{2/(d-1)}}-1$$

будет достаточно мала.

Теорема 2.2.2 доказана.

2.3. Метод упаковок нормалей

В настоящем разделе излагается метод упаковок нормалей, разработанный в работах [84], [42], [43].

Метод упаковок нормалей состоит в том, что рассматривается набор точек на внешне-параллельном к аппроксимируемому телу множестве, соответствующий аппроксимирующему многограннику. Для вписанного многогранника, например, – это его вершины, продолженные на одинаковой длины внешние нормали к аппроксимируемому телу. Число точек такого набора совпадает с числом вершин (гиперграней) аппроксимирующего вписанного (описанного) многогранника. Далее оказывается, что такой набор в случае, когда рассматриваются МНА или хаусдорфовые последовательности, оказывается достаточно хорошо распределенным множеством – шары с центрами в этих точках образуют упаковку с радиусом, пропорциональным квадратному корню от точности аппроксимации. Это позволяет, при заданной точности аппроксимации, получить оценку сверху на число точек такого набора, а значит, на число вершин (гиперграней) аппроксимирующего многогранника.

Впервые, насколько нам известно, близкий к такому подходу метод был использован в работе [13] для получения верхних оценок на число вершин МНА. Доказательство этих оценок в указанной работе содержало внутри себя утверждение, которое мы процитируем по работе [12], стр. 324.

Лемма Dudley-Gruber. *Пусть* $C\in\mathscr{C}^1$, $0 < \varepsilon < \sqrt{3}/2$, $y,z\in\partial C$, $S(y, C):=\{n_y\}$, $S(z, C):=\{n_z\}$, $\|y+n_y-z-n_z\| \le \varepsilon$. *Тогда расстояние от y вдоль* n_y *до опорной гиперплоскости к C в z не больше* $2\varepsilon^2$.

В наших доказательствах мы будем использовать некоторые обобщения леммы Dudley-Gruber.

Лемма 2.3.1. *Пусть* $x,y\in\mathbb{E}^d$ *и* $\beta>0$. *Тогда для любых* $u,v \in S^{d-1}$, $\langle u, v\rangle > 0$, $y\in L(u, x)$, $x\in L(v, y)$, *справедливо*

$$\rho(x, l(v, y)) \le \|(x+\beta u) - (y+\beta v)\|^2 /\beta .$$

Доказательство. Обозначим $\Delta := \|(x+\beta u) - (y+\beta v)\|$. В силу $y \in L(u, x)$ и $x \in L(v, y)$, имеем $<u, x\text{-}y> \ge 0$, $<v, y\text{-}x> \ge 0$ и $\Delta^2 \ge \|x\text{-}y\|^2+\beta^2\|u\text{-}v\|^2$. Следовательно, $\Delta \ge \max\{\|x\text{-}y\|, \beta\|u\text{-}v\|\}$. Пусть α – угол между u и v. Так как $\sin \alpha \le \|u - v\|$, то $\sin \alpha \le \Delta/\beta$.

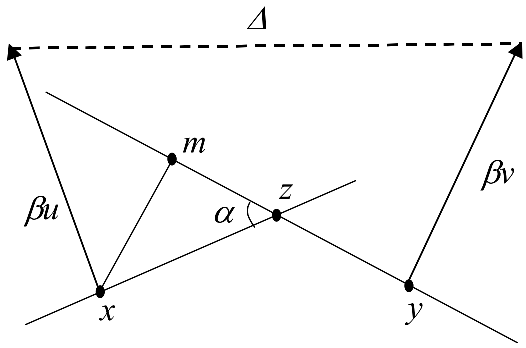

Рис. 2.3.1. Метод упаковок нормалей, лемма 3.3.1.

Пусть z – проекция x на $l := l(u, x) \cap l(v, y)$ и m – проекция x на $l(v, y)$. Проекция m на l есть z (иначе бы z не была проекцией x), и величина угла $\angle xzm$ равна α (см. двумерную иллюстрацию на рис. 2.3.1). Поэтому

$$\Delta \ge \rho(x, y) \ge \rho(x, z) = \rho(x, m) / \sin \alpha \ge \beta\, \rho(x, l(v, y)) / \Delta,$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2.3.1 доказана.

Лемма 2.3.2. *Пусть* $C \in \mathscr{C}$, $p,q \in \partial C$ *и* $\beta > 0$. *Тогда для любых* $u \in S(p, C)$ *и* $v \in S(q, C)$, $<u, v> > 0$ *справедливо*

$$\rho(p, l(v, C)) \le \|(p+\beta u) - (q+\beta v)\|^2 /\beta .$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу выпуклости C справедливо $q \in L(u, p)$, $p \in L(v, q)$. Поэтому утверждение леммы следует из утверждения леммы 2.3.1.

Лемма 2.3.2 доказана.

Лемма 2.3.3. *Пусть* $C \in \mathscr{C}_0$, $p \notin C$, $p' := t(p, C)$ и $\beta > 0$. *Тогда для любых* $u \in S(p', C)$ *и* $v \in S^{d-1}$, $p \in L(v, C)$, $q \in T(v, C)$, *справедливо*

$$\|(p'+\beta u) - (q+\beta v)\| \geq \min\{\beta\sqrt{2}, \sqrt{(\beta h)}-\omega_0(C)h\},$$

где $h := g(u, p) - g(u, C)$.

Доказательство. Если $<u, v> \leq 0$, то $\|(p'+\beta u) - (q+\beta v)\| \geq \beta\sqrt{2}$.

Пусть $<u, v> > 0$. Так как $u\in S(p', C)$, то $q\in L(u, C)$, откуда $q\in L(u, p)$. Тогда по лемме 3.1 имеем $\|(p+\beta u) - (q+\beta v)\|^2 / \beta \geq \rho(q, l(u, p)) \geq h$. Далее, $\|(p+\beta u) - (p'+\beta u)\| = \rho(p, p') \leq \omega_0(C)\,[g(u, p) - g(u, p')] = \omega_0(C)h$. Наконец, $\|(p'+\beta u) - (q+\beta v)\| \geq \|(p+\beta u) - (q+\beta v)\| - \|(p+\beta u) - (p'+\beta u)\| \geq \sqrt{(\beta h)}-\omega_0(C)h$.

Лемма 2.3.3 доказана.

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения и $\beta>0$. Поставим ей в соответствие последовательность множеств точек $\{Z^n\}_{n=0,1,...}$ по следующему правилу:

1) $Z^0 := \{p + \beta u(p)\colon p\in M^t(P^0)\}$ для некоторого набора направлений $\{u(p)\in S(p, C)\colon p\in M^t(P^0)\}$;

2) $Z^{n+1} := \{p_n + \beta u_n\}\cup Z^n$, $n=0,1,2,...$, где точка p_n и направление u_n взяты из определения $H_1(\gamma, C)$ – последовательности восполнения.

Очевидно, что $Z^n\subset\partial(C+\beta B)$. Кроме того, в случае $\delta^H(P^{n-1}, C)>0$ имеем $\mathrm{card}\, Z^n = m^t(P^0) + n$. Последовательность $\{Z^n\}_{n=0,1,...}$ назовем *сопровождающей последовательностью* для $\{P^n\}_{n=0,1,...}$.

Множество Z назовем *базой* ε*-упаковки*, если для любых $x,y\in Z$ справедливо $\rho(x, y) \geq 2\varepsilon$ (в этом случае множество открытых шаров радиуса ε с центрами в Z будет упаковкой в пространстве $\mathbb{E}^d$).

Лемма 2.3.4. *Пусть* $\beta>0$, $C\in\mathscr{C}$, $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$-*последовательность восполнения и* $\{Z^n\}_{n=0,1,...}$ – *сопровождающая последовательность для нее. Тогда для любого* $n=0,1, \ldots$ *множество* Z^n *есть база* $\varepsilon_n(\gamma)$*-упаковки, где*

$$\varepsilon_n(\gamma) := \frac{1}{2}\min\left\{\beta\sqrt{2}, 2\varepsilon_0, \sqrt{\beta\gamma\delta^H(P^{n-1}, C)}\right\}$$

и $\varepsilon_0 := \min\{\rho(x, y)\colon x,y\in Z^0, x\neq y\}/2$.

Доказательство. Для $n=0$ утверждение леммы, очевидно, справедливо. Пусть оно справедливо для n-1. По предположению индукции Z^{n-1} есть база $\varepsilon_{n-1}(\gamma)$-упаковки. Но $\delta^H(P^{n-1}, C) \le \delta^H(P^{n-2}, C)$, поэтому Z^{n-1} есть база $\varepsilon_n(\gamma)$-упаковки. Пусть $z_{n-1} := p_{n-1} + \beta u_{n-1}$, где p_{n-1} и u_{n-1} взяты из определения H_1-последовательности восполнения. Так как $Z^n = \{z_{n-1}\} \cup Z^{n-1}$, то осталось доказать, что $\rho(z_{n-1}, z) \ge 2\varepsilon_n(\gamma)$ для любого $z \in Z^{n-1}$. Пусть $z = p + \beta v$, где $p \in \partial P^{n-1}$, $v \in S(p, C)$.

Если $\langle u_{n-1}, v\rangle \le 0$, то $\rho(z_{n-1}, z) \ge \beta\sqrt{2}$. Пусть $\langle u_{n-1}, v\rangle > 0$. Тогда по лемме 2.3.2 имеем
$\| z_{n-1} - z\|^2 \ge \beta\rho(p, l(u_{n-1}, C)) \ge \beta\,(g(u_{n-1}, C) - g(u_{n-1}, P^{n-1})) \ge \beta\gamma\, \delta^H(P^{n-1}, C)$,
что и доказывает утверждение $\rho(z_{n-1}, z) \ge 2\varepsilon_n(\gamma)$.

Лемма 2.3.4 доказана.

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H_1(\gamma, C)$-последовательность отсечения и $\beta>0$. Поставим ей в соответствие последовательность множеств точек $\{Z^n\}_{n=0,1,...}$ по следующему правилу:

1) $Z^0 := \{p(u) + \beta u\colon u \in M^f(P^0)\}$ для некоторого набора точек $\{p(u) \in T(u, C)\colon u \in M^f(P^0)\}$;

2) $Z^{n+1} := \{p_n + \beta u_n\} \cup Z^n$, n=0,1,2,... , где точка p_n и направление u_n взяты из определения $H_1(\gamma, C)$ – последовательности отсечения.

Очевидно, что $Z^n \subset \partial(C+\beta B)$. Кроме того, в случае $\delta^H(P^{n-1}, C)>0$ имеем $\mathrm{card}\, Z^n = m^f(P^0) + n$. Последовательность $\{Z^n\}_{n=0,1,...}$ назовем сопровождающей последовательностью для $\{P^n\}_{n=0,1,...}$.

Лемма 2.3.5. *Пусть* $\beta>0$, $C \in \mathscr{C}$, $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$-*последовательность отсечения и* $\{Z^n\}_{n=0,1,...}$ – *сопровождающая последовательность для нее. Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при* $n \ge N$ *множество* Z^n *есть база* $\varepsilon_n^N(\gamma, \varepsilon)$-*упаковки, где*

$$\varepsilon_n^N(\gamma,\varepsilon) := \frac{1}{2}\min\{\beta\sqrt{2},\ 2\varepsilon_N, (1-\varepsilon)\sqrt{\beta\gamma\delta^H(P^{n-1},C)}\},$$

и $\varepsilon_N := \min\{\rho(x, y)\colon x,y \in Z^N, x \ne y\}/2$.

Доказательство. Для $n=N$ утверждение леммы, очевидно, справедливо. Пусть оно справедливо для n-1. По предположению индукции Z^{n-1} есть база $\varepsilon_{n-1}^{N}(\gamma, \varepsilon)$-упаковки. Но $\delta^H(P^{n-1}, C) \le \delta^H(P^{n-2}, C)$, поэтому Z^{n-1} есть база $\varepsilon_n^{N}(\gamma, \varepsilon)$-упаковки. Пусть $z_{n-1} := p_{n-1} + \beta u_{n-1}$, где p_{n-1} и u_{n-1} взяты из определения H_1-последовательности отсечения. Так как $Z^n = \{z_{n-1}\}\cup Z^{n-1}$, то осталось доказать, что $\rho(z_{n-1}, z) \ge 2\varepsilon_n^{N}(\gamma, \varepsilon)$ для любого $z\in Z^{n-1}$. Пусть $z = p + \beta v$, где $p\in\partial P^{n-1}\cap\partial C$, $v\in S(p, C)$ и $p\in T(v, C)$.

Если $<u_{n-1}, v> \le 0$, то $\rho(z_{n-1}, z) \ge \beta\sqrt{2}$. Пусть $<u_{n-1}, v> > 0$ и $p' := t(p_{n-1}, P^{n-1})$. Тогда по лемме 2.3.3 имеем

$$\| z_{n-1} - z\| \ge \min \{\beta\sqrt{2}, \sqrt{(h\beta)}\text{-}\omega_0(C)h\},$$

где $h := g(u_{n-1}, p') - g(u_{n-1}, C)$, $\delta^H(P^{n-1}, C) \ge h \ge \gamma\delta^H(P^{n-1}, C)$ по определению H_1-последовательности отсечения. Осталось выбрать N так, чтобы $\delta^H(P^{n-1}, C)^2 \le \varepsilon/\omega_0(C)$.

Лемма 2.3.5 доказана.

Лемма 2.3.6. *Пусть $C\in\mathscr{C}$. Тогда база ε-упаковки на ∂C, $0 < \varepsilon < R(C)$, содержит не более, чем $[N_1(\varepsilon, C)]_-$ элементов, где*

$$N_1(\varepsilon,C) := \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\left(\frac{R(C)}{\varepsilon}\right)^{d-1}\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{2R(C)}\right)^2\right]^{(1-d)/2}.$$

Доказательство. Пусть $C\subset B_{R(C)}(z)$ и Z – база ε-упаковки на ∂C. Пусть $i(q)$ – луч с вершиной в $q\in\partial C$ в направлении из $S(q, C)$. Определим

$$Z^* := \{i(q)\cap\partial B_{R(C)}(z)\colon q\in Z\}.$$

Тогда Z есть проекция Z^* на ∂C. Проекция на границу ВКТ не увеличивает расстояний [2], поэтому Z^* есть база ε-упаковки на $\partial B_{R(C)}(z)$. Для $q^*\in Z^*$ (d-1)-шар $B_x(q^*)$, $x:=\varepsilon[1-(\varepsilon/(2R(C))^2]^{1/2}$, есть проекция $\partial B_{R(C)}(z)\cap B_\varepsilon(q^*)$ на плоскость, касательную к $B_{R(C)}(z)$ в точке q^*. Поэтому

$$\sigma(\partial B_{R(C)}(z)\cap B_\varepsilon(q^*)) \ge \pi_{d-1}x^{d-1}$$

и

$$\text{card } Z = \text{card } Z^* \le \sigma(\partial B_{R(C)}(z)) /(\pi_{d-1}x^{d-1}).$$

Лемма 2.3.6 доказана.

Лемма 2.3.7. *Пусть $C\in\mathscr{C}$. Тогда база ε-упаковки на ∂C, $0 < \varepsilon < r(C)$, содержит не более, чем $[N_2(\varepsilon, C)]_-$ элементов, где*

$$N_2(\varepsilon, C) := \frac{\sigma(C)}{\pi_{d-1}\varepsilon^{d-1}}\omega(C)^{d-2}.$$

Доказательство. Пусть $z\in\text{int } C$: $B_r(z)\subset C\subset B_R(z)$, $\omega(C)=R/r$. Пусть Z – база ε-упаковки на ∂C. Согласно [1] для любого $\beta>0$ существует ВКТ C' с аналитической границей такое, что $\delta(C, C')\leq\beta$. Пусть $i(q)$ – луч с вершиной в $q\in\partial C$ в направлении из $S(q, C)$. Для $q\in Z$ определим $q'(q)$ как $i(q)\cap\partial C'$ при $q\in C'$ или как проекцию q на C' при $q\notin C'$. Тогда $\rho(q'(q), q)\leq\beta$. Пусть $Z' := \{q'(q)\colon q\in Z\}$. Очевидно, что при $\beta<\varepsilon$ множество Z' есть база $(\varepsilon\text{-}\beta)$-упаковки на $\partial C'$.

Так как $\partial C'$ аналитическая, то при любых x, $x>0$ и $q'\in Z'$ для множества $\partial C'\cap B_x(q')$ определены его «поверхностный» объем $\sigma(\partial C'\cap B_x(q'))$ и «линейный» объем $\lambda(\cdot)$ его границы $\lambda(\partial C'\cap\partial B_x(q')))$. Оценим $\sigma(\partial C'\cap B_x(q'))$. Имеем

$$\sigma(\partial C'\cap B_x(q'))\geq x\lambda(\partial C'\cap\partial B_x(q')))/(d\text{-}1).$$

Пусть $\beta<r/2$, тогда по лемме 1.3.4 имеем $B_{r-2\beta}(z)\subset C'$ и $q'\notin B_{r-2\beta}(z)$. Пусть K – конус видимости $B_{r-2\beta}(z)$ из точки q'. Для любого $x<r\text{-}2\beta$ имеем

$$C'\cap\partial B_x(q')\supset K\cap\partial B_x(q').$$

Так как $K\cap\partial B_x(q')$ есть $(d\text{-}1)$-шар на поверхности сферы $\partial B_x(q')$, то

$$\lambda(\partial C'\cap\partial B_x(q')))\geq\lambda(\partial K\cap\partial B_x(q'))).$$

Граница $\partial K\cap\partial B_x(q'))$ лежит в $\mathbb{E}^d$ в одной гиперплоскости. Радиус r' шара conv $\partial K\cap\partial B_x(q')$ не меньше $x(r\text{-}2\beta)/(R+\beta)$. Поэтому

$$\lambda(\partial K\cap\partial B_x(q')))\geq(d\text{-}1)\pi_{d\text{-}1}(r')^{d\text{-}2}.$$

Поэтому

$$\sigma(\partial C'\cap B_x(q'))\geq\pi_{d\text{-}1}x^{d\text{-}1}\{(r\text{-}2\beta)/(R+\beta)\}^{d\text{-}2} =: \sigma(x, \beta).$$

Поскольку

$$\text{card } Z = \text{card } Z'\leq\sigma(\partial C)\,/\,\sigma(\varepsilon\text{-}\beta, \beta),$$

то, переходя к пределу при $\beta\to 0$ и условии $\varepsilon<r$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2.3.7 доказана.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$ и $\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует номер N такой, что при n≥N справедливо*

$$\delta^H(P^n, C)\leq(1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\,k(n)^{2/(1\text{-}d)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$ ($m^f(P^n)$) и

$$\lambda_9(\gamma, C) := \frac{16R(C)}{\gamma}\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Доказательство. Поскольку $H_1(\gamma, C)$-последовательность есть $H(\gamma, C)$ - последовательность, то по теореме 1.2.2 имеем

$$\lim_{n\to\infty}\delta^H(P^n, C) = 0.$$

Пусть $\beta>0$ и $\{Z^n\}_{n=0,1,2,...}$ – сопровождающая последовательность множеств для $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$.

Рассмотрим сначала схему восполнения. Пусть N:

$$\delta^H(P^{N-1}, C) \le \frac{4}{\gamma\beta}\min\left\{\frac{\beta^2}{2}, \varepsilon_0^2\right\},$$

где ε_0 – максимальный радиус базы упаковки для множества Z^0. По лемме 2.3.4 множество Z^n есть база $\varepsilon_n(\gamma)$-упаковки, а при $n\ge N$ – база τ_n -упаковки на $\partial(C+\beta B)$, где $\tau_n := (\beta\gamma\delta^H(P^n, C))^{1/2}/2$. Так как $Z^n \subset \partial(C+\beta B)$, то согласно лемме 2.3.6 имеем $Z^n \le N_1(\tau_n, C+\beta B)$.

В случае $C\in\mathscr{P}$ утверждение теоремы, очевидно, выполняется. Пусть $C\notin\mathscr{P}$. Тогда $\delta^H(P^n, C)>0$ для любого n, и из определения H-последовательности восполнения вытекает card $Z^n = m^t(P^0) + n$. Поэтому

$$n < \text{card } Z^n,\ m^t(P^n) < \text{card } Z^n.$$

Итак, в обозначениях теоремы, при достаточно малых τ_n ($n\ge N^*>N$) имеем

$$k(n) < \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\left[(1+\varepsilon)\frac{4(R(C)+\beta)^2}{\beta\gamma\delta^H(P^n, C)}\right]^{\frac{d-1}{2}}.$$

Минимум правой части неравенства достигается при $\beta = R(C)$, откуда получаем утверждения теоремы для схемы восполнения.

Рассмотрим схему отсечения. По лемме 2.3.5 для любого ε^*, $0 < \varepsilon^* < 1$, существует N^* такое, что при $n\ge N^*$ множество Z^n есть база $\varepsilon_n^{N^*}(\gamma, \varepsilon^*)$-упаковки. Пусть $N^{**}\ge N^*$ такое, что $(1-\varepsilon^*)(\beta\gamma\delta^H(P^{N^{**}-1}, C))^{1/2}/2 \le \varepsilon_{N^*}^{N^*}(\gamma, \varepsilon^*)$. Тогда при $n\ge N^{**}$ множество Z^n есть база τ_n-упаковки, где $\tau_n := (1-\varepsilon^*)(\beta\gamma\delta^H(P^n, C))^{1/2}/2$. Так как $Z^n\subset\partial(C+\beta B)$, то, согласно лемме 2.3.6, card $Z^n \le N_1(\tau_n, C+\beta B)$.

В случае $C\in\mathscr{P}$ утверждение теоремы, очевидно, выполняется. Пусть $C\notin\mathscr{P}$. Тогда $\delta(P^n, C) > 0$ для любого n, и из определения H-последовательности вытекает card $Z^n = m^f(P^0) + n$. Поэтому

$$n < \text{card } Z^n,\ m^f(P^n) < \text{card } Z^n.$$

Итак, в обозначениях теоремы, при достаточно малых τ_n ($n\ge N^{***}$) имеем

$$k(n) < \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\left[(1+\varepsilon^{**})\frac{4(R(C)+\beta)^2}{(1-\varepsilon^*)^2\beta\gamma\delta^H(P^n,C)}\right]^{\frac{d-1}{2}}.$$

Минимум правой части неравенства достигается при $\beta=R(C)$. При соответствующем выборе выборе ε^* и ε^{**} получим утверждения теоремы для схемы отсечения.

Теорема 2.3.1 полностью доказана.

Замечание. Используя в доказательстве теоремы 2.3.1 вместо леммы 2.3.6 лемму 2.3.7, получим оценку

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda'_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$ ($m^f(P^n)$) и

$$\lambda'_9(\gamma,C) := \frac{4}{\gamma R(C)}\left[\frac{\sigma(C+B_{R(C)})\omega^{d-2}(C+B_{R(C)})}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}},$$

близкую к результату теоремы 2.3.1, однако, значительно менее наглядную.

Лемма 2.3.8. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H(\gamma, C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\delta^S(C,P^n)}{\delta^H(C,P^n)} \le \sigma(C).$$

Доказательство. Согласно [48] (341), для любого $C\in\mathscr{C}$ справедливо

$$\sigma(C) = \lim_{\lambda\to+0}\frac{\mu(C_\lambda)-\mu(C)}{\lambda}.$$

Но для схем восполнения $P^n \subset C \subset [P^n]_\lambda = P^n{}_\lambda$, где $\lambda = \delta^H(C, P^n)$. Поэтому $\delta^S(P^n, C) = \mu(C) - \mu(P^n) \leq \mu(P^n{}_\lambda) - \mu(P^n)$, откуда вытекает утверждение леммы для последовательностей восполнения. Совершенно аналогично для схем отсечения $C \subset P^n \subset [C]_\lambda = C_\lambda$ и $\delta^S(P^n, C) = \mu(P^n) - \mu(C) \leq \mu(C_\lambda) - \mu(C)$, откуда вытекает утверждение леммы для последовательностей отсечения.

Лемма 2.3.8 доказана.

Непосредственно из теоремы 2.3.1 и леммы 2.3.8 вытекает следующая скорость сходимости в метрике объема симметрической разности.

Следствие 2.3.1. *Пусть* $C \in \mathscr{C}$ и $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер* N *такой, что при* $n \geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и параметр* $\lambda_9(\gamma, C)$ *определен в утверждении теоремы 2.3.1.*

2.4. Метод «Глубоких Ям» (МГЯ)

В настоящем разделе излагается метод «Глубоких Ям», разработанный в [47], – универсальный адаптивный итерационный метод аппроксимации вполне ограниченных множеств в произвольных метрических пространствах, основанный на построении близких к оптимальным метрических ε-сетей и ε-различимых подмножеств (построения эффективных покрытий и упаковок шаров). Будет показано, что при заданной мощности метрической ε-сети МГЯ позволяет строить аппроксимацию с радиусом покрывающих шаров не более чем вдвое большим минимально возможного. Далее будет рассмотрена реализация МГЯ при аппроксимации гладких выпуклых тел многогранниками.

В настоящей главе для цельности изложения мы напомним некоторые определения, связанные с метрическими ε-сетями, приведенные в пункте 0.1.2 и редко используемые в теории ВКТ.

2.4.1. Описание МГЯ

Пусть A и U – непустые подмножества метрического пространства $\mathbb{R}$ с метрикой ρ. Множество U называется метрической *ε-сетью* для A, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Множество U называется *ε-различимым*, если любые две его различные точки находятся на расстоянии, большем, чем ε. Множество A называется *вполне ограниченным*, если для любого положительного ε существует конечная ε-сеть для A. Будем считать оптимальными ε-сеть с минимально возможным числом элементов и ε-различимое подмножество с максимальным числом элементов.

Задача построения метрических *ε-сетей* и *ε-различимых* подмножеств в прикладном ее аспекте традиционно рассматривается в двух направлениях: для аппроксимации определенных классов функций (см., например, классические работы [36] и [85]), а также для построения экономных покрытий и плотных упаковок шаров в евклидовых или простейших неевклидовых пространствах (см. обзор в [54]). Вместе с тем, методы эффективной аппроксимации произвольного множества в метрическом пространстве изучены недостаточно. Рассматриваемый в настоящем параграфе метод может быть использован при аппроксимации в пространствах со сложными метриками, а также в тех случаях, когда отсутствуют способы построения покрытий (ε-сетей) и упаковок (ε-различимых подмножеств), учитывающие специфику аппроксимируемых множеств.

Для заданных U и A определим *радиус покрытия* $\rho^c(A, U)$ как нижнюю грань величин ε таких, что U является ε-сетью для A. Определим также *радиус различимости* $\rho^p(U)$ как верхнюю грань величин ε таких, что U является ε-различимым. Далее будет показано, что МГЯ позволяет строить подмножество A с не более чем вдвое большим радиусом покрытия, по сравнению с другими сетями для A при любой заданной мощности конечной сети, и не более чем вдвое меньшим радиусом различимости, чем другие подмножества A той же мощности.

Для вполне ограниченного A обозначим через $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ минимальное число точек ε-сети A, через $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ – минимальное число множеств диаметра не более чем 2ε, покрывающих множество A, и через $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A. (Величины $\mathfrak{H}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{H}^R{}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ и $\mathfrak{E}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ называются, соответственно, *ε-энтропией, относительной ε-энтропией* и *ε-емкостью* A, где под log здесь и далее понимается $\log_2$). Отметим некоторые свойства введенных функций [36]: $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ как функции ε являются невозрастающими и непрерывными справа; при этом имеют место следующие неравенства:

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}(\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\varepsilon, A).$$

Пусть T – конечное подмножество A (*база покрытия*) и card(T) – его мощность. Для $x\in A$ обозначим $\rho(x, T) := \min \{\rho(x, t)\colon t\in T\}$ и пусть $\rho(A, T) := \sup \{\rho(x, T)\colon x\in A\}$. Для ε, $0 < \varepsilon$, пусть $[T]_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}\colon \rho(x,T) \le \varepsilon\}$, и $(T)_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}\colon \rho(x,T) < \varepsilon\}$. Для заданного γ, $0 < \gamma \le 1$, обозначим

$$\mathrm{DH}_\gamma(T) := \{x\in A\colon \rho(x, T) \ge \gamma\,\rho(A, T)\}.$$

Очевидно, что при $\gamma = 1$ это определение имеет смысл для замкнутых вполне ограниченных множеств, т.е., в силу ограниченности вполне ограниченных множеств [86] (стр. 96) – для любых компактных A. Точки $x\in\mathrm{DH}_1(T)$ в [54] (стр. 5) называются глубокими ямами (ГЯ). Множество $\mathrm{DH}_1(T)$ назовем множеством ГЯ, а множество $\mathrm{DH}_\gamma(T)$ – множеством ГЯ уровня γ.

Опишем класс итерационных алгоритмов построения ε-сетей и ε-различимых подмножеств для вполне ограниченных множеств.

Метод Глубоких Ям

Пусть $t_1\in A$ и $T_1:=\{t_1\}$. Пусть множество T_n построено и $\rho(A, T_n) > 0$. Тогда $T_{n+1}:= T_n\cup\{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1}\in\mathrm{DH}_\gamma(T_n)$.

Конкретный алгоритм МГЯ состоит в уточнении способа выбора $t_1\in A$ и $t_{n+1}\in \mathrm{DH}_\gamma(T_n)$. Последовательность множеств $\{T^n\}_{n=1,2\ldots}$, порождаемую МГЯ для множества A с константой γ, будем называть *$\mathrm{DH}(\gamma, A)$-последовательностью.*

2.4.2. Скорость сходимости МГЯ

Перечислим некоторые очевидные свойства последовательности множеств $\{T_n\}_{n = 1, 2, \ldots}$, порождаемой МГЯ. Пусть $\rho_n := \rho(t_{n+1}, T_n)$.

Свойство 2.4.1. $\rho^c(A, T_n) \le \rho_n/\gamma$, $\rho^p(T_n) \ge \gamma\rho_{n-1}$.

Свойство 2.4.2. $\dfrac{\rho^c(A,T_n)}{\rho^p(T_n)} \le \dfrac{1}{\gamma^2}$.

Свойство 2.4.3. Пусть для любого $n \ge 1$ справедливо $\rho(A, T_n) > 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(A,T_n) = 0$.

Итак, из свойства 2.4.3 следует сходимость T_n к множеству A при $n\to\infty$. Поэтому итерации МГЯ могут быть прекращены при достижении заданного радиуса ε-покрытия, либо при достижении заданного ограничения на мощность ε-различимого подмножества.

Обозначим

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A) := \limsup_{\nu\to 0+} \mathfrak{M}(\varepsilon - \nu, A).$$

Скорость сходимости МГЯ определяется следующей теоремой.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ – $\mathrm{DH}(\gamma, A)$-*последовательность и* $\rho^c(A, T_n) > 0$. *Тогда*

$$\mathfrak{N}^R(\rho^c(A,T_n), A) \le n \le \widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2 \rho^c(A,T_n), A).$$

Доказательство. По определению величины $\rho^c(A, T_n)$ для любого $\nu > 0$ множество T_n есть $(\rho^c(A, T_n)+\nu)$-сеть для A. Поэтому card $T_n \ge \mathfrak{N}^R(\rho^c(A, T_n)+\nu, A)$. Отсюда, в силу непрерывности справа функции $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, \cdot)$ и того, что card $T_n = n$, получаем первое утверждение теоремы.

Далее, для любого малого $\nu > 0$ множество T_n есть $(\rho^p(A, T_n)-\nu)$-различимое подмножество A, откуда card $T_n \le \mathfrak{M}(\rho^p(T_n)-\nu, A)$. Поэтому

$$\mathrm{card}\, T_n \le \widetilde{\mathfrak{M}}(\rho^p(T_n), A).$$

Теперь, учитывая свойство 2.4.2, получаем второе утверждение теоремы.

Теорема 2.4.1 доказана.

Пусть $F := \{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ – последовательность множеств, порождаемая МГЯ для множества A. Для $\varepsilon > 0$ обозначим

$$n_F(\varepsilon, A) := \min\{n: \rho^c(A, T_n) \le \varepsilon\}.$$

Следствие 2.4.1. *Пусть* F – $\mathrm{DH}(\gamma, A)$-*последовательность и* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$n_F(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\gamma^2\varepsilon, A) + 1\,.$$

Доказательство. Обозначим $n^* := n_F(\varepsilon, A)$ и пусть $F := \{T_n\}_{n = 1, 2, \ldots}$. По определению $\rho^c(A, T_{n^*-1}) > \varepsilon$ и по теореме 2.4.1 в этом случае имеем

$$n^* - 1 \le \widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2\rho^c(A, T_{n^*-1}), A) \le \mathfrak{M}(\gamma^2\varepsilon, A)\,.$$

Следствие 2.4.1 доказано.

Нижняя метрическая размерность вполне ограниченного множества A определяется как

$$\underline{\mathrm{dm}}\, A := \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathfrak{H}_\varepsilon(A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathfrak{E}_\varepsilon(A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Аналогично определяется верхняя метрическая размерность $\overline{\mathrm{dm}}\, A$, а при равенстве верхней и нижней размерности – метрическая размерность $\mathrm{dm}\, A$. Для вполне ограниченного множества A в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^d$, имеющего внутреннюю точку, справедливо [36] равенство $\mathrm{dm}\, A = d$. Вместе с тем, существуют подмножества $\mathbb{E}^d$ с метрической размерностью, меньшей d или равной нулю. В случае, когда верхняя метрическая размерность аппроксимируемого множества не равна нулю, ею определяется в асимптотике скорость сходимости МГЯ. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.4.2. *Пусть* $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *– последовательность множеств, порождаемая МГЯ для множества A, и* $\overline{\mathrm{dm}}\, A > 0$. *Тогда для любого* $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, A$ *справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\alpha} \rho^c(A, T_n) = 0\,.$$

Доказательство. По теореме 2.4.1 имеем

$$n \le \widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2\rho^c(A, T_n), A) \le \mathfrak{M}(\frac{\gamma^2}{2}\rho^c(A, T_n), A)\,.$$

Обозначим $\varepsilon_n := \gamma^2\rho^c(A, T_n)/2$. Достаточно показать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathfrak{M}(\varepsilon_n, A)\varepsilon_n^\alpha = 0\,.$$

По определению верхней размерности существует номер N такой, что при $n \ge N$ справедливо

$$\frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon_n, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon_n}} \le \overline{\mathrm{dm}}\, A + \frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, A}{2}.$$

Поэтому, обозначая $\exp_2(x) := 2^x$, получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \mathfrak{M}(\varepsilon_n, A)\varepsilon_n^{\alpha} = \limsup_{n\to\infty} \exp_2\left[(\log \varepsilon_n)\left(\alpha - \frac{\log \mathfrak{M}(\varepsilon_n, A)}{\log \frac{1}{\varepsilon_n}}\right)\right] \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \exp_2\left[(\log \varepsilon_n)\left(\frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, A}{2}\right)\right] = \limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n^{\frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, A}{2}} = 0.$$

Следствие 2.4.2 доказано.

2.4.3. Эффективность МГЯ

Рассмотрим задачу оценки эффективности МГЯ. Сначала рассмотрим эффективность метода при фиксированных мощностях ε-покрытия и ε-различимого подмножества. Сравним радиус покрытия (радиус различимости), который дает МГЯ, с радиусом покрытия (различимости), который может быть получен любым другим методом.

Теорема 2.4.2. *Пусть T_n – множество, порожденное МГЯ для множества A и некоторого n* = 1, 2, ..., *и $S_n \subset \mathbb{R}$,* card S_n = card T_n. *Пусть $\rho^c(A, T_n) > 0$. Тогда*

$$\frac{\rho^c(A, S_n)}{\rho^c(A, T_n)} \ge \frac{\gamma}{2}.$$

Доказательство. Пусть $S_n \subset \mathbb{R}$ есть ε-сеть для A, card S_n = card T_n = n. Тогда существуют $s \in S_n$, $\{t_1, t_2\} \subset T_{n+1}$ такие, что $\{t_1, t_2\} \subset [s]_\varepsilon$. Согласно неравенству треугольника $\rho(t_1, t_2) \le \rho(t_1, s) + \rho(s, t_2) \le 2\varepsilon$. Но по свойству 2.4.1 имеем $\rho(t_1, t_2) \ge \rho(t_{n+1}, T_n) \ge \gamma\rho^c(A, T_n)$. Отсюда $\gamma\rho^c(A, T_n) \le 2\varepsilon$.

Теорема 2.4.2 доказана.

Теорема 2.4.3. *Пусть T_n – множество, порожденное МГЯ для* *множества A и некоторого n = 1, 2, ..., и $S_n \subset A$,* card S_n = card T_n. *Тогда*

$$\frac{\rho^p(T_n)}{\rho^p(S_n)} \geq \frac{\gamma^2}{2}.$$

Доказательство. Пусть S_n есть ε-различимое подмножество A, card S_n = card $T_n = n$. Согласно свойству 2.4.1 множество T_{n-1} есть ε^*-сеть для A, где $\varepsilon^* := \rho_{n-1}/\gamma + \nu$, где ν – произвольное малое число. Тогда существуют $t \in T_{n-1}$, $\{s_1, s_2\} \subset S_n$ такие, что $\{s_1, s_2\} \subset [t]_{\varepsilon^*}$. Согласно неравенству треугольника $\varepsilon \leq \rho(s_1, s_2) \leq \rho(s_1, t) + \rho(t, s_2) \leq 2\varepsilon^* = 2(\rho_{n-1}/\gamma + \nu)$. Учитывая произвольность ν и то, что по свойству 2.4.1 имеем $\rho^p(T_n) \geq \gamma\rho_{n-1}$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.4.3 доказана.

Рассмотрим теперь эффективность метода при фиксированных радиусах покрытия и различимости.

Теорема 2.4.4. *Пусть T_n – множество, порожденное МГЯ для множества A и некоторого n = 1, 2, ..., и S_n, $S_n \subset \mathbb{R}$, есть ε-сеть для A, $0 < \varepsilon \leq \rho^c(A, T_n)$. Тогда*

$$\frac{\text{card}\, S_n}{\text{card}\, T_n} \geq \frac{\mathfrak{N}^R(\rho^c(A,T_n),A)}{\widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2\rho^c(A,T_n),A)}.$$

Доказательство. Пусть S_n есть ε-сеть для A. Тогда card $S_n \geq \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \geq \mathfrak{N}^R(\rho^c(A, T_n), A)$. По теореме 2.4.1, $\text{card}\, T_n \leq \widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2\rho^c(A,T_n),A)$, откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2.4.4 доказана.

Теорема 2.4.5. *Пусть T_n – множество, порожденное МГЯ для множества A и некоторого n = 1,2,..., и S_n есть ε-различимое подмножество A, $\varepsilon \geq \rho^p(T_n)$. Тогда*

$$\frac{\text{card}\, T_n}{\text{card}\, S_n} \geq \frac{\mathfrak{N}^R\left(\dfrac{1}{\gamma^2}\rho^p(T_n),A\right)}{\mathfrak{M}(\rho^p(T_n),A)}.$$

Доказательство. Пусть S_n есть ε-различимое подмножество A.

Тогда card $S_n \le \mathfrak{M}(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\rho^p(T_n), A)$. По теореме 2.4.1 card $T_n \ge \mathfrak{N}^R(\rho^c(A, T_n), A)$. Поэтому из свойства 2.4.2 вытекает, что card $T_n \ge \mathfrak{N}^R(\rho^p(T_n)/\gamma^2, A)$, откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2.4.5 доказана.

Пусть Q – выпуклое, компактное центрально-симметричное тело в d-мерном линейном пространстве $\mathbb{D}^d$. Определим норму, соответствующую телу Q через функцию Минковского как

$$\|x\|_Q := \inf\{\lambda: x/\lambda \in Q, \lambda > 0\}.$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{D}^d{}_Q$ с метрикой $\rho(x, y) := \|x\text{-}y\|_Q$. Для положительных функций f и g, определенных на некотором интервале вблизи нуля, обозначим $f \sim g$, если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}[f(\varepsilon)/g(\varepsilon)] = 1$. По теореме 9 из [36] существуют константы $\vartheta(d, Q)$ и $\delta(d, Q)$ такие, что для любого множества $A \subset \mathbb{D}^d{}_Q$ с объемом (Лебеговой мерой) $\mu^d(A) > 0$ справедливо

$$\begin{gathered}\mathfrak{N}(\varepsilon, A) \sim \vartheta(d,Q)\frac{\mu^d(A)}{\mu^d(Q)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d, \\ \mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \sim \delta(d,Q)\frac{\mu^d(A)}{\mu^d(Q)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d.\end{gathered}$$

Величину $\vartheta(d, Q)$ принято называть минимальной плотностью покрытия пространства $\mathbb{D}^d$ телом Q, а величину $\delta(d, Q)$ – максимальной плотностью укладки тела Q в пространстве $\mathbb{D}^d{}_Q$.[6]

Следствие 2.4.3. *Пусть* $\{T_n\}_{n\ =\ 1,\ 2,\ \dots}$ – DH(γ, A)-*последовательность для* $A\subset\mathbb{D}^d{}_Q$, $\mu^d(A) > 0$, *и* S_n, $S_n \subset \mathbb{D}^d{}_Q$, *есть* ε_n-*сети для* A, $0 < \varepsilon_n \le \rho^c(A, T_n)$. *Тогда существуют константы* $\vartheta(d, Q)$ *и* $\delta(d, Q)$ *такие, что*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\text{card}\, S_n}{\text{card}\, T_n} \ge \frac{\vartheta(d,Q)}{\delta(d,Q)}\frac{\gamma^{2d}}{2^d}.$$

[6] Согласно [29], такие же утверждения справедливы и для произвольного измеримого подмножества риманова многообразия с соответствующей метрикой (см. п.4.6).

Доказательство. Прежде всего, заметим, что из определения величины $\widetilde{\mathfrak{M}}(\varepsilon, A) := \limsup_{\nu \to 0+} \mathfrak{M}(\varepsilon - \nu, A)$ и теоремы 9 из [36] следует, что

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(2\varepsilon, A) \sim \delta(d, Q) \frac{\mu^d(A)}{\mu^d(Q)} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^d .$$

Далее, так как $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \geq \mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, то из теоремы 4 и теоремы 9 из [36] следует

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\operatorname{card} S_n}{\operatorname{card} T_n} \geq \liminf_{n \to \infty} \frac{\mathfrak{N}^R(\rho^c(A, T_n), A)}{\widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2 \rho^c(A, T_n), A)} \geq$$

$$\geq \liminf_{n \to \infty} \frac{\mathfrak{N}(\rho^c(A, T_n), A)}{\widetilde{\mathfrak{M}}(\gamma^2 \rho^c(A, T_n), A)} = \frac{\vartheta(d, Q)}{\delta(d, Q)} \frac{\gamma^{2d}}{2^d}.$$

Следствие 2.4.3 доказано.

В общем случае для плотностей покрытия и упаковки справедливы [36] оценки

$$1 \leq \frac{\vartheta(d, Q)}{\delta(d, Q)} \leq 2^d ,$$

поэтому асимптотическая эффективность метода не может быть ниже, чем $(\gamma^2/2)^d$. В случае, когда нормирующее тело Q – куб (т.е. для пространства $\mathbb{D}^d{}_\infty$), справедливо $\vartheta(d, S) = \delta(d, S) = 1$. В случае, когда нормирующее тело Q – сфера (т.е. для евклидова пространства $\mathbb{D}^d{}_2$), справедливо $\mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \leq (d+1)\ \mathfrak{N}([2d/(d+1)]^{1/2}\varepsilon, A)$, что при больших d приводит к асимптотической эффективности по порядку размерности не ниже, чем $(\gamma^2/\sqrt{2})^d$.

В любом случае, как показывает следствие 2.4.3, эффективность МГЯ быстро снижается с ростом размерности и существенно зависит от параметра γ, характеризующего близость присоединяемой на текущей итерации точки к глубокой яме уже построенного множества. Вместе с тем, порядок скорости сходимости остается оптимальным (теорема 2.4.1) и определяется (следствие 2.4.2) метрической размерностью аппроксимируемого множества.

2.4.4. АМПА, основанные на МГЯ

В качестве примера использования МГЯ в пространствах со сложными метриками рассмотрим проблему построения многогранников, близких к МНА, для гладких выпуклых компактных многомерных тел.

Согласно [26], [29] задача построения МНА для метрики Хаусдорфа в асимптотике сводится к оптимальному покрытию поверхности гладкого выпуклого тела в метрике второй основной квадратичной формы, т.е. построению ε-сети в этой метрике. В этих работах показано, что расстояние от выпуклой оболочки ε-сети до выпуклого тела асимптотически имеет порядок ε^2. Если для построения ε-сети использовать МГЯ, то, как показано выше, при том же числе точек сети, радиус покрытия будет не более чем в два раза превышать минимально возможный. Поэтому расстояние от выпуклой оболочки такой сети до выпуклого тела будет превышать минимально возможное не более чем в четыре раза.

Дадим более формальное описание применения МГЯ для создания эффективных АМПА аппроксимации гладких ВКТ.

Пусть $\langle \mathbb{R}, \rho \rangle$ – произвольное компактное метрическое пространство и $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ – последовательность точек из $\mathbb{R}$. *Дисперсией* множества $\{x_k\colon k=1,2,\ldots n\}$, $n=1,2,\ldots$, назовем величину

$$d_n(\{x_k\}) := \inf\left\{\tau > 0 : \mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{n}\{y \in \mathbb{R} : \rho(x_j, y) \le \tau\}\right\}. \qquad (2.4.1)$$

Из определения радиуса покрытия (см. пункт 4.1) следует, что

$$d_n(\{x_k\}) = \rho^c(\mathbb{R}, \{x_k\}). \qquad (2.4.2)$$

Определим теперь (по [29]) класс ВКТ с границей, являющейся римановым многообразием.

Пусть $\mathbf{M}$ – *d-мерное (риманово) многообразие класса $\boldsymbol{C}^2$ с метрикой класса $\boldsymbol{C}^0$*, т.е. топологическое пространство со следующими свойствами:

a) для любого $p\in\mathbf{M}$ существует пара U, h (*карта*), где U – окрестность p и h – гомеоморфизм U на открытый шар в $\mathbb{E}^d$;

b) для заданных $p,q\in\mathbf{M}$ с соответствующими U, h и V, k такими, что $U\cap V\neq\varnothing$, отображение $k\circ h^{-1}\colon h(U\cap V) \to k(U\cap V)$ есть диффеоморфизм класса $\boldsymbol{C}^2$;

c) для заданного $p\in\mathbf{M}$, и соответствующей карты U, h для любой $u\in h(U)$ определена положительно определенная квадратичная форма

$$q_u(s) := q_{p,u}(s) := \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}(u)s^i s^j,\ s=(s^1,\ldots,s^d)\in\mathbb{E}^d,$$

где функции $g_{ij}(\cdot)$ на $h(U)$ удовлетворяют условиям $g_{ij} = g_{ji}$ и принадлежат классу $\boldsymbol{C}^0$.

Кривую K в $\mathbf{M}$ назовем принадлежащей классу $\boldsymbol{C}^1$, если существует параметризация этой кривой x: $[\alpha, \beta] \to \mathbf{M}$, такая что для любой карты U, h и любого интервала $[a, b]\subset[\alpha, \beta]$ с $x([a, b])\subset U$ функция $u = h^\circ x$: $[a, b] \to h(U)$ принадлежит классу $\boldsymbol{C}^1$. Если $K\subset U$, то *длину* K определим как

$$\int_{\alpha}^{\beta} q_{u(t)}(\dot{u}(\tau))^{1/2}d\tau, \tag{2.4.3}$$

иначе K разобьем на подходящие кривые и их длины сложим.

Для $x,y\in\mathbf{M}$ через $\mu(x, y)$ обозначим *геодезическую метрику на* $\mathbf{M}$, т.е. точную нижнюю грань длин кривых класса $\boldsymbol{C}^1$ из $\mathbf{M}$, соединяющих x и y.

Множество $J\subset\mathbf{M}$ назовем *измеримым (по Жордану)*, если его замыкание cl J компактно, и для любого $p\in\mathbf{M}$, и любой соответствующей карты U, h и любой окрестности V точки p, такой что cl V компактно, cl $V \subset U$ и $h(V)$ измеримо (по Жордану) в $\mathbb{E}^d$, справедливо, что $h(J\cap V)$ также измеримо. Заметим, что если $\mathbf{M}$ компактно, то оно измеримо по Жордану.

Пусть $C\in\mathscr{C}^2$. Определим структуру многообразия на ∂C. Пусть $p\in\partial C$. Через $n_C(p)$ обозначим единичную нормаль к ∂C в точке p, направленную внутрь C. В $l(-n_C(p), C)$ выберем декартову прямоугольную систему координат. Вместе с $-n_C(p)$ она образует декартову прямоугольную систему координат всего $\mathbb{E}^d$. Через h_p обозначим ортогональную проекцию на $l(-n_C(p), C)$. Пусть U – окрестность p на ∂C, такая что h_p есть гомеоморфизм U на $h_p(U)$ и $h_p(U)$ есть открытый евклидов шар размерности d-1 на $l(-n_C(p), C)$. Если представить U в виде $x=(u, f(u))$, где $u=h_p(x)$ для любого $x\in U$, то f – строго выпуклая функция из класса $\boldsymbol{C}^2$ на $h_p(U)$. Для $u \in h_p(U)$ введем *вторую основную квадратичную форму* (в.о.к.ф.):

$$q_{p,u}(s) := \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=1}^{d-1} b_{ij}(u) s_i s_j \,, \tag{2.4.4}$$

где $s \in \mathbb{E}^{d-1}$ и $b_{ij}(u)$ – коэффициенты в.о.к.ф.:

$$b_{ij}(u) := \frac{f_{ij}(u)}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{d-1} f_k^2(u)}}, \quad 1 \le i, j \le d-1 \,,$$

где через f_k, f_{ij} обозначены первая и вторая частные производные f. Так как все главные кривизны положительны, то в.о.к.ф. – положительно определена.

Таким образом введенная структура на ∂C удовлетворяет [29] условиям a), b) и c) определения (d-1)-мерного (риманова) многообразия $\mathbf{M} := \partial C$ класса $\boldsymbol{C}^2$ с метрикой μ_{II} в.о.к.ф. класса $\boldsymbol{C}^0$.

Теорема Gruber ([29], стр. 285)**.** *Пусть $C \in \mathscr{C}^2$ и пусть ∂C снабжена метрикой μ_{II} в.о.к.ф. Тогда для любой последовательности множеств $\{x_k\}_{k=1,\dots,n}$, $x_k \in \partial C$, такой что $d_n(\{x_k\}) \to 0$ при $n \to \infty$, справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \operatorname{conv}\{x_k : k = 1,\dots,n\})}{\frac{d_n^{\,2}(\{x_k\})}{2}} = 1 \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \bigcap_{k=1}^{n} L(-n_C(x_k), C))}{\frac{d_n^{\,2}(\{x_k\})}{2}} = 1 \,.$$

Теорема 2.4.6. *Пусть $C \in \mathscr{C}^2$ и $\{T_n\}_{n=1,2,\dots}$ –* DH(γ, ∂C)-*последовательность для многообразия ∂C с метрикой μ_{II} в.о.к.ф. Тогда*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \mathscr{P}_n^i)}{\delta^H(C, \operatorname{conv} T_n)} \ge \frac{\gamma^2}{4} \,,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \mathscr{P}_n^c)}{\delta^H(C, \bigcap\limits_{x\in T_n} L(-n_C(x), C))} \ge \frac{\gamma^2}{4}.$$

Доказательство. Пусть $n \ge d+1$ и Π_n – вписанный многогранник наилучшей аппроксимации: $\delta(C, \Pi_n) = \delta(C, \mathscr{P}^i{}_n(C))$.

Рассмотрим множество S_n:

$$M^t(\Pi_n) \subset S_n \subset \partial C,\ \mathrm{card}\, S_n = \mathrm{card}\, T_n.$$

Очевидно, $\rho^c(\partial C, M^t(\Pi_n)) \ge \rho^c(\partial C, S_n)$. С учетом (2.4.2) из теоремы 2.4.2 следует, что

$$d_n(M^t(\Pi_n)) = \rho^c(\partial C, M^t(\Pi_n)) \ge \rho^c(\partial C, S_n) \ge (\gamma/2)\rho^c(\partial C, T_n) = (\gamma/2)\, d_n(T_n).$$

Но по теореме Gruber для $M^t(\Pi_n)$ и T_n, в силу сходимости $d_n(T_n) \to 0$ по свойству 2.4.3, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \mathscr{P}_n^i)}{\dfrac{d_n{}^2(M^t(\Pi_n))}{2}} = 1,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \mathrm{conv}\, T_n)}{\dfrac{d_n{}^2(T_n)}{2}} = 1.$$

Поэтому

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \mathscr{P}_n^i)}{\delta^H(C, \mathrm{conv}\, T_n)} \ge \frac{\gamma^2}{4},$$

что доказывает утверждение теоремы для вписанных многогранников.

Второе утверждение теоремы (для описанных многогранников) доказывается совершенно аналогично с заменой множества $M^t(\Pi_n)$ на множество $\{p \in T(u,C) \colon u \in M^f(\Pi_n)\}$.

Теорема 2.4.6 доказана.

Итак, МГЯ позволяет в этом случае строить многогранники, отклонение которых от аппроксимируемого тела асимптотически не более чем в четыре раза больше, чем отклонение многогранников наилучшей аппроксимации с тем же числом вершин. В следующем пункте будет показано, что хаусдорфовы АМПА могут быть использованы для реализации МГЯ на поверхностях гладких ВКТ.

2.4.5. Исследование хаусдорфовых АМПА методом «Глубоких Ям»

Прежде всего, установим связь между хаусдорфовыми МПА и покрытием поверхности гладких ВКТ в метрике в.о.к.ф. методом Глубоких ям. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением H_1-последовательностей восполнения. Случай H-последовательностей восполнения рассмотрен в работе [87], а H-последовательности отсечения рассмотрены в работе [88].

Пусть $C\in\mathscr{C}_+^2$, и пусть ∂C снабжена метрикой в.о.к.ф. μ_{II}. Как и в предыдущем пункте, это означает следующее. Для любой $p\in\partial C$ через $n_C(p)$ обозначим единичную нормаль к ∂C в точке p, направленную внутрь C. В $l(-n_C(p), C)$ выберем декартову прямоугольную систему координат. Вместе с $-n_C(p)$ она образует декартову прямоугольную систему координат всего $\mathbb{E}^d$. Через h_p обозначим ортогональную проекцию на $l(-n_C(p), C)$. Пусть U – окрестность p на ∂C, такая что h_p есть гомеоморфизм U на $h_p(U)$ и $h_p(U)$ есть открытый евклидов шар размерности d-1 на $l(-n_C(p), C)$. Представим U в виде $x=(u, f(u))$, где $u=h_p(x)$ для любого $x\in U$. Тогда f – строго выпуклая функция из класса $\boldsymbol{C}^2$ на $h_p(U)$. Для $u\in h_p(U)$ с помощью (2.4.4) введем вторую основную квадратичную форму (в.о.к.ф.) $q_{p,u}(s)$, где $s\in\mathbb{E}^{d-1}$ и $b_{ij}(u)$ – коэффициенты в.о.к.ф. Длину кривой класса $\boldsymbol{C}^1$ на ∂C определим с помощью соответствующего разбиения через (2.4.3). Для $x,y\in\partial C$ через $\mu_{\mathrm{II}}(x, y)$ обозначим геодезическую метрику в.о.к.ф. на ∂C, т.е. точную нижнюю грань длин (в соответствующей метрике) кривых класса $\boldsymbol{C}^1$ из ∂C, соединяющих x и y.

Лемма G [29]. *Пусть $C\in\mathscr{C}_+^2$ и $\lambda>1$. Тогда существует такое* $\nu:=\nu(\lambda, C) > 0$ ($h:=h(\lambda, C) > 0$)*, что для любых $p,x\in\partial C$, $x\in B_\nu(p)$* ($\rho(x, h_p(x))<h$), *справедливо*

$$\frac{\mu_{\mathrm{II}}^2(p,x)}{2\lambda}\le\rho(x,h_p(x))\le\frac{\lambda\mu_{\mathrm{II}}^2(p,x)}{2}.$$

Лемма G содержится в [29] в разбросанном по доказательствам теорем виде, поэтому приведем ее доказательство из явно сформулированных утверждений этой работы, следуя изложению [29].

Обозначим через $\delta_{\mathrm{II}}(A, B) := \inf\{\mu_{\mathrm{II}}(x, y)\colon x\in A,\ y\in B\}$ минимальное расстояние между множествами A и B в метрике μ_{II}.

Лемма G1 ([29], стр. 287)**.** *Пусть $C\in\mathscr{C}^2$ и $\lambda>1$. Пусть $J\subset\mathbf{M}:=\partial C$ и J – измеримо. Тогда существуют точки $p_l\in\partial C$, соот-*

ветствующие им карты U_l, h_l, *окрестности* I_l *точек* p_l *и числа* $\delta_l >$ 0, l=1, …, m, *такие что для* $u,v\in h_{p_l}(I_l)$ *выполняется*

а)

$$\frac{1}{\lambda} \le \left(\frac{q_{p,u}(s)}{q_{p,v}(s)} \right)^{1/2} \le \lambda ,$$

б) $I_l \subset U_l$, I_l *- измеримые,* $I_1 \cup \ldots \cup I_m = J$, $I_k \cap I_l = \varnothing$, $k \ne l$, $\delta_{\text{II}}(I_l, \partial U_l) > \delta_l$.

Лемма G2 ([29], стр. 294)**.** *Пусть* $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$ *и* λ>1. *Пусть* $p\in\partial C$ *и* U *– ее окрестность, такая, что для любых* $u,v\in h_p(U)$ *и* $s\in\mathbb{E}^{d-1}\backslash\{0\}$ *определена в.о.к.ф. в виде* (2.4.4) *и выполняются условия а*) *леммы G1. Пусть* $x,y\in U$, $\mu_{\text{II}}(x, y) < \delta_{\text{II}}(x, \partial U)$. *Тогда*

$$\frac{\mu_{\text{II}}{}^2(x,y)}{2\lambda} \le \rho(y, h_x(y)) \le \frac{\lambda\mu_{\text{II}}{}^2(x,y)}{2} .$$

Замечание. Из леммы G2 сразу следует, что для любых соответствующих p и U и любого $x\in U$, $\mu_{\text{II}}(p, x)<\delta_{\text{II}}(p, \partial U)$, выполняется

$$\frac{\mu_{\text{II}}{}^2(p,x)}{2\lambda} \le \rho(x, h_p(x)) \le \frac{\lambda\mu_{\text{II}}{}^2(p,x)}{2} .$$

Лемма G3 ([29], стр. 295)**.** *Пусть числа* $\delta_l > 0$, l=1, …, m, *определены, как в лемме G1. Тогда существует* $h > 0$*, такое, что для любых* $x,y\in\partial C$, $\rho(y, h_x(y)) \le h$, *справедливо* $\mu_{\text{II}}(x, y) \le \min\{\delta_i$: i=1, …, $m\}$.

Доказательство леммы G. Докажем сначала существование такого $\nu > 0$, что для любых $p \in \partial C$ и $x\in B_\nu(p)$ выполнено утверждение леммы.

Множество ∂C – компактно. Поэтому оно измеримо (по Жордану). Значит, к ∂C применима лемма G1. В силу леммы G1 найдется такое натуральное m и разбиение $\partial C = I_1 \cup \ldots \cup I_m$, что выполнены свойства а) и б) из утверждения леммы G1. Пусть $p\in\partial C$. Тогда p лежит в одном из множеств I_j, $1 \le j \le m$, скажем, в I_1. В силу б) справедливо $\delta_{\text{II}}(p, \partial U_1) > \delta_1$. Пусть ν:=min $\{\delta_l$: =1, …, $m\}$. Тогда для любого $x\in\partial C$ из метрического шара $B_\nu(p)=\{x\in\partial C$: $\mu_{\text{II}}(p,x)\le\nu\}$ справедливо $\mu_{\text{II}}(p, x)<\delta_{\text{II}}(p, \partial U_1)$. Кроме того, выполнены свойства а) леммы

G1, т.е. для произвольного p выполнены условия леммы G2, и, в силу замечания к лемме G2, утверждение леммы G о существовании ν доказано.

Существование $h > 0$, такого, что утверждение леммы G выполнено для любых $p \in \partial C$ и $\rho(x, h_p(x))<h$, вытекает непосредственно из леммы G3 и только что доказанного утверждения о существовании ν.

Лемма G доказана.

Лемма 2.4.1. *Пусть для $C\in\mathscr{C}_+^2$ построена сходящаяся последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,..}$, $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$. Тогда для многообразия ∂C с метрикой $\mu_{\rm II}$ в.о.к.ф. справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)) = 0\,.$$

Доказательство. Для начала заметим, что нижнюю грань в определении дисперсии (2.4.1) можно заменить без потери общности на минимум, т.к. отображение

$$\Lambda(\tau) := \bigcup_{j=1}^{n} \{y \in \partial C : \mu_{\rm II}(x_j, y) \le \tau\}$$

есть непрерывное и монотонно возрастающее отображение полуинтервала $[0,\infty)$ на компакт. Пусть теперь $y_n\in\partial C$, такая что

$$\min\{\mu_{\rm II}(y_n, p) : p \in M^t(P^n)\} = d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n))\,.$$

Пусть $p_n^\mu := \arg\min\{\mu_{\rm II}(y_n, p) : p \in M^t(P^n)\}$. Дальше очевидно, что

$$\min\{\rho(p, h_{y_n}(p)) : p \in M^t(P^n)\} \le \delta(P^n, C)\,.$$

Пусть $p_n^\delta := \arg\min\{\rho(p, h_{y_n}(p)) : p \in M^t(P^n)\}$. Возьмем произвольное $\lambda>1$. В силу сходимости последовательности многогранников найдется N, такое что для любого $n>N$, а также для y_n и p_n^{δ}, выполнится утверждение леммы G, т.е.

$$\mu(p_n^\delta, y_n) \le \sqrt{2\lambda\rho(p_n^\delta, h_{y_n}(p_n^\delta))}\,.$$

Тогда, в силу двух последних неравенств, получим

$$d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)) = \mu_{\rm II}(p_n^\mu, y_n) \le \mu_{\rm II}(p_n^\delta, y_n) \le \sqrt{2\lambda\delta^H(P^n, C)}\,.$$

Из последнего неравенства с учетом сходимости $\delta^H(P^n,C)\to 0$ следует утверждение леммы.

Лемма 2.4.1 доказана.

Связь между $H_1(\gamma,\ C)$-последовательностью многогранников и глубокими ямами устанавливает следующая лемма.

Лемма 2.4.2. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H_1(\gamma,\ C)$*-последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда для любого* $\lambda>1$ *найдется такое N, что при n≥N справедливо*

$$d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)) \le \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma}} \min\{\mu_{\mathrm{II}}(p,q) : p,q \in M^t(P^{n+1})\},$$

т.е.

$$p_n \in \mathrm{DH}_{\frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda}}(M^t(P^n))$$

для многообразия ∂C *с метрикой* μ_{II} *в.о.к.ф.*

Доказательство. Согласно определению ГЯ уровня γ для многообразия ∂C с метрикой μ_{II}, надо доказать, что для точки p_n, присоединяемой на шаге 2 схемы восполнения, справедливо

$$p_n \in \mathrm{DH}_{\frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda}}(M^t(P^n)) = \{x\in\partial C\colon \mu_{\mathrm{II}}(x, M^t(P^n)) \ge \frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda}\mu_{\mathrm{II}}(\partial C, M^t(P^n))\}.$$

Поэтому, учитывая равенство (2.4.2), из первого утверждения леммы следует второе. Докажем первое утверждение.

По определению схемы восполнения $p_n := M^t(P^{n+1}) \setminus M^t(P^n)$, и пусть

$$p_0 := \arg\min\{\mu_{\mathrm{II}}(p,p_n) : p \in M^t(P^n)\}.$$

Очевидно, что

$$\mu_{\mathrm{II}}(p_n,p_0) \le d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)) \tag{2.4.5}$$

Очевидно также, что

$$\rho(p_0,h_{p_n}(p_0)) \ge \min_{p\in M^t(P^n)}\{\rho(p,h_{p_n}(p))\} = g(-n_C(p_n),C) - g(-n_C(p_n),P^n)$$

,

откуда по определению $H_1(\gamma,C)$ последовательности получаем

$$\rho(p_0,h_{p_n}(p_0)) \ge \gamma\delta(P^n,C). \tag{2.4.6}$$

Возьмем произвольное $\lambda>1$. В силу леммы 2.4.1 к последовательности $\{P^n\}_{n=1,2,..}$ применима теорема Gruber (см. п. 2.4.4). Из этой теоремы следует, что найдется $N_1>0$, такое что для любого $n \geq N_1$ справедливо

$$\delta(P^n, C) \geq \frac{1}{\lambda} \frac{d^2_{m^t(P^n)}(M^t(P^n))}{2}. \tag{2.4.7}$$

Из (2.4.6) и (2.4.7) следует

$$\rho(p_0, h_{p_n}(p_0)) \geq \frac{\gamma d^2_{m^t(P^n)}(M^t(P^n))}{2\lambda}. \tag{2.4.8}$$

С другой стороны, из (2.4.5) и леммы 2.4.1 следует, что для выбранного λ найдется такое $N^*>0$, $N^*>N_1$, что для любого $n \geq N^*$ для соответствующих p_0 и p_n выполняется утверждение леммы G, т.е.

$$\rho(p_0, h_{p_n}(p_0)) \leq \frac{\lambda \mu_{\mathrm{II}}{}^2(p_0, p_n)}{2}. \tag{2.4.9}$$

Из неравенств (2.4.8) и (2.4.9) следует, что для любого $n \geq N^*$ справедливо

$$d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)) \leq \lambda \frac{\mu_{\mathrm{II}}(p_0, p_n)}{\sqrt{\gamma}} = \lambda \frac{\mu_{\mathrm{II}}(p_n, M^t(P^n))}{\sqrt{\gamma}}. \tag{2.4.10}$$

Обозначим $d^* := \dfrac{\lambda}{\sqrt{\gamma}} \min\{\mu_{\mathrm{II}}(p', p'') : p', p'' \in M^t(P^{N^*})\}$, и пусть $N \geq N^*$ такое, что $d_{m^t(P^N)}(M^t(P^N)) \leq d^*$ (по лемме 2.4.1 такое N всегда существует). Тогда, в силу невозрастания величин $d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n))$ с ростом n, для любого $n>N$ справедливо

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\gamma}} \min\{\mu_{\mathrm{II}}(p', p'') : p', p'' \in M^t(P^{n+1})\} \geq$$

$$\geq \min\left\{ d^*, \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma}} \min\{\mu_{\mathrm{II}}(p_k, M^t(P^k)) : k = N^*, ..., n\} \right\} \geq$$

$$\geq \min\{d_{m^t(P^k)}(M^t(P^k)) : k = N, ..., n\} \geq d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)).$$

В силу произвольности выбора $\lambda>1$ из последнего неравенства получаем утверждение леммы.

Лемма 2.4.2 доказана.

Далее из леммы 2.4.2 и теоремы 2.4.6 непосредственно следует утверждение теоремы 2.4.7. Однако для полноты изложения дадим независимое доказательство этой теоремы.

Лемма 2.4.3. *Пусть* $\langle \mathbb{R}, \rho\rangle$ *– компактное метрическое пространство и* $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots,N}$ *и* $\{y_k\}_{k=1,2,\ldots,n}$ *– множества точек из* $\mathbb{R}$, $n>N$. *Тогда*

$$\min_{1\le i,j\le n} \rho(y_i, y_j) \le 2d_N(\{x_k\}).$$

Доказательство. По определению дисперсии совокупность N шаров $\{z\in\mathbb{R}: \rho(x_i,z)\le d_N(\{x_k\})\}$, i=1,2, ..., N, покрывает $\mathbb{R}$. Значит, в один из этих шаров входят сразу, по крайней мере, две точки из $\{y_k\}_{k=1,2,\ldots n}$, что и доказывает лемму.

Лемма 2.4.3 доказана.

Лемма 2.4.4. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ *–* $H(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$m^t(P^n) = m^t(P^0) + n.$$

Доказательство. Из свойства (0.1.3) следует, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ справедливо $\delta^H(P^n, C)>0$, откуда $\delta(P^n, P^{n+1})$, и поэтому $p_n\notin M^t(P^n)$, $p_n\in\partial C$. Но поверхность ∂C – строго выпуклая, поэтому никакая вершина из множества $\{p_n, M^t(P^n)\}$ не выражается через линейную комбинацию других вершин.

Лемма 2.4.4 доказана.

Теорема 2.4.7. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ *–* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C, \mathscr{P}^i_{m^t(P^n)})}{\delta^H(C, P^n)} \ge \frac{\gamma}{4}.$$

Доказательство. Пусть $m\ge d+1$ и Π_m – МНА, т.е. такой, что $\delta(\Pi_m, C) = \delta^H(\mathscr{P}^i{}_m, C)$. Ясно, что $m^t(\Pi_m)\le m$. Поэтому, с учетом леммы 2.4.4, получаем

$$m^t(\Pi_{m^t(P^n)}) < m^t(P^{n+1}).$$

Применяя лемму 2.4.3 к множествам вершин соответствующих многогранников, получим неравенство

$$\min_{p,q\in M^t(P^{n+1})} \mu_{\mathrm{II}}(p,q) \le 2d_{m^t(\Pi_{m^t(P^n)})}(M^t(\Pi_{m^t(P^n)})) .$$

В силу леммы 2.4.2 и последнего неравенства, для любого $\lambda > 1$ найдется такое N_1, что для любого $n \ge N_1$ справедливо

$$d_{m^t(P^n)}(M^t(P^n)) \le \frac{2\lambda}{\sqrt{\gamma}} d_{m^t(\Pi_{m^t(P^n)})}(M^t(\Pi_{m^t(P^n)})) .$$

Из сходимости последовательности дисперсий к нулю по лемме 2.4.1 для последовательности $\{M^t(P^n)\}$ выполняется утверждение теоремы Gruber (п. 2.4.4):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^H(C,P^n)}{d_{m^t(P^n)}{}^2(M^t(P^n))} = \frac{1}{2},$$

что с учетом последнего неравенства дает существование такого N_2, $N_2 > N_1$, что для любого $n > N_2$ справедливо

$$\begin{aligned} \delta(P^n,C) &\le \frac{\lambda}{2}\left[d_{m^t(P^n)}\left(M^t(P^n)\right)\right]^2 \le \\ &\le \frac{2\lambda^3}{\gamma}\left[d_{m^t(\Pi_{m^t(P^n)})}\left(M^t(\Pi_{m^t(P^n)})\right)\right]^2 . \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Поскольку для последовательности $\{\Pi_m\}_{m=d+1,\ d+2,\dots}$ справедлива лемма 2.4.1, то из теоремы Gruber (п. 2.4.4) следует, что найдется такое m^*, что для любого $m \ge m^*$ выполнено

$$\delta^H(\mathscr{P}^i_m, C) = \delta^H(\Pi_m, C) \ge \frac{1}{2\lambda}\left[d_{m^t(\Pi_m)}\left(M^t(\Pi_m)\right)\right]^2 . \tag{2.4.12}$$

Положим в последнем неравенстве $m = m^t(P^n)$, и пусть

$$N_3 := \arg\min\,\{n > N_2 : m^t(P^n) \ge m^*\}.$$

Тогда из (2.4.11) и (2.4.12) при $n \ge N_3$ получим:

$$\frac{\delta(\Pi_{m^t(P^n)}, C)}{\delta(P^n, C)} \ge \frac{\gamma}{4\lambda^4} .$$

В силу произвольности выбора λ, близкого к 1, $\lambda > 1$, получаем при $n\to\infty$ утверждение теоремы.

Теорема 2.4.7 доказана.

Непосредственно из теоремы 2.4.7 и свойства (0.1.5) сразу вытекает асимптотическая оценка на скорость сходимости H_1-последовательностей многогранников по числу вершин.

Следствие 2.4.4. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_+^2$*. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^H(C,P^n)[m^t(P^n)]^{2/(d-1)} \le \frac{2}{\gamma}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}.$$

Из теоремы 2.4.7 и леммы 2.4.4 сразу вытекает асиптотическая оценка на скорость сходимости H_1-последовательностей восполнения по числу итераций алгоритма, порождающего эту последовательность.

Следствие 2.4.5. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_+^2$*. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^H(C,P^n)n^{2/(d-1)} \le \frac{2}{\gamma}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}.$$

Получим также оценки для сходимости в метрике симметрической разности.

Непосредственно из следствий 2.4.4, 2.4.5 и леммы 2.3.8 сразу вытекают асимптотические оценки на скорость сходимости H_1-последовательностей многогранников в метрике симметрической разности.

Следствие 2.4.6. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_+^2$*. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^S(C,P^n)[m^t(P^n)]^{2/(d-1)} \le \frac{2\sigma(C)}{\gamma}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^S(C,P^n)n^{2/(d-1)} \le \frac{2\sigma(C)}{\gamma}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\, d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)}.$$

В заключение параграфа отметим, что в настоящее время асимптотические результаты для H-последовательностей восполнения и отсечения, полученны Р.В. Ефремовым в работах [87] (последовательности восполнения) и [88] (последовательности отсечения). Доказательство этих результатов аналогично доказательству теоремы 2.4.7, однако слишком громоздко, и мы его опускаем (отсылая читателя к работам [87] и [88]). Тем не менее, для полноты описания приведем эти результаты.

Теорема 2.4.8. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ – $H(\gamma, C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^2$*. Тогда*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\delta^H(C,\mathscr{P}^i_{m(P^n)})}{\delta^H(C,P^n)}\ge\frac{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}{4}.$$

Из этой теоремы аналогично следствиям 2.4.4-2.4.6 вытекают следующие результаты.

Следствие 2.4.7. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H(\gamma, C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^2$*. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^H(C,P^n)[m(P^n)]^{\frac{2}{d-1}}\le\frac{2}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^H(C,P^n)n^{\frac{2}{d-1}}\le\frac{2}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^S(C,P^n)[m(P^n)]^{\frac{2}{d-1}}\le\frac{2\sigma(C)}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^S(C,P^n)n^{\frac{2}{d-1}}\le\frac{2\sigma(C)}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}}.$$

Заметим, что для H-последовательностей восполнения и отсечения асимптотические результаты теоремы 2.4.8 и следствия 2.4.7 совпадают. В то же время асимптотические результаты для H_1-последовательностей отсечения, аналогичные результатам теоремы 2.4.7 и следствий 2.4.4-2.4.6, для H_1-последовательностей восполнения, пока не получены.

2.5. Асимптотические оценки скорости сходимости, оптимальность и эффективность АМПА

В настоящем разделе будет дана сводка результатов исследования скорости сходимости хаусдорфовых АМПА, полученных различными методами, будут выделены наилучшие оценки, рассмотрен вопрос об оптимальности и эффективности рассматриваемых АМПА.

2.5.1. Аппроксимация произвольных ВКТ

Напомним основные результаты, касающиеся скорости сходимости хаусдорфовых АМПА при аппроксимации произвольных (в том числе и негладких) тел. В скобках укажем метод, которым были получены соответствующие результаты.

Теорема 2.2.1 (метод изменения объема на итерациях)**.** *Пусть* $C\in\mathscr{C}$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_1(\gamma,C)k(n)^{1/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_2(\gamma,C)k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_1(\gamma,C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\left(\frac{\sigma(C)}{\gamma}\right)^d\right\}^{1/(d-1)}\omega(C),$$

$$\lambda_2(\gamma,C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)}{\gamma^d}\right\}^{1/(d-1)}\omega(C).$$

Теорема 2.3.1 и **следствие 2.3.1** (метод упаковок нормалей)**.** *Пусть* $C\in\mathscr{C}$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер* N *такой, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_9(\gamma, C) := \frac{16R(C)}{\gamma}\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

2.5.2. Аппроксимация гладких ВКТ

Приводимые ниже результаты для гладких тел включают (в качестве частного случая) некоторые результаты для произвольных тел.

Теорема 2.2.2 (метод изменения объема на итерациях)**.** *Пусть* $C \in \mathscr{C}_+^2$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при n≥N справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_3(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_4(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_3(\gamma, C) = \left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)^{(d+1)/2}}{\gamma^d}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_4(\gamma, C) = \left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)}{\gamma^d}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Теорема 2.3.1 и **следствие 2.3.1** (метод упаковок нормалей)**.** *Пусть* $C \in \mathscr{C}$ *и* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения (отсечения). Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер N такой, что при n≥N справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_9(\gamma, C) := \frac{16R(C)}{\gamma}\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Следствия 2.4.4-2.4.6 (метод Глубоких Ям)**.** *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ - $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_+^2$*. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^H(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \le \frac{2}{\gamma}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^S(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \le \frac{2\sigma(C)}{\gamma}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^t(P^n)$.

Следствие 2.4.7 (метод Глубоких Ям)**.** *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H(\gamma, C)$-*последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^H(C,P^n)k(n)^{\frac{2}{d-1}} \le \frac{2}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \ \delta^S(C,P^n)k(n)^{\frac{2}{d-1}} \le \frac{2\sigma(C)}{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m(P^n)$.

2.5.3 Оптимальность по порядку хаусдорфовых АМПА.

Пусть $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$. Напомним (см. п. 0.1.3), что МПА называется оптимальным по порядку числа вершин (гиперграней) для класса $\mathscr{C}^*$, если для любого $C\in\mathscr{C}^*$ он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ такую, что для любого $s>0$ такого, что

$$\delta(C,\mathscr{P}_m) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta,s}}{m^s},$$

справедливо

$$\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}'_{C,d,\delta,s}}{m(P^n)^s}.$$

Напомним, что в п. 0.1.3 был определен класс ВКТ $\mathscr{C}_\# := \mathscr{C}((d\text{-}1)/2)$, для которого порядок $2/(d\text{-}1)$ является неулучшаемым (см. также [92]). Согласно (0.1.22), для того, чтобы некоторый метод был оптимален по порядку в классе $\mathscr{C}_\#$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тела $C\in\mathscr{C}_\#$ в порождаемой методом последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ выполнялось

$$\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}} .$$

Полученные оценки на скорость сходимости хаусдорфовых АМПА позволяют сделать следующие выводы об их оптимальности по порядку.

Теорема 2.5.1. *Путь* $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}_\#$ *и* $\mathrm{M}\in\mathfrak{H}^i{}_1(\mathscr{C}^*)$ $(\mathrm{M}\in\mathfrak{H}^c{}_1(\mathscr{C}^*))$. *Тогда* M *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин (гиперграней) для класса* $\mathscr{C}^*$.

Доказательство. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ есть $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения (отсечения). Тогда по теореме 2.3.1 и следствию 2.3.1 для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует номер N такой, что при $n \ge N$ справедливо

$$\delta(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda(\gamma, C, d, \delta)\, m(P^n)^{2/(1-d)}$$

и константа $\lambda(\gamma, C, \delta)$ определена в утверждении теоремы 2.3.1 и следствия 2.3.1. Обозначим

$$\Lambda(C, d, \delta) := \max\{(1+\varepsilon)\, \lambda(\gamma, C, d, \delta),\ \delta(P^n, C)\, m(P^n)^{2/(d-1)}: n=0,1,2,...,N\}.$$

Тогда для всех $n=0,1,2,...$ справедливо

$$\delta(P^n, C) \le \Lambda(C, d, \delta)\, m(P^n)^{2/(1-d)}.$$

Теорема 2.5.1 доказана.

Теорема 2.5.2. *Путь* $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}_+{}^2$ *и* $\mathrm{M}\in\mathfrak{H}^i(\mathscr{C}^*)$ $(\mathrm{M}\in\mathfrak{H}^c(\mathscr{C}^*))$. *Тогда* M *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин (гиперграней) для класса* $\mathscr{C}^*$.

Доказательство. Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 2.5.1 с заменой ссылки на теорему 2.3.1 и следствие 2.3.1 на ссылку на теорему 2.2.2.

Теорема 2.5.2 доказана.

2.5.4. Эффективность хаусдорфовых АМПА при аппроксимации гладких тел

Напомним (см. параграф 0.3), что для $C\in\mathscr{C}$ и $P\in\mathscr{P}(C)$ величину

$$\eta(P) := \frac{\delta(C, \mathscr{P}_{m(P)}(C))}{\delta(C,P)}$$

мы называем эффективностью аппроксимации тела C многогранником P (с точки зрения числа вершин или гиперграней соответственно). Для $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=1,2,...}$ – сходящейся к $C\in\mathscr{C}$ последовательности многогранников из $\mathscr{P}(C)$ мы ввели величины

$$\underline{\eta}(\mathrm{F})=\liminf_{n\to\infty}\eta(P^n)$$

и

$$\overline{\eta}(\mathrm{F})=\limsup_{n\to\infty}\eta(P^n)\,,$$

которые назвали, соответственно, нижней и верхней асимптотической эффективностью аппроксимации тела C последовательностью F. Под эффективностью метода полиэдральной аппроксимации тела C мы понимаем эффективность порождаемой им последовательности многогранников. При этом МПА, порождающий для тела C последовательность с нижней асимптотической эффективностью, большей нуля, был назван в п. 0.1.3 асимптотически эффективным.

Полученные оценки на скорость сходимости хаусдорфовых АМПА позволяют сделать следующие выводы об асимптотической эффективности хаусдорфовых АМПА.

Теорема 2.5.3. *Путь* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *и* $\mathrm{M}\in\mathfrak{H}(C)$. *Тогда* M *асимптотически эффективен для C в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности*.

Доказательство. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ есть $H(\gamma,\ C)$-последователь-ность, порождаемая алгоритмом A для тела C. Необходимо доказать, что в указанных метриках $\underline{\eta}(\mathrm{F})>0$. Но этот факт непосредственно вытекает из теоремы 2.2.2 и свойства (0.1.3).

Теорема 2.5.3 доказана.

Рассмотрим некоторые оценки на эффективность хаусдорфовых последовательностей.

Теорема 2.5.4. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H(\gamma,\ C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F) \ge \eta_d^H \gamma^{2d/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta_d^H = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}.$$

Доказательство. Согласно [26], [51] и [29] (см. 0.1.5), для $C \in \mathscr{C}_+^2$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty} \delta^H(C,\mathscr{P}_m) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где ϑ_l есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса (см. [53]), $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x \in \partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Так как $k_C(x) \ge r_{\max}(C)^{1-d}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \delta^H(C,\mathscr{P}_m) m^{2/(d-1)} \ge \frac{1}{2r_{\max}(C)}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\sigma(C)\right)^{2/(d-1)}.$$

Но, обозначая $m(n):=m^t(P^n)$ для последовательности восполнения и $m(n):=m^f(P^n)$ для последовательности отсечения, для произвольно малого ε и некоторого N при $m(n) \ge N$ получаем, согласно теореме 2.2.2, что

$$\delta^H(C,P^n) m(n)^{2/(d-1)} \le \frac{2(1+\varepsilon)}{r_{\min}(C)}\left(\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)}{\gamma^d}\right)^{2/(d-1)}.$$

В силу произвольности ε, из последних двух неравенств получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.5.4 доказана.

Поясним смысл константы η_d^H и качество оценки теоремы 2.5.4. Обозначим через $\mathscr{B}$ класс шаров в $\mathbb{E}^d$.

Следствие 2.5.1. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ – $H(\gamma, C)$-*последовательность для* $C \in \mathscr{B}$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^H(\mathrm{F}) \ge \gamma^{2d/(d-1)} \eta_d^H,$$

причем

$$\lim_{d\to\infty} \eta_d^H = \frac{1}{4}. \qquad (2.5.1)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для $C\in\mathscr{B}$ имеем $r_{\min}(C)= r_{\max}(C)$ и $\vartheta_d \geq \tau_d$, где, согласно [53],

$$\lim_{d\to\infty} \tau_d = d\sqrt{e^{-3}}.$$

Следствие 2.5.1 доказано.

Следующий пример иллюстрирует причину, по которой применение адаптивных алгоритмов в общем случае не может приводить к значениям нижней асимптотической эффективности, близким к единице.

Пример. Пусть d=2 и $C\in\mathscr{B}$. Применим схему восполнения с константой γ=1 к правильному вписанному треугольнику, взятому в качестве P^0. В полученной последовательности F* при n=3k, k=1, 2, … будут возникать правильные многоугольники с числом вершин $3\cdot 2^k$, являющиеся МНА для C. При этом нетрудно видеть, что многоугольник с числом вершин $3\cdot 2^{(k+1)}$ -1 будет иметь ту же точность в метрике Хаусдорфа, что и правильный многоугольник с числом вершин $3\cdot 2^k$. Согласно (0.1.5), при d=2 величина $\delta^H(\mathscr{P}_m, C)$ пропорциональна $1/m^2$. Поэтому

$$\underline{\eta}^H(F^*) = \lim_{k\to\infty}\{(3\cdot 2^k)^2/(3\cdot 2^{(k+1)}-1)^2\} = \frac{1}{4}. \qquad (2.5.2)$$

Таким образом, несмотря на то что в последовательности F* все время появляются МНА и, таким образом, верхняя асимптотическая эффективность алгоритма равна 1, адаптивный характер алгоритма приводит к нижней асимптотической эффективности, равной 1/4. Заметим, что сравнение величины $\underline{\eta}^H$ (F*) со значениями следствия 2.5.1, которое дает $\underline{\eta}^H$ (F) ≥ η_2^H =0.007 и (2.5.1), показывает, что при небольших d оценка теоремы 2.5.4 сильно занижена. Вместе с тем, согласно оценке теоремы 2.4.7, справедливой для H_1-последовательностей, в рассматриваемом случае $\underline{\eta}^H$ (F*) ≥ ¼, что совпадает с (2.5.2).

Для метрики объема симметрической разности справедливы следующие результаты (о константах $\mathrm{del}_{d\text{-}1}$ и $\mathrm{div}_{d\text{-}1}$ см. (0.1.6)-(0.1.7)).

Теорема 2.5.5. *Пусть* $F:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H(\gamma, C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^S(F) \ge \eta_d^S \gamma^{2d/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta^{i}{}_d^S = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)} \mathrm{del}_{d\text{-}1},$$

$$\eta^{c}{}_d^S = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)} \mathrm{div}_{d\text{-}1}.$$

Доказательство. Согласно [27], [28], [30], существуют константы $\mathrm{del}_{d\text{-}1}$ и $\mathrm{div}_{d\text{-}1}$, зависящие только от d, такие что (см. 0.1.6 и 0.1.7) для $C\in\mathscr{C}_+^2$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C, \mathscr{P}^i{}_m) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{del}_{d-1}\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C, \mathscr{P}^c{}_m) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{div}_{d-1}\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)},$$

где $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x\in\partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Так как $k_C(x) \ge r_{\max}(C)^{1-d}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C, \mathscr{P}^i{}_m) m^{2/(d-1)} \ge \frac{\mathrm{del}_{d-1}}{2r_{\max}(C)} \sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}},$$

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C, \mathscr{P}^c{}_m) m^{2/(d-1)} \ge \frac{\mathrm{div}_{d-1}}{2r_{\max}(C)} \sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}}.$$

Но, обозначая $m(n):=m^t(P^n)$ для последовательности восполнения и $m(n):=m^f(P^n)$ для последовательности отсечения, для произвольно малого ε и некоторого N при $m(n)\ge N$ получаем, согласно теореме 2.2.2, что

$$\delta^S(C,P^n)m(n)^{2/(d-1)} \le \frac{2(1+\varepsilon)}{r_{\min}(C)}\left(\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)^{(d+1)/2}}{\gamma^d}\right)^{2/(d-1)}.$$

В силу произвольности ε, из последних двух неравенств получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.5.5 доказана.

Теорема 2.5.6. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,..}$ – $H_1(\gamma, C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F) \ge \frac{\vartheta_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2\gamma.$$

Доказательство. Из [26], [51] и [29] (см. доказательство теоремы 2.5.4) следует, что для $C\in\mathscr{C}_+^2$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty}\delta^H(C,\mathscr{P}_m)m^{2/(d-1)} \ge \frac{1}{2r_{\max}(C)}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\sigma(C)\right)^{2/(d-1)}.$$

Но, обозначая $m(n):=m^t(P^n)$ для последовательности восполнения и $m(n):=m^f(P^n)$ для последовательности отсечения, для произвольно малого ε и некоторого N при $m(n)\ge N$ получаем, согласно теореме 2.3.1, что

$$\delta^H(C,P^n)m(n)^{2/(d-1)} \le (1+\varepsilon)\frac{16R(C)}{\gamma}\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}\gamma.$$

Учтем, что

$$\sigma(C)\ge d\pi_d(r_{\min}(C))^{d-1}$$

и $R(C) \le r_{\max}(C)$. В силу произвольности ε, из последних неравенств получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.5.6 доказана.

Теорема 2.5.7. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - $H_1(\gamma, C)$*-последовательность для* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{iS}(F) \ge \mathrm{del}_{d-1}\frac{\pi_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2\gamma,$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \ge \mathrm{div}_{d-1} \frac{\pi_{d-1}^{2/(d-1)}}{32} \left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)} \right)^2 \gamma \, .$$

Доказательство. Из [27], [28], [30] следует (см. доказательство теоремы 2.5.5), что существуют константы $\mathrm{del}_{d\text{-}1}$ и $\mathrm{div}_{d\text{-}1}$, зависящие только от d, такие что для $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C,\mathscr{P}^i{}_m) m^{2/(d-1)} \ge \frac{\mathrm{del}_{d-1}}{2r_{\max}(C)} \sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}} \, ,$$

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C,\mathscr{P}^c{}_m) m^{2/(d-1)} \ge \frac{\mathrm{div}_{d-1}}{2r_{\max}(C)} \sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}} \, .$$

Но, обозначая $m(n):=m^t(P^n)$ для последовательности восполнения и $m(n):=m^f(P^n)$ для последовательности отсечения, для произвольно малого ε и некоторого N при $m(n)\ge N$ получаем, согласно следствию 2.3.1, что

$$\delta^S(C,P^n) m(n)^{2/(d-1)} \le (1+\varepsilon) \frac{16R(C)}{\gamma} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}} \sigma(C)\gamma \, .$$

Учтем, что

$$\sigma(C)\ge d\pi_d (r_{\min}(C))^{d-1}$$

и $R(C) \le r_{\max}(C)$. В силу произвольности ε, из последних неравенств получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.5.7 доказана.

Заметим, что для H_1-последовательностей теоремы 2.5.4 и 2.5.6, а также теоремы 2.5.5 и 2.5.7 дают различные оценки эффективности для метрик Хаусдорфа и объема симметрической разности: оценки теорем 2.5.6 и 2.5.7 лучше с точки зрения константы γ, в то время как оценки теорем 2.5.4 и 2.5.5 меньше зависят от асферичности (от отношения минимального и максимального радиусов кривизны).

Теорема 2.5.8. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ – $H_1(\gamma, C)$-*последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F) \geq \frac{\gamma}{4},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F) \geq \frac{\gamma}{4} \mathrm{del}_{d-1} \left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы 2.5.8 для метрики Хаусдорфа непосредственно вытекает из теоремы 2.4.7 и определения асимптотической эффективности последовательности многогранников. Рассмотрим метрику объема симметрической разности.

Из [26], [51] и [30] (см. доказательство теоремы 2.5.4) следует, что для $C \in \mathscr{C}_+^2$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty} \delta^S(C, \mathscr{P}^i{}_m) m^{2/(d-1)} \geq \frac{\mathrm{del}_{d-1}}{2 r_{\max}(C)} \sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}}.$$

Но, обозначая $m(n) := m^t(P^n)$, для произвольно малого ε и некоторого N при $m(n) \geq N$ получаем, согласно следствию 2.4.6, что

$$\delta^S(C, P^n) m(n)^{2/(d-1)} \leq (1+\varepsilon) \frac{2\sigma(C)}{\gamma} \left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)}.$$

Так как $k_C(x) \leq r_{\min}(C)^{1-d}$, то

$$\delta^S(C, P^n) m(n)^{2/(d-1)} \leq (1+\varepsilon) \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} \frac{\sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}}}{r_{\min}(C)}.$$

В силу произвольности ε, из последних неравенств получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.5.8 доказана.

Заметим, что для H_1-последовательностей восполнения оценки асимптотической эффективности в теореме 2.5.8 выше, чем оценки для H-последовательностей, полученные в теоремах 2.5.4-2.5.7. Действительно, оценка асимптотической эффективности в метрике Хаусдорфа не зависит от аппроксимируемого тела (в том числе от его асферичности) и прямо пропорциональна константе γ. Далее, оценка асимптотической эффективности в метрике объема симметрической разности по теореме 2.5.8 также, как и по теореме 2.5.5, прямо пропорциональна отношению минимального и максимального радиусов кривизны и прямо пропорциональна константе γ, как и оценка по теореме 2.5.7, т.е. сочетает достоинства предыдущих двух оценок. В заключение приведем оценки асимптотической эффективности для H-последовательностей, следующие для метрики Хаусдорфа непосредственно из теоремы 2.4.8, а для метрики объема, как и при доказательстве теоремы 2.5.8.

Теорема 2.5.9. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ - *$H(\gamma, C)$-последовательность восполнения (отсечения) для $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$. Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F) \geq \frac{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}{4},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F) \geq \frac{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}{4}\mathrm{del}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \geq \frac{(1-\sqrt{1-\gamma})^2}{4}\mathrm{div}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

2.5.5. Асимптотические оценки скорости сходимости и эффективность асимптотических *H*-методов

Изложенные в настоящем параграфе результаты о скорости сходимости, оптимальности по порядку и эффективности для H-последовательностей носят асимптотический характер. Они естественно распространяются и на случай асимптотических H-последовательностей и порождающих их АМПА.

Теорема 2.5.10. *Утверждения теорем 2.2.1, 2.2.2, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5, 2.5.9 и следствий 2.4.7, 2.5.1 (теорем 2.3.1, 2.5.1, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.8 и следствий 2.3.1, 2.4.4-2.4.6) справедливы для асимптотических $H(\gamma, C)$-последовательностей ($H_1(\gamma, C)$-последовательностей).*

Доказательство. Докажем, вначале, например, утверждение теоремы, касающееся теоремы 2.2.1.

Согласно определению, для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<\gamma$, существует номер N_1 такой, что последовательность $\{P^n\}_{n=N_1,N_1+1,...}$ является $H(\gamma\text{-}\varepsilon_1,C)$-

последовательностью. Поэтому по теореме 2.2.1 для любого ε_2, 0 < ε_2 < 1, существует номер $N_2>N_1$ такой, что при $n \geq N_2$ справедливо

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_2)\lambda_1(\gamma-\varepsilon_1, C)k(n-N_1)^{1/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_2)\lambda_2(\gamma-\varepsilon_1, C)k(n-N_1)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n или $m(P^n)$, и

$$\lambda_1(\gamma, C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\left(\frac{\sigma(C)}{\gamma}\right)^d\right\}^{1/(d-1)} \omega(C),$$

$$\lambda_2(\gamma, C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\frac{\sigma(C)}{\gamma^d}\right\}^{1/(d-1)} \omega(C).$$

Поэтому для любого $N \geq N_2$ при $n \geq N$ справедливо

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1/\gamma)^{d/(1-d)}(1-N_1/N)^{1/(1-d)}\lambda_1(\gamma, C)n^{1/(1-d)},$$

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1/\gamma)^{d/(1-d)}(1-N_1/N)^{1/(1-d)}\lambda_2(\gamma, C)n^{1/(1-d)}.$$

Осталось выбрать ε_1, ε_2 настолько малыми и N настолько большим, чтобы

$$\varepsilon \geq (1+\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1/\gamma)^{d/(1-d)}(1-N_1/N)^{1/(1-d)}-1.$$

Утверждения теоремы для $k(n):=m(P^n)$ следуют далее из свойства (1.1.4) при выборе N, таком что величина $(1-m(P^0)/m(P^N))^{1/(1-d)}-1$ будет достаточно мала (если для аппроксимирующей последовательности величина $m(P^N)$ остается ограниченной, то утверждение теоремы для $m(P^n)$ тем более выполняется).

Утверждение теоремы, касающееся теоремы 2.2.1 доказано.

Совершенно аналогично доказываются утверждения теоремы, касающиеся теорем 2.2.2, 2.3.1 и следствия 2.3.1. Поскольку из них вытекают теоремы 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6, 2.5.7 и следствие 2.5.1, то утверждения теоремы, касающиеся них, также оказываются доказанными.

Докажем теперь утверждение теоремы, касающееся следствий 2.4.4-2.4.6. Так как, по определению, для любого ε, $0<\varepsilon<\gamma$, существует номер N такой, что последовательность $\{P^n\}_{n=N,N+1,\ldots}$ является $H_1(\gamma-\varepsilon, C)$-последовательностью, то по следствиям 4.6-4.8 при соответствующих условиях имеем

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^H(C,P^n)k(n-N)^{2/(d-1)} \le \frac{2}{\gamma-\varepsilon}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^S(C,P^n)k(n-N)^{2/(d-1)} \le \frac{2\sigma(C)}{\gamma-\varepsilon}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$. Поэтому для $k(n) := n$ при $n \ge N$ справедливо $k(n\text{-}N)=n(1\text{-}N/n)$, откуда в силу произвольной малости ε вытекает утверждение теоремы. Утверждения теоремы для $k(n):=m^t(P^n)$ следуют далее из свойства (1.1.4) при выборе N, таком что величина $(1\text{-}m^t(P^0)/m(P^N))^{2/(1\text{-}d)}$ будет сколь угодно близка к 1.

Утверждение теоремы, касающееся следствий 2.4.4-2.4.6, доказано. Поскольку из них вытекает теорема 2.5.8, то утверждение теоремы, касающееся её, также оказывается доказанными.

Совершенно аналогично утверждению, касающемуся следствий 2.4.4-2.4.6, доказывается утверждение теоремы, касающееся следствия 2.4.7. Поскольку из него вытекает теорема 2.5.9, то утверждение теоремы, касающееся её, также оказываются доказанными.

Теорема 2.5.10 полностью доказана.

2.6. Асимптотические оценки скорости сходимости, оптимальность и эффективность конкретных АМПА

В этом параграфе будут сформулированы основные результаты по скорости сходимости, оптимальности и эффективности ранее введенных АМПА. Значительная часть приводимых теорем являются простыми следствиями утверждений, полученных выше. Тем не менее, так как развитая до этого теория предназначена именно для получения результатов по конкретным методам, рассматриваемые следствия сформулированы в виде теорем. Для удобства пользования в случае каждого метода полностью приводим необходимые константы.

Рассмотрим сначала конкретные методы, относящиеся к классу хаусдорфовых методов.

2.6.1 Базовые методы

Теорема 2.6.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}$ *методом БВ. Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер N такой, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{БВ}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{БВ}\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ *и*

$$\lambda^{БВ}(C) := 16R(C)\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.3.1, для любого $C\in\mathscr{C}$ метод $M_{БВ}$ порождает $H_1(1, C)$-последовательность восполнения. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.3.1 и следствия 2.3.1 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в константу $\lambda_9(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.1 доказана.

Теорема 2.6.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}$ *методом БО. Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{БО}{}_1(C)k(n)^{1/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{БО}{}_2(C)k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^f(P^n)$ *и*

$$\lambda_1^{БО}(C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^d\right\}^{1/(d-1)}\omega(C),$$

$$\lambda_2^{БО}(C) = \left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{1/(d-1)}\omega(C).$$

Доказательство. Согласно теореме 1.2.1, для любого $C\in\mathscr{C}$ метод $M_{БО}$ порождает $H(1, C)$-последовательность отсечения. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.2.1 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в константы $\lambda_1(\gamma, C)$ и $\lambda_2(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.2 доказана.

Теорема 2.6.3. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *методом БВ (БО). Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует N такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^Б{}_1(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^Б{}_2(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$ *и*

$$\lambda_1^Б(C) = \left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^{(d+1)/2}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_2^Б(C) = \left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.2.1, для любого $C\in\mathscr{C}$ методы $М_{БВ}$ ($М_{БО}$) порождают $H(1, C)$-последовательность восполнения (отсечения). Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.2.2 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в константы $\lambda_3(\gamma, C)$ и $\lambda_4(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.3 доказана.

Теорема 2.6.4. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *методом БВ (БО). Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^H(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \leq 2\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^S(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \leq 2\sigma(C)\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ $(m^f(P^n))$.

Доказательство. Согласно теореме 1.3.1, для любого $C\in\mathscr{C}$ метод $М_{БВ}$ порождает $H_1(1, C)$-последовательность восполнения. Поэтому утверждение теоремы для метода БВ вытекает непосредственно из следствий 2.4.4-2.4.6 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в правые части неравенств в утверждениях следствий.

Согласно теореме 1.2.1, для любого $C\in\mathscr{C}$ метод $М_{БО}$ порождает $H(1, C)$-последовательность отсечения. Поэтому утверждение теоремы для метода БО вытекает непосредственно из следствия 2.4.7 с

подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях следствия.
Теорема 2.6.4 доказана.

Теорема 2.6.5. $\mathrm{M_{БВ}}$ *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин для класса* $\mathscr{C}_{\#}$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.3, $\mathrm{M_{БВ}} \in \mathfrak{H}^{i}{}_{1}(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.1.

Теорема 2.6.5 доказана.

Теорема 2.6.6. $\mathrm{M_{БО}}$ *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа гиперграней для класса* $\mathscr{C}_{+}{}^{2}$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.1, $\mathrm{M_{БО}} \in \mathfrak{H}^{c}(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.2.

Теорема 2.6.6 доказана.

Теорема 2.6.7. *Путь* $C \in \mathscr{C}_{+}{}^{2}$. *Тогда* $\mathrm{M_{БВ}}$ *и* $\mathrm{M_{БО}}$ *асимптотически эффективны для* C *в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности*.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.1, $\mathrm{M_{БВ}}, \mathrm{M_{БО}} \in \mathfrak{H}^{c}(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.3.

Теорема 2.6.7 доказана.

Теорема 2.6.8. *Пусть* $\mathrm{F} := \{P^{n}\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}_{+}{}^{2}$ *методом БВ (БО). Тогда*

$$\underline{\eta}^{H}(F) \geq \eta_{d}^{H} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{S}(F) \geq \eta_{d}^{S} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta_d^H = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\eta^{iS}_d = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)} \mathrm{del}_{d\text{-}1} \qquad (\text{БВ}),$$

$$\eta^{cS}_d = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)} \mathrm{div}_{d\text{-}1} \qquad (\text{БО}).$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.1, $M_{БВ}, M_{БО} \in \mathfrak{H}^c(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.4 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.8 доказана.

Теорема 2.6.9. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}_+^2$ *методом БВ. Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F) \ge \frac{\vartheta_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2,$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F) \ge \mathrm{del}_{d-1}\frac{\pi_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.3, $M_{БВ} \in \mathfrak{H}^i{}_1(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теорем 2.5.6-2.5.7 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.9 доказана.

Следующая оценка эффективности является более сильной, чем в теореме 2.6.9, и справедлива для обоих методов БВ и БО.

Теорема 2.6.10. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}_+^2$ *методом БВ (БО). Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F) \ge \frac{1}{4},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F) \ge \frac{1}{4}\mathrm{del}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)} \qquad (\text{БВ}),$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \ge \frac{1}{4}\mathrm{div}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)} \qquad (\text{БО}).$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.3, $M_{БВ} \in \mathfrak{H}^i{}_1(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.8 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теоремы.

Далее, согласно следствию 1.3.1, $M_{БО} \in \mathfrak{H}^c(1, \mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.9 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теоремы.

Теорема 2.6.10 доказана.

2.6.2. Метод «Уточнения Оценок»

Теорема 2.6.11. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}$ $(C \in \mathscr{C}_+{}^2)$ *методом УО. Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует номер N такой, что при* $n \ge N$ *справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda^{УО}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda^{УО}\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^t(P^n)$ *и*

$$\lambda^{УО}(C) := 16R(C)\omega(C)\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}$$

$$(\ \lambda^{УО}(C) := 16R(C)\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}).$$

Доказательство. Прежде всего, согласно следствию 1.3.6, для любого $C \in \mathscr{C}$ метод $M_{УО}$ порождает асимптотическую $H_1(1/\omega(C), C)$-последовательность восполнения. Поэтому утверждение теоремы вытекает (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) непосредственно из теоремы 2.3.1 и следствия 2.3.1 с подстановкой параметра $\gamma=1/\omega(C)$ в константу $\lambda_9(\gamma, C)$.

Далее, согласно следствию 1.3.7, для любого $C\in \mathscr{C}_+^2$ метод $M_{УО}$ порождает асимптотическую $H_1(1, C)$-последовательность восполнения. Поэтому утверждение теоремы вытекает (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) непосредственно из теоремы 2.3.1 и следствия 2.3.1 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в константу $\lambda_9(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.11 доказана.

Теорема 6.12. *Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ есть последовательность, порождаемая для $C\in\mathscr{C}_+^2$ методом УО. Тогда для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при $n\geq N$ справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_1^{YO}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_2^{YO}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$ и

$$\lambda_1^{YO}(C) = \left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^{(d+1)/2}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_2^{YO}(C) = \left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.7, для любого $C\in \mathscr{C}_+^2$ метод $M_{УО}$ порождает асимптотическую $H_1(1, C)$-последовательность восполнения. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теоремы 2.2.2 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в константы $\lambda_3(\gamma, C)$ и $\lambda_4(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.12 доказана.

Теорема 2.6.13. *Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ есть последовательность, порождаемая для $C\in\mathscr{C}_+^2$ методом УО. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^H(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \leq 2\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^S(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \leq 2\sigma(C)\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.7, для любого $C\in \mathscr{C}_+^2$

метод $M_{УО}$ порождает асимптотическую $H_1(1, C)$-последовательность восполнения. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из следствий 2.4.4-2.4.6 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях следствий.

Теорема 2.6.12 доказана.

Теорема 2.6.14. $M_{УО}$ *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин для класса* $\mathscr{C}_{\#}$.

Доказательство. Согласно теореме 1.3.3, $M_{УО}\in\mathfrak{H}^{i}_{1}(\mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.1.

Теорема 2.6.14 доказана.

Теорема 2.6.15. *Путь* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда* $A_{УО}$ *асимптотически эффективен для* C *в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности.*

Доказательство. Согласно теореме 1.3.3, $M_{УО}\in\mathfrak{H}^{i}_{1}(\mathscr{C})\subset\mathfrak{H}^{i}(\mathscr{C})$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.3.

Теорема 2.6.15 доказана.

Теорема 2.6.16. *Пусть* $F:=\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *методом УО. Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F)\geq\eta^{iH}_{d}\,\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F)\geq\eta^{iS}_{d}\,\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta^{iH}_{d}=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\eta^{iS}_{d}=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}\mathrm{del}_{d-1}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.7, $M_{УО}\in{}^{a}\mathfrak{H}^{i}_{1}(1, \mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы

2.5.10) вытекает непосредственно из теоремы 2.5.4 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.16 доказана.

Теорема 2.6.17. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *методом УО. Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F)\geq\frac{\vartheta_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2,$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F)\geq \mathrm{del}_{d-1}\frac{\pi_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.7, $M_{УО}\in{}^a\mathfrak{H}^i{}_1(1,\mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теорем 2.5.6-2.5.7 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.17 доказана.

Следующая оценка эффективности метода УО является более сильной, чем в теореме 6.17.

Теорема 2.6.18. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}^2$ *методом УО. Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F)\geq\frac{1}{4},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F)\geq\frac{1}{4}\mathrm{del}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.7, $M_{УО}\in{}^a\mathfrak{H}^i{}_1(1,\mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теоремы 2.5.8 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теоремы.

Теорема 2.6.18 доказана.

2.6.3. Методы «Уточнения Внешних Оценок»

Теорема 2.6.19. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для C методом УВО*$_1$ *, УВО*$_2$*. Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<$

1, *существует номер N такой, что при n≥N справедливо*

а) для $C\in\mathscr{C}_0$ *и метода* $УВО_1$, $УВО_2$

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda^{УВО1}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda^{УВО1}\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\lambda^{УВО1}(C) := 16R(C)\omega_0(C)\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}},$$

б) для $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *и метода* $УВО_2$

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda^{УВО2}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda^{УВО2}\sigma(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\lambda^{УВО2}(C) := 16R(C)\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^f(P^n)$ *и*

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $M_{УВО1}$, $M_{УВО2}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C))$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.3.1 и следствия 2.3.1 с подстановкой параметра $\gamma=1/\omega_0(C)$ в константу $\lambda_9(\gamma, C)$.

Далее, согласно следствию 1.3.9, для любого $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ метод $M_{УВО1}$ порождает асимптотическую $H_1(1, C)$-последовательность отсечения. Поэтому утверждение теоремы для $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ вытекает (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) непосредственно из теоремы 2.3.1 и следствия 2.3.1 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в константу $\lambda_9(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.19 доказана.

Теорема 2.6.20. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_1$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует N такое, что при n≥N справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_1{}^{УВО1}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_2{}^{УВО1}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^f(P^n)$ *и*

$$\lambda_1^{УВО1}(C)=\left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\omega_0^d(C)\sigma(C)^{(d+1)/2}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_2^{УВО1}(C)=\left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\omega_0^d(C)\sigma(C)\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $M_{УВО1}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C))$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.2.1 с подстановкой параметра γ=$1/\omega_0(C)$ в константы $\lambda_1(\gamma, C)$ и $\lambda_2(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.20 доказана.

Теорема 2.6.21. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_2$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C)\leq(1+\varepsilon)\lambda_1^{УВО2}(C)\,k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, C)\leq(1+\varepsilon)\lambda_2^{УВО2}(C)\,k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^f(P^n)$ *и*

$$\lambda_1^{УВО2}(C)=\left\{\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^{(d+1)/2}\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_2^{УВО2}(C)=\left\{\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{2/(d-1)}\frac{2}{r_{\min}(C)}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.7, $M_{УВО2}\in{}^a\mathfrak{H}^c{}_1(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теоремы 2.2.2 с подстановкой параметра γ=1 в константы $\lambda_3(\gamma, C)$ и $\lambda_4(\gamma, C)$.

Теорема 2.6.21 доказана.

Теорема 2.6.22. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_1$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty}\ \delta^H(C,P^n)k(n)^{\frac{2}{d-1}}\leq\frac{2}{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\omega_0(C)}}\right)^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^S(C,P^n)k(n)^{\frac{2}{d-1}} \le \frac{2\sigma(C)}{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\omega_0(C)}}\right)^2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{\frac{2}{d-1}}$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^f(P^n)$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $M_{УВО1}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C))\subset\mathfrak{H}^c(1/\omega_0(C), C))$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из следствия 2.4.7 с подстановкой параметра $\gamma=1/\omega_0(C)$ в правые части неравенств в утверждении следствия.

Теорема 2.6.22 доказана.

Теорема 2.6.23. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом УВО*$_2$. *Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^H(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \le 2\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \delta^S(C,P^n)k(n)^{2/(d-1)} \le 2\sigma(C)\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2}\,d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^f(P^n)$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ справедливо $M_{УВО2}\in{}^a\mathfrak{H}^c{}_1(1, C)\subset\mathfrak{H}^c(1, C))$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из следствия 2.4.7 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в правые части неравенств в утверждении следствия.

Теорема 2.6.23 доказана.

Теорема 2.6.24. $M_{УВО1}$ *и* $M_{УВО2}$ *оптимальны в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа гиперграней для класса* $\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_\#$.

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, справедливо $M_{УВО1}$, $M_{УВО2}\in\mathfrak{H}^c{}_1(\mathscr{C}_0)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.1.

Теорема 2.6.24 доказана.

Теорема 2.6.25. *Путь* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$. *Тогда* $\mathrm{M}_{\text{УВО}1}$ *и* $\mathrm{M}_{\text{УВО}2}$ *асимптотически эффективны для C в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности.*

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, справедливо $\mathrm{M}_{\text{УВО}1}$, $\mathrm{M}_{\text{УВО}2}\in\mathfrak{H}^c{}_1(\mathscr{C}_0)\subset\mathfrak{H}^c(\mathscr{C}_0)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 2.5.3.

Теорема 2.6.25 доказана.

Теорема 2.6.26. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_1$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{cH}(F)\ge\eta^{c}{}^{H}_{d}\,\omega_0^{2d/(1-d)}(C)\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F)\ge\eta^{c}{}^{S}_{d}\,\omega_0^{2d/(1-d)}(C)\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta^{c}{}^{H}_{d}=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\eta^{c}{}^{S}_{d}=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}\mathrm{div}_{d\text{-}1}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $\mathrm{M}_{\text{УВО}1}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теорем 2.5.4, 2.5.5 с подстановкой параметра $\gamma=1/\omega_0(C)$ в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.26 доказана.

Теорема 2.6.27. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_2$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{cH}(F)\ge\eta^{c}{}^{H}_{d}\,\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F)\ge\eta^{c}{}^{S}_{d}\,\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta^{cH}_{d} = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\eta^{cS}_{d} = \frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)} \mathrm{div}_{d\text{-}1}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.9, $M_{УВО2}\in{}^{a}\mathfrak{H}^{c}{}_{1}(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2)\subset {}^{a}\mathfrak{H}^{c}(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теорем 2.5.4, 2.5.5 с подстановкой параметра γ=1 в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.26 доказана.

Теорема 2.6.27. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_1$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{cH}(F) \geq \frac{\vartheta_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\omega_0^{-1}(C)\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2,$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \geq \mathrm{div}_{d-1}\frac{\pi_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\omega_0^{-1}(C)\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $M_{УВО1}\in\mathfrak{H}^{c}{}_{1}(1/\omega_0(C), C)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теорем 2.5.6, 2.5.7 с подстановкой параметра $\gamma=1/\omega_0(C)$ в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.27 доказана.

Теорема 2.6.28. *Пусть* F:=$\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом* $УВО_2$. *Тогда*

$$\underline{\eta}^{cH}(F) \geq \frac{\vartheta_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2,$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \geq \mathrm{div}_{d-1}\frac{\pi_{d-1}^{2/(d-1)}}{32}\left(\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}\right)^2.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.9, $M_{УВО2}\in{}^{a}\mathfrak{H}^{c}{}_{1}(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теорем 2.5.6, 2.5.7 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в правые части неравенств в утверждениях теорем.

Теорема 2.6.28 доказана.

Теорема 2.6.29. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом УВО*$_1$*. Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F)\geq\frac{\left(1-\sqrt{1-\omega_0(C)^{-1}}\right)^2}{4},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F)\geq\frac{\left(1-\sqrt{1-\omega_0(C)^{-1}}\right)^2}{4}\operatorname{div}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.6, для любого $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $\mathrm{M}_{\text{УВО}1}\in\mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C)\subset\mathfrak{H}^c(1/\omega_0(C), C)$. Поэтому утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.5.9 с подстановкой параметра $\gamma=1/\omega_0(C)$ в правые части неравенств в утверждениях теоремы.

Теорема 2.6.29 доказана.

Теорема 2.6.30. *Пусть* $\mathrm{F}:=\{P^n\}_{n=0,1,..}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$ *методом УВО*$_2$*. Тогда*

$$\underline{\eta}^H(F)\geq\frac{1}{4},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F)\geq\frac{1}{4}\operatorname{div}_{d-1}\left(\frac{\pi_{d-1}}{\vartheta_{d-1}}\right)^{2/(d-1)}\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

Доказательство. Согласно следствию 1.3.9, $\mathrm{M}_{\text{УВО}2}\in{}^{a}\mathfrak{H}^c{}_1(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2)$. Поэтому утверждение теоремы (вследствие утверждения теоремы 2.5.10) вытекает непосредственно из теоремы 2.5.9 с подстановкой параметра $\gamma=1$ в правые части неравенств в утверждениях теоремы.

Теорема 2.6.30 доказана.

2.6.4. Метод «Сближающихся Многогранников»

2.6.4.1. Асимптотические оценки скорости сходимости метода

«Сближающихся Многогранников»

В настоящем разделе рассматривается сходимость метода СМ по числу итераций, по числу вершин внутренних и числу гиперграней внешних аппроксимирующих многогранников, а также по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого множества. Метод СМ, как и хаусдорфовы методы, основан на общих адаптивных схемах восполнения и отсечения. Однако, как уже отмечалось, он не принадлежит к классу H-алгоритмов. Поэтому для исследования нельзя воспользоваться непосредственно результатами для этого класса методов. Воспользуемся для исследования метода СМ аппаратом изучения изменения объема на итерациях, развитым в параграфе 2 настоящей главы.

Приведем сначала основные результаты по скорости сходимости в порядке их усиления.

Теорема 2.6.31. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1...}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для для* $C\in\mathscr{C}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\delta(P^n, Q^n)=0\,,\ \lim_{n\to\infty}\delta(P^n, C)=0\,,\ \lim_{n\to\infty}\delta(Q^n, C)=0\,.$$

Теорема 2.6.32. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1...}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для* $C\in\mathscr{C}$, $\omega(C)\neq 1$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n)\leq(1+\varepsilon)\lambda_1^{CM}(C)k(n)^{1/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n)\leq(1+\varepsilon)\lambda_2^{CM}(C)k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n, $m^t(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$ *и*

$$\lambda_1^{CM}(C)=2\left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^d\right\}^{1/(d-1)}[\omega(C)^2-1]^{1/2}\,\omega(C)^{d/(d-1)}\,,$$

$$\lambda_2^{CM}(C)=2\left\{\frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right\}^{1/(d-1)}[\omega(C)^2-1]^{1/2}\,\omega(C)^{d/(d-1)}\,.$$

Теорема 2.6.33. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,...}$ *– последовательность* *пар многогранников, порождаемая методом СМ для* $C\in\mathscr{C}_+^2$*. Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_3^{CM}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_4^{CM}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n, $m^t(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$, *и*

$$\lambda_3^{CM}(C) = \left\{ \frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}} \sigma(C)^{(d+1)/2} \right\}^{2/(d-1)} \frac{8}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_4^{CM}(C) = \left\{ \frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}} \sigma(C) \right\}^{2/(d-1)} \frac{8}{r_{\min}(C)}.$$

Для доказательства приведенных утверждений нам понадобится псевдометрика $\delta_P(\cdot,\cdot)$ (см. п. 1.3.2) и некоторые её дополнительные свойства. Пусть $C_1, C_2\in\mathscr{C}$ и $P\in\mathscr{P}$. Тогда

$$\delta_P(C_1, C_2) := \max \{| g(u, C_1) - g(u, C_2) |: u\in M^f(P)\}.$$

Заметим, что направление u_n на шаге 1,а) метода СМ выбирается так, чтобы

$$g(u_n, Q^n) - g(u_n, P^n) = \delta_{P^n}(P^n, Q^n).$$

Согласно теореме 1.3.2,

$$\delta^H(P, C)/\omega(P) \leq \delta_P(P, C) \leq \delta^H(P, C).$$

Кроме того, при $C\in\mathscr{C}_+^2$, $P\in\mathscr{P}^i(C)$ и $\delta^H(P, C) < r_{\min}(C)$ справедливо

$$\delta^H(P, C) - \delta^H(P, C)^2/r_{\min}(C) \leq \delta_P(P, C) \leq \delta^H(P, C).$$

Нам понадобится некоторое уточнение последнего результата.

Лемма 2.6.1. *Пусть* $C\in\mathscr{C}_+^2$, $P\in\mathscr{P}^i(C)$, $C'\in\mathscr{C}$, $P\in\mathscr{P}^i(C')$ *и* $\delta^H(P, C) < r_{\min}(C)$. *Тогда*

$$\delta_p(P, C') \geq \left(1 - \frac{\delta^H(P, C)}{\rho_{\min}(C)}\right)\delta^H(P, C').$$

Доказательство. Пусть $x\in\partial P$. Обозначим, как и в п. 1.3.2,

$$M^f(x, P) := \{u\in M^f(P): x\in T(x, P)\},$$

$$\xi(x, P) := \min \{\|u\|: u\in \mathrm{conv}\, M^f(x, P)\},$$

$$\xi(P) := \min \{\xi(x, P) : x\in\partial P\}.$$

Согласно лемме 1.3.2, $\delta_P(P, C') \geq \xi(P)\delta^H(P, C')$. Кроме того, для $C\in\mathscr{C}_+^2$, $P\in\mathscr{P}^i(C)$ и $\delta^H(P, C) < r_{\min}(C)$, согласно лемме 1.3.5 справедливо

$$\xi(P) \geq [r_{\min}(C) - \delta^H(P, C)] / r_{\min}(C),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2.6.1. доказана.

Лемма 2.6.2. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\ldots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для* $C\in\mathcal{C}$, $u_n\in M^f(P^n)$ *и* $p_n\in T(u_n, C)$ *– направление и точка, выбираемые на шаге 1 метода СМ,* $\zeta := \max\{\zeta_1, \zeta_2\}$, *где*

$$\zeta_1 := \inf \{\rho(z, p^*)/r\colon z\in C,\ r>0,\ B_r(z)\subset P^n\},$$

$$\zeta_2 := \inf \{\rho(z, p)/r\colon z\in C,\ r>0,\ B_r(z)\subset P^n,\ p\in T(u^*,Q^n)\}.$$

Тогда

$$\delta^S(P^n,Q^n) - \delta^S(P^{n+1},Q^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}(\zeta^2-1)^{(1-d)/2}[\delta_{P^n}(P^n,Q^n)]^d.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, согласно методу СМ, $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n\cap L(u_n, C)$. Поэтому

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) = \delta^S(P^n, P^{n+1}) + \delta^S(Q^n, Q^{n+1}).$$

Обозначим

$$h_P = g(u_n, P^{n+1}) - g(u_n, P^n)$$

и

$$h_Q = g(u_n, Q^{n+1}) - g(u_n, Q^{n+1}).$$

Из схемы алгоритма следует, что

$$g(u_n, Q^{n+1}) = \langle u_n, p_n \rangle = g(u_n, P^{n+1}),$$

поэтому

$$h_P + h_Q = \delta_{P^n}(P^n,Q^n).$$

Пусть $z\in C$ и $r>0$ таковы, что $B_r(z)\subset P^n$. Величина $\delta^S(P^n, P^{n+1})$ не меньше, чем объем, отсекаемый от конуса видимости шара $B_r(z)$ из точки p_n гиперплоскостью с нормалью u_n, опорной к P^n. Поэтому, согласно лемме 2.2.1, имеем

$$\delta^S(P^n,P^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\left(\frac{\rho(p_n,z)}{r}\right)^2-1\right)^{(1-d)/2} h_P^d,$$

и поэтому

$$\delta^S(P^n,P^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}(\zeta_1^2-1)^{(1-d)/2} h_P^d.$$

Аналогично, пусть $p\in T(u_n, Q^n)$, $z\in C$ и $r>0$ таковы, что $B_r(z)\subset P^n$. Тогда

$$\delta^S(Q^n, Q^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}\left(\left(\frac{\rho(z,p)}{r}\right)^2 - 1\right)^{(1-d)/2} h_Q^d,$$

и поэтому

$$\delta^S(Q^n, Q^{n+1}) \geq \frac{\pi_{d-1}}{d}(\zeta_2^2 - 1)^{(1-d)/2} h_Q^d.$$

Так как для любых $t,s,a \geq 0$, $t + s = a$, имеем $t^d + s^d \geq a^d /2^{d-1}$, то

$$h_P^d + h_Q^d \geq (h_P + h_Q)^d / 2^{d-1} = \delta_{P^n}(P^n, Q^n)^d / 2^{d-1}.$$

Лемма 2.6.2 доказана.

Лемма 2.6.3. *Пусть $C\in\mathscr{C}$, R и z таковы, что $C\subset B_R(z)$. Тогда*

$$\mu([C]_\varepsilon) - \mu(C) \leq \pi_d\,[(R + \varepsilon)^d - R^d].$$

Доказательство. Так как $[C]_\varepsilon = C_\varepsilon$, то для $C\in\mathscr{C}$ имеем, согласно [48], теорема 16.1,

$$\mu([C]_\varepsilon) - \mu(C) = \sum_{\nu=1}^{d}\binom{d}{\nu} W_\nu(C)\varepsilon^\nu,$$

где $W_\nu(C)$ есть ν-я основная мера Минковского для C. Поскольку меры Минковского монотонны по включению ([48], теорема 16.2), то

$$\mu([C]_\varepsilon) - \mu(C) \leq \sum_{\nu=1}^{d}\binom{d}{\nu} W_\nu(B_R)\varepsilon^\nu = \pi_d[(R+\varepsilon)^d - R^d].$$

Лемма 2.6.3 доказана.

Лемма 2.6.4. *Пусть $\{a_n\}_{n=0,1,2...}$ и $\{b_n\}_{n=0,1,2...}$ – невозрастающие последовательности положительных чисел, и пусть существуют константы c_1, $c_2 > 0$ и $\beta > 1$ такие, что $a_n - a_{n+1} \geq c_1 b_n^\beta$ и $c_2 b_n \geq a_n$ при $n=0,1,2....$ Тогда для любого $n \geq 0$ справедливо*

$$a_n \leq 1 / [\lambda_7\, n^{1/(\beta-1)}],$$

где параметр λ_7 определен в лемме 2.2.4.

Кроме того, для любого номера $n_0 > \beta$ при $n \geq n_0$ выполняется

$$b_n \le 1 / [\lambda_b\, n^{1/(\beta-1)}],$$

где

$$\lambda_b := \lambda_8 \left[1 - \frac{\beta}{n_0}\right]^{\frac{1}{\beta(\beta-1)}}$$

и параметр λ_8 *определен в лемме 2.2.4.*

Доказательство. По лемме 2.2.4 для $n \ge 0$ справедливо

$$a_n \le [\lambda_7^{(\beta-1)}\, n + a_0^{(1-\beta)}]^{1/(1-\beta)}.$$

Отсюда непосредственно получаем первое утверждение леммы. Далее, пусть теперь $n \ge n_0$. Для любого $m < n$ имеем, по условию,

$$a_m - a_n \ge \sum_{i=m}^{n-1} c_1 b_i^{\beta} \ge (n-m) c_1 b_n^{\beta}$$

в силу невозрастания b_n. Согласно первому утверждению леммы,

$$(\lambda_7 m^{1/(\beta-1)})^{-1} \ge a_m \ge (n-m) c_1 b_n^{\beta}.$$

Положим $\widetilde{m} = [n/\beta]$ (ближайшее целое слева) и $\tau = (n/\beta) - \widetilde{m}$. Тогда

$$b_n^{\beta} \le [\lambda_7 \widetilde{m}^{1/(\beta-1)} c_1 (n - \widetilde{m})]^{-1} \le$$

$$\le \left\{ \lambda_7 \left(\left(1 - \tau \frac{\beta}{n}\right) / \beta \right)^{1/(\beta-1)} \frac{(\beta - 1 + \tau\beta) c_1}{\beta} n^{\beta/(\beta-1)} \right\}^{-1}.$$

Учитывая, что $1 > \tau \ge 0$ и $n \ge n_0$, получаем $b_n \le 1 / [\lambda_b\, n^{1/(\beta-1)}]$, где

$$\lambda_b = \left\{ \left[\frac{(\beta-1)c_1}{c_2^{\beta}} \right]^{1/(\beta-1)} \left(\left(1 - \frac{\beta}{n_0}\right) / \beta \right)^{1/(\beta-1)} \frac{(\beta-1)c_1}{\beta} \right\}^{1/\beta} =$$

$$= \left[\frac{(\beta-1)c_1}{\beta c_2} \left(1 - \frac{\beta}{n_0}\right)^{1/\beta} \right]^{1/(\beta-1)}.$$

Лемма 2.6.4 доказана.

Лемма 2.6.5. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\ldots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для* $C\in\mathscr{C}$, $z\in C$ *и* r, $R > 0$ *такие, что* $B_r(z) \subset P^0 \subset Q^0 \subset B_R(z)$. *Тогда при* $n \geq d+1$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq 1 / [\lambda_{10}\, n^{1/(d-1)}],$$

$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq 1 / [\lambda_{11}\, n^{1/(d-1)}],$$

где параметры λ_{10} *и* λ_{11} *зависят только от* d, R *и* r.

Доказательство. Пусть $z\in C$ *и* r, $R > 0$ *такие, что*

$$B_r(z) \subset P^0 \subset Q^0 \subset B_R(z).$$

Тогда

$$B_r(z) \subset P^n \subset Q^n \subset B_R(z)$$

для любого $n \geq 0$. Учтем теперь, что, согласно теореме 1.3.2,

$$\delta_{P^n}(P^n, Q^n) \geq \delta^H(P^n, Q^n) / \omega(P^n)\,.$$

Следовательно,

$$\delta_{P^n}(P^n, Q^n) \geq (r/R)\delta^H(P^n, Q^n)\,.$$

Нетрудно видеть, что $R/r \geq \zeta$, где ζ определена, как в условии леммы 2.6.2. Получаем, что, согласно этой лемме,

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) \geq c_1\delta^H(P^n, Q^n)^d,$$

где

$$c_1 = \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2}\left(\frac{R}{r}\right)^d.$$

Положим $\beta := d$. Обозначим $\delta^S(P^n, Q^n)$ через x_n и $\delta^H(P^n, Q^n)$ через y_n. Поскольку $Q^n \subset [P^n]_{y_n}$ и $Q^n \subset B_R(z)$, то, по лемме 6.3,

$$x_n \leq \pi_d\,[(R + y_n)^d - R^d].$$

Отсюда, так как $y_n < R$, то $x_n \leq c_2 y_n$, где $c_2 := \pi_d\,(2^d - 1)R^{d-1}$. Кроме этого, члены последовательностей $\{x_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ и $\{y_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ положительны и не возрастают. Поэтому для них справедливы условия леммы 2.6.4 и, следовательно, для любого $n \geq 1$ справедливо

$$x_n = \delta^S(P^n, Q^n) \leq 1 / [\lambda_{10}\, n^{1/(d-1)}],$$

где λ_{10} зависит только от β, c_1 и c_2, а значит, только от d, R и r. Кроме того, пусть $n_0 = \beta + 1$. Тогда, по той же лемме, при $n \geq n_0$ справедливо

$$y_n = \delta^H(P^n, Q^n) \leq 1 / [\lambda_{11}\, n^{1/(d-1)}],$$

где λ_{11} зависит только от β, c_1, c_2 и n_0, а значит, только от d, R и r.

Лемма 2.6.5 доказана.

Доказательство теоремы 2.6.31. Поскольку

$$\delta(P^n, Q^n) \geq \max\ \{\delta(P^n, C), \delta(C, Q^n)\},$$

то утверждения теоремы вытекают непосредственно из утверждений леммы 2.6.5.

Теорема 2.6.31 доказана.

Лемма 2.6.6. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\dots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом CM для* $C\in\mathscr{C}$, $\omega(C)\neq 1$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует такой номер* n_0, *что при* $n\geq n_0$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) \geq \xi_1(\varepsilon)\ [\delta^H(P^n, Q^n)]^d,$$

$$\xi_1(\varepsilon) := (1-\varepsilon)\frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}\left[\omega(C)^2 - 1\right]^{(1-d)/2}\omega(C)^{-d}.$$

Доказательство. Пусть r' и R' – радиусы концентрических внутреннего и внешнего шаров для C, $\omega(C)=R'/r'$. Так как, по теореме 2.6.31, последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ и $\{Q^n\}_{n=0,1,\dots}$ сходятся к C, то для любого ε', $0<\varepsilon'<1$, можно найти такой n_0, что $\delta^H(P^n, Q^n) < \varepsilon' r'$ при $n\geq n_0$. Обозначим $r:=(1-\varepsilon')r'$ и $R:=(1+\varepsilon')R'$. Пусть $z\in C$ такова, что $B_{r'}(z)\subset C\subset B_{R'}(z)$. По лемме 1.3.4 имеем $B_r(z)\subset P^n$. Включение $Q^n\subset B_R(z)$ очевидно (иначе $\delta^H(C, Q^n) > \varepsilon' R'$). Согласно теореме 1.3.2,

$$\delta_{P^n}(P^n, Q^n) \geq \delta^H(P^n, Q^n)/\omega(P^n),$$

поэтому

$$\delta_{P^n}(P^n, Q^n) \geq (r/R)\delta^H(P^n, Q^n).$$

Кроме того, $R/r \geq \zeta$, где ζ определена в утверждении леммы 2.6.2. Отсюда

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) \geq$$

$$\geq \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2}\left(\frac{R}{r}\right)^{-d}[\delta^H(P^n, Q^n)]^d,$$

при $n\geq n_0$. Учтем, что $R/r = \omega(C)(1+\varepsilon')/(1-\varepsilon')$ и $\omega(C)\neq 1$. Выберем ε' настолько малым, чтобы

$$\left\{\left[\omega(C)\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right]^2-1\right\}^{(1-d)/2}\left(\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\right)^{-d}\ge(1-\varepsilon)[\omega(C)^2-1]^{(1-d)/2}.$$

Лемма 2.6.6 доказана.

Доказательство теоремы 2.6.32. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\ldots}$ – последовательность пар многогранников, порождаемая методом CM для $C\in\mathscr{C}$, $\omega(C)\neq 1$. Обозначим $\delta^S(P^n, Q^n)$ через x_n и $\delta^H(P^n, Q^n)$ через y_n. Тогда, согласно лемме 2.6.5, для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<1$, существует такой номер n_1, что при $n\ge n_1$ имеем

$$x_n - x_{n+1} \ge \xi_1(\varepsilon_1)\, y_n^{\ d}.$$

Согласно свойствам $\sigma(\cdot)$ (1.2.8), для любого $\varepsilon_2>0$ существует номер n_2, для которого при $n\ge n_2$ имеем

$$x_n \le [\sigma(P^n) + \varepsilon_2]\, y_n \le [\sigma(C) + \varepsilon_2]\, y_n.$$

Кроме этого, члены последовательностей $\{x_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ и $\{y_n\}_{n=0,1,2\ldots}$ положительны и не возрастают. Поэтому для $n \ge n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ справедливы условия леммы 2.6.4 с константами $c_1 = \xi_1(\varepsilon_1)$, $c_2 = \sigma(C) + \varepsilon_2$ и $\beta=d$. Поэтому для любого $\varepsilon_3>0$ существует номер $n_4 \ge n_3$, для которого при $n \ge n_3$ справедливо

$$x_n := \delta^S(P^n,Q^n) \le \left\{(d-1)\xi_1(\varepsilon_1)\left[\frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2}\right]^d n\right\}^{1/(1-d)} =$$

$$=\left\{(d-1)(1-\varepsilon_1)\frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}[\omega(C)^2-1]^{(1-d)/2}\,\omega(C)^{-d}\left[\frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2}\right]^d n\right\}^{1/(1-d)},$$

$$y_n := \delta^H(P^n,Q^n) \le (1+\varepsilon_3)\left\{\frac{d-1}{d}\xi_1(\varepsilon_1)\frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2}n\right\}^{1/(1-d)} =$$

$$=(1+\varepsilon_3)\left\{(d-1)(1-\varepsilon_1)\frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}[\omega(C)^2-1]^{(1-d)/2}\,\omega(C)^{-d}\,\frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2}n\right\}^{1/(1-d)}.$$

Выберем ε_1, ε_2 и ε_3 так, чтобы

$$(1 + \varepsilon_3)(1 - \varepsilon_1)^{1/(1-d)}[1 + \varepsilon_2/\sigma(C)]^{d/(d-1)} \le 1 + \varepsilon.$$

Тогда, вводя константы λ_1^{CM} и λ_2^{CM}, определенные в формулировке доказываемой теоремы, получаем

$$\delta^S(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_1{}^{CM}(C)n^{1/(1-d)},$$

и

$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_2{}^{CM}(C)n^{1/(1-d)}$$

при $n \ge N := n_4$. Утверждения теоремы для $k(n)=n$ доказаны.

Утверждения теоремы для $k(n)$, равном $m^t(P^n)$ ($m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ и $m^g(Q^n)$), следуют далее из свойств (1.4.1)- (1.4.3) при выборе N, таком что величина $(1 - m^t(P^0) / m^t(P^N))^{1/(1-d)} - 1$, $(1 - m^f(Q^0) / m^f(Q^N))^{1/(1-d)} - 1$, $(1 - m^g(P^0) / m^g(P^N))^{1/(1-d)} - 1$, $(1 - m^g(Q^0) / m^g(Q^N))^{1/(1-d)} - 1$, соответственно, будет достаточно мала.

Теорема 2.6.32 доказана.

Лемма 2.6.7. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\ldots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для* $C \in \mathscr{C}_+{}^2$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует величина* $\lambda(\varepsilon)$, $0<\lambda(\varepsilon)<1$, *что при* $\delta^H(P^n, Q^n) \le \lambda(\varepsilon) r_{\min}(C)$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) \ge \xi_2(\varepsilon)\, [\delta^H(P^n, Q^n)]^{(d+1)/2},$$

$$\xi_2(\varepsilon) := (1-\varepsilon)\frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}\left[\frac{r_{\min}(C)}{2}\right]^{(d-1)/2}.$$

Доказательство. Так как, по теореме 2.6.1, $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ и $\{Q^n\}_{n=0,1,\ldots}$ сходятся к C, то для любого λ, $0<\lambda<1$, можно найти такой n_0, что

$$\delta^H(P^n, Q^n) \le \lambda r_{\min}(C),$$

при $n \ge n_0$. По лемме 2.6.2,

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) = \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}(\zeta^2-1)^{(1-d)/2}[\delta_{p^n}(P^n, Q^n)]^d,$$

где ζ определена в утверждении леммы.

Далее, по лемме 2.6.1, имеем

$$\delta_{p^n}(P^n, Q^n) \ge (1-\lambda)\delta^H(P^n, Q^n).$$

Оценим ζ.

Пусть u^* и p^* - направление и точка, выбираемые для (P^n, Q^n) на шаге 1 $(n+1)$-й итерации метода СМ. Обозначим $r_{\min}(C)$ через r. По теореме о качении Бляшке (см. п. 1.3.2), существует $z \in C$ такая, что $B_r(z) \subset C$ и $p^* \in B_r(z)$. По лемме 1.3.4, отсюда следует, что $B_{r'}(z) \subset P^n$, где $r' := r - \delta^H(P^n, C)$. Поэтому

$$\zeta_1 \le r/r' \le [1-\delta^H(P^n, C)]^{-1}.$$

Пусть теперь $p \in T(u^*, Q^n)$ и p' есть проекция p на C. По теореме о качении Бляшке (см. п. 1.3.2), существует $z \in C$ такая, что $B_r(z) \subset C$ и $p' \in B_r(z)$. Поскольку в p' внешняя нормаль единственна, то $p' \in [z, p]$. Но $\rho(p', p) \le \delta^H(Q^n, C)$, поэтому

$$\zeta_2 \le 1 + \delta^H(Q^n, C)/r.$$

Поскольку

$$\delta^H(P^n, Q^n) \ge \max\{\delta^H(P^n, C), \delta^H(Q^n, C)\}$$

и при $0 \le x \le \lambda < 1$ имеем $1+x \le 1/(1-x) \le 1+x/(1-\lambda)$, то в итоге

$$\zeta \le 1 + \delta^H(P^n, Q^n)/[r_{\min}(C)(1-\lambda)].$$

Итак,

$$\delta^S(P^n, Q^n) - \delta^S(P^{n+1}, Q^{n+1}) \ge$$

$$\ge (1-\lambda)^d \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}\left[\left(1+\frac{\delta^H(P^n, Q^n)}{r_{\min}(C)}\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 - 1\right]^{(1-d)/2} [\delta^H(P^n, Q^n)]^d \ge$$

$$\ge (1-\lambda)^d \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1}d}\left[2\frac{\delta^H(P^n, Q^n)}{r_{\min}(C)}\frac{1}{1-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{1}{1-\lambda}\right)\right]^{(1-d)/2} [\delta^H(P^n, Q^n)]^d.$$

Выберем λ^* так, чтобы

$$(1-\lambda^*)^d\left[\frac{1}{1-\lambda''}\left(1+\frac{\lambda^*}{2}\frac{1}{1-\lambda^*}\right)\right]^{(1-d)/2} \ge 1-\varepsilon$$

и положим $\lambda(\varepsilon) := \lambda^*$.

Лемма 2.6.7 доказана.

Доказательство теоремы 2.6.33. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\dots}$ – последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для $C \in \mathscr{C}_+^2$. Обозначим $\delta^S(P^n, Q^n)$ через x_n и $\delta^H(P^n, Q^n)$ через y_n. Тогда, согласно лемме 2.6.7 и в силу сходимости многогранников к аппроксимируемому телу по теореме 2.6.31, для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<1$, существует n_1 такой, что при $n \ge n_1$ имеем

$$x_n - x_{n+1} \ge \xi_2(\varepsilon_1) y_n^{(d+1)/2},$$

где параметр $\xi_2(\cdot)$ определен в утверждении леммы.

Согласно свойствам $\sigma(\cdot)$ (1.2.8), для любого $\varepsilon_2>0$ существует номер n_2, при котором

$$x_n \le (\sigma(C) + \varepsilon_2)y_n,$$

где $n \ge n_2$. Кроме этого, члены последовательностей $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$ и $\{y_n\}_{n=0,1,\ldots}$ положительны и не возрастают. Поэтому для $n \ge n_3 := \max\{n_1, n_2\}$ справедливы условия леммы 2.6.4 с константами $c_1=\xi_2(\varepsilon_1)$, $c_2=\sigma(C)+\varepsilon_2$ и $\beta=(d+1)/2$. Поэтому для любого $\varepsilon_3>0$ существует номер $n_4 \ge n_3$, для которого при $n \ge n_4$ справедливо

$$x_n := \delta^S(P^n, Q^n) \le \left\{ \frac{(d-1)}{2} \xi_2(\varepsilon_1) \left[\frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2} \right]^{(d+1)/2} n \right\}^{2/(1-d)} =$$

$$= \left\{ \frac{d-1}{2} (1-\varepsilon_1) \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1} d} \left[\frac{r_{\min}(C)}{2} \right]^{(d-1)/2} \left[\frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2} \right]^{(d+1)/2} n \right\}^{2/(1-d)},$$

$$y_n := \delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon_3) \left\{ \frac{d-1}{d+1} \xi_2(\varepsilon_1) \frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2} n \right\}^{2/(1-d)} =$$

$$= (1+\varepsilon_3) \left\{ \frac{d-1}{d+1} (1-\varepsilon_1) \frac{\pi_{d-1}}{2^{d-1} d} \left(\frac{r_{\min}(C)}{2} \right)^{(d-1)/2} \frac{1}{\sigma(C)+\varepsilon_2} n \right\}^{2/(1-d)}.$$

Выберем ε_1, ε_2 и ε_3 так, чтобы

$$(1+\varepsilon_3)(1-\varepsilon_1)^{2/(1-d)}[\,1+\varepsilon_2/\sigma(C)]^{2d/(d-1)} \le 1+\varepsilon\,.$$

Тогда, вводя константы λ_3^{CM} и λ_4^{CM}, определенные в формулировке доказываемой теоремы, получаем

$$\delta^S(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_3^{CM}(C)n^{2/(1-d)}$$

и

$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_4^{CM}(C)\, n^{2/(1-d)}$$

при $n \ge N := n_4$. Утверждения теоремы для $k(n)=n$ доказаны.

Утверждения теоремы для $k(n)$, равном $m^t(P^n)$ ($m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ и $m^g(Q^n)$), следуют далее из свойств (1.4.1)-(1.4.3) при выборе N, таком что величина $(1 - m^t(P^0) / m^t(P^N))^{2/(1-d)} - 1$, $(1 - m^f(Q^0) / m^f(Q^N))^{2/(1-d)} - 1$, $(1 - m^g(P^0) / m^g(P^N))^{2/(1-d)} - 1$, $(1 - m^g(Q^0) / m^g(Q^N))^{2/(1-d)} - 1$, соответственно, будет достаточно мала.

Теорема 2.6.33 доказана.

2.6.4.2. Эффективность и оптимальность по порядку метода «Сближающихся Многогранников»

Напомним, что в п. 0.1.3 был определен класс ВКТ $\mathscr{C}_{\#} := \mathscr{C}((d-1)/2)$, для которого порядок $2/(d-1)$ является неулучшаемым. Согласно (0.1.22), для того, чтобы некоторый метод был оптимален по порядку в классе $\mathscr{C}_{\#}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тела $C\in\mathscr{C}_{\#}$ в порождаемой методом последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ выполнялось

$$\delta(C,P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}.$$

Поскольку $\mathscr{C}_+^{\,2}\subset\mathscr{C}_{\#}$, то это требование сохраняется и для оптимальности метода в классе $\mathscr{C}_+^{\,2}$.

Теорема 2.6.34. $\mathrm{M_{CM}}$ *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин внутренних, гиперграней внешних многогранников и по числу задач вычисления опорной функции аппроксимируемого множества для класса* $\mathscr{C}_+^{\,2}$.

Доказательство. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ есть последовательность пар многогранников, порождаемых методом СМ для $C\in\mathscr{C}_+^{\,2}$. Тогда по теореме 2.6.33 для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует номер N такой, что при $n\ge N$ справедливо

$$\delta^S(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_3^{CM}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_4^{CM}(C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n, $m^t(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ или $m^g(Q^n)$, и константа $\lambda(\gamma, C, \delta)$ определена в утверждении теоремы 2.6.33. Обозначим

$$\Lambda^i(C) := \max\{(1+\varepsilon)\,\lambda^{CM}(C),\ \delta(P^n, C)\, k(P^n)^{2/(d-1)}:\ n=0,1,2,\ldots,N\}$$

для $k(n)$, равного $m^t(P^n)$ или $m^g(P^n)$, и

$$\Lambda^c(C) := \max\{(1+\varepsilon)\,\lambda^{CM}(C),\ \delta(Q^n, C)\, k(P^n)^{2/(d-1)}:\ n=0,1,2,\ldots,N\}$$

для $k(n)$, равного $m^f(Q^n)$ или $m^g(Q^n)$. Тогда для всех $n=0,1,2,\ldots$ справедливо

$$\delta(P^n, C) \le \Lambda^i(C)\, k(P^n)^{2/(1-d)},$$
$$\delta(Q^n, C) \le \Lambda^c(C)\, k(Q^n)^{2/(1-d)}.$$

Теорема 2.6.34 доказана.

Теорема 2.6.35. *Путь* $C\in\mathscr{C}_+^2$. *Тогда* M_{CM} *асимптотически эффективен для* C *в метрике Хаусдорфа и объема симметрической разности.*

Доказательство. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,2,...}$ есть последовательность пар многогранников, порождаемых методом СМ для $C\in\mathscr{C}_+^2$. Пусть $F_1:=\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ и $F_2:=\{Q^n\}_{n=0,1,2,...}$. Необходимо доказать, что в указанных метриках $\underline{\eta}^i(F_1)>0$ и $\underline{\eta}^c(F_2)>0$. Но этот факт непосредственно вытекает из теоремы 2.6.33 и свойства (0.1.3).

Теорема 2.6.35 доказана.

Теорема 2.6.36. *Пусть* $F_1:=\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ *есть последовательность внутренних и* $F_2:=\{Q^n\}_{n=0,1,2,...}$ *– внешних многогранников, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_+^2$ *методом СМ. Тогда*

$$\underline{\eta}^{iH}(F_1)\geq\frac{1}{4}\eta_d^H\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},\ \underline{\eta}^{cH}(F_2)\geq\frac{1}{4}\eta_d^H\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F_1)\geq\frac{1}{4}\eta^{i}{}_d^S\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},\ \underline{\eta}^{cS}(F_2)\geq\frac{1}{4}\eta^{c}{}_d^S\frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)},$$

где

$$\eta_d^H=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{d+1}\frac{\vartheta_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\eta^{i}{}_d^S=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}\mathrm{del}_{d\text{-}1},$$

$$\eta^{c}{}_d^S=\frac{1}{4}\left(\frac{d-1}{2}\frac{\pi_{d-1}}{d}\right)^{2/(d-1)}\mathrm{div}_{d\text{-}1}.$$

Доказательство. Согласно [26], [51] и [29] (см. 0.1.5) для $C\in\mathscr{C}_+^2$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty}\delta^H(C,\mathscr{P}_m)m^{2/(d-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\int_{\partial C}k_C(x)^{1/2}d\sigma(x)\right)^{2/(d-1)},$$

где ϑ_l есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса (см. [53]), $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x\in\partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Так как $k_C(x) \geq r_{\max}(C)^{1-d}$, то

$$\lim_{m\to\infty}\delta^H(C,\mathscr{P}_m)m^{2/(d-1)} \geq \frac{1}{2r_{\max}(C)}\left(\frac{\vartheta_{d-1}}{\pi_{d-1}}\sigma(C)\right)^{2/(d-1)}.$$

Для произвольно малого ε и некоторого N при $n\geq N$ получаем, согласно теореме 2.6.33, что

$$\delta^H(C,P^n)m^t(P^n)^{2/(d-1)} \leq \frac{8(1+\varepsilon)}{r_{\min}(C)}\left(\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right)^{2/(d-1)},$$

$$\delta^H(C,Q^n)m^f(Q^n)^{2/(d-1)} \leq \frac{8(1+\varepsilon)}{r_{\min}(C)}\left(\frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)\right)^{2/(d-1)}.$$

В силу произвольности ε, из последних двух неравенств получаем утверждение теоремы для метрики Хаусдорфа.

Далее, согласно [27], [28], [30], существуют константы del_{d-1} и div_{d-1}, зависящие только от d, такие что (см. 0.1.6 и 0.1.7) для $C\in\mathscr{C}_+^2$ справедливо

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^i{}_m)m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{del}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)}$$

и

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^c{}_m)m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2}\mathrm{div}_{d-1}\left(\int_{\partial C}k_C(x)^{1/(d+1)}d\sigma(x)\right)^{(d+1)/(d-1)},$$

где $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x\in\partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x. Так как $k_C(x) \geq r_{\max}(C)^{1-d}$, то

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^i{}_m)m^{2/(d-1)} \geq \frac{\mathrm{del}_{d-1}}{2r_{\max}(C)}\sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}},$$

$$\lim_{m\to\infty}\delta^S(C,\mathscr{P}^c{}_m)m^{2/(d-1)} \geq \frac{\mathrm{div}_{d-1}}{2r_{\max}(C)}\sigma(C)^{\frac{d+1}{d-1}}.$$

Но для произвольно малого ε и некоторого N при $n \geq N$ получаем, согласно теореме 2.6.33, что

$$\delta^H(C,P^n)m^t(P^n)^{2/(d-1)} \leq \frac{8(1+\varepsilon)}{r_{\min}(C)}\left(\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^{(d+1)/2}\right)^{2/(d-1)},$$

$$\delta^S(C,Q^n)m^f(Q^n)^{2/(d-1)} \leq \frac{8(1+\varepsilon)}{r_{\min}(C)}\left(\frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}}\sigma(C)^{(d+1)/2}\right)^{2/(d-1)}.$$

В силу произвольности ε, из последних двух неравенств получаем утверждение теоремы для метрики объема симметрической разности.

Теорема 2.6.36 доказана.

В настоящее параграфе были рассмотрены основные АМПА, сформулированные в главе 1. Для их исследования был применен аппарат, разработанный в начале настоящей главы. Были найдены асимптотические верхние оценки скорости сходимости, доказана оптимальность по порядку в соответствующих классах аппроксимируемых тел, получены оценки асимптотической эффективности.

2.7. Оценки скорости сходимости АМПА на начальном этапе

В настоящем параграфе будет рассмотрена скорость сходимости изучаемых АМПА на начальном этапе аппроксимации. Для этого будет использован аппарат, который был разработан в начальных параграфах настоящей главы. Рассмотрение скорости сходимости в асимптотике позволило получить ряд наглядных и «тонких» результатов. В настоящем параграфе мы откажемся от соображений наглядности. Будут получены достаточно грубые оценки скорости сходимости, которые, однако, позволяют с полной определенностью оценить скорость сходимости рассматриваемых методов на начальном этапе аппроксимации и ресурсы, достаточные для достижения полученных ранее в настоящей главе асимптотических свойств.

2.7.1. Оценки скорости сходимости первых членов *H*-последовательностей

Докажем ряд утверждений о начальной сходимости *H*-

последовательностей по мере их усиления. Для их получения воспользуемся техникой изменения объема на итерациях (параграф 2.1).

Лемма 2.7.1. *Пусть* $C \in \mathcal{C}$, R *и* z *таковы, что* $C \subset B_R(z)$. *Тогда для* ε, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *справедливо*

$$\mu([C]_\varepsilon) - \mu(C) \le \frac{\pi_d[(R+\varepsilon_0)^d - R^d]}{\varepsilon_0}\varepsilon .$$

Доказательство. Так как $[C]_\varepsilon = C_\varepsilon$, то для $C \in \mathcal{C}$ имеем, согласно [48], теорема 16.1,

$$\mu([C]_\varepsilon) - \mu(C) = \sum_{\nu=1}^{d} \binom{d}{\nu} W_\nu(C)\varepsilon^\nu ,$$

где $W_\nu(C)$ есть ν-я основная мера Минковского для C. Поскольку меры Минковского монотонны по включению ([48], теорема 16.2), то

$$\mu([C]_\varepsilon) - \mu(C) \le \sum_{\nu=1}^{d} \binom{d}{\nu} W_\nu(B_R)\varepsilon^\nu \le \varepsilon \sum_{\nu=1}^{d} \binom{d}{\nu} W_\nu(B_R)\varepsilon_0^{\nu-1} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum_{\nu=1}^{d} \binom{d}{\nu} W_\nu(B_R)\varepsilon_0^\nu = \frac{\pi_d[(R+\varepsilon_0)^d - R^d]}{\varepsilon_0}\varepsilon.$$

Лемма 2.7.1 доказана.

Лемма 2.7.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$*-последовательность для* $C \in \mathcal{C}$, *и пусть* R *и* z *таковы, что* $C \subset B_R(z)$. *Тогда для любого* $n \ge 0$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, C) \le c\,\delta^H(P^n, C) ,$$

где

$$c = \frac{\pi_d[(R+\delta^H(P^0, C))^d - R^d]}{\delta^H(P^0, C)} .$$

Доказательство. Поскольку $\delta^S(P^n, C) \le \mu([C]_\varepsilon) - \mu(C)$, где $\varepsilon = \delta^H(P^n, C)$, и величины $\delta^H(P^n, C)$ не возрастают, то утверждение леммы вытекает непосредственно из леммы 2.7.1.

Лемма 2.7.2 доказана.

Теорема 2.7.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma,$ $C)$-

последовательность восполнения (отсечения) для $C\in\mathscr{C}$ *и пусть* r, R *и* z *таковы, что* $B_r(z)\subset P^0\subset C\subset B_R(z)$ ($B_r(z)\subset C\subset B_R(z)$). *Тогда для любого* $n\geq 0$ *справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \leq \lambda^0{}_2(\gamma, C, P^0)\, k(n)^{-1/d},$$
$$\delta^S(P^n, C) \leq [\lambda^0{}_7{}^{(d-1)}\, k(n) + \delta^S(P^0, C)^{(1-d)}]^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m^t(P^n)$- $m^t(P^0)$ ($m^f(P^n)$- $m^f(P^0)$) *и*

$$\lambda_2^0(\gamma, C, P^0) := \frac{d\delta^S(C,P^0)}{\pi_{d-1}}\left[\frac{R+\delta^H(C,P^0)}{r}\right]^{\frac{d-1}{d}}\frac{1}{\gamma},$$

$$\lambda_7^0(\gamma, C, P^0) :=$$

$$=\left[\frac{(d-1)\pi_{d-1}}{d\pi_d^d}\right]^{\frac{1}{d-1}}\frac{r}{R+\delta^H(C,P^0)}\left[\frac{\delta^H(C,P^0)}{(R+\delta^H(C,P^0))^d - R^d}\right]^{\frac{d}{d-1}}\frac{1}{\gamma^{\frac{d}{d-1}}}.$$

Доказательство теоремы 2.7.1. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H(\gamma, C)$-последовательность. Согласно лемме 2.2.2, при этих условиях при любом $n \geq 0$ справедливо

$$\delta^S(P^n, P^{n+1}) \geq \lambda'_5[\delta^H(P^n, P^{n+1})]^d,$$

где

$$\lambda'_5 := \frac{\pi_{d-1}}{d}\left[\frac{r}{R+\delta^H(C,P^0)}\right]^{d-1}.$$

Обозначим $\delta^S(P^n, C)$ через a_n, $\delta^H(P^n, C)$ через b_n. Из монотонности по включению последовательности F вытекает, что $\delta^S(P^n, P^{n+1}) = \delta^S(P^n, C) - \delta^S(C, P^{n+1})$. Поэтому

$$a_n - a_{n+1} \geq \lambda'_5[\gamma b_n]^d,$$

и для любого $n>0$ имеем

$$a_n - a_{n+1} \geq c_1 b_n{}^d,$$

откуда

$$a_0 \geq \sum_{i=0}^{n-1} c_1 b_i^\beta \geq n c_1 b_n^d\ ,$$

где $c_1=\lambda'_5\gamma^d$, в силу невозрастания b_n. Отсюда вытекает первое утверждение теоремы для $k(n)=n$. Для $m^t(P^n)$- $m^t(P^0)$ оно вытекает далее из (1.1.2), (1.1.3).

Далее, по лемме 2.7.2, для любого $n>0$ имеем $a_n \le c_2 b_n$, где

$$c_2 = \frac{\pi_d [(R + b_0)^d - R^d]}{b_0}.$$

Поэтому по лемме 2.2.4 имеем

$$\delta^S(P^n, C) \le [\lambda'_7{}^{(d-1)}\, n + a_0^{(1-d)}]^{1/(1-d)},$$

где

$$\lambda'_7 = \left[\frac{(d-1)c_1}{c_2^d}\right]^{1/(d-1)}.$$

Подставляя в константу λ_7 выражения для c_1 и c_2, получаем второе утверждение теоремы для $k(n)=n$. Для $m^t(P^n)$- $m^t(P^0)$ оно вытекает далее из (1.1.2), (1.1.3).

Теорема 2.7.1 доказана.

Приведенная выше теорема позволяет рассчитывать скорость сходимости хаусдорфовых АМПА для любых тел (в том числе и многогранников) на начальном этапе аппроксимации. Используя ту же технику, можно получить и явные выражения (через величины γ, $r(C)$, $R(C)$, $\delta^H(P^0, C)$, $\delta^S(P^0, C)$) для номера, с которого начинается асимптотическое поведение точности, однако они слишком громоздки. Мы ограничимся указанием на сам факт такой зависимости. Впервые такого рода теорема (здесь – теорема 2.7.3) была доказана в [39].

Теорема 2.7.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$-*последовательность для* $C\in\mathscr{C}$ *и пусть* r, R *и* z *таковы, что* $B_r(z)\subset C\subset B_R(z)$. *Тогда существуют номер* n_0 *и константа* κ, *зависящие только от величин* γ, d, R, r, $\delta^H(P^0, C)$, $\delta^S(P^0, C)$ *и* $m(P^0)$, *такие что для любого* $n\ge n_0$ *справедливо*

$$\delta(P^n, C) \le \kappa / k(n)^{1/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m(P^n)$.

Доказательство теоремы 2.7.2. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ есть $H(\gamma, C)$-последовательность. По теореме 2.7.1 для любого $\varepsilon>0$ существует номер

$$n_1(\varepsilon) := \min\,\{n\colon \delta^H(P^0, C)\le \varepsilon\},$$

зависящий только от величин ε, γ, d, R, r, $\delta^H(P^0, C)$ и $\delta^S(P^0, C)$. Обозначим $\delta^S(P^n, C)$ через a_n, $\delta^H(P^n, C)$ через b_n. Из монотонности по включению последовательности F вытекает, что $\delta^S(P^n, P^{n+1}) = \delta^S(P^n, C) - \delta^S(C, P^{n+1})$. Положим в условии леммы 2.2.2 параметр $\varepsilon = ½$. Тогда при $n \geq n_1(r/2)$ имеем константу $c_1 = \lambda_5(½)$, зависящую только от r, R и d, такую что

$$a_n - a_{n+1} \geq c_1 b_n^{\beta},$$

где $\beta=d$. Далее, по лемме 2.7.2, для любого $n>0$ имеем

$$a_n \leq c_2 b_n,$$

где константа c_2 зависит только от $\delta^H(P^0, C)$, R и d.

Положим в условии леммы 2.2.4 параметр $\varepsilon = ½$. Тогда, согласно утверждению леммы, существует номер n_2, зависящий только от β, c_1, c_2 и a_0, для которого при $n \geq n_2$ справедливо

$$a_n \leq (3/2) / [\lambda_7\, n^{1/(\beta-1)}], \quad b_n \leq (3/2) / [\lambda_8\, n^{1/(\beta-1)}],$$

где λ_7 и λ_8 зависят только от β, c_1 и c_2. Выбирая $n_0 := \max\{n_1(r/2), n_2\}$, получаем утверждение теоремы для $k(n)=n$. Для $k(n)=m(P^n)$ оно вытекает далее из (1.1.4) с добавлением зависимости от $m(P^0)$.

Теорема 2.7.2 доказана.

Теорема 2.7.3. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma, C)$-*последовательность для* $C \in \mathscr{C}_+^2$ *и пусть* r, R *и* z *таковы, что* $B_r(z) \subset C \subset B_R(z)$. *Тогда существуют номер* n_0 *и константа* κ, *зависящие только от величин* γ, d, R, r, $r_{\min}(C)$, $\delta^H(P^0, C)$, $\delta^S(P^0, C)$ *и* $m(P^0)$, *такие что для любого* $n \geq n_0$ *справедливо*

$$\delta(P^n, C) \leq \kappa / k(n)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m(P^n)$.

Доказательство теоремы 2.7.2. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 2.7.2 с заменой утверждения леммы 2.2.2 на утверждение леммы 2.2.3 и значения параметра $\beta=d$ на $\beta=(d+1)/2$.

Теорема 2.7.3 доказана.

2.7.2. Оценки скорости сходимости первых членов H_1-последовательностей

Рассмотрим начальную скорость сходимости H_1-последовательностей.

Прежде всего, отметим, что, поскольку H_1-последовательности являются H-последовательностями, то для начального их этапа справедливы утверждения теорем 2.7.1-2.7.3. Для получения более сильных утверждений воспользуемся техникой упаковок нормалей (параграф 2.3). Поскольку изучение начального этапа H_1-последовательностей отсечения очень громоздко, ограничимся H_1-последовательностями восполнения.

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ есть $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения и $\beta>0$. Поставим ей в соответствие сопровождающую последовательность (см. параграф 2.3) множеств точек $\{Z^n\}_{n=0,1,\ldots}$ по следующему правилу

3) $Z^0 := \{p + \beta u(p)\colon p\in M^t(P^0)\}$ для некоторого набора направлений $\{u(p)\in S(p, C)\colon p\in M^t(P^0)\}$;

4) $Z^{n+1} := \{p_n + \beta u_n\}\cup Z^n$, n=0,1,2,... , где точка p_n и направление u_n взяты из определения $H_1(\gamma, C)$-последовательности восполнения.

Теорема 2.7.4. *Пусть $C\in\mathscr{C}$ и $\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ есть $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения. Тогда для любого N такого, что*

$$\delta^H(P^{N-1},C)\le\frac{4}{\gamma R(C)}\min\left\{\frac{R(C)^2}{2},\varepsilon_0^2\right\},\ N>\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}},$$

при $n\ge N$ справедливо

$$\delta^H(P^n,C)\le\frac{16R(C)}{\gamma}\left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{d-1}{2}}\left[\frac{\pi_{d-1}}{d\pi_d}k(n)\right]^{-\frac{2}{d-1}},$$

где $\varepsilon_0 := \max\{\rho(x, y)\colon x, y\in Z^0\}$ и $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$.

Доказательство. Доказательство теоремы повторяет начало доказательства теоремы 2.3.1 (для последовательностей восполнения) с подстановкой параметра $\beta=R(C)$. Получаем

$$k(n) < \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \left[\frac{16R(C)}{\gamma\delta^H(P^n, C)} \right]^{\frac{d-1}{2}} \left[1 - \frac{\gamma\delta^H(P^n, C)}{16R(C)} \right]^{-\frac{d-1}{2}}.$$

Но $\delta^H(P^n, C) < \delta^H(P^{N-1}, C) < 2R(C)/\gamma$,

Теорема 2.7.4 доказана.

Следующая теорема говорит о качественной зависимости начала асимптотического поведения сходимости H_1-последовательностей от праметров задачи аппроксимации.

Теорема 2.7.5. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H_1(\gamma, C)$-*последовательность восполнения для* $C\in\mathscr{C}$, *и пусть* r, R *и* z *таковы, что* $B_r(z)\subset C\subset B_R(z)$. *Тогда существуют номер* n_0 *и константа* κ, *зависящие только от величин* γ, d, R, r, $\delta^H(P^0, C)$ *и* $\delta^S(P^0, C)$, *такие что для любого* $n\geq n_0$ *справедливо*

$$\delta(P^n, C) \leq \kappa / k(n)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ *есть* n *или* $m(P^n)$.

Доказательство теоремы 2.7.5. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H(\gamma, C)$-последовательность. По теореме 2.7.1 для любого $\varepsilon>0$ существует номер

$$n_1(\varepsilon) := \min\,\{n\colon \delta^H(P^0, C)\leq \varepsilon\},$$

зависящий только от величин ε, γ, d, R, r, $\delta^H(P^0, C)$ и $\delta^S(P^0, C)$. Пусть

$$\varepsilon \leq \frac{4}{\gamma R(C)} \min\left\{ \frac{R(C)^2}{2}, \varepsilon_0^2 \right\},\ N > \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}.$$

Тогда утверждение теоремы вытекает из утверждения теоремы 2.7.4.

Теорема 2.7.5 доказана.

Замечание. Отметим, что в рассмотренных теоремах зависимость от величин $\delta^H(P^0, C)$ и $\delta^S(P^0, C)$ может быть опущена за счет специального выбора многогранника начальной аппроксимации. Таким многогранником может быть, например, симплекс, вписанный во внутренний шар (или шар качения Бляшке – в гладком случае). В этом случае на величины начальной точности аппроксимации $\delta^H(P^0, C)$ и $\delta^S(P^0, C)$ можно дать оценки, зависящие только от величин d, $R(C)$, $r(C)$ (в гладком случае – от d, $r_{\max}(C)$, $r_{\min}(C)$). Мы не будем более подробно останавливаться на этом вопросе.

2.7.3. Оценки скорости сходимости конкретных АМПА на начальном этапе

Рассмотрим начальную скорость сходимости некоторых из рассмотренных ранее АМПА.

Следствие 2.7.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}$ *методом БВ. Тогда для нее справедливы утверждения теорем 2.7.1-2.7.5 с подстановкой параметра* $\gamma=1$.

Утверждение следствия вытекает непосредственно из указанных в нем теорем и теоремы 1.2.1.

Следствие 2.7.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}$ *методом БО. Тогда для нее справедливы утверждения теорем 2.7.1-2.7.3 с подстановкой параметра* $\gamma=1$.

Утверждение следствия вытекает непосредственно из указанных в нем теорем и теоремы 1.2.1.

Следствие 2.7.3. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}$ *методом УО. Тогда для нее справедливы утверждения теорем 2.7.1-2.7.5 с подстановкой параметра* $\gamma=\gamma(P^0, C) := r/R$, *где* $B_r(z)\subset P^0\subset C\subset B_R(z)$, $z\in\operatorname{int} P^0$.

Утверждение следствия вытекает непосредственно из указанных в нем теорем и теоремы 1.3.3.

Следствие 2.7.4. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ *есть последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0$ *и* $P^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$ *методом УВО. Тогда для нее справедливы утверждения теорем 2.7.1-2.7.3 с подстановкой параметра* $\gamma=1/\omega_0(C)$, .

Утверждение следствия вытекает непосредственно из указанных в нем теорем и теоремы 1.3.6.

Для нехаусдорфова метода СМ также могут быть получены утверждения вида теорем 2.7.1-2.7.3, однако в силу громоздкости выкладок мы их приводить не будем. Теорема типа 2.7.3 доказана, например, в [41] (теорема 7).

Глава 3. Теория двойственности оптимальных АМПА

Необходимость применения теории двойственности в задачах полиэдральной аппроксимации возникает в следующих случаях:

– когда при наличии методов, основанных на описании аппроксимируемого тела через опорную (дистанционную) функцию, необходимо разработать МПА для тел с двойственным описанием через дистанционную (опорную) функцию;
– когда при наличии методов с последовательно растущим числом вершин (гиперграней) необходимо разработать МПА многогранниками с двойственным описанием, т.е. с последовательно растущим числом гиперграней (вершин);
– при необходимости разработки МПА, оптимальных по числу вычислений опорной и / или дистанционной функции аппроксимируемого тела.

В настоящей главе прежде всего разрабатывается аппарат двойственного описания МПА, определенных с помощью схем восполнения и отсечения, затем устанавливается факт двойственности H- и H_1-последовательностей восполнения и отсечения: последовательность из многогранников, полярных к многогранникам H- (H_1-) последовательности восполнения, оказывается H- (H_1-) последовательностью отсечения для полярного тела и наоборот. Далее рассматриваются методы построения двойственных АМПА. В конце главы рассматриваются методы, оптимальные с точки зрения числа оптимизационных экспериментов с аппроксимируемым телом.

В настоящей главе, если специально не оговорено, речь идет об аппроксимации в метрике Хаусдорфа и под $\delta(\cdot,\cdot)$ понимается $\delta^H(\cdot,\cdot)$.

3.1. Двойственные классы АМПА

Пусть $C\in\mathscr{C}$, обозначим $C^*:=\{x\in\mathbb{E}^d\colon <x, y>\le 1,\ y\in C\}$ – *полярное множество* (*поляру*) для C (относительно $\{0\}$). Пусть $y\in\mathbb{E}_0^d$ и $l_y:=\{x\in\mathbb{E}^d\colon <x, y>=1\}$. Под *полярой* $\pi(y)$ для точки y (относительно сферы $<x, x>=1$) будем понимать гиперплоскость l_y, а через $\pi(l_y)\equiv\{y\}$

обозначим *полюс* (относительно сферы $<x, x>=1$) для гиперплоскости l_y. Пусть $C\in\mathscr{C}_0$, тогда $C^*\in\mathscr{C}_0$, $C^{**}\equiv C$, полюс каждой (экстремальной) гиперплоскости, опорной к C, есть (экстремальная) граничная точка C^*, и поляра каждой (экстремальной) граничной точки C есть (экстремальная) опорная гиперплоскость для C^* (см. [48] теорема 6.8 и замечание 6.3). В наших обозначениях для $u\in S^{d-1}$ и $p\in\partial C$ имеем

$$\pi(l(u,C))=\frac{u}{g(u,C)}\in\partial C^*;$$
$$\pi(p)=l(u_p,C^*),\, g(u_p,C^*)=\frac{1}{\|p\|},\, u_p:=\frac{p}{\|p\|}. \tag{3.1.1}$$

Вообще, если $C\in\mathscr{C}$ может быть задано как множество решений системы неравенств, порожденных опорной функцией (см. [48] теорема 12.3 и [49] §13]):

$$C=\{x\in\mathbb{E}^d\colon <u, x>\le g(u, C),\, u\in\mathbb{E}_0{}^d\},$$

то поляра C^*, $C\in\mathscr{C}_0$, допускает представление в виде множества уровня опорной функции (см. [48] теорема 12.2 и [49] §16]):

$$C^*=\{x\in\mathbb{E}^d\colon g(x, C)\le 1\}. \tag{3.1.2}$$

Пусть $C\in\mathscr{C}_0$ и $x\in\mathbb{E}^d$. Напомним (см. п. 0.1.), что через $g^*(x, C):=\min\{\lambda\ge 0\colon x\in\lambda C\}$ мы обозначили *дистанционную* [48] (или *калибровочную* [49]) *функцию* для C. Из определения дистанционной функции следует, что $g^*(x, C)=||x||/||x_0||$, где $x_0=[o, x)\cap\partial C$ – точка пересечения луча, исходящего из начала координат и проходящего через x, и границы тела C, и $t(x, C) := x/g^*(x, C)\in\partial C$, $x\in\mathbb{E}_0{}^d$ (см. [48] замечание 11.1). Очевидно, что расчет дистанционной функции $g^*(x, C)$ сводится, в общем случае, к решению задачи выпуклой оптимизации

$$g^*(x, C) = 1 / \max\{\lambda\ge 0\colon \lambda x\in C\},$$

что по сложности, как правило, соответствует задаче нахождения значения опорной функции. Из определения дистанционной функции следует, что тело $C\in\mathscr{C}_0$ допускает представление в виде множества уровня дистанционной функции (см. [48] теорема 11.2 и [49] §14]):

$$C=\{x\in\mathbb{E}^d\colon g^*(x, C)\le 1\}.$$

Для $C\in\mathscr{C}_0$ справедливо $C^{**} = C$ (см. [48] теорема 6.4 и [49] теорема 14.5), кроме того, опорная и дистанционная (калибровочная) функции полностью "дуальны": для $x\in\mathbb{E}^d$ справедливо (см. [48] теорема 12.2 и [49] теорема 14.5]):

$$g(x, C^*)=g^*(x, C), \quad g^*(x, C^*)=g(x, C). \qquad (3.1.3)$$

В частности, из (3.1.3) вытекает, что поляра тела $C\in\mathscr{C}_0$ допускает представление в виде множества решений системы неравенств, порожденных дистанционной функцией:

$$C^*=\{x\in\mathbb{E}^d: \langle u, x\rangle \le g^*(u, C), u\in\mathbb{E}_0{}^d\}.$$

Кроме того, нам понадобится вытекающее из (3.1.3) представление

$$t(x, C) = x/g\,(x, C^*), x\in\mathbb{E}_0{}^d. \qquad (3.1.4)$$

Каждая из рассматриваемых функций имеет свойства, делающие её удобной характеристикой при аппроксимации выпуклых множеств многогранниками. Так, при аппроксимации выпуклой оболочки объединения выпуклых тел из класса $\mathscr{C}_0$, а также их сумм Минковского с положительными коэффициентами удобно использовать аппарат опорных функций: для $x\in\mathbb{E}^d$ справедливо (см. [48] теорема 12.4):

$$\begin{gathered} g(u,C)=\max_{1\le i\le m} g(u,C_i),\ C=\operatorname{conv}\{\bigcup_{i=1}^m C_i\}; \\ g(u,C)=\sum_{i=1}^m \lambda_i g(u,C_i),\ C=\sum_{i=1}^m \lambda_i C_i,\ \lambda_1\ge 0,\ldots,\lambda_m\ge 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i>0. \end{gathered} \qquad (3.1.5)$$

В то же время, при аппроксимации пересечения выпуклых тел из класса $\mathscr{C}_0$ удобно использовать аппарат дистанционных функций: для $x\in\mathbb{E}^d$ справедливо (см. [48] теорема 11.3):

$$g^*(u,C)=\max_{1\le i\le m} g^*(u,C_i),\ C=\bigcap_{i=1}^m C_i. \qquad (3.1.6)$$

Покажем, что определенные в гл. 1 аппроксимационные схемы отсечения и восполнения являются двойственными в смысле следующей теоремы.

Теорема 3.1.1. *Пусть последовательность многогранников* $\{P^n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, *где* $P^n\in\mathscr{C}_0$, n=0,1,2,... , *является последовательностью восполнения (отсечения) для* $C\in\mathscr{C}_0$. *Тогда последовательность многогранников* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *является последовательностью отсече-*

ния (восполнения) для C^*.

Доказательство. Пусть рассматривается последовательность восполнения. Тогда $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$, $n=0,1,2,...$. Согласно [48] теорема 6.5, для любых $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$, $C_1 \subset C_2$, справедливо

$$C_1^* \supset C_2^*. \tag{3.1.7}$$

Поэтому $C^* \subset (P^n)^*$. Кроме того, все вершины P^n касаются ∂C. Так как поляра каждой граничной точки C есть опорная гиперплоскость для C^* (см. [48] теорема 6.8), то поляры вершин P^n, которые являются гиперплоскостями гиперграней $(P^n)^*$ (там же, замечание 6.3), касаются C^*. Так как, по условию теоремы, $P^n \in \mathscr{C}_0$, то $(P^n)^*$ – многогранник (см. [48] следствие из теоремы 6.7). Таким образом, $(P^n)^* \in \mathscr{P}^c(C^*)$, $n=0,1,2,...$.

Заметим далее, что если, согласно схеме восполнения $P^{n+1} :=$ conv $\{p_n, P^n\}$, где $p_n \in \partial C$, то по [48] теорема 6.7

$$(P^{n+1})^* = (P^n)^* \cap \{p_n\}^*.$$

Но $\{p_n\}^* = \{x \in \mathbb{E}^d\colon \langle x, p_n \rangle \le 1\}$, откуда по (3.1.1) в наших обозначениях имеем

$$(P^{n+1})^* = (P^n)^* \cap L(u_n, C^*), \;\; u_n := p_n/\|p_n\| \in S^{d-1}. \tag{3.1.8}$$

Итак, $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,2,...}$ является последовательностью отсечения для C^*, каждая итерация которой определяется свойством (3.1.8).

Пусть теперь рассматривается последовательность отсечения. Тогда $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$, $n=0,1,2,...$. Согласно (3.1.7), $(P^n)^* \subset C^*$. Кроме того, все гиперграни P^n касаются ∂C. Так как полюс каждой гиперплоскости, опорной к C, есть граничная точка C^* (см. [48] теорема 6.8), то полюса гиперплоскостей гиперграней P^n, которые являются вершинами $(P^n)^*$ ([48] замечание 6.3), принадлежат ∂C^*. Так как, по условию теоремы, $P^n \in \mathscr{C}_0$, то $(P^n)^*$ – многогранник (см. [48] следствие из теоремы 6.7). Таким образом, $(P^n)^* \in \mathscr{P}^i(C^*)$, $n=0,1,2,...$.

Согласно схеме отсечения $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$, где $u_n \in S^{d-1}$. Но, по предположению теоремы, $C \in \mathscr{C}_0$, а значит, и $\{0\} \in L(u_n, C)$. Кроме того, P^n и $L(u_n, C)$ замкнуты. Поэтому по [48] (теорема 6.7) имеем

$$(P^{n+1})^* = \text{conv}\,\{(P^n)^* \cup (L(u_n, C))^*\}.$$

Но $(L(u_n, C))^* = \{u_n/g(u_n, C)\}^{**}$. По [48] (теорема 6.4) имеем

$$\{u_n/g(u_n, C)\}^{**}= \mathrm{conv}\ \{\{u_n/g(u_n, C)\},\{0\}\}.$$

Поэтому

$$(P^{n+1})^* = \mathrm{conv}\ \{(P^n)^*,\ \{u_n/g(u_n, C)\},\ \{0\}\},$$

откуда, в силу того, что $\{0\}\in(P^n)^*$, получаем

$$(P^{n+1})^*= \mathrm{conv}\ \{p_n\ ,\ (P^n)^*\},\ \ p_n := u_n/g(u_n, C)\in\partial C^*. \qquad (3.1.9)$$

Итак, $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,2,...}$ является последовательностью восполнения для C^*, каждая итерация которой определяется свойством (3.1.9).

Теорема 3.1.1 доказана.

Формулы (3.1.8)-(3.1.9), полученные в доказательстве теоремы 3.1.1, позволяют для произвольного метода аппроксимации, основанного на схеме восполнения (отсечения), переходить к его двойственному аналогу – методу отсечения (восполнения), применимому для аппроксимации полярного тела. Более подробно методика конструирования двойственных АМПА будет рассмотрена несколько позже в настоящей главе.

В следующем параграфе будут доказаны теоремы, устанавливающие факт двойственности классов АМПА, порождающих H- и H_1-последовательности восполнения и отсечения.

3.2. Двойственность хаусдорфовых АМПА восполнения и отсечения

Пусть $\omega_0(C)$ есть минимальное отношение радиусов $R_0(C)$ внешнего и $r_0(C)$ внутреннего шаров с центром в начале координат. Ясно, что $\omega_0(C)\geq\omega(C)$. Так как $(B_r(0))^*= B_{1/r}(0)$, то

$$\omega_0(C) = \omega_0(C^*). \qquad (3.2.1)$$

Лемма 3.2.1. *Пусть* $C_1,C_2\in\mathscr{C}_0$. *Тогда*

$$\delta(C_1^*,C_2^*)\leq\frac{\delta(C_1,C_2)}{r_0(C_1)r_0(C_2)}.$$

Доказательство. Для произвольного $u \in S^{d-1}$ с учетом (3.1.1) и (3.1.3) имеем

$$\delta(C_1, C_2) = \max\{|g(u, C_1) - g(u, C_2)| : u \in S^{d-1}\} =$$

$$= \max\left\{\left|\frac{1}{g(u, C_2)} - \frac{1}{g(u, C_1)}\right| g(u, C_1) g(u, C_2) : u \in S^{d-1}\right\} \geq$$

$$\geq r_0(C_1) r_0(C_2) \max\left\{\left\|\frac{u}{g(u, C_2)} - \frac{u}{g(u, C_1)}\right\| : u \in S^{d-1}\right\} =$$

$$= r_0(C_1) r_0(C_2) \max\{\|t(u, C_2^*) - t(u, C_1^*)\| : u \in S^{d-1}\} \geq$$

$$\geq r_0(C_1) r_0(C_2) \max\left\{\begin{matrix} \max\{\rho(p, C_1^*) : p \in \partial C_2^*\} \\ \max\{\rho(p, C_2^*) : p \in \partial C_1^*\} \end{matrix}\right\} =$$

$$= r_0(C_1) r_0(C_2) \delta(C_1^*, C_2^*).$$

Лемма 3.2.1 доказана.

Лемма 3.2.2. *Пусть* $C \in \mathscr{C}_0$, $u \in S^{d-1}$, $p \notin \partial C$ *такая, что* $g(u, p) - g(u, C) > 0$. *Тогда*

$$\rho(\pi(l(u, C)), \pi(p)) \geq \frac{g(u, p) - g(u, C)}{\|p\| R_0(C)}.$$

Доказательство. По (3.1.1) имеем $\pi(l(u, C)) = u/g(u, C)$, $\pi(p) = \{x \in \mathbb{R}^d: \langle p/\|p\|, x\rangle = 1/\|p\|\}$. Поэтому

$$\rho(\pi(l(u, C)), \pi(p)) = \left\langle \frac{p}{\|p\|}, \frac{u}{g(u, C)} \right\rangle - \frac{1}{\|p\|} =$$

$$= \frac{\langle p, u\rangle - g(u, C)}{\|p\| g(u, C)} \geq \frac{g(u, p) - g(u, C)}{\|p\| R_0(C)}.$$

Лемма 3.2.2 доказана.

Лемма 3.2.3. *Пусть* $C_1, C_2 \in \mathscr{C}_0$, $C_1 \subset C_2$. *Тогда для любого* $p \in \partial C_2$ *справедливо*

$$g\left(\frac{p}{\|p\|}, C_1^*\right) - g\left(\frac{p}{\|p\|}, C_2^*\right) \geq \frac{\rho(p, C_1)}{R_0(C_1) R_0(C_2)}.$$

Доказательство. Пусть p' – проекция p на C_1 и $u := (p-p')/\|p-p'\|$.

Тогда $\rho(p, C_1) = g(u, p) - g(u, C_1)$. По лемме 3.2.2,

$$\rho(\pi(l(u,C_1)),\pi(p)) \geq \frac{g(u,p)-g(u,C_1)}{\|p\| R_0(C_1)} \geq \frac{\rho(p,C_1)}{R_0(C_2)R_0(C_1)}.$$

Но по (3.1.1) $\pi(l(u, C_1)) \in \partial C_1^*$, а $\pi(p)=l(p/\|p\|, C_2^*)$. Поэтому

$$\rho(\pi(l(u,C_1)),\pi(p)) = g\left(\frac{p}{\|p\|},\pi(l(u,C_1))\right) - g\left(\frac{p}{\|p\|},C_2^*\right) \leq$$

$$\leq g\left(\frac{p}{\|p\|},C_1^*\right) - g\left(\frac{p}{\|p\|},C_2^*\right).$$

Лемма 3.2.3 доказана.

Лемма 3.2.4. *Пусть* $C_1,C_2 \in \mathscr{C}_0$, $C_1 \subset C_2$. *Тогда для любого* $u \in S^{d-1}$ *справедливо*

$$\rho(\pi(l(u,C_1)),C_2^*) \geq \frac{g(u,C_2)-g(u,C_1)}{R_0(C_1)R_0(C_2)}.$$

Доказательство. Пусть $p \in T(u, C_2)$. Так как по (3.1.1) $\pi(l(u, C_1)) \in \partial C_1^*$ и $\pi(p)$ – гиперплоскость, опорная к C_2^*, то

$$\rho(\pi(l(u, C_1)), C_2^*) \geq \rho(\pi(l(u, C_1)), \pi(p)).$$

Далее утверждение леммы вытекает из леммы 3.2.2.

Лемма 3.2.4 доказана.

Установим, прежде всего, факт двойственности для H-последовательностей восполнения и отсечения.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть (асимптотическая)* $H(\gamma, C)$-*последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_0$, $P^n \in \mathscr{P}_0^i(C)$, $n=0,1,\ldots$. *Тогда* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть (асимптотическая)* $H(\gamma_a, C^*)$-*последовательность отсечения, где*

$$\gamma_a := \frac{r_0(P^0)^2}{R_0(C)^2}\gamma.$$

Кроме того, $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть асимптотическая* $H(\gamma^*(\gamma, C), C^*)$-*последовательность отсечения, где*

$$\gamma^*(\gamma,C) := \frac{\gamma}{\omega_0(C)^2}.$$

Доказательство. Пусть p_n – вершина, присоединяемая к P_n на (n+1)-й итерации схемы восполнения. Достаточно показать, что

$$g(u_n, (P^n)^*) - g(u_n, C^*) \geq \gamma_a\, \delta((P^n)^*, C^*)$$

для $u_n := p_n/\|p_n\|$. По лемме 3.2.3 и свойству H-последовательностей

$$g(u_n,(P^n)^*) - g(u_n,C^*) \geq \frac{\rho(p_n,C)}{R_0(P^n)R_0(C)} \geq \frac{\gamma\delta(P^n,C)}{R_0(P^n)R_0(C)}.$$

С другой стороны, по лемме 3.2.1 имеем

$$\delta(C^*,(P^n)^*) \leq \frac{\delta(P^n,C)}{r_0(P^n)r_0(C)},$$

откуда

$$g(u_n,(P^n)^*) - g(u_n,C^*) \geq \frac{r_0(P^n)r_0(C)}{R_0(P^n)R_0(C)}\gamma\delta((P^n)^*,C^*) \geq$$

$$\geq \frac{r_0(P^n)^2}{R_0(C)^2}\gamma\delta((P^n)^*,C^*).$$

Осталось заметить, что $r_0(P^n) \geq r_0(P^0)$. Первое утверждение теоремы доказано.

В силу сходимости H-последовательностей восполнения (теорема 1.2.2) можно выбрать N так, чтобы $r_0(P^n) \geq (1-\varepsilon)^{1/2} r_0(C)$, $n \geq N$. Тогда из первого утверждения теоремы следует второе.

Теорема 3.2.1 полностью доказана.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *– (асимптотическая)* $H(\gamma, C)$*-последовательность отсечения для* $C \in \mathscr{C}_0$, $P^n \in \mathscr{P}_0^c(C)$, n=0,1,... . *Тогда* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть (асимптотическая)* $H(\gamma_c, C^*)$*-последовательность восполнения, где*

$$\gamma_c := \frac{r_0(C)^2}{R_0(P^0)^2}\gamma .$$

Кроме того, $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H(\gamma^*(\gamma, C), C^*)$*-последовательность восполнения, где константа* $\gamma^*(\gamma, C)$ *определена в утверждении теоремы 3.2.1.*

Доказательство. Пусть u_n – направление, по которому происходит уточнение P^n на (n+1)-й итерации схемы отсечения. Надо показать, что

$$\rho(p_n, (P^n)^*) \geq \gamma_c\, \delta((P^n)^*, C^*),$$
где $p_n := \pi(l(u_n, C)) = u_n/g(u_n, C) \in \partial C^*$.

Пусть $u'_n \in S^{d-1}$ такое, что $g(u'_n, P^n) - g(u'_n, P^{n+1}) = \delta(P^{n+1}, P^n)$ и $p'_n := \pi(l(u'_n, P^{n+1}))$. Тогда по (3.1.1) $p'_n = u'_n/g(u'_n, P^{n+1}) \in \partial(P^{n+1})^*$. По лемме 3.2.4 и свойству H-последовательностей отсечения

$$\rho(p'_n, (P^n)^*) \geq \frac{g(u'_n, P^n) - g(u'_n, P^{n+1})}{R_0(P^n) R_0(P^{n+1})} =$$

$$= \frac{\delta(P^n, P^{n+1})}{R_0(P^n) R_0(P^{n+1})} \geq \frac{\gamma \delta(P^n, C)}{R_0(P^n)^2}.$$

Но $(P^{n+1})^* = \mathrm{conv}\,\{p_n, (P^n)^*\}$ и $p'_n \in (P^{n+1})^*$, поэтому

$$\rho(p_n, (P^n)^*) \geq \rho(p'_n, (P^n)^*).$$

С другой стороны, по лемме 3.2.1 имеем

$$\delta(C^*, (P^n)^*) \leq \frac{\delta(P^n, C)}{r_0(P^n) r_0(C)} \leq \frac{\delta(P^n, C)}{r_0(C)^2},$$

откуда, как и при доказательстве теоремы 3.2.1, получаем первое утверждение теоремы.

В силу сходимости H-последовательностей отсечения (теорема 1.2.2), можно выбрать N так, чтобы $R_0(P^n) \leq R_0(C)/(1-\varepsilon)^{1/2}$, $n \geq N$. Тогда из первого утверждения теоремы следует второе.

Теорема 3.2.2 полностью доказана.

Заметим, что по теоремам 3.2.1 и 3.1.2 полярная последовательность для $H(\gamma, C)$-последовательностей восполнения (отсечения) является H-последовательностью отсечения (восполнения) для полярного тела, но теоремы 3.2.1 и 3.2.2 дают более слабую оценку на ее константу. Это не дает говорить о двойственности конкретных H-последовательностей отсечения и восполнения, но позволяет заключить о двойственности классов АМПА, порождающих их.

Следующие теоремы устанавливают, что для классов АМПА, порождающих $H_1(\gamma, C)$-последовательности восполнения и отсечения, справедливы такие же отношения двойственности, как и для классов АМПА, порождающих $H(\gamma, C)$-последовательности.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *– (асимптотическая)* $H_1(\gamma, C)$*-последовательность восполнения для* $C \in \mathscr{C}_0$, $P^n \in \mathscr{P}_0^i(C)$, $n=0,1,\ldots$. *То-*

гда $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть (асимптотическая)* $H_1(\gamma_a, C^*)$-*последовательность отсечения, где константа* γ_a *определена в утверждении теоремы 3.2.1. Кроме того,* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть асимптотическая* $H_1(\gamma^*(\gamma, C), C^*)$-*последовательность отсечения, где константа* $\gamma^*(\gamma, C)$ *определена в утверждении теоремы 3.2.1.*

Доказательство. Пусть p_n – вершина, присоединяемая к P^n на $(n+1)$-й итерации схемы восполнения. По определению H_1-последовательности восполнения для некоторого $v_n \in S(p_n, C)$, справедливо

$$g(v_n, C) - g(v_n, P^n) \geq \gamma\delta(P^n, C).$$

Пусть $p := \pi(l(v_n, P^n))$ и $p_n^* := \pi(l(v_n, C))$. По (3.1.1) $p = v_n/g(v_n, P^n) \in \partial(P^n)^*$, $p_n^* = v_n/g(v_n, C) \in \partial C^*$, откуда $p = t(p_n^*, (P^n)^*)$. Пусть $u_n := p_n/\|p_n\|$, тогда по (3.1.1) $\pi(p_n) = l(u_n, C^*)$. Так как $v_n \in S(p_n, C)$, то $p_n \in l(v_n, C)$, поэтому

$$p_n^* = \pi(l(v_n, C)) \in \pi(p_n) = l(u_n, C^*).$$

Но $p_n^* \in \partial C^*$, поэтому $p_n^* \in T(u_n, C^*)$.

Далее, по лемме 3.2.2

$$\rho(p, \pi(p_n)) = \rho(\pi(l(v_n, P^n)), \pi(p_n)) \geq$$

$$\geq \frac{g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n)}{\|p_n\| R_0(P^n)} \geq \frac{g(v_n, C) - g(v_n, P^n)}{R_0(C) R_0(P^n)},$$

откуда по свойству H_1-последовательности восполнения и лемме 3.2.1 получаем

$$\rho(p, \pi(p_n)) \geq \frac{r_0(C) r_0(P^n)}{R_0(C) R_0(P^n)} \gamma\delta((P^n)^*, C^*) \geq \frac{r_0(P^n)^2}{R_0(C)^2} \gamma\delta((P^n)^*, C^*).$$

Но $\pi(p_n) = l(u_n, C^*)$, поэтому $\rho(p, \pi(p_n)) = g(u_n, p) - g(u_n, C^*)$, откуда

$$g(u_n, p) - g(u_n, C^*) \geq \rho(p, \pi(p_n)).$$

Осталось учесть, что $r_0(P^n) \geq r_0(P^0)$.

Итак, при любом n мы получили, что для $p_n^* = \pi(l(v_n, C)) \in T(u_n, C^*)$, где $u_n = p_n/\|p_n\| \in S^{d-1}$, справедливо

$$g(u_n, t(p_n^*, (P^n)^*)) - g(u_n, C^*) \geq \gamma_a \delta((P^n)^*, C^*).$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы следует, как и в доказательстве теоремы 3.2.1, из сходимости H_1-последовательностей восполнения.

Теорема 3.2.3 полностью доказана.

Теорема 3.2.4. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *– (асимптотическая)* $H_1(\gamma, C)$-*последовательность отсечения для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^n\in\mathscr{P}_0^c(C)$, $n=0,1,...$. *Тогда* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть (асимптотическая)* $H_1(\gamma_c, C^*)$-*последовательность восполнения, где константа* γ_c *определена в утверждении теоремы 3.2.2. Кроме того,* $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H_1(\gamma^*(\gamma, C), C^*)$-*последовательность восполнения, где константа* $\gamma^*(\gamma, C)$ *определена в утверждении теоремы 3.2.1.*

Доказательство. Пусть u_n – направление, по которому происходит уточнение P^n на $(n+1)$-й итерации схемы отсечения. По определению H_1-последовательности для некоторого $p_n\in T(u_n, C)$, справедливо

$$g(u_n, t(p_n, P^n)) - g(u_n, C) \geq \gamma\delta(P^n, C).$$

Пусть $p := t(p_n, P^n)$ и $p_n^* = \pi(l(u_n, C))$. По (3.1.1) $p_n^* = u_n/g(u_n, C) \in \partial C^*$. Пусть $v_n := p_n/\|p_n\| = p/\|p\|$, тогда по (3.1.1) $\pi(p_n) = l(v_n, C^*)$ и $\pi(p) = l(v_n, (P^n)^*)$. Так как $p_n\in T(u_n, C)$, то $p_n\in l(u_n, C)$, поэтому

$$p_n^* = \pi(l(u_n, C))\in\pi(p_n) = l(v_n, C^*).$$

Но $p_n^*\in\partial C^*$, поэтому $v_n\in S(p_n^*, C^*)$.

Далее, по лемме 3.2.2

$$\rho(p_n^*,\pi(p)) = \rho(\pi(l(u_n,C)),\pi(p)) \geq$$

$$\geq \frac{g(u_n,p)-g(u_n,C)}{\|p\|R_0(C)} \geq \frac{g(u_n,t(p_n,P^n))-g(u_n,C)}{R_0(P^n)R_0(C)},$$

откуда по свойству H_1-последовательности отсечения и лемме 3.2.1 получаем

$$\rho(p_n^*,\pi(p)) \geq \frac{r_0(C)r_0(P^n)}{R_0(C)R_0(P^n)}\gamma\delta((P^n)^*,C^*) \geq \frac{r_0(C)^2}{R_0(P^n)^2}\gamma\delta((P^n)^*,C^*).$$

Но $\pi(p) = l(v_n, (P^n)^*)$, поэтому $\rho(p_n^*, \pi(p)) = g(v_n, p_n^*) - g(v_n, (P^n)^*)$, откуда, так как $p_n^*\in\partial C^*$, то $g(v_n, C^*) - g(v_n, (P^n)^*) \geq \rho(p_n^*, \pi(p_n))$. Осталось учесть, что $R_0(P^n)\leq R_0(P^0)$.

Итак, при любом n мы получили, что существует опорная гиперплоскость $\pi(p_n) = l(v_n, C^*) \in S(p_n^*, C^*)$, где $p_n^* = \pi(l(u_n, C)) \in \partial C^*$, такая, что $g(v_n, C^*) - g(u_n, (P^n)^*) \geq \gamma_c\delta((P^n)^*, C^*)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы следует, как и в доказательстве теоремы 3.2.2, из сходимости H_1-последовательностей отсечения.

Теорема 3.2.4 полностью доказана.

Итак, в настоящем параграфе установлен факт двойственности классов АМПА, порождающих H- и H_1-последовательности восполнения и отсечения, состоящий в том, что последовательность из многогранников, сополярных к многогранникам H- (H_1-) последовательности восполнения, оказывается H- (H_1-) последовательностью отсечения для полярного тела и наоборот.

Теоремы 3.2.1-3.2.4 позволяют распространять результаты исследования (см. главу 2) скорости сходимости и свойства оптимальности конкретных АМПА, генерирующих H- (H_1-) последовательности восполнения (отсечения), на скорость сходимости и свойства оптимальности двойственных к ним методов, порождающих H- (H_1-) последовательности отсечения (восполнения). В качестве примера, иллюстрирующего достоинства и недостатки такого подхода к исследованию свойств АМПА, исследуем свойства H_1-последовательностей отсечения и методов, генерирующих их, по свойствам H_1-последовательностей восполнения.

Следствие 3.2.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *– (асимптотическая)* $H_1(\gamma, C)$-*последовательность отсечения для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^n\in\mathscr{P}_0^c(C)$, $n=0,1,...$. *Тогда для любого* ε, $0<\varepsilon<1$, *существует N такое, что при n≥N справедливо*

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\, \omega_0(C)^3\, \lambda'_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ *есть n или* $m^f(P^n)$ *и*

$$\lambda'_9(\gamma, C) := \frac{16R_0(C)}{\gamma}\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Доказательство. По теореме 3.2.4 из того, что $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть (асимптотическая) $H_1(\gamma, C)$-последовательность отсечения, следует, что для любого ε_1, $0<\varepsilon_1<1$, существует N_1 такое, что $\{(P^n)^*\}_{n=N,N+1,...}$ есть $H((1-\varepsilon_1)\gamma^*(\gamma, C), C^*)$-последовательность восполнения, где константа $\gamma^*(\gamma, C)$ определена в формулировке теоремы 3.2.1 и равна $\gamma/\omega_0(C)^2$. Согласно лемме 3.2.1,

$$\delta(P^n, C) \le \frac{\delta((P^n)^*, C^*)}{r_0((P^n)^*)r_0(C^*)}.$$

Так как $r_0(C^*) = 1/R_0(C)$, то из этого следует, в силу сходимости

$\{(P^n)^*\}$, что для любого ε_2, $0<\varepsilon_2<1$, существует N_2 такое, что при $n \geq N_2$ справедливо

$$\delta(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_2) R_0(C)^2 \delta((P^n)^*, C^*).$$

Из утверждения теоремы 2.3.1 для последовательностей восполнения вытекает, что для любого ε_3, $0<\varepsilon_3<1$, существует N_3 такое, что при $n \geq N_3$ справедливо

$$\delta((P^n)^*, C^*) \leq (1+\varepsilon_3) \lambda_9((1-\varepsilon_1)\gamma^*(\gamma, C), C^*) k^*(n)^{-\frac{2}{d-1}},$$

где $k^*(n)$ есть n или $m^t((P^n)^*)$, и

$$\lambda_9(\gamma, C) := \frac{16R(C)}{\gamma} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Учтем, что $R(C^*) \leq R_0(C^*) = 1/r_0(C)$, $\omega_0(C^*) = \omega_0(C)$ и что $m^f(P^n) = m^t((P^n)^*)$. Получим для $n \geq N := \max \{N_1, N_2, N_3\}$

$$\delta(P^n, C) \leq (1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_2) R_0(C)^2 \lambda_9((1-\varepsilon_1)\gamma^*(\gamma, C), C^*) k(n)^{-\frac{2}{d-1}} \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_2) R_0(C)^2 \frac{16R(C^*)\omega_0(C^*)^2}{(1-\varepsilon_1)\gamma} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}} k(n)^{-\frac{2}{d-1}} \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon_3) \frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} \frac{16R_0(C)^2 \omega_0(C)^2}{r_0(C)\gamma} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}} k(n)^{-\frac{2}{d-1}}.$$

Выбирая ε_1, ε_2 и ε_3 так, чтобы $(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_2)/(1-\varepsilon_1) \leq 1+\varepsilon$, получаем утверждение следствия.

Следствие 3.2.1 доказано.

Заметим, что, согласно теореме 2.3.1, скорость сходимости H_1-последовательностей отсечения определяется как

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)}.$$

Константы $\lambda_9(\gamma, C)$ и $\lambda'_9(\gamma, C)$ при соответствующем выборе начала координат не различаются, однако в правой части следствия 3.2.1 содержится дополнительный множитель $\omega_0(C)^3$, значительно ухудшающий полученную оценку. Этот множитель является следствием получения оценки через переход к двойственной последовательности, а не «напрямую», как это было сделано в доказательстве теоремы 2.3.1. Тем не менее порядок сходимости ($2/(d$-1)) получен тот же, что позволяет сделать все те же (как и в главе 2) выводы об оптимальности и эффективности АМПА, порождающих H_1-последовательности отсечения.

Мы продемонстрировали методику исследования хаусдорфовых АМПА через переход к двойственным последовательностям. Тот же подход может быть использован и при аппроксимации, например, гладких тел, т.к., для $C \in \mathscr{C}_+^2$, справедливо $C^* \in \mathscr{C}_+^2$ [89]. Эта методика позволяет легко получать оптимальные по порядку оценки скорости сходимости, однако константы, входящие в получаемые оценки, оказываются сильно зависящими от асферичности аппроксимируемого тела.

3.3. Методы конструирования оптимальных АМПА на основе теории двойственности

Рассмотрим сначала проблему перехода от методов, основанных на описании аппроксимируемого тела через опорную функцию, к методам, основанным на описании тела через его дистанционную функцию. Затем будет кратко рассмотрен обратный переход. В заключение параграфа будет рассмотрена проблема использования двойственных методов для решения прямых задач и смешанная задача построения многогранников с двойственным (прямым) описанием при аппроксимации тел, заданных прямым (двойственным) способом.

3.3.1. Точные двойственные аналоги

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ – последовательность, порождаемая для некоторого тела $C \in \mathscr{C}$ некоторым МПА. Под точным двойственным аналогом этого МПА будем понимать метод, позволяющий строить для полярного тела C^* последовательность $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,\ldots}$. Естественно, что если прямой метод был методом отсечения, то двойственный метод будет методом восполнения и наоборот. Проиллюстрируем методику построения двойственных аналогов прежде всего на Базовых методах отсечения и восполнения.

3.3.1.1. Двойственный аналог метода БО

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ – последовательность отсечения, построенная для $C\in\mathscr{C}_0$ методом БО (см. п. 1.2.2). Тогда $P^n\in\mathscr{P}_0$, n=0,1,... . Согласно определению метода $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$, где

$$u_n := \arg\max\ \{g(u, P^n) - g(u, C): u\in S^{d-1}\}.$$

Перейдем к сопряженным величинам. По (3.1.3) получим выбор:

$$u_n = \arg\max\ \{g^*(u, C^*) - g^*(u, (P^n)^*): u\in S^{d-1}\}.$$

Из (3.1.9) тогда вытекает

$$(P^{n+1})^* = \operatorname{conv}\ \{p_n\ , (P^n)^*\},\ \ p_n := u_n/g^*(u_n, C^*)\in\partial C^*.$$

Отвлечемся теперь от того факта, что аппроксимируется поляра некоторого тела, и сформулируем точный двойственный метода БО.

Двойственный Аналог Базового Метода Отсечения (БО*)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0^{\,i}(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0^{\,i}(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $u_n := \arg\max\ \{g^*(u, C) - g^*(u, P^n): u\in S^{d-1}\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \operatorname{conv}\ \{p_n, P^n\}$, где $p_n := u_n/g^*(u_n, C)$.

Заметим, что рассматриваемый метод имеет другую формулировку, которая будет нам полезна в будущем. Из определения точки пересечения $t(u, C)$ границы тела C с лучом в направлении u получаем, что выбор направления уточнения аппроксимации в методе БО может быть записан как

$$u_n = \arg\max\{g(u,P^n) - g(u,C) : u\in S^{d-1}\} =$$

$$= \arg\max\{g^*(u,(P^n)^*) - g^*(u,C^*) : u\in S^{d-1}\} =$$

$$= \arg\max\{\frac{\|u\|}{\|t(u,(P^n)^*)\|} - \frac{\|u\|}{\|t(u,C^*)\|} : u\in S^{d-1}\} =$$

$$= \arg\max\{\frac{\|t(u,C^*) - t(u,(P^n)^*)\|}{\|t(u,C^*)\|\|t(u,(P^n)^*)\|} : u\in S^{d-1}\}.$$

Но по определению $t(u, C) = t(t(u, C), C)$. Кроме того, $p = t(p, C)$ и $\|t(p, C) - t(p,\ P^n)\| = \rho(p,\ t(p,\ P^n)) = \rho(p,\ p/g^*(p,\ P^n))$ при $p\in\partial C$. Поэтому метод БО* может быть определен следующим образом.

Двойственный Аналог$_1$ Базового Метода Отсечения (БО$_1$*)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0^{\,i}(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0^{\,i}(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max\ \{\rho(p, p/g^*(p,\ P^n))\phi_1(p): p\in\partial C\}$, где

$$\phi_1(p) := g^*(p,\ P^n) / p^2.$$

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \text{conv}\ \{p_n, P^n\}$.

Таким образом, в этом методе на границе аппроксимируемого тела находится точка p_n, на которой (вдоль луча, исходящего из начала координат) достигается максимальное отклонение (с некоторыми весовыми коэффициентами $\phi_1(p)$) между телом и внутренним многогранником. Эта точка и присоединяется к описанию внутреннего аппроксимирующего многогранника.

Метод БО* (БО$_1$*) обозначим через $M_{БО*}$.

Из теорем 1.2.1 и 3.2.2 немедленно получаем свойство метода БО*.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *– последовательность, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}_0$, $P^0 \in \mathscr{P}_0^i(C)$, *методом БО*. Тогда* $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть* $H(\gamma_{БО*}, C)$*-последовательность восполнения, где*

$$\gamma_{БО*} := \frac{r_0(P^0)^2}{R_0(C)^2}.$$

Кроме того, $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ *есть асимптотическая* $H(1/\omega_0^2(C), C)$*-последовательность восполнения.*

Доказательство. По построению, если $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ – последовательность восполнения, построенная для $C \in \mathscr{C}_0$, методом БО*, то $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,\ldots}$ – последовательность отсечения, построенная для $C^* \in \mathscr{C}_0$, методом БО. Но метод БО, по теореме 1.2.1, для любого $C \in \mathscr{C}$ порождает $H(1, C)$-последовательность отсечения. Поэтому из теоремы 3.2.2, с учетом того, что $r_0(C^*) = 1/R_0(C)$ и $R_0((P^0)^*) = 1/r_0(P^0)$, получаем первое утверждение теоремы. Осталось заметить, что по (3.2.1) имеем $\omega_0(C^*) = \omega_0(C)$, откуда, применяя вторую часть теоремы 3.2.2, получаем второе утверждение теоремы.

Теорема 3.3.1 доказана.

Следствие 3.3.1. *Для любого* $C \in \mathscr{C}_0$ *выполняется*

$$M_{БО*} \in {}^{a}\mathfrak{H}^{i}(1/\omega_0^2(C), C).$$

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 3.3.1.

Из теоремы 3.3.1 и следствия 3.3.1 вытекают сразу оценки на скорость сходимости метода БО*, аналогичные теореме 2.6.2 и 2.6.3, его оптимальность по числу вершин в классе $\mathscr{C}_+^2$ (аналогично теореме 2.6.6, 2.6.7) и оценки его асимптотической эффективности (аналогично теореме 2.6.8). Мы не будем подробно останавливаться на этих выводах.

В заключение отметим, что, если метод БО являет собой важный пример H-метода отсечения, не являющегося в общем случае H_1-методом, то метод БО* являет собой пример H-метода восполнения, не являющегося в общем случае H_1-методом.

3.3.1.2. Двойственный аналог метода БВ

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ – последовательность отсечения, построенная для $C\in\mathscr{C}_0$ методом БВ (см. п. 1.2.2) и пусть $P^0\in\mathscr{P}_0$. Тогда $P^n\in\mathscr{P}_0$, n=0,1,... . Согласно определению метода P^{n+1} := conv $\{p_n, P^n\}$, где $p_n\in\partial C$: $\rho(p_n, P^n) = \delta^H(P^n,C)$. Согласно другой формулировке этого метода (БВ$_1$), можно записать

$$p_n\in T(v_n, C),$$

$$v_n := \arg\max \{g(u, C) - g(u, P^n): u\in S^{d-1}\}.$$

Перейдем к сопряженным величинам. По (3.1.3) получим выбор:

$$u_n\in S(v_n/g^*(u, C^*),\ C^*),$$

$$v_n = \arg\max \{g^*(u, C^*) - g^*(u, (P^n)^*): u\in S^{d-1}\}.$$

Иначе, учитывая, что $t(u, C) = t(t(u, C), C)$,

$$u_n\in S(q_n,\ C^*),$$

$$q_n = \arg\max \{g^*(t(p, C^*), C^*) - g^*(t(p, (P^n)^*), (P^n)^*): p\in\partial C^*\}.$$

При этом по (3.1.8) имеем

$$(P^{n+1})^* = (P^n)^* \cap L(u_n, C^*).$$

Отвлечемся теперь от того факта, что аппроксимируется поляра некоторого тела, и сформулируем точный двойственный метода БВ. Учтем, что $p = t(p, C)$ при $p\in\partial C$.

Двойственный Аналог Базового Метода Восполнения (БВ*)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max \{g^*(p, C) - g^*(t(p, P^n), P^n): p\in\partial C\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$, $u_n \in S(p_n, C)$.

Так как $\|t(p, P^n) - t(p, C)\| = \rho(t(p, P^n), p) = \rho(p/g^*(p, P^n), p)$ при $p \in \partial C$, то, аналогично методу БО*, метод БВ* может быть определен следующим образом.

Двойственный Аналог$_1$ Базового Метода Восполнения (БВ$_1$*)

Пусть для $C \in \mathscr{C}_0$ и $P^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max \{\rho(p/g^*(p, P^n), p)\phi_1(p): p \in \partial C\}$, где

$$\phi_1(p) := g^*(p, P^n) / p^2.$$

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$, $u_n \in S(p_n, C)$.

Таким образом, в этом методе на границе аппроксимируемого тела находится точка p_n на которой (вдоль луча, исходящего из начала координат) достигается максимальное отклонение (с некоторыми весовыми коэффициентами $\phi_1(p)$) между внешним многогранником и телом. В этой точке находится некоторая опорная гиперплоскость, которая и используется для уточнения внешнего аппроксимирующего многогранника.

Метод БВ* (БВ$_1$*) обозначим через $M_{БВ*}$.

Из теорем 1.2.1 и 3.2.1 немедленно получаем свойство метода БВ*.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *– последовательность, порождаемая для* $C \in \mathscr{C}_0$, $P^0 \in \mathscr{P}_0{}^c(C)$ *методом БВ*. Тогда* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H_1(\gamma_{БВ*}, C)$*-последовательность отсечения, где*

$$\gamma_{БВ*} := \frac{r_0(C)^2}{R_0(P^0)^2}.$$

Кроме того, $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H_1(1/\omega_0{}^2(C), C)$*-последовательность восполнения.*

Доказательство. По построению, если $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ – последовательность отсечения, построенная для $C \in \mathscr{C}_0$ методом БВ*, то $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ – последовательность восполнения, построенная для $C^* \in \mathscr{C}_0$ методом БВ. Но метод БВ, по теореме 1.2.1, для любого $C \in \mathscr{C}$

порождает $H_1(1, C)$-последовательность восполнения. Поэтому из теоремы 3.2.1, с учетом того, что $R_0(C^*) = 1/r_0(C)$ и $r_0((P^0)^*) = 1/R_0(P^0)$, получаем первое утверждение теоремы. Осталось заметить, что по (3.2.1) имеем $\omega_0(C^*)= \omega_0(C)$, откуда, применяя вторую часть теоремы 3.2.1, получаем второе утверждение теоремы.

Теорема 3.3.2 доказана.

Следствие 3.3.2. *Для любого $C\in \mathscr{C}_0$ выполняется*

$$\mathrm{M}_{\text{БВ}^*}\in {}^{a}\mathfrak{H}^{c}{}_1(1/\omega_0{}^2(C), C).$$

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 3.3.1.

Из теоремы 3.3.2 и следствия 3.3.2 вытекают сразу оценки на скорость сходимости метода БВ*, аналогичные теореме 2.3.1, 2.2.2, следствия 2.3.1, его оптимальность по числу гиперграней в классе $\mathscr{C}_\#$(теорема 2.5.1), асимптотичская эффективность в классе $\mathscr{C}_+{}^2$ и оценки его асимптотической эффективности (теоремы 2.5.4, 2.5.6, 2.5.7). Мы не будем подробно останавливаться на этих выводах.

3.3.1.3. Двойственный аналог метода УО

Совершенно аналогично построению метода БВ* можно сформулировать два вида двойственного аналога для метода УО (подробности см. в [88]).

Двойственный Аналог Метода Уточнения Оценок (УО*)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max \{g^*(t(p, C), C) - g^*(p, P^n): p\in M^f(P^n)\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$, $u_n\in S(p_n, C)$.

Двойственный Аналог$_1$ Метода Уточнения Оценок (УО$_1$*)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max \{\rho(p, p/g^*(p, C))\phi_2(p): p\in M^t(P^n)\}$, где

$$\phi_2(p) := g^*(p, C) / p^2.$$

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$, $u_n\in S(p_n, C)$.

Таким образом, в этом методе среди вершин внешнего аппроксимирующего многогранника находится точка p_n на которой (вдоль луча, исходящего из начала координат) достигается максимальное отклонение (с некоторыми весовыми коэффициентами $\phi_2(p)$) между внешним многогранником и телом. В этой точке находится некоторая опорная гиперплоскость, которая и используется для уточнения внешнего аппроксимирующего многогранника.

Метод УО* (УО$_1$*) обозначим через $M_{УО*}$.

Из теорем 1.3.3 и 3.2.1 немедленно получаем свойство метода УО*.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *– последовательность, порождаемая для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0^{\,c}(C)$, *методом* $M_{УО*}$. *Тогда* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть* $H_1(\gamma_{УО*}, C)$*-последовательность отсечения, где*

$$\gamma_{УО*} := \frac{r_0(C)^3}{R_0(P^0)^3}.$$

Кроме того, $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H_1(1/\omega_0^3(C), C)$*-последовательность восполнения.*

Кроме того, если $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$, *то* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *есть асимптотическая* $H_1(1/\omega_0^2(C), C)$*-последовательность восполнения.*

Доказательство. По построению, если $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ – последовательность отсечения, построенная для $C\in\mathscr{C}_0$ методом УО*, то $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ – последовательность восполнения, построенная для $C^*\in\mathscr{C}_0$ методом УО. Но метод УО, по теореме 1.3.3, для любого $C\in\mathscr{C}$ порождает $H_1(r/R, C)$-последовательность восполнения, где $B_r(z)\subset P^0\subset C\subset B_R(z)$, $z\in\text{int } P^0$. Поэтому $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,...}$ – $H_1(r_0((P^0)^*)/R_0(C^*), C^*)$-последовательность восполнения. Но тогда из теоремы 3.2.1 следует, что $\{(P^n)^{**}\}_{n=0,1,...}$ – $H_1(r_0((P^0)^*)^3/R_0(C^*)^3, C^{**})$-последовательность отсечения. Учтем, что $R_0(C^*) = 1/r_0(C)$ и $r_0((P^0)^*) = 1/R_0(P^0)$. Получаем первое утверждение теоремы. Осталось заметить, что по (3.2.1) имеем $\omega_0(C^*) = \omega_0(C)$, откуда, применяя вторую часть теоремы 3.2.2 и теорему 1.3.4, получаем второе утверждение теоремы, а, применяя вторую часть теоремы 3.2.2 и теорему 1.3.5, получаем третье утверждение теоремы.

Теорема 3.3.3 доказана.

Следствие 3.3.3. *Для любого $C \in \mathscr{C}$ выполняется*

$$\mathrm{M}_{\text{УО}*} \in {}^{a}\mathfrak{H}^{c}{}_{1}(1/\omega_0{}^3(C), C).$$

Кроме того, если $C \in \mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_+{}^2$, то

$$\mathrm{M}_{\text{УО}*} \in {}^{a}\mathfrak{H}^{c}{}_{1}(1/\omega_0{}^2(C), C).$$

Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из теоремы 3.3.3.

Из теоремы 3.3.3 и следствия 3.3.3 вытекают сразу оценки на скорость сходимости метода УО*, аналогичные теореме 2.3.1, 2.2.2, следствия 2.3.1, его оптимальность по числу гиперграней в классе $\mathscr{C}_{\#}$(теорема 2.5.1), асимптотическая эффективность в классе $\mathscr{C}_+{}^2$ и оценки его асимптотической эффективности (теоремы 2.5.4, 2.5.6, 2.5.7). Мы не будем подробно останавливаться на этих выводах.

3.3.1.4. Двойственный аналог метода СМ

Совершенно аналогично построению метода БВ* можно сформулировать два вида двойственного аналога для метода СМ.

ДВОЙСТВЕННЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА СМ (СМ*)

Пусть для $C \in \mathscr{C}_0$ и $P^0 \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ построены $P^n \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$ и $Q^n \in \mathscr{P}_0\, c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти p_n := arg max $\{g^*(p,\ Q^n) - g^*(t(p,\ P^n),\ P^n)$: $p \in M^t(Q^n)\}$.

b). Найти $u_n \in S(p_n / g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить P^{n+1} := conv $\{p_n / g^*(p_n,\ C),\ P^n\}$ и Q^{n+1} := $Q^n \cap L(u_n, C)$.

ДВОЙСТВЕННЫЙ АНАЛОГ$_1$ МЕТОДА СМ (СМ$_1$*)

Пусть для $C \in \mathscr{C}_0$ и $P^0 \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}^c(C)$ построены $P^n \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$ и $Q^n \in \mathscr{P}_0{}^c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти p_n := arg max $\{\rho(p, p/g^*(p, P^n))\phi_1(p)$: $p \in M^t(Q^n)\}$, где

$$\phi_1(p) := g^*(p,\ P^n) / p^2.$$

b). Найти $u_n \in S(p_n / g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n / g^*(p_n, C), P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n \cap L(u_n, C)$.

Метод СМ* (СМ$_1$*) обозначим через $\mathrm{M}_{\mathrm{CM}*}$.

В приведенном методе СМ* сначала находится вершина внешнего многогранника, наиболее отстоящая (вдоль луча из начала координат) от внутреннего аппроксимирующего многогранника (с некоторыми весовыми коэффициентами $\phi_1(p)$), затем внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью в точке пересечения соответствующего луча с аппроксимируемым телом, а множество вершин внутреннего многогранника пополняется этой точкой.

Метод СМ*, как и метод СМ, использует двойное описание и не является Хаусдорфовым. Его скорость сходимости и эффективность может быть исследована либо методом изменения объема на итерациях, как это сделано в п. 2.6.4 для метода СМ, либо через переход к полярному множеству, оценку скорости сходимости метода СМ для полярного множества, а затем оценку точности аппроксимации прямого множества по точности аппроксимации его поляры (как и для других двойственных аналогов, рассмотренных выше).

Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

3.3.2. Двойственные методы

В двойственных аналогах различных методов, рассмотренных в предыдущем пункте, используется выбор направления уточнения аппроксимирующих многогранников с использование различных весовых коэффициентов ($\phi_1(p)$ для БО*, БВ* и СМ*; $\phi_2(p)$ для УО*). Так как двойственные аналоги к эффективным методам отражают эффективную адаптацию к полярным множеством, то выбор именно таких весовых коэффициентов, очевидно, может не быть оптимальным для скорости сходимости к исходным телам. Поэтому представляют интерес методы, сохраняющие структуру двойственных аналогов, но с другими весовыми коэффициентами при выборе направления уточнения аппроксимирующего многогранника. Класс такие методов мы будем называть двойственным к исходному методу. Проиллюстрируем такой подход на методах БВ, БО, УО и СМ.

Рассмотрим некоторые примеры двойственных методов к методу БВ.

Двойственный$_1$ к Базовому Методу Восполнения (Д$_1$БВ)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max \{\rho(p/g^*(p,\ P^n), p): p\in\partial C\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$, $u_n\in S(p_n,\ C)$.

В этом методе, в отличие от метода БВ*, весовые коэффициенты в выборе $p_n := \arg\max\ \{\rho(p, p/g^*(p,\ P^n))\phi(p): p\in\partial C\}$ положены тождественно равными единице: $\phi(p) =\ 1$.

Двойственный$_2$ к Базовому Методу Восполнения (Д$_2$БВ)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}^c(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти

$$p_n := \arg\max \{g(u(p), p/g^*(p,\ P^n)) - g(u(p), p): p\in\partial C,$$
$$\text{где } u(p)\in S(p, C)\}.$$

b). Положить $u_n := u(p_n)\in S(p_n, C)$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := P^n\cap L(u_n, C)$.

Как и в методе БВ*, здесь просматриваются все лучи, соединяющие начало координат с точками границы тела. Но, в отличие от метода БВ*, выбор определяется следующим образом. Для каждой точки p границы тела сначала находится некоторая опорная гиперплоскость к телу в точке пересечение луча, соединяющего начало координат с точкой тела. Среди них в качестве отсекающей выбирается опорная гиперплоскость, от которой соответствующая ей по лучу точка $p/g^*(p,\ P^n)$ границы аппроксимирующего многогранника лежит на наибольшем расстоянии.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0^c(C)$. *Тогда* $\mathrm{M}_{\text{Д1БВ}}$ *и* $\mathrm{M}_{\text{Д2БВ}}$ *порождают* $H_1(1/\omega_0(C), C)$*-последовательности отсечения.*

Доказательство. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\ldots}$ есть последовательность многогранников, порождаемая одним из рассматриваемых методов. Для p_n и u_n, определенных в формулировках методов Д$_1$БВ и Д$_2$БВ, по лемме 1.3.6 для $p'_n := p_n / g^*(p_n,\ P^n)$ справедливо

$$g(u_n, p'_n) - g(u_n, C) \geq \frac{1}{\omega_0(C)} \rho(p_n, t(p_n, C)) =$$

$$= \frac{1}{\omega_0(C)} \max\{\rho(p, t(p, C)) : p \in \partial C)\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\omega_0(C)} \max\{\rho(p, C) : p \in \partial C\} = \frac{\delta(P^n, C)}{\omega_0(C)}.$$

Таким образом, $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть $H(1/\omega_0(C), C)$-последовательность. Так как $p'_n = t(p_n, P^n)$ и $u_n \in S(p_n, C)$, то

$$g(u_n, t(p_n, P^n)) - g(u_n, C) \geq \gamma\delta(P^n, C)$$

при $\gamma = 1/\omega_0(C)$, что характеризует $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ как H_1-последовательность.

Теорема 3.3.4 доказана.

Следствие 3.3.4. Для любого $C \in \mathscr{C}_0$ $М_{Д1БВ}$, $М_{Д2БВ} \in \mathfrak{H}^c{}_1(1/\omega_0(C), C)$.

Заметим, что следствие 3.3.4 для методов $Д_1$БВ и $Д_2$БВ дает существенно более сильную оценку, чем следствие 3.3.1 для методов БВ*.

Теорема 3.3.5. *Пусть* $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ *– последовательность многогранников, порождаемая методом* $М_{Д2БВ}$ *для* $C \in \mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_+^2$, $P^0 \in \mathscr{P}_0^c(C)$. *Тогда* $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ *является асимптотической* $H_1(1, C)$-*последовательностью отсечения.*

Доказательство. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть рассматриваемая последовательность многогранников. Прежде всего докажем, что для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при $n \geq N$ для любых $p \in \partial C$, $u \in S(p, C)$, и $p' := t(p, P^n) = p/g^*(p, P^n)$, справедливо

$$\rho(p', C) \leq (1+\varepsilon)[g(u, p') - g(u, p)].$$

Обозначим $h := g(u, p') - g(u, p)$. В силу сходимости $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ величина h может быть сделана сколь угодно малой для всех $p \in \partial C$, и $u \in S(p, C)$. По лемме 1.3.7 имеем

$$\rho(p', C) \leq [(r + h)^2 + h^2 (\omega_0(C)^2 - 1)]^{1/2} - r \leq (1 + \varepsilon)\, h$$

при достаточно малом h.

Далее, пусть ε задано в условии теоремы и N такое, что при $n \geq N$

для любых $p\in\partial C$ и $u\in S(p, C)$, $p' := t(p, P^n) = p/g^*(p, P^n)$, справедливо

$$\rho(p', C) \le (1-\varepsilon)^{-1}[g(u, p') - g(u, p)].$$

Тогда

$$\delta(P^n, C) = \max \{\rho(t(p, P^n), C): p\in\partial C\} \le$$
$$\le (1-\varepsilon)^{-1} \max \{g(u(p), t(p, P^n)) - g(u(p), p): p\in\partial C, u(p)\in S(p, C)\},$$

откуда $(1-\varepsilon)\ \delta(P^n, C) \le g(u_n, p_n) - g(u_n, C)$, где p_n и u_n, определены в формулировке метода Д$_2$БВ.

Теорема 3.3.5 доказана.

Итак, метод отсечения Д$_2$БВ в гладком случае асимптотически порождает $H_1(1, C)$-последовательность отсечения. Таким образом, метод Д$_2$БВ обладает свойствами, аналогичными свойствам методов УО и УВО$_2$. Из теоремы 3.3.5 непосредственно вытекает

Следствие 3.3.5. $\mathrm{M}_{\text{Д2БВ}}\in {}^{a}\mathfrak{H}^{c}{}_{1}(1, \mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+{}^{2})$.

Рассмотрим некоторые примеры двойственных методов к методу БО.

ДВОЙСТВЕННЫЙ$_1$ К БАЗОВОМУ МЕТОДУ ОТСЕЧЕНИЯ (Д$_1$БО)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. Найти $p_n := \arg\max \{\rho(p, p/g^*(p, P^n)): p\in\partial C\}$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$.

В этом методе, в отличие от метода БО*, весовые коэффициенты в выборе $p_n := \arg\max \{\rho(p, p/g^*(p, P^n))\phi(p): p\in\partial C\}$ положены тождественно равными единице: $\phi(p) = 1$.

ДВОЙСТВЕННЫЙ$_2$ К БАЗОВОМУ МЕТОДУ ОТСЕЧЕНИЯ (Д$_2$БО)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. а). Найти

$$p_n := \arg\max \{g(u(p), p) - g(u(p), C): p\in\partial C,$$
$$\text{где } u(p)\in S(p/g^*(p, P^n), C)\}.$$

b). Положить $u_n := u(p_n)\in S(p_n /g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Положить $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$.

В этом методе, в отличие от метода БО*, выбор определяется следующим образом: как и в методе БО*, просматриваются все лучи, соединяющие начало координат с точками границы тела. Для каждой точки границы тела сначала находится некоторая опорная гиперплоскость к аппроксимирующему многограннику в точке пересечения с границей многогранника луча, соединяющего начало координат с точкой тела. Среди них в качестве отсекающей выбирается опорная гиперплоскость, от которой соответствующая ей точка тела лежит на наибольшем расстоянии.

Метод Д$_1$БО (Д$_2$БО) обозначим через $M_{Д1БО}$ ($M_{Д2БО}$).

Для методов Д$_1$БО и Д$_2$БО можно доказать свойства, аналогичные свойствам методов Д$_1$БВ и Д$_2$БВ. Мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

Примерами двойственных методов к методу УО являются методы УВО$_1$ и УВО$_2$, описанные в п. 1.3.3.

В методе УВО$_1$, в отличие от метода УО*, весовые коэффициенты в выборе $p_n := \arg\max\ \{\rho(p, p/g^*(p,\ C))\phi(p){:}\ p\in M^t(P^n)\}$ положены тождественно равными единице: $\phi(p) =\ 1$.

В методе УВО$_2$, как и в методе УО*, просматриваются все лучи, соединяющие начало координат с вершинами внешнего многогранника. Но, в отличие от метода УО*, выбор определяется следующим образом: для каждой вершины внешнего многогранника сначала находится некоторая опорная гиперплоскость в точке пересечения с телом луча, соединяющего начало координат с данной вершиной. Среди них в качестве отсекающей выбирается опорная гиперплоскость, от которой соответствующая ей по лучу вершина лежит на наибольшем расстоянии.

Методы УВО$_1$ и УВО$_2$ обладают также более сильными оценками, чем метод УО* (см. теоремы 1.3.6, 1.3.7 и следствия 1.3.8, 1.3.9).

Рассмотрим примеры двойственных методов к методу СМ.

Двойственный$_1$ к Методу СМ (Д$_1$СМ)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0{}^e(C)$ построены $P^n\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$ и $Q^n\in\mathscr{P}_0{}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $p_n := \arg\max\ \{\rho(p,\ p/g^*(p, P^n)){:}\ p\in M^t(Q^n)\}$.

b). Найти $u_n\in S(p_n\,/g^*(p_n,\ C), C)$.

Шаг 2. Построить P^{n+1} := conv $\{p_n / g^*(p_n, C), P^n\}$ и Q^{n+1} := $Q^n \cap L(u_n, C)$.

В методе Д$_1$СМ, в отличие от метода СМ*, весовые коэффициенты в выборе arg max $\{\rho(p, p/g^*(p, P^n))\phi(p): p \in M^t(Q^n)\}$ положены тождественно равными единице: $\phi(p) = 1$.

ДВОЙСТВЕННЫЙ$_2$ К МЕТОДУ СМ (Д$_2$СМ)

Пусть для $C \in \mathscr{C}_0$ и $P^0 \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}_0{}^e(C)$ построены $P^n \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$ и $Q^n \in \mathscr{P}_0{}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. a). Найти p_n := arg max $\{g(u(p), p) - g(u(p), P^n): p \in M^t(Q^n)$,
где $u(p) \in S(p/g^*(p, P^n), P^n)\}$.
b). Найти $u_n \in S(p_n / g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить P^{n+1} := conv $\{p_n / g^*(p_n, C), P^n\}$ и Q^{n+1} := $Q^n \cap L(u_n, C)$.

В методе Д$_2$СМ, как и в методе СМ*, просматриваются все лучи, соединяющие начало координат с вершинами внешнего многогранника. Но, в отличие от метода УО*, выбор определяется следующим образом: для каждой вершины внешнего многогранника сначала находится некоторая опорная гиперплоскость (как правило, единственная) в точке пересечения с внутренним многогранником луча, соединяющего начало координат с данной вершиной. Среди них выбирается вершина, от которой соответствующая ей опорная гиперплоскость лежит на наибольшем расстоянии. После этого внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью в точке пересечения соответствующего луча с аппроксимируемым телом, а множество вершин внутреннего многогранника пополняется этой точкой.

Метод Д$_1$СМ (Д$_2$СМ) обозначим через $M_{Д1СМ}$ ($M_{Д2СМ}$).

В настоящей работе мы не будем отдельно исследовать скорость сходимости методов Д$_1$СМ и Д$_2$СМ. Это исследование может быть проведено, например, через вычисление изменения объема аппроксимирующих многогранников (как это сделано в п. 2.6.4 для метода СМ).

3.3.3. Точные двойственные аналоги для двойственных методов

До сих пор в настоящей главе мы рассматривали проблему перехода от методов аппроксимации тел, заданных своей опорной функцией, к методам аппроксимации тел, заданных дистанционной функцией. Это определялось тем фактом, что в большинстве приложений аппроксимируемое тело имеет описание именно через опорную функцию, и наиболее известные методы (такие, как метод УО) были рассчитаны именно на такое описание.

Точные двойственные аналоги к двойственным аналогам для АМПА, рассмотренных выше в настоящей главе, естественно, совпадают с исходными методами.

Однако и для каждого метода из класса двойственного к некоторому АМПА отсечения или восполнения можно рассмотреть свой точный двойственный аналог. Этот метод, естественно, будет иметь сходную с исходным методом структуру, но с точностью до весовых коэффициентов, и будет примером использования теории двойственности для перехода от методов аппроксимации тел, заданных своей дистанционной функцией, к методам аппроксимации тел, заданных своей опорной функцией.

В качестве примера приведем точный двойственный аналог для метода УВО$_1$.

Двойственный Аналог Метода Уточнения Внешних Оценок (УВО$_1$*)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти u_n := arg max $\{(g(u, C) - g(u, P^n))\phi^*_1(u)$: $u\in M^f(P^n)\}$,

где

$$\phi^*_1(p) := g(u, C)g(u, P^n).$$

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание P^{n+1} := conv $\{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Двойственным же (в нашей терминологии) к методу УВО$_1$ будет класс методов следующего вида:

Двойственный к Методу Уточнения Внешних Оценок

Пусть для $C \in \mathscr{C}$ и $P^0 \in \mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n \in \mathscr{P}^i(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти $u_n := \arg\max \{(g(u, C) - g(u, P^n))\phi^*(u,C,P^n) : u \in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := \mathrm{conv}\ \{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Здесь $\phi^*(u,C,P^n)$ – некоторая заданная функция, определяющая конкретный двойственный метод. Заметим, что метод УО принадлежит к классу методов, двойственных к $УВО_1$, при $\phi^*(u,C,P^n) = 1$.

Заметим в заключение, что, если свойства и оценки на скорость сходимости для двойственного аналога некоторого хаусдорфова метода (например, $УВО_1$) получаются сразу из теорем 3.2.1-2.4, то каждый конкретный двойственный метод требует своего отдельного исследования.

3.3.4. Прямо-двойственные методы

При аппроксимации выпуклых компактных тел, заданных дистанционной функцией, могут быть использованы и методы восполнения. Впервые такая идея была предложена в [43]. Такой подход, использующий двойственные методы для решения прямой задачи, мы будем называть прямо-двойственным.

Приведем общее описание прямо-двойственных АМПА.

Прежде всего, выберем систему отсчета с центром во внутренней точке с возможно меньшим значением внешнего радиуса $R_0(C)$ тела C. Далее может быть использован некоторый метод восполнения (например, метод УО), основанный на вычислении опорной функции полярного множества C^* (в соответствии с (3.1.3), с подстановкой в качестве значений опорной функции $g(\cdot, C^*)$ значения дистанционной $g^*(\cdot, C)$). В результате аппроксимации получается последовательность внутренних многогранников $\{P^n\}$.

В качестве искомой аппроксимирующей последовательности выберем $\{(P^n)^*\}$, описания которых легко получить из описаний

$\{P^n\}$, используя соотношения (3.1.1). Проблема состоит в том, что необходимо оценить точность аппроксимации многогранниками $\{(P^n)^*\}$ исходного тела C.

Прежде всего, для грубой оценки достигнутой точности можно использовать точность аппроксимации многогранником P^n полярного множества C^* (см. лемму 3.2.1):

$$\delta^H((P^n)^*, C) \leq R_0((P^n)^*)\, R_0(C)\, \delta^H(P^n, C^*).$$

Для получения более точной оценки отклонения внешнего многогранника от аппроксимируемого исходного тела заметим, что поляры к построенным с помощью метода восполнения многогранникам будут описаны своим множеством вершин. Так как искомая точность равна максимуму отклонения вершин аппроксимирующего внешнего многогранника $(P^n)^*$ от аппроксимируемого тела C, то в качестве её верхней оценки можно взять максимальную из величин $\rho(p, p/g^*(p,C))$ для

$$p \in M^t((P^n)^*) = \{u/g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}.$$

Итак, адаптивные методы восполнения, основанные на задании аппроксимируемого тела через опорную функцию, могут быть использованы и для аппроксимации тел, заданных дистанционной функцией. В этом способе, однако, адаптация метода происходит к полярному телу. При этом порядок скорости сходимости останется тем же, а константа будет, скорее всего, существенно хуже.

Пример реализации прямо-двойственного метода на основе метода УО приведен в [88]. Заметим, что экспериментальные исследования, проведенные в классе эллипсоидов, показали, что зависимость эффективности прямо-двойственного метода УО от асферичности аппроксимируемых тел выше, чем теоретические оценки (по крайней мере, в гладком случае), однако остается значительной.

3.3.5. Комбинированные (двухфазные) методы решения смешанных задач

До сих пор в работе рассматривалась *однородная задача* полиэдральной аппроксимации ВКТ в двух двойственных постановках:

1) аппроксимировать тело, заданное своей *опорной* функцией, (вписанным) многогранником с возможно меньшим числом *вершин*;
2) аппроксимировать тело, заданное своей *дистанционной*

функцией, (описанным) многогранником с возможно меньшим числом *гиперграней*.

Смешанная задача построения многогранников с двойственным (прямым) описанием при аппроксимации тел заданных прямым (двойственным) способом имеет две следующие постановки:

1) аппроксимировать тело, заданное своей *дистанционной* функцией, (вписанным) многогранником с возможно меньшим числом *вершин*;
2) аппроксимировать тело, заданное своей *опорной* функцией, (описанным) многогранником с возможно меньшим числом *гиперграней*.

Сразу заметим, что методов решения смешанной задачи в нашей теории нет. Однако, если *отказаться от требования, что аппроксимирующий многогранник должен быть вписанным (описанным)*, то для её решения могут быть использованы последовательно (в виде двух фаз) методы решения двух двойственных однородных задач. Впервые такая идея была предложена А.В.Лотовым и использована в работе [91]. Приведем краткое описание этого подхода.

Для решения *третьей* задачи аппроксимируемое тело C может быть сначала приближено с внешним многогранником с помощью оптимальных по порядку числа гиперграней аппроксимирующего многогранника методов отсечения (например, УВО, или УО*, или прямо-двойственный УО). Пусть на этом этапе построен многогранник $P^n \in \mathscr{P}^c(C)$: $\delta(P^n, C) \le \varepsilon_1$. Далее для многогранника P^n применяется какой-либо оптимальный по порядку числа вершин метод восполнения (например, УО). Использование метода восполнения в этом случае не вызывает затруднений, так как многогранник P^n имеет не слишком большое число гиперграней (а в методах УВО, или УО*, или прямо-двойственном УО, задан еще и своими вершинами) и вычисление его опорной функции может быть проведено стандартными методами. Пусть в результате применения метода восполнения строится многогранник $Q^n \in \mathscr{P}^i(P^n)$: $\delta(Q^n, P^n) \le \varepsilon_2$. Нетрудно видеть, что

$$\delta(Q^n, C) \le \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

что и решает рассматриваемую смешанную задачу.

Заметим, что построенный многогранник Q^n не принадлежит ни одному из классов $\mathscr{P}^i(C)$ или $\mathscr{P}^c(C)$, и, кроме того, двухфазный метод не является бесконечно-продолжимым: если первая фаза (аппроксимация исходного тела внешним многогранником) может быть продолжена для повышения точности, то вторая фаза (аппроксимация внешнего многогранника внутренним) должна быть в этом случае выполнена заново.

Для решения *четвертой* задачи аппроксимируемое тело C может быть сначала приближено с внутренним многогранником с помощью оптимальных по порядку числа вершин аппроксимирующего многогранника методов восполнения (например, УО). Далее для многогранника P^n применяется какой-либо оптимальный по порядку числа гиперграней метод отсечения (например, УВО). Использование метода отсечения в этом случае не вызывает затруднений, так как многогранник P^n имеет не слишком большое число вершин (а в методе УО задан еще и своими гипергранями) и вычисление его дистанционной функции может быть проведено стандартными методами.

Заметим, что, как и в случае двухфазного метода решения третьей смешанной задачи, построенный многогранник Q^n не принадлежит ни одному из классов $\mathscr{P}^i(C)$ или $\mathscr{P}^c(C)$, и, кроме того, двухфазный метод в этом случае также не является бесконечно-продолжимым.

В [90] приведен пример использования двухфазного метода (в совокупности с прямо-двойственным использованием метода УО) для построения экономного описания выпуклой оболочки большого числа точек (см. также п. 5.4.4).

3.4. Самодвойственные оптимальные АМПА

3.4.1. Необходимость разработки самодвойственных методов

Во многих приложениях важное значение также имеет проблема построения аппроксимации с минимально возможным числом задач выпуклой оптимизации на аппроксимируемом множестве (с минимальным числом вычислений его опорной или дистанционной функции).

Для решения этой проблемы в [41] был предложен метод "Сближающихся Многогранников" (СМ) (см. параграф 1.4). В этом методе аппроксимируемое тело приближается парой из вписанного и описанного многогранников. На каждой итерации к множеству вершин вписанного многогранника добавляется одна вершина и к множеству гиперграней описанного многогранника добавляется одна гипергрань. В методе СМ вместо расчета значений опорной функции аппроксимируемого тела существенно используются оценки значения опорных функций аппроксимирующих многогранников. Поэтому на каждой итерации вычисляется только одно значение опорной функции аппроксимируемого тела. Благодаря такой особенности, метод СМ в гладком случае оказывается оптимальным не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого тела (теорема 2.6.31). К сожалению, для негладких тел оптимальной по порядку скорости сходимости по указанным параметрам получить не удается.

На основе теории двойственности АМПА, рассмотренных в настоящей главе, можно установить причину сложностей при получении оптимальных оценок скорости сходимости метода СМ или двойственных к нему СМ* или $Д_1$СМ и $Д_2$СМ. Дело в том, что эти методы, по-видимому, невозможно модифицировать так, чтобы они порождали H_1-последовательности отсечения. Вместе с тем, на основе комбинации адаптивных схем, порождающих H_1-последовательности отсечения и восполнения, можно сформулировать самодвойственные методы, т.е. методы, сочетающие в себе методы из двойственных H_1-классов.

В настоящем параграфе сформулированы самодвойственные методы, в которых на каждой итерации вычисляются значения как опорной, так и дистанционной функции аппроксимируемого тела. Для самодвойственных методов в общем случае (т.е. как для гладких, так и для негладких тел) доказаны их оптимальность по порядку числа вершин внутреннего и гиперграней внешнего аппроксимирующих многогранников, а также числа вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого тела.

Заметим, однако, что метод СМ или двойственные к нему методы сохраняют свою актуальность в смысле минимизации числа «экспериментов с объектом» аппроксимации, когда аппроксимируемое тело задано только своей опорной или только дистанционной функциями (по крайней мере в гладком случае).

3.4.2. Описание самодвойственных методов

В настоящем параграфе мы определим две реализации самодвойственного метода, сочетающие в себе схему восполнения из метода СМ и схему отсечения из метода Д$_1$СМ. Аналогично могут быть определены реализации самодвойственного метода, сочетающие в себе схему восполнения из метода СМ и схему отсечения из метода Д$_2$СМ.

Рассматриваемые нами реализации различаются тем, что в первой направление уточнения аппроксимации производится на основе информации для гиперграней внутреннего, а во втором – на основе информации для вершин внешнего многогранников. Заметим, что, в отличие от метода СМ, самодвойственные методы требуют на каждой итерации решения задачи нахождения значений как опорной, так и дистанционной функции аппроксимируемого тела.

Пусть задан пороговый параметр метода λ, $0 < \lambda < 1$ (о выборе его значения см. замечание в конце параграфа).

САМОДВОЙСТВЕННЫЙ$_1$ МЕТОД (СМД$_1$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0^c(C)$ построены $P^n\in\mathscr{P}_0^i(C)$ и $Q^n\in\mathscr{P}_0^c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

a). Найти $v_n\in M^f(P^n)$ и $q_n\in T(v_n, Q^n)$, где

$$v_n := \arg\max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n): u\in M^f(P^n)\}.$$

b). Найти $p_n\in T(v_n, C)$.

c). Если

$$g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n) \geq \lambda\, [g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)],$$

то

$$\text{построить } P^{n+1} := \operatorname{conv} \{p_n, P^n\},$$
$$\text{положить } Q^{n+1} := Q^n,$$

иначе

$$\text{найти } u_n\in S(q_n/g^*(q_n, C), C),$$
$$\text{построить } Q^{n+1} := Q^n\cap L(u_n, C),$$
$$\text{положить } P^{n+1} := P^n.$$

Таким образом, в этом методе сначала в множестве нормалей к гиперграням внутреннего многогранника находится направление v_n и определяется вершина внешнего многогранника q_n, на которых достигается максимальное отклонение между внешним и внутренним многогранниками. Далее, в направлении v_n находится опорная гиперплоскость к аппроксимируемому телу и точка касания p_n. Если эта точка находится на достаточно большом, сравнительно с отклонением многогранников, расстоянии от внутреннего многогранника (определяется параметром λ), то p_n присоединяется к множеству вершин внутреннего многогранника. В противном случае находится точка $q_n/g^*(q_n, C)$ пересечения луча, соединяющего начало координат с вершиной внешнего многогранника q_n, и границы аппроксимируемого тела. В найденной точке находится внешняя нормаль u_n, и внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью тела с этой нормалью.

САМОДВОЙСТВЕННЫЙ$_2$ МЕТОД (СМД$_2$)

Пусть для $C\in\mathscr{C}_0$ и $P^0\in\mathscr{P}_0^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0^c(C)$ построены $P^n\in\mathscr{P}_0^i(C)$ и $Q^n\in\mathscr{P}_0^c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

a). Найти $q_n\in M^t(Q^n)$ и $v_n\in S(q_n/g^*(q_n, P^n), P^n)$, где

$$q_n := \arg\max \{\rho(p, p/g^*(p, P^n)) : p\in M^t(Q^n)\}.$$

b). Найти $u_n\in S(q_n/g^*(q_n, C), C)$.

c). Если

$$\rho(q_n, q_n/g^*(q_n, C)) \geq \lambda\, \rho(q_n, q_n/g^*(q_n, P^n)),$$

то

$$\text{построить } Q^{n+1} := Q^n\cap L(u_n, C),$$
$$\text{положить } P^{n+1} := P^n,$$

иначе

$$\text{найти } p_n\in T(v_n, C),$$
$$\text{построить } P^{n+1} := \operatorname{conv}\{p_n, P^n\},$$
$$\text{положить } Q^{n+1} := Q^n.$$

Таким образом, в этом методе сначала в множестве вершин внешнего многогранника находится точка q_n, на которой (вдоль луча, исходящего из началом координат) достигается максимальное отклонение между внешним и внутренним многогранниками. В точке пересечения границы внутреннего многогранника и луча, соединяющего q_n с началом координат, находится внешняя нормаль v_n. Далее, в точке $q_n/g^*(q_n, C)$ пересечения границы аппроксимируемого тела и луча, соединяющего q_n с началом координат, находится внешняя нормаль u_n. Если точка $q_n/g^*(q_n, C)$ находится на достаточно большом, сравнительно с отклонением многогранников, расстоянии от внешнего многогранника (определяется параметром λ), то внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью тела с нормалью u_n. В противном случае находится точка p_n касания аппроксимируемого тела и опорной гиперплоскости с нормалью v_n, и множество вершин внутреннего многогранника пополняется этой точкой.

Метод СМД$_1$ (СМД$_2$) обозначим через М$_{СМД1}$ (М$_{СМД2}$).

Двумерная иллюстрация метода СМД$_1$ представлена на рис. 3.4.1.

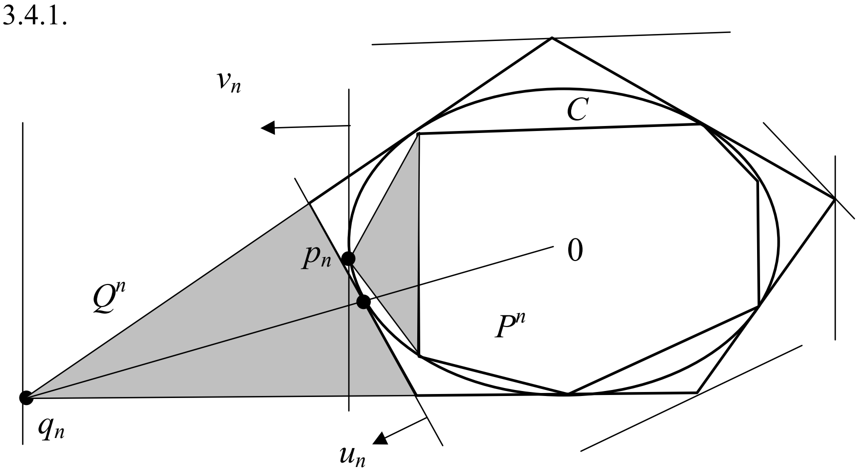

Рис. 3.4.1. Первый Самодвойственный метод

3.4.3. Скорость сходимости самодвойственных методов

В настоящем пункте будет исследована скорость сходимости самодвойственных методов. Мы ограничимся исследованием метода СМД$_1$. Заметим, что метод СМД$_2$ будет иметь аналогичные свойства.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,...}$ *– последовательность пар* *многогранников, порождаемая методом СМД$_1$ для* $C \in \mathscr{C}_0$, $P^0 \in \mathscr{P}_0^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}_0^c(C)$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(P^n, Q^n) = 0 .$$

Доказательство. В случае $C \in \mathscr{P}$ утверждение теоремы, очевидно, выполняется. Пусть $C \notin \mathscr{P}$. Тогда $\delta(P^n, Q^n) > 0$ для любого n. По теореме 1.3.2 для любых $C \in \mathscr{P}$ и $P \in \mathscr{P}^i(C)$ имеем

$$\max \{g(u, C) - g(u, P): u \in M^f(P)\} \geq \delta(C, P^n) / \omega(P). \qquad (3.4.1)$$

Поэтому

$$\max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\} \geq \delta(Q^n, P^n) / \omega(P^n) \geq$$
$$\geq \max \{\delta(C, P^n), \delta(C, Q^n)\}\, r(P^0) / R(C).$$

Хотя бы одна из последовательностей $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ или $\{Q^n\}_{n=1,2,...}$ имеет бесконечное число различных членов. Пусть это – последовательность $\{P^n\}_{n=1,2,...}$. Если выделить из $\{P^n\}_{n=1,2,...}$ подпоследовательность с различными членами, то получим последовательность $\{P_1^{\,n}\}_{n=1,2,...}$ со свойством

$$g(v_n, p_n) - g(v_n, P_1^{\,n}) \geq \lambda\, \delta(P_1^{\,n}, C)\, r(P^0) / R(C).$$

Итак, $\{P_1^{\,n}\}_{n=1,2,...}$ есть $H_1(\gamma_1, C)$-последовательность восполнения с константой $\gamma_1 := \lambda r(P^0)/R(C)$, откуда следует сходимость к нулю величины $\delta(P_1^{\,n}, C)$, а, следовательно, и $\delta(P_1^{\,n}, Q_1^{\,n})$, где $Q_1^{\,n}$ – соответствующие $P_1^{\,n}$ внешние многогранники. Действительно, из (3.4.1) и описания метода вытекает

$$\delta(P_1^{\,n}, Q_1^{\,n}) \leq \omega(P^n)[g(v_n, Q_1^{\,n}) - g(v_n, P_1^{\,n})] \leq$$
$$\leq \omega(P_1^{\,n})[g(v_n, p_n) - g(v_n, P_1^{\,n})]/\lambda \leq R(C)\delta(P_1^{\,n}, C)/(\lambda r(P^0)),$$

откуда в силу монотонности по включению аппроксимирующих многогранников следует утверждение теоремы.

Совершенно аналогично, пусть бесконечной является последовательность $\{Q^n\}_{n=1,2,...}$, $\{Q_1^{\,n}\}_{n=1,2,...}$ – ее подпоследовательность с различными членами и $P_1^{\,n}$ – соответствующие $Q_1^{\,n}$ внутренние многогранники. Тогда, с учетом (3.4.1) для $q'_n := q_n/g^*(q_n, C)$, справедливо

$$\rho(q_n, q'_n) \geq [g(v_n, Q_1^{\,n}) - g(v_n, P_1^{\,n})] - [g(v_n, p_n) - g(v_n, P_1^{\,n})] \geq$$
$$\geq (1-\lambda)\, [g(v_n, Q_1^{\,n}) - g(v_n, P_1^{\,n})] \geq (1-\lambda)\, \delta(Q_1^{\,n}, C)\, r(P^0) / R(C),$$

причем для $u_n \in S(q'_n, C)$ выполняется

$$\rho(q_n, q'_n) \leq \omega_0(C)[g(u_n, q_n) - g(u_n, C)].$$

Поэтому $\{Q_1^{\,n}\}_{n=1,2,...}$ будет $H_1(\gamma, C)$-последовательностью отсечения с константой $\gamma_2 := (1-\lambda)r(P^0)/(R(C)\omega_0(C))$, откуда следует сходимость к нулю величины $\delta(Q_1{}^n, C)$, а, следовательно, и $\delta(P_1{}^n, Q_1{}^n)$:

$$\delta(P_1{}^n, Q_1{}^n) \le \omega(P^n)[g(v_n, Q_1{}^n) - g(v_n, P_1{}^n)] \le$$
$$\le \omega(P_1{}^n)\rho(q_n, q'_n)/(1-\lambda) \le \omega(P_1{}^n)\omega_0(C)\delta(Q_1{}^n, C)/(1-\lambda) \le$$
$$\le \omega_0(C)R(C)\delta(Q_1{}^n, C)/((1-\lambda)r(P^0)).$$

Отсюда в силу монотонности по включению аппроксимирующих многогранников и в этом, втором, случае вытекает утверждение теоремы.

Теорема 3.4.1 доказана.

Следствие 3.4.1. *Пусть* $\{P_1{}^n\}_{n=1,2,...}$ *и* $\{Q_1{}^n\}_{n=1,2,...}$ *– подпоследовательности внутренних и внешних многогранников с различными членами, порождаемые методом СМД*$_1$ *для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$. *Тогда они являются асимптотическими* $H_1(\gamma_a, C)$-*последовательностью восполнения с* $\gamma_a := \lambda/\omega(C)$ *и* $H_1(\gamma_c, C)$-*последовательностью отсечения с* $\gamma_c := (1-\lambda)/[\omega(C)\omega_0(C)]$, *соответственно.*

Доказательство. Достаточно ограничиться рассмотрением части последовательности, начиная с $n=N$, и в константы γ_1 и γ_2 из доказательства теоремы 3.4.1 подставить вместо $R(P^N)/r(C)$ асимптотически близкую величину $\omega(C)$.

Следствие 3.4.1 доказано.

Пусть $C\in\mathscr{C}$ и $\{P^n\}_{n=0,1,...}$ есть асимптотическая $H_1(\gamma, C)$-последовательность восполнения или отсечения. Тогда, согласно теоремам 2.3.1 и 2.5.10, существует номер N такой, что при $n\ge N$ справедливо

$$\delta^H(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)}, \tag{3.4.2}$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$ (для последовательности восполнения), или $m^f(P^n)$ (для последовательности отсечения) и

$$\lambda_9(\gamma, C) := \frac{16R(C)}{\gamma}\left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{\frac{2}{d-1}}. \tag{3.4.3}$$

Следствие 3.4.2. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,...}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМД*$_1$ *для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0{}^c(C)$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует* N

такое, что при n≥N справедливо

$$\delta(P^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma_a, C)(m^t(P^n))^{-2/(d-1)},$$
$$\delta(Q^n, C) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(\gamma_c, C)(m^f(Q^n))^{-2/(d-1)},$$

где константа $\lambda_9(\gamma, C)$ определена в (3.4.3), константы γ_a и γ_c определены в формулировке следствия 3.4.1.

Доказательство. Утверждение следствия для $m^t(P^n)$ и $m^f(Q^n)$ вытекает из следствия 3.4.1 и (3.4.2)-(3.4.3).

Следствие 3.4.2 доказано.

Для получения оценок совместной сходимости аппроксимирующих многогранников друг к другу по числу итераций, числу вершин внутренних и гиперграней внешних многогранников, а также по числу вычислений опорной и дистанционной функции требуется более подробный анализ.

Обозначим через $m^g(P)$ и $m^{g^*}(P)$ число вычислений опорной и дистанционной функции тела C, соответственно, необходимое для построения аппроксимирующего многогранника P. Для определенности, будем считать, что при вычислении опорной функции тела $g(u, C)$ находится одновременно некоторая точка касания из множества $T(u, C)$, а также при вычислении дистанционной функции тела $g^*(u, C)$ – некоторая внешняя нормаль из множества $S(u/g^*(u, C), C))$. Число задач выпуклой оптимизации на множестве C, необходимое для построения аппроксимирующего многогранника P, обозначим через $m^{\mathrm{opt}}(P)$. Ясно, что в нашей постановке $m^{\mathrm{opt}}(P) = m^g(P) + m^{g^*}(P)$.

Теорема 3.4.2. *Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,\ldots}$ – последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМД$_1$ для $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0^c(C)$. Тогда для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при n≥N справедливо*

$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(\lambda/\omega(C), C)\,(m^t(P^n))^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_9((1-\lambda)/(\omega(C)\omega_0(C)), C)\,(m^f(Q^n))^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi(\lambda, C)\, n^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi(\lambda, C)\, k_1(n)^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_9((1-\lambda)/(\omega(C)\omega_0(C)), C)\, k_2(n)^{-2/(d-1)},$$
$$\delta^H(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi_1(\lambda, C)\, k_3(n)^{-2/(d-1)},$$

где $k_1(n)$ *есть* $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$, $k_2(n)$ *есть* $m^{g^*}(P^n)$ *или* $m^{g^*}(Q^n)$, $k_3(n)$ *есть* $m^{\mathrm{opt}}(P^n)$ *или* $m^{\mathrm{opt}}(Q^n)$, *константа* $\lambda_9(\gamma, C)$ *определена в (3.4.3), и*

$$\psi(\lambda, C) := \left[\lambda^{\frac{1-d}{2}} + \omega_0(C)^{\frac{d-1}{2}} (1-\lambda)^{\frac{1-d}{2}} \right]^{\frac{2}{d-1}},$$

$$\psi_1(\lambda, C) := \left[\lambda^{\frac{1-d}{2}} + 2\omega_0(C)^{\frac{d-1}{2}} (1-\lambda)^{\frac{1-d}{2}} \right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Доказательство. Пусть $\beta > 0$. Поставим в соответствие последовательности пар многогранников $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\ldots}$, порождаемой рассматриваемым методом, последовательность пар множеств точек $\{Z_1{}^n, Z_2{}^n\}_{n=0,1,\ldots}$ по следующему правилу:

1) $Z_1{}^0 := \{p + \beta u(p)\colon p \in M^t(P^0)\}$ для некоторого набора направлений $\{u(p) \in S(p, C)\colon p \in M^t(P^0)\}$,

   $Z_2{}^0 := \{p(u) + \beta u\colon u \in M^f(Q^0)\}$ для некоторого набора точек $\{p(u) \in T(u, C)\colon u \in M^f(Q^0)\}$;

2) Если (n=0,1,2,...)

$$g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n) \ge \lambda\, [g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)],$$

   то

$$Z_1{}^{n+1} := \{p_n + \beta v_n\} \cup Z_1{}^n,$$
$$Z_2{}^{n+1} := Z_2{}^n,$$

   иначе

$$Z_1{}^{n+1} := Z_1{}^n,$$
$$Z_2{}^{n+1} := \{q_n / g^*(q_n, C) + \beta\, u_n\} \cup Z_2{}^n.$$

Очевидно, что $Z_1{}^n, Z_2{}^n \subset \partial(C + \beta B)$.

1). Пусть $g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n) \ge \lambda\, [g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)]$. По теореме 1.3.2 имеем

$$\max\, \{g(u, Q^n) - g(u, P^n)\colon u \in M^f(P^n)\} \ge \delta(Q^n, P^n) / \omega(P^n).$$

Обозначим $z_n := p_n + \beta v_n$, $v_n \in M^f(P^n)$. Пусть $z \in Z_1{}^n$ и $z = p + \beta v$, где $p \in M^t(P^n)$, $v \in S(p, C)$ и $p \in T(v, C)$.

Если $< v_n, v > \le 0$, то $\rho(z_n, z) \ge \beta\sqrt{2}$. Пусть $<u_n, v> > 0$ и $p' := t(p_{n-1}, P^{n-1})$. Тогда по лемме 2.3.1 имеем

$$\| z_n - z \|^2 \ge \beta\, [g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n)] \ge \beta\lambda\, [g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)] \ge$$

$$\geq \beta\lambda\,[\delta(Q^n, P^n)/\omega(P^n)].$$

Поэтому для любого $z \in Z_1{}^n$ справедливо

$$\rho(z, z_n) \geq \min\,\{\beta\sqrt{2},\ [\beta\lambda\delta(Q^n, P^n)/\omega(P^n)]^{1/2}\}.$$

Таким образом, с учетом сходимости метода по теореме 3.4.1, получаем, что для любого ε_1, $0 < \varepsilon_1 < 1$, существует n_1 такое, что при $n \geq n_1$ множество $Z_1{}^{n+1}$, а тем более $Z_1{}^n$, есть база $\tau_1(n)$-упаковки, где

$$\tau_1(n) := (1-\varepsilon_1)[\beta\lambda\delta(Q^n, P^n)/\omega(C)]^{1/2}/2.$$

2). Пусть наоборот, $g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n) < \lambda\,[g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)]$. Пусть $q'_n := q_n/g^*(q_n, C) = t(q_n, C)$. Так как

$$\rho(q_n, q'_n) \geq [g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)] - [g(v_n, p_n) - g(v_n, P^n)] \geq$$
$$\geq (1-\lambda)\,[g(v_n, Q^n) - g(v_n, P^n)],$$

то по теореме 1.3.2 имеем $\rho(q_n, q'_n) \geq (1-\lambda)\delta(Q^n, P^n)/\omega(P^n)$. Но для $u_n \in S(q'_n, C)$ справедливо

$$\delta(Q^n, P^n) \geq g(u_n, q_n) - g(u_n, C) \geq \rho(q_n, q'_n)\ /\ \omega_0(C).$$

Поэтому по лемме 2.3.3 получаем, что для любого $z \in Z_2{}^n$ справедливо

$$\rho(z, q'_n + \beta u_n) \geq$$
$$\geq \min\,\{\beta\sqrt{2},\ [\beta(1-\lambda)\delta(Q^n, P^n)/(\omega(P^n)\omega_0(C))]^{1/2} - \omega_0(C)\delta(Q^n, P^n)\}.$$

Таким образом, с учетом сходимости метода по теореме 3.4.1, получаем, что для любого ε_2, $0 < \varepsilon_2 < 1$, существует n_2 такое, что при $n \geq n_2$ множество $Z_2{}^{n+1}$, а тем более $Z_2{}^n$, есть база $\tau_2(n)$-упаковки, где

$$\tau_2(n) := (1-\varepsilon_1)[\beta(1-\lambda)\delta(Q^n, P^n)/(\omega(C)\omega_0(C))]^{1/2}/2.$$

3). Заметим далее, что $\mathrm{card}\,Z_1{}^0 = m^t(P^0)$ и $\mathrm{card}\,Z_2{}^0 = m^f(Q^0)$. В случае $C \in \mathscr{P}$ утверждение теоремы, очевидно, выполняется. Пусть $C \notin \mathscr{P}$. Тогда $\delta(P^n, Q^n) > 0$ для любого n, и из определения метода вытекает, что

$$\mathrm{card}\,Z_1{}^n + \mathrm{card}\,Z_2{}^n = m^t(P^0) + m^f(Q^0) + n,$$
$$m^t(P^n) \leq \mathrm{card}\,Z_1{}^n,\ m^f(P^n) \leq \mathrm{card}\,Z_2{}^n.$$

Поэтому

$$n < \mathrm{card}\,Z_1{}^n + \mathrm{card}\,Z_2{}^n.$$

Так как $Z^n \in \partial(C+\beta B)$, то, согласно лемме 2.3.6,

$$m^t(P^n) \leq \mathrm{card}\,Z_1{}^n \leq N_1(\tau_1(n),\ R(C)+\beta)$$

и

$$m^f(Q^n) \leq \mathrm{card}\,Z_2{}^n \leq N_1(\tau_2(n),\ R(C)+\beta),$$

где функция $N_1(\cdot, \cdot)$ определена в формулировке леммы 2.3.6.

Из этих неравенств, при соответствующем подборе величин ε_1 и N (т.е. малости $\delta(Q^N, P^N)$), получаем для $m^t(P^n)$ оценку

$$\delta(Q^n, P^n) \le \frac{1+\varepsilon}{m^t(P^n)^{2/(d-1)}} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{2/(d-1)} \left[\frac{2(R(C)+\beta)\sqrt{\omega(C)}}{\sqrt{\beta\lambda}}\right]^2.$$

В последней скобке минимум достигается при $\beta = R(C)$, что доказывает утверждение теоремы для $m^t(P^n)$.

Далее, при соответствующем подборе величин ε_2 и N (т.е. малости $\delta(Q^N, P^N)$), получаем совершенно аналогично (с заменой λ на $1\text{-}\lambda$ и $\omega(C)$ на $\omega(C)\omega_0(C)$) утверждение теоремы для $m^f(P^n)$.

Далее,

$$n < \mathrm{card}\, Z_1^n + \mathrm{card}\, Z_2^n \le N_1(\tau_1(n), R(C)+\beta) + N_1(\tau_2(n), R(C)+\beta).$$

Откуда, при соответствующем подборе величин ε_1, ε_2 и N (т.е. малости $\delta(Q^N, P^N)$), получаем

$$\delta(Q^n, P^n) \le \frac{1+\varepsilon}{n^{2/(d-1)}} \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}}\right]^{2/(d-1)} \psi(\lambda, C) \left[\frac{2(R(C)+\beta)\sqrt{\omega(C)}}{\sqrt{\beta}}\right]^2.$$

В последней скобке минимум достигается также при $\beta = R(C)$, что доказывает утверждение теоремы для n.

Нетрудно видеть из описания метода и определения множеств Z_1^n и Z_2^n, что

$$m^g(P^n) = m^g(Q^n) \le \mathrm{card}\, Z_1^n + \mathrm{card}\, Z_2^n,$$
$$m^{g*}(P^n) = m^{g*}(Q^n) \le \mathrm{card}\, Z_2^n.$$
$$m^{\mathrm{opt}}(P^n) = m^{\mathrm{opt}}(Q^n) \le \mathrm{card}\, Z_1^n + 2\,\mathrm{card}\, Z_2^n,$$

Поэтому утверждения для m^g, m^{g*} и m^{opt} доказываются совершенно аналогично.

Теорема 3.4.2 доказана.

В верхние оценки зависимости погрешности от числа вершин аппроксимирующих многогранников входит обратная зависимость от параметра λ. В верхние оценки зависимости погрешности от числа гиперграней аппроксимирующих многогранников входит обратная зависимость от параметра $1\text{-}\lambda$. Поэтому параметр метода позволяет регулировать оценку скорости аппроксимации по числу вершин за счет оценки скорости аппроксимации по числу гиперграней. Нетрудно видеть, что баланс оценок достигается при значении параметра

$$\lambda_0 := 1/(1+\omega_0(C)),$$

для которого верхние оценки зависимости погрешности от числа вершин и гиперграней совпадают.

Функция $\psi(\lambda, C)$, входящая в оценку скорости сходимости по числу итераций и числу вычислений опорной функции, имеет минимум при значении параметра λ, равном

$$\lambda^* := [1+\omega_0(C)^{(d-1)/(d+1)}]^{-1},$$

однако этот минимум является очень пологим, и плохие оценки получаются лишь при значениях λ, близких к 0 или 1. Выбор параметра λ=1/2, т.е. значение

$$\psi(1/2, C) = 2[1+\omega_0(C)^{(d-1)/2}]^{2/(\mathrm{d}-1)},$$

при $\omega_0(C) = 1$ (т.е. при аппроксимации шара) является оптимальным с точки зрения полученной оценки.

Итак, как показывает проведенный анализ, при больших значения асферичности для увеличения скорости сходимости по числу итераций и числу вычислений опорной функции следует на практике выбирать значение параметра λ метода СМД$_1$ несколько меньшим ½.

Функция $\psi_1(\lambda, C)$, входящая в оценку скорости сходимости по числу решений задач выпуклой оптимизации, имеет минимум при значении параметра

$$\lambda_1^* := [1+2^{2/(d+1)}\omega_0(C)^{(d-1)/(d+1)}]^{-1}.$$

При аппроксимации шара (т.е. при $\omega_0(C) = 1$) выбор параметра λ=1/2 уже не является оптимальным с точки зрения полученной оценки. В этом случае минимум оценки доставляет величина $\lambda = [1+2^{2/(d+1)}]^{-1}$. Вообще, как показывает проведенный анализ, при больших значениях асферичности для уменьшения числа решений задач выпуклой оптимизации на аппроксимируемом теле следует на практике выбирать значение параметра λ метода СМД$_1$ несколько меньшим, чем для уменьшения верхней оценки зависимости погрешности от числа итераций.

Таким образом, исходя из полученных оценок, параметр методов позволяет регулировать скорость сходимости по числу вершин за счет скорости сходимости по числу гиперграней, и наоборот. Реальное влияние параметра методов на скорость сходимости нуждается в дополнительном экспериментальном исследовании по типу исследований, рассмотренных в главе 5.

Теорема 3.4.2 описывает сходимость метода СМД$_1$ в метрике Хаусдорфа. Используя асимптотическую связь (1.2.8) между точностью в метрике Хаусдорфа и точностью в метрике объема симметрической разности, мы сразу (см., например, следствие 3.4.1 и лемму 2.3.8) получаем сходимость метода СМД$_1$ и в этой метрике.

Следствие 3.4.3. *Пусть* $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,\dots}$ *– последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМД$_1$ для* $C\in\mathscr{C}_0$, $P^0\in\mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0\in\mathscr{P}_0{}^e(C)$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует* N *такое, что при* $n\geq N$ *справедливо*

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\sigma(C)\lambda_9(\lambda/\omega(C), C)\ (m^t(P^n))^{-2/(d-1)},$$

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\sigma(C)\lambda_9((1-\lambda)/(\omega(C)\omega_0(C)), C)\ (m^f(Q^n))^{-2/(d-1)},$$

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\sigma(C)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi(\lambda, C)\ n^{-2/(d-1)},$$

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\sigma(C)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi(\lambda, C)\ k_1(n)^{-2/(d-1)},$$

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\sigma(C)\lambda_9((1-\lambda)/(\omega(C)\omega_0(C)), C)\ k_2(n)^{-2/(d-1)},$$

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\sigma(C)\lambda_9(1/\omega(C), C)\,\psi_1(\lambda, C)\ k_3(n)^{-2(d-1)},$$

где $k_1(n)$ *есть* $m^g(P^n)$ *или* $m^g(Q^n)$, $k_2(n)$ *есть* $m^{g^*}(P^n)$ *или* $m^{g^*}(Q^n)$, $k_3(n)$ *есть* $m^{\mathrm{opt}}(P^n)$ *или* $m^{\mathrm{opt}}(Q^n)$, *константа* $\lambda_9(\gamma, C)$ *определена в (3.4.3), и константы* $\psi(\lambda, C)$ *и* $\psi_1(\lambda, C)$ *определены в утверждении теоремы 3.4.2.*

3.4.4. Оптимальность и эффективность самодвойственных методов

В настоящем пункте будет доказана в общем случае $C\in\mathscr{C}_0$ оптимальность самодвойственных методов по порядку числа вершин внутреннего многогранника, гиперграней внешнего многогранника и числа вычислений опорной функции аппроксимируемого тела. Кроме того, будет доказана оптимальность по порядку числа вычислений дистанционной функции аппроксимируемого тела и числа решаемых на аппроксимируемом теле задач выпуклой оптимизации.

Пусть $\mathscr{C}^*\subset\mathscr{C}$. Напомним (см. п. 0.1.3), что МПА называется оптимальным по порядку числа вершин (гиперграней, вычислений опорной и дистанционной функции и задач оптимизации аппроксимируемого тела) для класса $\mathscr{C}^*$, если для любого $C \in \mathscr{C}^*$ он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ такую, что для любого $s>0$ такого, что

$$\delta(C, \mathscr{P}_m) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta,s}}{m^s},$$

справедливо

$$\delta(C, P^n) \le \frac{\mathrm{const}'_{C,d,\delta,s}}{m(P^n)^s}.$$

Напомним, что в п. 0.1.3 был определен класс ВКТ $\mathscr{C}_\# := \mathscr{C}((d-1)/2)$, для которого порядок $2/(d-1)$ является неулучшаемым. Согласно (0.1.22), для того, чтобы некоторый метод был оптимален по порядку в классе $\mathscr{C}_\#$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тела $C \in \mathscr{C}_\#$ в порождаемой методом последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ выполнялось

$$\delta(C, P^n) \le \frac{\mathrm{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}.$$

Теорема 3.4.3. М$_{\text{СМД1}}$ *оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин внутренних многогранников, числа гиперграней внешних многогранников, числа вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого множества и числа задач оптимизации, решаемых на аппроксимируемом множестве, для класса* $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{C}_\#$.

Доказательство. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность пар многогранников, порождаемых методом СМД$_1$ с параметром γ для $C \in \mathscr{C}_0$, $P^0 \in \mathscr{P}_0{}^i(C)$, $Q^0 \in \mathscr{P}_0{}^e(C)$. Тогда, в случае метрики Хаусдорфа (объема симметрической разности) по теореме 3.4.2 (следствию 3.4.3), для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при $n \ge N$ справедливо

$$\delta(P^n, Q^n) \le (1+\varepsilon)\lambda^{СМД1}(\gamma, C)\, k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n, $m^t(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$, $m^{g*}(P^n)$, $m^{\mathrm{opt}}(P^n)$, $m^g(Q^n)$, $m^{g*}(Q^n)$ или $m^{\mathrm{opt}}(Q^n)$, и константы $\lambda^{СМД1}(\gamma, C)$ для каждого варианта $k(n)$ определены в утверждении теоремы 3.4.2 (следствия 3.4.3).

Обозначим

$$\Lambda^i(C):=\max\{(1+\varepsilon)\ \lambda^{СМД1}(\gamma, C),\ \delta(P^n, C)\ k(P^n)^{2/(d-1)}: n=0,1,2,...,N\}$$

для $k(n)$, равного $m^t(P^n)$, $m^g(P^n)$, $m^{g*}(P^n)$ или $m^{\mathrm{opt}}(P^n)$, и

$$\Lambda^c(C):=\max\{(1+\varepsilon)\ \lambda^{СМД1}(\gamma, C),\ \delta(Q^n, C)\ k(P^n)^{2/(d-1)}: n=0,1,2,...,N\}$$

для $k(n)$, равного $m^f(Q^n)$, $m^g(Q^n)$, $m^{g*}(Q^n)$ или $m^{\mathrm{opt}}(Q^n)$. Тогда для всех n=0,1,2,... справедливо

$$\delta(P^n, C) \le \Lambda^i(C)\ k(P^n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta(Q^n, C) \le \Lambda^c(C)\ k(Q^n)^{2/(1-d)}.$$

Теорема 3.4.3 доказана.

Теорема 3.4.4. *Путь* $C\in\mathscr{C}_0\cap\mathscr{C}_+^2$. *Тогда* $\mathrm{M}_{\text{СМД1}}$ *асимптотически эффективен для C в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников.*

Доказательство. Пусть $F:=\{P^n\}_{n=0,1,2,...}$ есть последовательность, порождаемая методом СМД$_1$ для тела C. Необходимо доказать, что в указанных метриках $\underline{\eta}$(F)>0. Но этот факт непосредственно вытекает из теоремы 3.4.2, следствия 3.4.3 и свойства (0.1.3).

Теорема 3.4.4 доказана.

Применение следствия 3.4.1 к теоремам 2.5.4-2.5.8 (или непосредственное использование теоремы 3.4.2 и следствия 3.4.3) позволяют получить оценки для эффективности метода СМД$_1$ в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности при аппроксимации гладких тел. Оценки сходимости на начальном этапе могут быть получены аналогично оценкам для первых членов H_1-последовательностей (см п. 2.7.2). Мы не будем останавливаться на этих выводах.

Метод СМД$_2$ исследуется совершенно аналогично.

В заключение отметим, что самодвойственные методы оказываются оптимальными по порядку в классе $\mathscr{C}_\#$ (теорема 3.4.3), в то время как метод СМ (и двойственный к нему СМ*) является оптимальным в более узком классе $\mathscr{C}_+^2$ (теорема 2.6.34). Вместе с тем самодвойственные методы требуют задания аппроксимируемого тела одновременно через опорную и дистанционную функции, в то время как метод СМ (СМ*) требует вычисления только опорной (только дистанционной) функции.

Глава 4. Приложение теории оптимальных АМПА: аппроксимационные свойства негладких выпуклых дисков

В предыдущих главах настоящей работы была развита теория хаусдорфовых АМПА. Было показано, что эти методы являются оптимальными по порядку по крайней мере для тел класса $\mathscr{C}_{\#}$. В настоящей главе мы покажем, что хаусдорфовы методы позволяют получать новые конструктивные верхние оценки оптимальной скорости сходимости МНА в случае, когда аппроксимируемые тела имеют существенно негладкую границу.

В настоящей главе исследуется точность аппроксимации двумерных выпуклых компактных тел многоугольниками. Известные верхние оценки минимально необходимого числа вершин определяются обратной величиной к корню от требуемой точности и не зависят от свойств гладкости аппроксимируемого тела. В [57] предложен хаусдорфовый метод и получена соответствующая ему более сильная для негладких тел оценка минимально необходимого числа вершин через мощность максимального ε-различимого подмножества множества экстремальных точек аппроксимируемого тела, продолженных на средние из единичных векторов внешних нормалей. В [57] показано, что аппроксимационное число тела не превышает половины верхней метрической размерности множества продолженных экстремальных точек, дана верхняя оценка аппроксимируемости негладких тел.

В настоящей главе, если специально не оговорено, речь идет об аппроксимации в метрике Хаусдорфа и под $\delta(\cdot,\cdot)$ понимается $\delta^H(\cdot,\cdot)$. Кроме того, мы рассматриваем класс двумерных ВКТ (дисков), т.е. случай d=2. Мы ограничиваемся также рассмотрением вписанных многогранников, т.е. под $\delta(\mathscr{P}_n, C)$ будет пониматься $\delta(\mathscr{P}^i{}_n, C)$.

4.1. Аппроксимационные свойства выпуклых дисков

В настоящей главе нас будут интересовать верхние оценки величины $\delta(\mathscr{P}_n, C)$ при $C\in\mathscr{C}$. Наиболее сильным результатом в этом направлении является оценка [93]

$$\delta(\mathscr{P}_n, C) \le \sigma(C)\frac{\sin(\pi/n)}{n}, \quad n = 3,4,\dots . \tag{4.1.1}$$

При больших n эта оценка совпадает с оценкой, следующей из более общего, многомерного результата [13]:

$$\delta(\mathscr{P}_n, C) \le \frac{\text{const}}{n^2}, \quad n = 3,4,\dots . \tag{4.1.2}$$

Эта оценка не зависит от свойств гладкости C, в то время как некоторые негладкие тела допускают существенно большую скорость сходимости.

Пусть $C \in \mathscr{C}^2$, где $\mathscr{C}^2$ – класс ВКТ с дважды непрерывно дифференцируемой границей. Тогда, согласно [52], [26], [51], [33]

$$\delta(\mathscr{P}_n, C) \sim \frac{\int_0^L k(u)^{1/2}\, du}{8n^2}, \quad n \to \infty. \tag{4.1.3}$$

Таким образом, в случае гладких тел оценка (4.1.2) не может быть принципиально улучшена.

Целью настоящей главы является получение конструктивных верхних оценок величины $\delta(\mathscr{P}_n, C)$ для негладких ВКТ, допускающих более быструю, чем (4.1.2), скорость сходимости.

Для характеристики аппроксимационных свойств негладких тел введем следующие понятия. Пусть $C \in \mathscr{C}$. Обозначим

$$\underline{a}^s(C) := \liminf_{n\to\infty} n\left[\delta(\mathscr{P}_n, C)\right]^s,$$

$$\overline{a}^s(C) := \limsup_{n\to\infty} n\left[\delta(\mathscr{P}_n, C)\right]^s.$$

В [15] для характеристики нижней границы скорости сходимости МНА введена величина

$$\underline{\alpha}(C) := \inf\{s > 0 : \underline{a}^s(C) = 0\}$$

и названа аппроксимационным числом тела C. Поскольку нас интересуют верхние границы скорости сходимости МНА, то назовем эту величину *нижним аппроксимационным числом* C. Введем *верхнее аппроксимационное число тела* C как

$$\overline{\alpha}(C) := \inf\{s > 0 : \overline{a}^s(C) = 0\}.$$

Очевидно, что $\underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C)$, и в случае равенства этих величин можно говорить об *аппроксимационном числе* $\alpha(C)$.

Из (4.1.2) следует, что в двумерном случае

$$\overline{\alpha}(C) \le \frac{1}{2}, \tag{4.1.4}$$

причем из (4.1.3) следует, что при $C\in\mathscr{C}^2$ справедливо $\alpha(C) = 1/2$.

Нижняя оценка нижнего аппроксимационного числа $\underline{\alpha}(C)$, равная половине хаусдорфовой размерности множества дальних точек C (экстремальных точек, в которых существует внешняя касательная к телу окружность), получена в [15]

$$\underline{\alpha}(C) \ge \frac{1}{2}\dim\exp^* C. \tag{4.1.5}$$

(см. подробнее п. 0.1.2). В настоящей главе нас будет интересовать верхняя оценка верхнего аппроксимационного числа $\overline{\alpha}(C)$, для негладких тел более сильная, чем (4.1.4).

Аппроксимационное число недостаточно полно описывает аппроксимационные свойства выпуклого тела. Например, $\alpha(C)$=0 при $C\in\mathscr{P}$ и существуют такие $C\in\mathscr{C}\backslash\mathscr{P}$, что $\underline{\alpha}(C)$=0 [15]. Для характеристики различных способов сходимости величины $\delta(\mathscr{P}_n, C)$ к нулю в [15] предлагается использовать множество хаусдорфовых функций ***H***. Элементами ***H*** являются неотрицательные возрастающие вещественные функции h, определенные на $[0, +\infty)$, непрерывные справа и удовлетворяющие условию $h(0) = 0$. В этом классе определяется аппроксимируемость тела $C\in\mathscr{C}$ как множество

$$\underline{\mathbf{A}}(C) := \{h \in \mathbf{H} : \underline{a}_h(C) > 0\},$$

где

$$\underline{a}_h(C) := \liminf_{n\to\infty} nh\big(\delta(\mathscr{P}_n, C)\big).$$

Чем меньше множество $\underline{\mathbf{A}}(C)$, тем лучше тело C может быть аппроксимировано многогранниками. Величину $\underline{\mathbf{A}}(C)$ мы будем называть *нижней аппроксимируемостью тела C*. Введем также *верхнюю аппроксимируемость тела C* как

$$\overline{\mathbf{A}}(C) := \{h \in \mathbf{H} : \overline{a}_h(C) > 0\},$$

где

$$\overline{a}_h(C) := \limsup_{n\to\infty} nh\big(\delta(\mathscr{P}_n, C)\big).$$

Очевидно, что

$$\underline{\mathbf{A}}(C) \subseteq \overline{\mathbf{A}}(C),$$

и в случае равенства этих множеств можно говорить об *аппроксимируемости* $\boldsymbol{A}(C)$.

Для произвольных вещественных функций $e(t)$ и $g(t)$, определенных на $[0, +\infty)$, будем записывать $e=o[g]$, если $e(t)/g(t) \to 0$ при $t \to 0$. Обозначим

$$\mathbf{H}_f := \{h \in \mathbf{H} : h \prec f\}.$$

Из (4.1.2) непосредственно следует верхняя оценка

$$\overline{\mathbf{A}}(C) \subseteq \boldsymbol{H} \setminus \boldsymbol{H}_{\sqrt{t}}. \tag{4.1.6}$$

В [15] также дана нижняя оценка множества $\underline{\mathbf{A}}(C)$ для $C\in\mathscr{C}$ (через множество дальних точек границы) и показано, что $C\in\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{A}}(C) \equiv \varnothing$. В настоящей главе нас будет интересовать верхняя оценка верхней аппроксимируемости $\overline{\mathbf{A}}(C)$, более сильная для негладких тел, чем (4.1.6), и, в частности, равная пустому множеству в классе $\mathscr{P}$.

4.2. Основные определения

Напомним основные определения из параграфа 2.4, необходимые для дальнейшей работы.

Пусть U и A – непустые подмножества метрического пространства $\boldsymbol{R}$. Множество U называется *ε-сетью* для A, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Множество U называется *ε-различимым*, если любые две его различные точки находятся на расстоянии, большем, чем ε. Множество A называется *вполне ограниченным*, если для любого положительного ε существует конечная ε-сеть для A.

Для вполне ограниченного A обозначим через $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ минимальное число точек ε-сети A и через $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A. Величины $\mathfrak{H}^R_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ и $\mathfrak{E}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ назовем, соответственно, *относительной ε-энтропией* и *ε-емкостью* A (под log здесь и далее понимается $\log_2$).

Отметим некоторые свойства введенных функций [35]: $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{H}^R_\varepsilon(A)$, $\mathfrak{E}_\varepsilon(A)$ как функции ε являются невозрастающими и непрерывными справа;

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\varepsilon, A);$$

$$\mathfrak{E}_{2\varepsilon}(A) \le \mathfrak{H}^R_\varepsilon(A) \le \mathfrak{E}_\varepsilon(A).$$

Нижняя метрическая размерность вполне ограниченного множества A определяется как

$$\underline{\mathrm{dm}}\, A := \liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mathfrak{H}^R_\varepsilon(A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = \liminf_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mathfrak{E}_\varepsilon(A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Аналогично определяется верхняя метрическая размерность $\overline{\mathrm{dm}} A$, а при равенстве верхней и нижней – метрическая размерность dm A. Для вполне ограниченного множества A в R^2, имеющего внутреннюю точку, справедливо dm A = 2, а для $C\in\mathscr{C}$ справедливо dm ∂C = 1.

Пусть $B_r(z)$ обозначает шар радиуса r с центром в z, B – единичный шар с центром в начале координат, S – круг направлений, т.е. ∂B. Обозначим также через $\Pi(x, A)$ проекцию точки x на A.

Пусть $C\in\mathscr{C}$. $S(p, C)$ – компактное множество, определим его крайние векторы. Пусть $0 \le \alpha < 2\pi$ такая параметризация S, что для $0 \le \alpha < \pi$ можно определить

$$\alpha_-(p) := \min \{\alpha\colon\ u = (\cos \alpha, \sin \alpha)\in S(p, C)\};$$

$$\alpha_+(p) := \max \{\alpha\colon\ u = (\cos \alpha, \sin \alpha)\in S(p, C)\}.$$

Обозначим через $s_-(p)$ и $s_+(p)$ граничные векторы $S(p, C)$:

$$s_-(p) := (\cos \alpha_-(p), \sin \alpha_-(p));$$

$$s_+(p) := (\cos \alpha_+(p), \sin \alpha_+(p)).$$

Обозначим

$$s(p) := (s_-(p) + s_+(p)) / \|s_-(p) + s_+(p)\|$$

– средний вектор единичных внешних нормалей в точке p (аналог симметричной производной Шварца [78]). Пусть Z: $\partial C\to\partial(C+B)$ такое, что $Z(p) := p + s(p)$, $p\in\partial C$.

4.3. Метод «Экстремальных Ям»

Сформулируем итерационный метод построения последовательности граничных точек аппроксимируемого тела, выпуклая оболочка которых имеет требуемую скорость сходимости. На каждой итерации рассматриваемого метода к множеству вершин аппроксимирующего многоугольника прибавляется наиболее удаленная от него экстремальная точка аппроксимируемого тела (так называемая *глубокая яма*), что и служит обоснованием названия самого алгоритма.

МЕТОД ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЯМ (ЭЯ)

Пусть $t_1 \in \mathrm{ext}\, C$ и $T_1 := \{t_1\}$. Пусть множество T_n построено и $\delta(C, \mathrm{conv}\, T_n) > 0$. Тогда $T_{n+1} := T_n \cup \{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1} \in \mathrm{ext}\, C$ и

$$\rho(t_{n+1}, \mathrm{conv}\, T_n) = \delta(C, \mathrm{conv}\, T_n).$$

В обоснование метода покажем, что точка t_{n+1} всегда существует. Действительно, пусть $u^* \in S$: $g(u^*, C) - g(u^*, \mathrm{conv}\, T_n) = \delta(C, \mathrm{conv}\, T_n)$. Тогда, согласно [48] (лемма 4.1),

$$T^* := T(u^*, C) \cap \mathrm{ext}\, C = \mathrm{ext}\,(T(u^*, C) \cap C) \neq \varnothing$$

и $\rho(t, \mathrm{conv}\, T_n) = \delta(C, \mathrm{conv}\, T_n)$ для любого $t \in T^*$.

Метод ЭЯ принадлежит к классу хаусдорфовых АМПА аппроксимации многомерных ВКТ, описанному в главе 1 и исследованному в главе 2. От метода БВ, описанного в главе 1 и порождающего H_1-последовательности многогранников с константой 1, алгоритм ЭЯ отличается только конкретизацией выбора присоединяемой вершины t_{n+1} обязательно из множества экстремальных точек.

Обозначим $P^n := \mathrm{conv}\, T_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Приведем некоторые свойства последовательности $\{P^n\}_{n = 1, 2, \ldots}$.

Свойство 4.3.1.

$$\delta(P^{n+1}, P^n) = \delta(C, P^n).$$

Свойство 4.3.2. Пусть $C \in \mathscr{C}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \delta(C, P^n) = 0.$$

Для $C \in \mathscr{P}$ утверждение очевидно. Пусть $C \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{P}$. В силу ограниченности C имеем $\lim_{n\to\infty} \rho(t_{n+1}, T_n) = 0,$ откуда свойство 4.3.2 вытекает из свойства 4.3.1.

Заметим, что конечность числа шагов метода ЭЯ при аппроксимации многоугольников очевидна.

Свойство 4.3.3. При $n \geq 3$ справедливо $P^n \in \mathscr{P}_n(C)$.

Действительно, пусть t_3 принадлежит отрезку $[t_1, t_2]$, тогда $C \equiv [t_1,$

t_2], что невозможно, так как $C \in \mathscr{C}$. Пусть $t_3 \notin [t_1, t_2]$, но лежит на прямой, проходящей через t_1 и t_2, тогда это противоречит выбору $\{t_1, t_2\} \subset \operatorname{ext} C$. Поэтому P^3 – телесное множество, что доказывает свойство 4.3.3.

Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы, характеризующей скорость сходимости последовательности $\{P^n\}_{n = 1, 2, \ldots}$ к аппроксимируемому телу:

Теорема 4.3.1. *Пусть* $\{P^n\}_{n = 1, 2, \ldots}$ – *последовательность, порождаемая методом ЭЯ для* $C \in \mathscr{C}$. *Тогда для любых* $n > \sigma(C+B)/\sqrt{2}$, *и* ν, $0 < \nu < \delta(P^n, C)$, *справедливо*

$$n+1 \le \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\delta(P^n, C) - \nu}}{1+\sqrt{2}}, Z(\operatorname{ext} C)\right).$$

Доказательство теоремы 4.3.1 основано на нескольких вспомогательных утверждениях.

Лемма 4.3.1. *Пусть* $C \in \mathscr{C}$, $x, y \in \partial C$, $u \in S(x, C)$, $v \in S(y, C)$, $\langle u, v\rangle \ge 0$. *Тогда*

$$\rho(x, l(v, C)) \le \rho(x + u, y + v)^2.$$

Доказательство. Лемма 4.3.1 является частным двумерным случаем леммы 2.3.1 при $\beta=1$. Приведем доказательство в случае $\mathbb{E}^2$ в целях полноты изложения.

В силу выпуклости C имеем $\langle u, x - y\rangle \ge 0$, $\langle v, y - x\rangle \ge 0$. Пусть $\Delta := \rho(x + u, y + v)$. Тогда

$$\Delta^2 \ge \rho(x, y)^2 + \rho(u, v)^2.$$

Поэтому $\Delta \ge \rho(x, y)$, $\Delta \ge \rho(u, v)$. Пусть $\cos\alpha := \langle u, v\rangle$. Так как $\sin\alpha \le \rho(u, v)$, то $\Delta \ge \sin\alpha$. Пусть $z := l(u, C) \cap l(v, C)$ и $m := \Pi(x, l(v, C))$. Тогда $\rho(x, m) = \rho(x, l(v, C))$ и величина $\angle mzx$ равна α. Поэтому $\Delta \ge \rho(x, y) \ge \rho(x, z)$ и $\rho(x, z)\sin\alpha = \rho(x, m)$, откуда $\rho(x, z)\,\Delta \ge \rho(x, m)$. Поэтому $\Delta^2 \ge \rho(x, m)$.

Лемма 4.3.1 доказана.

Для последовательности $\{T_n\}_{n=1,2,\ldots}$, порождаемой рассматриваемым методом для $C \in \mathscr{C}$, введем две вспомогательные последовательности множеств точек, принадлежащих $\partial(C+B)$: $\{W_n\}_{n = 1, 2, \ldots}$ и

$\{Z_n\}_{n=1,2,\dots}$.

$$W_n := \{w_1, \dots, w_n\},\ w_1 := t_1 + u_1,\ u_1 \in S(t_1, C),\ w_i := t_i + u_i,$$

$$u_i := \frac{t_i - \Pi(t_i, \operatorname{conv} T_{i-1})}{\|t_i - \Pi(t_i, \operatorname{conv} T_{i-1})\|},\ 2 \le i \le n,$$

$$Z_n := \{z_1, \dots, z_n\},\ z_n := Z(t_n).$$

Нетрудно видеть, что $u_i \in S(t_i, C)$. Действительно, пусть $t := \Pi(t_i, \operatorname{conv} T_{i-1})$. Тогда $l(u_i, \operatorname{conv} T_{i-1})$ – касательная к $\operatorname{conv} T_{i-1}$ в точке t. Но $\rho(t_i, t) = \delta(C, \operatorname{conv} T_{i-1})$, поэтому $l(u_i, C)$ – касательная к C в точке t_i. Итак,

$$u_i \in S(t_i, C),\ w_i \in \partial(C+B).$$

Лемма 4.3.2. *Пусть* $\delta(P^n, C) > 0$. *Тогда для любого* ν, $0 < \nu < \min \{\sqrt{2}, \delta(C, P^n)^{1/2}\}$, *множество* W_{n+1} *является*

$$\min \{\sqrt{2}, \delta(C, P^n)^{1/2}\} - \nu$$

-различимым.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Так как $<u_1, u_2> \le 0$, то утверждение леммы справедливо. Пусть оно справедливо для n. Докажем его справедливость для $n + 1$.

По предположению для любого ν, $0 < \nu < \min \{\sqrt{2}, \delta(C, P^{n-1})^{1/2}\}$, множество W_n является $\min \{\sqrt{2}, \delta(C, P^{n-1})^{1/2}\} - \nu$ -различимым. Но $\delta(C, P^{n-1}) \ge \delta(C, P^n)$, поэтому остается доказать, что

$$\rho(w_{n+1}, w) \ge \min \{\sqrt{2}, \delta(C, P^n)^{1/2}\},\ w \in W_n.$$

Пусть $w_{n+1} = t_{n+1} + u_{n+1}$ и $w = t + u$. Так как $w \in W_n$, то $t \in \operatorname{ext} C$, $u \in S(t)$. Если $<u, u_{n+1}> < 0$, то $\rho(w_{n+1}, w) > \sqrt{2}$. Пусть $<u, u_{n+1}> \ge 0$. По построению

$$g(u_{n+1}, C) - g(u_{n+1}, P^n) = \delta(C, P^n).$$

Поэтому

$$\rho(t, l(u_{n+1}, C)) \ge g(u_{n+1}, C) - g(u_{n+1}, P^n) = \delta(C, P^n).$$

Отсюда, по лемме 4.3.1,

$$\rho(w_{n+1}, w)^2 \ge \rho(t, l(u_{n+1}, C)) \ge \delta(C, P^n).$$

Лемма 4.3.2 доказана.

Пусть $C \in \mathscr{C}$, $x, y \in \partial C$, $u \in S(x, C)$, $v \in S(y, C)$, $z := l(u, C) \cap l(v, C)$, Δ – треугольник xyz (может быть вырожденный). Пусть

$$[x, y]_{\partial C}(u, v) := \partial C \cap \Delta.$$

Лемма 4.3.3. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$, $x, y \in \partial C$, $u \in S(x, C)$, $v \in S(y, C)$, $\langle u, v\rangle \geq 0$. *Тогда для любой точки* $w \in [x, y]_{\partial C}(u, v)$ *справедливо*

$$\max\{\rho(x, w), \rho(y, w)\} \leq \rho(x, y).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что величина угла $\angle xwy$ не меньше величины угла $\angle xzy$ и, следовательно, не острый. Лемма 4.3.3 доказана.

Лемма 4.3.4. *Пусть* $C\in\mathscr{C}$. *Тогда при* $n > \sigma(C+B)/\sqrt{2}$ *справедливо* $\delta(P^n, C) \leq 2$.

Доказательство. Пусть $N := \max\{n: \delta(P^n(C), C) > 2\}$. Случай $N < 2$ тривиален, т.к. $\sigma(C+B)/\sqrt{2} > 1$. Пусть $N \geq 2$. Тогда из леммы 4.3.2 следует, что W_N является $(\sqrt{2}-\nu)$-различимым ($0 < \nu < \sqrt{2}$) подмножеством $\partial(C+B)$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 4.3.4 доказана.

Лемма 4.3.5. *Пусть* W_n *есть* ε*-различимое множество*, $\varepsilon \leq \sqrt{2} + 2$. *Тогда* Z_n *есть* $\varepsilon / (1 + \sqrt{2})$ *-различимое множество.*

Доказательство. Пусть $x\in Z_n$ и y – ближайшая к ней точка из Z_n. Докажем, что $\rho(x, y) > \varepsilon / (1 + \sqrt{2})$.

Пусть $x = t_x + s(t_x)$, $y = t_y + s(t_y)$, $\{t_x, t_y\} \subset \operatorname{ext} C$, и пусть $w_x, w_y \in W_n$ такие, что $w_x = t_x + u_x$, $w_y = t_y + u_y$, $u_x, \in S(t_x, C)$, $u_y \in S(t_y, C)$. По построению, $\rho(w_x, w_y) > \varepsilon$. Пусть $\langle s(t_x), s(t_y)\rangle < 0$. Тогда

$$\rho(x, y) > \sqrt{2} \geq \varepsilon / (1 + \sqrt{2}).$$

Пусть теперь $\langle s(t_x), s(t_y)\rangle \geq 0$. Рассмотрим случаи взаимного расположения точек из W_n и Z_n на границе $D := C + B$. Имеем $x, y, w_x, w_y \in \partial D$; $l(s(t_x), D)$, $l(s(t_y), D)$, $l(u_x, D)$, $l(u_y, D)$ – опорные к D, соответственно, в точках x, y, w_x, w_y.

1). Пусть $w_x, w_y \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$. В этом случае

$$w_x \in [x, w_y]_{\partial D}(s(t_x), u_y),\ w_y \in [w_x, y]_{\partial D}(u_x, s(t_y)),$$

причем $\langle s(t_x), u_y\rangle \geq 0$ и $\langle u_x, s(t_y)\rangle \geq 0$. Тогда, по лемме 3,

$$\rho(y, w_x) \leq \rho(x, y),\ \rho(w_x, w_y) \leq \rho(y, w_x),$$

откуда $\varepsilon < \rho(w_x, w_y) \leq \rho(x, y)$.

2). Пусть $w_x \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$, $w_y \notin [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$. Обозначим $y_- := t_y + s_-(t_y)$ и $y_+ := t_y + s_+(t_y)$. По построению либо $y_+ \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$, либо $y_- \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$. Пусть, для определенности, $y_- \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$. По лемме 3 отсюда следует $\rho(y, y_-) \le \rho(x, y)$.

По построению

$$\langle s_-(t_y), s(t_y)\rangle = \langle s(t_y), s_+(t_y)\rangle \ge \langle s(t_x), s(t_y)\rangle \ge 0$$

и $[y_-, y_+]_{\partial D}(s_-(t_y), s_+(t_y))$ – часть окружности. Поэтому

$$\rho(y, w_y) \le \rho(y, y_+) = \rho(y_-, y).$$

Следовательно, $\rho(y, w_y) \le \rho(x, y)$. Кроме того, $\rho(w_x, y) \le \rho(x, y)$. Поэтому $\rho(w_x, w_y) \le \rho(w_y, y) + \rho(y, w_x) \le 2\rho(x, y)$. Отсюда

$$\rho(x, y) \ge \rho(w_x, w_y) / 2 > \varepsilon / 2.$$

3). Пусть $w_x, w_y \notin [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y))$. Обозначим $x_- := t_x + s_-(t_x)$, $y_- := t_y + s_-(t_y)$ и $x_+ := t_x + s_+(t_x)$, $y_+ := t_y + s_+(t_y)$. По построению либо

$$x_+ \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y)), \quad y_- \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y)),$$

либо

$$x_- \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y)), \quad y_+ \in [x, y]_{\partial D}(s(t_x), s(t_y)).$$

Рассмотрим, для определенности, первый вариант. По построению,

$$\langle s_-(t_x), s(t_x)\rangle = \langle s(t_x), s_+(t_x)\rangle \ge \langle s(t_x), s(t_y)\rangle \ge 0$$

и $[x_-, x_+]_{\partial D}(s_-(t_x), s_+(t_x))$ – часть окружности. Отсюда следует

$$\rho(w_x, x) \le \rho(x_-, x) = \rho(x, x_+),$$

$$\rho(y, w_y) \le \rho(y, y_+) = \rho(y_-, y).$$

Поэтому

$$\rho(w_x, w_y) \le \rho(w_x, x) + \rho(x, y) + \rho(y, w_y) \le \rho(x, x_+) + \rho(x, y) + \rho(y_-, y).$$

Учитывая, что при $\langle s(t_x), s(t_y)\rangle \ge 0$ справедливо

$$\rho(x, x_+) + \rho(y_-, y) \le \sqrt{2}\, \rho(x, y),$$

получаем

$$\rho(x, y) \ge \rho(w_x, w_y) / (1 + \sqrt{2}) > \varepsilon / (1 + \sqrt{2}).$$

Лемма 4.3.5 доказана.

Доказательство теоремы 4.3.1. Пусть $\{T_n\}_{n=1,2,\dots}$ – последовательность, порождаемая рассматриваемым методом для $C \in \mathscr{C}$, $\{W_n\}_{n=1,2,\dots}$, и $\{Z_n\}_{n=1,2,\dots}$ – соответствующие ей вспомогательные последовательности точек, принадлежащих $\partial(C + B)$ и $P^n := \operatorname{conv} T_n$. По лемме 4.3.4 при $n > \sigma(C+B)/\sqrt{2}$ справедливо $\delta(C, P^n) \le 2$. Тогда по лемме 4.3.2 для любого ν, $0 < \nu < \delta(C, P^n)$, множество W_{n+1} является $(\delta(C, P^n) - \nu)^{1/2}$ -различимым. Так как $(\delta(C, P^n) - \nu)^{1/2} < \sqrt{2}$, то в этом случае из леммы 4.3.5 следует, что множество Z_{n+1} является $[(\delta(C, P^n)$

$- \nu)^{1/2} / (1 + \sqrt{2})]$ -различимым подмножеством $Z(\mathrm{ext}\, C)$. Поэтому

$$\mathrm{card}\,(Z_{n+1}) = n + 1 \le \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\delta(P^n, C) - \nu}}{1+\sqrt{2}}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right).$$

Теорема 4.3.1 доказана.

4.4. Верхняя оценка для скорости сходимости многоугольников наилучшей аппроксимации

Основной результат, касающийся многоугольников наилучшей аппроксимации, сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 4.4.1. *Для* $C \in \mathscr{C}$ *при* $n \ge N_0(C)$ *и* ν*,* $0 < \nu < \delta(\mathscr{P}_n, C)$*, справедливо*

$$n + 1 \le N_{\delta(\mathscr{P}^n, C) - \nu}(C),$$

где $N_0(C) := 1 + \sigma(C+B)/\sqrt{2}$ *и*

$$N_\varepsilon(C) := \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{2}}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right).$$

Доказательство теоремы 4.4.1. Пусть $\{T_n\}_{n=1,2,\dots}$ – последовательность, порождаемая методом ЭЯ для $C \in \mathscr{C}$, $P^n := \mathrm{conv}\, T_n$.

По теореме 4.3.1 для любых $n > \sigma(C+B)/\sqrt{2}$ и ν, $0 < \nu < \delta(P^n, C)$, справедливо

$$n + 1 \le \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\delta(P^n, C) - \nu}}{1+\sqrt{2}}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right).$$

Учтем, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ справедливо $\mathfrak{M}(\varepsilon_1, \cdot) \ge \mathfrak{M}(\varepsilon_2, \cdot)$. Пусть $N_0 := 1 + \sigma(C+B)/\sqrt{2}$. Величина $\delta(\mathscr{P}_n, C)$ определена при $n \ge 3$. В этом случае по свойству 4.3.3 справедливо $P^n \in \mathscr{P}_n(C)$, откуда

$$\delta(P^n, C) \ge \delta(\mathscr{P}_n, C), \; n \ge 3.$$

Но $N_0(C) > 1 + 2\pi/\sqrt{2} > 3$. Поэтому для любых $n \ge N_0$, таких что $\delta(\mathscr{P}_n, C) > 0$, и ν, $0 < \nu < \delta(\mathscr{P}_n, C)$, справедливо

$$n + 1 \le \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\delta(\mathscr{P}_n, C) - \nu}}{1+\sqrt{2}}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right).$$

Теорема 4.4.1 доказана.

Теорема 4.4.1 допускает более простую формулировку, применение которой в численных расчетах, однако, затруднительно. Эта формулировка потребуется далее при получении верхних оценок аппроксимируемости ВКТ.

Теорема 4.4.2. *Для* $C\in\mathscr{C}$ *при* $n \ge N_0(C)$, $\delta(\mathscr{P}_n, C) > 0$ *справедливо*

$$n+1 \le \widetilde{N}_{\delta(\mathscr{P}^n, C)}(C),$$

где $N_0(C) := 1 + \sigma(C+B)/\sqrt{2}$ *и* $\widetilde{N}_\varepsilon(C) := \limsup\limits_{\nu\to+0} N_{\varepsilon-\nu}(C)$.

Доказательство. Действительно, при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ справедливо $\mathfrak{M}(\varepsilon_1,\cdot) \ge \mathfrak{M}(\varepsilon_2,\cdot)$. Поэтому функция $N_\varepsilon(C)$ является невозрастающей. Далее утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 4.4.1.

Теорема 4.4.2 доказана.

Теорема 4.4.2 позволяет дать верхние оценки числа вершин МНА, необходимых для достижения любой заданной точности аппроксимации.

Следствие 4.4.1. *Для* $C\in\mathscr{C}$ *и любых* ε *и* ν, $0 < \nu < \varepsilon$, *справедливо*

$$\min\{n\colon \delta(\mathscr{P}_n, C) \le \varepsilon\} \le \max\{N_0(C), N_{\varepsilon-\nu}(C)\},$$

где $N_0(C)$ *и* $N_\varepsilon(C)$ *определены в формулировке теоремы 4.4.1.*

Доказательство. По теореме 4.4.1 для любых ε, $0 < \varepsilon$, $n \ge N_0$, таких что $\delta(P^n, C) > \varepsilon$, и ν, $0 < \nu < \varepsilon$, справедливо

$$n+1 \le N_{\varepsilon-\nu}(C) = \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon-\nu}}{1+\sqrt{2}}, Z(\operatorname{ext} C)\right).$$

Таким образом,

$$\max\{n\colon \delta(\mathscr{P}_n, C) > \varepsilon\} + 1 \le \max\{N_0, N_{\varepsilon-\nu}\}.$$

Но $\max\{n\colon \delta(\mathscr{P}_n, C) > \varepsilon\} + 1 = \min\{n\colon \delta(\mathscr{P}_n, C) \le \varepsilon\}$.

Следствие 4.4.1 доказано.

Теорема 4.4.1 позволяет дать верхние оценки величины $\delta(\mathscr{P}_n, C)$ для любых значений $n \ge N_0$.

Следствие 4.4.2. *Для* $C\in\mathscr{C}$ *и любых* $n \ge N_0$, *справедливо*

$$\delta(\mathscr{P}_n, C) \le \delta_n(C) := \min\{\varepsilon \ge 0\colon N_\varepsilon(C) \le n\},$$

где $N_0(C)$ *и* $N_\varepsilon(C)$ *определены в формулировке теоремы 4.4.1.*

Доказательство. Прежде всего, в силу непрерывности справа функции $N_\varepsilon(C)$ минимум в определении величины $\delta_n(C)$ достигается. Предположим теперь, что $\delta(\mathscr{P}_n, C) > \delta_n(C)$. Тогда для любого малого ν имеем

$$N_{\delta(\mathscr{P}^n, C)-\nu}(C) \le N_{\delta_n(C)}(C) \le n,$$

что противоречит утверждению теоремы 4.4.2.

Следствие 4.4.2 доказано.

Следствие 4.4.3. *Существуют $C^* \in \mathscr{C}$ и положительное ε^*, такие что для всех ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, и ν, $0 < \nu < \varepsilon$, справедливо*

$$\min\{n: \delta(\mathscr{P}_n, C^*) \le \varepsilon\} = N_{\varepsilon-\nu}(C^*),$$

где величина $N_\varepsilon(C)$ определена в условии теоремы 4.4.1.

Доказательство. Действительно, пусть $P \in \mathscr{P}_N(B)$, $m^t(P) = N$. Обозначим

$$\rho_P := \min\{\rho(p, q): p, q \in M^t(P)\}.$$

Так как $\rho(p, q) \le \rho(Z(p), Z(q))$, то

$$\mathfrak{M}(\mu, \mathrm{Z}(\operatorname{ext} P)) = N, \ 0 < \mu < \rho_P.$$

Так как $P \in \mathscr{P}_N(B)$, то $N_0(P) < N_0(B)$. Поэтому при $N > N_0(B)$ и $\sqrt{\varepsilon} / (1 + \sqrt{2}) < \rho_P$ справедливо $\max\{N_0(P), N_\varepsilon(P)\} = N$. С другой стороны,

$$\min\{n: \delta(\mathscr{P}_n, P) \le \varepsilon\} = N, \ \varepsilon < \delta(\mathscr{P}_{N-1}, P).$$

Итак, при $N > N_0(B)$, $C^* \in \mathscr{P}_N(B)$, $m^t(C^*) = N$ и

$$\varepsilon < \varepsilon^* := \min\{\rho_P^2(1 + \sqrt{2})^2, \delta(\mathscr{P}_{N-1}, C)\}$$

справедливо

$$\min\{n: \delta(\mathscr{P}_n, C) \le \varepsilon\} = \max\{N_0(P), N_{\varepsilon-\nu}(C)\} = N_{\varepsilon-\nu}(C).$$

Следствие 4.4.3 доказано.

Таким образом, верхние оценки в утверждениях теоремы 4.4.1 и следствия 4.4.2 достижимы.

4.5. Верхняя оценка аппроксимационного числа

В настоящем разделе будет получена верхняя оценка нижнего и верхнего аппроксимационных чисел произвольного ВКТ.

Теорема 4.5.1. *Пусть $C \in \mathscr{C}$. Тогда*

$$\underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C) \le \frac{\overline{\operatorname{dm}} \, Z(\operatorname{ext} C)}{2}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы достаточно доказать для $\overline{\alpha}(C)$.

Если существует N такое, что $\delta(\mathscr{P}_N, C) = 0$, значит, $C \in \mathscr{P}$ и $\overline{\alpha}(C) = 0$. Но в этом случае card (ext C) = card (Z(ext C)) $< \infty$. Поэтому $\overline{\mathrm{dm}}\, Z(\mathrm{ext}\, C)) = 0$, так что утверждение теоремы выполнено. Пусть для любого n справедливо $\delta(\mathscr{P}_n, C) \neq 0$.

Покажем, что для любого $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, Z(\mathrm{ext}\, C)/2$ справедливо

$$\overline{a}^{\alpha}(C) := \limsup_{n\to\infty} n\left[\delta(\mathscr{P}_n, C)\right]^{\alpha} = 0.$$

Обозначим $\varepsilon_n := \delta(\mathscr{P}_n, C)$. По теореме 4.4.1 для $n > N_0(C)$ имеем

$$n \leq \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{3}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right).$$

Далее,

$$\limsup_{n\to\infty} n\varepsilon_n{}^{\alpha} \leq \limsup_{n\to\infty} \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{3}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right)\varepsilon_n{}^{\alpha} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \exp_2\left\{\log\varepsilon_n\left[\frac{\log \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{3}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right)}{\log\varepsilon_n} + \alpha\right]\right\} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \exp_2\left\{\log\varepsilon_n\left[\alpha - \frac{\log \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{3}, Z(\mathrm{ext}\, C)\right)}{2\log\frac{3}{\sqrt{\varepsilon_n}}}\right]\right\}.$$

Здесь $\exp_2(x) := 2^x$. Но по определению верхней размерности существует N такой, что при $n \geq N$ справедливо

$$\frac{\log \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{3}, Z(\operatorname{ext} C)\right)}{\log \frac{3}{\sqrt{\varepsilon_n}}} \le \overline{\mathrm{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C) + \frac{\alpha - \overline{\mathrm{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C)}{2}.$$

Поэтому

$$\underline{a}^{\alpha}(C) \le \limsup_{n\to\infty} \exp_2 \left\{ \log \varepsilon_n \left[\alpha - \frac{\overline{\mathrm{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C)}{2} \right] \right\} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n^{\alpha - \frac{\overline{\mathrm{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C)}{2}} = 0$$

при $\alpha > \overline{\mathrm{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C)/2$.

Теорема 4.5.1 доказана.

4.6. Верхняя оценка аппроксимируемости

Целью настоящего параграфа является построение верхней оценки аппроксимируемости. Необходимо сконструировать функцию $e_C(t)$ (не обязательно хаусдорфову) такую, что $\overline{\mathbf{A}}(C) \subseteq \mathbf{H} \setminus \mathbf{H}_{e_C(t)}$, и со свойством $\mathbf{H}_{e_C(t)} \equiv \mathbf{H}$ при $C \in \mathscr{P}$. С этой целью воспользуемся функцией $1/\widetilde{N}_\varepsilon(C)$, где $\widetilde{N}_\varepsilon(C)$ введена в теореме 4.4.2 для $t > 0$, доопределив ее в нуле (значение в нуле должно быть неотрицательным и особой роли не играет):

$$e_C(t) := \begin{cases} \frac{1}{\widetilde{N}_t(C)}, & t > 0; \\ \liminf\limits_{v\to 0+} \frac{1}{\widetilde{N}_v(C)}, & t = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.6.1. *Пусть* $C \in \mathscr{C}$. *Тогда*

$$\underline{\mathbf{A}}(C) \subseteq \overline{\mathbf{A}}(C) \subseteq \mathbf{H} \setminus \mathbf{H}_{e_C(t)}.$$

Доказательство. Необходимо показать, что из $h \in \mathbf{H}_{e_C(t)}$ следует $h \notin \overline{\mathbf{A}}(C)$, то есть $\overline{a}_h(C) := \limsup\limits_{n\to\infty} nh\big(\delta(\mathscr{P}_n, C)\big) = 0$.

Действительно, так как $h = o[e_C]$, то по теореме 4.4.2, обозначая $t_n = \delta(\mathscr{P}_n, C)$, получаем

$$\limsup_{n\to\infty} nh\big(\delta(\mathscr{P}_n,C)\big) \le \limsup_{n\to\infty} \widetilde{N}_{\delta(\mathscr{P}_n,C)}(C)h\big(\delta(\mathscr{P}_n,C)\big) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \widetilde{N}_{t_n}(C)h(t_n) = \limsup_{n\to\infty} \frac{h(t_n)}{e_C(t_n)} = 0 .$$

Теорема 4.6.1 доказана.

Следствие 4.6.1 *Для* $C\in\mathscr{P}$ *справедливо*

$$\mathbf{H}_{e_C(t)} \equiv \mathbf{H},\ \underline{\mathbf{A}}(C) \equiv \overline{\mathbf{A}}(C)` \equiv \varnothing.$$

Доказательство. Как нетрудно видеть, для $C\in\mathscr{P}$ при достаточно малых ε, $0 < \varepsilon$, справедливо

$$N_\varepsilon(C) := \mathfrak{M}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{2}}, Z(\operatorname{ext} C)\right) = m^t(C) .$$

Поэтому $e_C(\tau) = 1/m^t(C) = \mathrm{const}$ для любых малых $\tau \ge 0$. Для любой $h \in \boldsymbol{H}$ в силу непрерывности справа и того, что $h(0) = 0$, справедливо $h(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$. Поэтому $h=o[e_C]$, что и требовалось доказать.

Следствие 4.6.1 доказано.

Таким образом, оценка теоремы 6.1 дает $\overline{\mathbf{A}}(C) \equiv\varnothing$ при $C\in\mathscr{P}$.

4.7. О свойствах одного класса выпуклых дисков со счетным числом вершин

Как уже указывалось, для произвольного $C\in\mathscr{C}$ известные из литературы результаты (0.2.2) и (0.2.1) в двумерном случае дают следующую двустороннюю оценку аппроксимационного числа:

$$\frac{1}{2}\dim\exp^* C \le \underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C) \le \frac{1}{2} . \tag{4.7.1}$$

С другой стороны, результат настоящей главы (теорема 4.5.1) позволяет уточнить верхнюю часть этой оценки:

$$\frac{1}{2}\dim\exp^* C \le \underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C) \le \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\, Z(\operatorname{ext} C) . \tag{4.7.2}$$

Что дает это уточнение, и каково качество этой последней оценки? Пусть, например, $C\in\mathscr{C}^2$. Тогда (4.7.1) и (4.7.2) дают одинаковую точную оценку:

$$\frac{1}{2} \le \underline{\alpha}(C) = \alpha(C) = \overline{\alpha}(C) \le \frac{1}{2}. \tag{4.7.3}$$

Пусть теперь $C\in\mathscr{P}$. Тогда (4.7.1) переходит в следующую бессодержательную оценку:

$$0 \le \underline{\alpha}(C) \le \overline{\alpha}(C) \le \frac{1}{2}, \tag{4.7.4}$$

в то время как результат (4.7.2) оказывается точным:

$$0 \le \underline{\alpha}(C) = \alpha(C) = \overline{\alpha}(C) \le 0. \tag{4.7.5}$$

Насколько точны нижняя и верхняя оценки в более сложных случаях? В настоящем разделе мы рассмотрим некоторый класс выпуклых дисков со счетным числом вершин и нетривиальной (лежащей между 0 и ½) верхней оценкой из (4.7.2) для аппроксимационного числа. Будет рассмотрено также качество нижней оценки из (4.7.2) для тел из этого класса.

Определим множество M_λ ($\lambda > 0$) из класса $\mathscr{C}$ следующим образом. На плоскости $\mathbb{E}^2$ в положительном ортанте рассмотрим четверть окружности $S_+ := \{x^2+y^2=1\colon x\ge 0,\ y\ge 0\}$. Далее на оси y рассмотрим последовательность точек Q_λ^n с координатами $(0, n^\lambda)$, $n=0,1,\ldots$. Каждую из вершин Q_λ^n соединим отрезком D^n с точкой $B(1, 0)$. Точки пересечения отрезков D^n с S_+ обозначим T^n (см. рис. 4.7.1). И определим, наконец, множество M_λ:

$$M_\lambda = \operatorname{conv}\{O, B, \{T^n\}_{n=1}^{\infty}\},$$

где O – начало координат (0, 0). Класс тел M_λ ($\lambda > 0$) обозначим через $\mathscr{M}$.

Теорема 4.7.1.

$$\alpha(M_\lambda) = \frac{1}{2\lambda+2}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\underline{\alpha}(C) \geq \frac{1}{2\lambda + 2}. \tag{4.7.6}$$

а) Рассчитаем координаты точек T_λ^n.

Их координаты t_x, t_y удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} t_x^2 + t_y^2 = 1 \\ \dfrac{1 - t_x}{1} = \dfrac{t_y}{n^\lambda} \end{cases}.$$

Выразив из второго уравнения t_y через t_x : $t_y = n^\lambda - t_x n^\lambda$ и подставив это соотношение в первое уравнение, получим

$$t_x^2 + (n^\lambda - t_x n^\lambda)^2 = 1 \Rightarrow t_x^2 + n^{2\lambda}(1 + t_x^2 - 2t_x) = 1$$
$$\Rightarrow t_x^2(1 + n^{2\lambda}) - 2n^{2\lambda} t_x + (n^{2\lambda} - 1) = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно t_x, получаем

$$T^n = (t_x, t_y): \ t_x = \frac{n^{2\lambda} - 1}{n^{2\lambda} + 1}, t_y = \frac{2n^\lambda}{n^{2\lambda} + 1}.$$

b) Воспользуемся следующей идеей, чтобы оценить снизу величину $\delta(\mathscr{P}_n, M_\lambda)$: для любого многогранника P^n с n вершинами, в том числе и для МНА, найдутся три, идущие подряд вершины T^{k-1}, T^k, T^{k+1} множества M_λ, которые не входят в P^n. Причем самая первая такая тройка заведомо встретится не позже номера $k = 3n$. Итак, идея состоит в том, что каким бы ни был многогранник P^n, заведомо расстояние $\delta(P^n, M_\lambda)$ будет больше, чем расстояние от точки T^k до отрезка, соединяющего точки T^{k-1} и T^{k+1}.

c) Рассчитаем для трех произвольных точек расстояние от одной точки до отрезка, соединяющего две другие точки.

Расстояние от точки $P(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ равно $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Так как уравнение прямой AC выглядит как

$$(c_y - a_y)x + (a_x - c_x)y + (a_y c_x - c_y a_x) = 0,$$

то для трех точек плоскости $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$, $C(c_x, c_y)$ расстояние от точки B до прямой AC равно

$$\rho(B, AC) = \frac{\left|(c_y - a_y)b_x + (a_x - c_x)b_y + (a_y c_x - c_y a_x)\right|}{\sqrt{(c_y - a_y)^2 + (a_x - c_x)^2}}. \qquad (4.7.7)$$

d) Итак, оценим расстояние от точки T^k до отрезка, соединяющего точки $T^{k\text{-}1}$ и T^{k+1}. Для начала примем некоторые обозначения, упрощающие выкладки. Обозначим $T^{k\text{-}1} := A(a_x, a_y)$, $T^k := B(b_x, b_y)$, $T^{k+1} := C(c_x, c_y)$. Тогда координаты a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y имеют следующий вид:

$$a_x = \frac{(k-1)^{2\lambda} - 1}{(k-1)^{2\lambda} + 1},\ a_y = \frac{2(k-1)^{\lambda}}{(k-1)^{2\lambda} + 1};$$

$$b_x = \frac{k^{2\lambda} - 1}{k^{2\lambda} + 1},\ b_y = \frac{2k^{\lambda}}{k^{2\lambda} + 1};$$

$$c_x = \frac{(k+1)^{2\lambda} - 1}{(k+1)^{2\lambda} + 1},\ c_y = \frac{2(k+1)^{\lambda}}{(k+1)^{2\lambda} + 1}.$$

Для упрощения выкладок обозначим:

$$a = (k-1)^{\lambda},\ b = k^{\lambda},\ c = (k+1)^{\lambda},\ a < b < c.$$

Тогда в этих обозначениях координаты точек A, B, C примут вид:

$$a_x = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1},\ a_y = \frac{2a}{a^2 + 1};$$

$$b_x = \frac{b^2 - 1}{b^2 + 1},\ b_y = \frac{2b}{b^2 + 1};$$

$$c_x = \frac{c^2 - 1}{c^2 + 1},\ c_y = \frac{2c}{c^2 + 1}.$$

e) Теперь перейдем непосредственно к вычислению расстояния между B и AC (обозначения **I**, **II**, **III** и **IV** будут определены ниже):

$$\rho(B, AC) = \frac{\left|(c_y - a_y)b_x + (a_x - c_x)b_y + (a_y c_x - c_y a_x)\right|}{\sqrt{(c_y - a_y)^2 + (a_x - c_x)^2}} = \frac{\left|\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III}\right|}{\sqrt{\mathbf{IV}}}.$$

Вычислим для начала разности $(c_y - a_y)$ и $(a_x - c_x)$:

$$c_y - a_y = \frac{2c}{c^2 + 1} - \frac{2a}{a^2 + 1} = \frac{2ca^2 + 2c - 2ac^2 - 2a}{(a^2 + 1)(c^2 + 1)} = \frac{2(ac - 1)(a - c)}{(a^2 + 1)(c^2 + 1)}.$$

$$a_x - c_x = \frac{a^2-1}{a^2+1} - \frac{c^2-1}{c^2+1} = \frac{(a^2-1)(c^2+1)-(a^2+1)(c^2-1)}{(a^2+1)(c^2+1)} =$$

$$= \frac{a^2c^2 - c^2 + a^2 - 1 - a^2c^2 - c^2 + a^2 + 1}{(a^2+1)(c^2+1)} = \frac{2(a^2-c^2)}{(a^2+1)(c^2+1)} = \frac{2(a-c)(a+c)}{(a^2+1)(c^2+1)}$$

.

Подставим выражения для (c_y – a_y) и (a_x – c_x) в формулы для **I**, **II**, **III**, **IV**:

$$\mathbf{I} = (c_y - a_y)b_x = \frac{2(ac-1)(a-c)b^2-1}{(a^2+1)(c^2+1)b^2+1} = \frac{2(ac-1)(a-c)(b^2-1)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

$$\mathbf{II} = (a_x - c_x)b_y = \frac{2(a-c)(a+c)2b}{(a^2+1)(c^2+1)b^2+1} = \frac{4b(a-c)(a+c)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

$$\mathbf{III} = a_yc_x - c_ya_x = \frac{2a}{a^2+1}\frac{c^2-1}{c^2+1} - \frac{2c}{c^2+1}\frac{a^2-1}{a^2+1} =$$

$$= \frac{2ac^2 - 2a - 2a^2c + 2c}{(a^2+1)(c^2+1)} = \frac{2(-ac-1)(a-c)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} =$$

$$= \frac{2(ac-1)(a-c)(b^2-1)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \frac{4b(a-c)(a+c)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} +$$

$$\frac{2(-ac-1)(a-c)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} =$$

$$= \frac{2(a-c)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}((ac-1)(b^2-1) + 2b(a+c) + (-ac-1)(b^2+1))$$

$$= \frac{2(a-c)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}(acb^2 - b^2 - ac + 1 + 2ab + 2bc - acb^2 - b^2 - ac$$

$$- 1) =$$

$$= \frac{2(a-c)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}(2ab - 2ac - 2b^2 + 2bc) =$$

$$= \frac{4(a-c)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\ (a(b-c) - b(b-c)) = \frac{4(a-c)(b-c)(a-b)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}.$$

$$|\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III}| = \frac{4(b-a)(c-b)(c-a)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)},$$

так как $a < b < c$.

$$\mathbf{IV} = (c_y - a_y)^2 + (a_x - c_x)^2 = \left(\frac{2(ac-1)(a-c)}{(a^2+1)(c^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{2(a-c)(a+c)}{(a^2+1)(c^2+1)}\right)^2 =$$

$$= \frac{4(a-c)^2}{(a^2+1)^2(c^2+1)^2}\ ((ac-1)^2 + (a+c)^2) =$$

$$= \frac{4(a-c)^2}{(a^2+1)^2(c^2+1)^2}\ (a^2c^2 + 1 - 2ac + a^2 + c^2 + 2ac) =$$

$$= \frac{4(a-c)^2}{(a^2+1)^2(c^2+1)^2}\ (a^2+1)(c^2+1) = \frac{4(a-c)^2}{(a^2+1)^2(c^2+1)^2}.$$

Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{IV}}} = \frac{\sqrt{a^2+1}\sqrt{c^2+1}}{2(c-a)}.$$

Наконец, объединив все четыре выражения, получаем:

$$\rho(B, AC) = \frac{|\mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III}|}{\sqrt{\mathbf{IV}}} = \frac{4(b-a)(c-b)(c-a)}{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} \frac{\sqrt{a^2+1}\sqrt{c^2+1}}{2(c-a)} =$$

$$= \frac{2(b-a)(c-b)}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{c^2+1}(b^2+1)}.$$

И окончательно раскрыв обозначения, имеем:

$$\rho(T_\lambda^k, T_\lambda^{k-1}T_\lambda^{k+1}) = \frac{2(k^\lambda - (k-1)^\lambda)((k+1)^\lambda - k^\lambda)}{\sqrt{(k-1)^{2\lambda}+1}\sqrt{(k+1)^{2\lambda}+1}(k^{2\lambda}+1)}.$$

Оценим порядок (асимптотику) этого выражения:

$$\frac{2(k^{\lambda}-(k-1)^{\lambda})((k+1)^{\lambda}-k^{\lambda})}{\sqrt{(k-1)^{2\lambda}+1}\sqrt{(k+1)^{2\lambda}+1}(k^{2\lambda}+1)}=$$
$$=\Omega\left(\frac{k^{\lambda-1}k^{\lambda-1}}{k^{\lambda}k^{\lambda}k^{2\lambda}}\right)=\Omega\left(\frac{1}{k^{2\lambda+2}}\right)=\Omega\left(\frac{1}{n^{2\lambda+2}}\right),$$

где $\Omega(n)$ служит для обозначения функций $g(n)$ таких, что существуют константы C и n_0, для которых $g(n) \geq Cn$ при $n \geq n_0$.

Таким образом, получаем окончательный результат:

$$\delta(\mathscr{P}_n, M_\lambda) \geq \rho(T_\lambda^k, T_\lambda^{k-1}T_\lambda^{k+1}) = \Omega\left(\frac{1}{n^{2\lambda+2}}\right),$$

откуда получаем оценку (4.7.6).

Теперь покажем, что

$$\overline{\alpha}(M_\lambda) \leq \frac{1}{2\lambda+2}, \tag{4.7.8}$$

т.е. покажем, что выведенная в начале доказательства теоремы оценка порядка скорости аппроксимации для класса $\mathscr{M}$ на самом деле является не только нижней, но и верхней.

Для этого построим такую последовательность аппроксимирующих многогранников (многоугольников) P^n с числом вершин n, для которой верно:

$$\delta(P^n, M_\lambda) \leq O\left(\frac{1}{n^{2\lambda+2}}\right).$$

Если это будет верно для построенной нами последовательности многогранников, значит, это заведомо будет верно для последовательности МНА.

Пусть для любого n множество вершин T_n^λ многогранника P^{n+1} состоит из начала координат 0, а также некоторого подмножества вершин $\{T^n\}$ с номерами $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Определим это подмножество следующим образом: Если $1 \leq k \leq n/2$, то $i_k = k$. Если $n/2 < k < n$, то

$$i_k = \left[\frac{(n/2)^{1+(1/\lambda)}}{(n-k)^{1/\lambda}}\right]_- .$$

Если $k = n$, то $i_k = +\infty$, то есть $T^{i_n} = T^\infty$.

Докажем, что для определенного таким образом многогранника выполняется требуемый порядок сходимости. Обозначим через $(\partial M_\lambda)^{T^{i_k}T^{i_{k+1}}}$ ($(S)^{T^{i_k}T^{i_{k+1}}}$) участок границы аппроксимируемого множества (внешней окружности S_+) между вершинами с номерами i_k и i_{k+1}. и пусть

$$r_k(M) := \max\{\rho(x,[T^{i_k},T^{i_{k+1}}] : x \in (\partial M_\lambda)^{T^{i_k}T^{i_{k+1}}}\},$$

$$r_k(S) := \max\{\rho(x,[T^{i_k},T^{i_{k+1}}] : x \in (S)^{T^{i_k}T^{i_{k+1}}}\}.$$

Заметим, что:

$$\delta(P^n, M_\lambda) = \max\{r_k(M) : 1 \le k \le n-1\} =$$

$$\max\{r_k(M) : \frac{n}{2} \le k \le n-1\} \le \max\{r_k(S) : \frac{n}{2} \le k \le n-1\}.$$

Теперь покажем, что для любого ребра $T^{i_k}T^{i_{k+1}}$, где $n/2 \le k \le n-1$, этого многоугольника выполняется:

$$r_k(S) = O\left(\frac{1}{n^{2\lambda+2}}\right), \tag{4.7.9}$$

таким образом мы докажем требуемое утверждение. Пусть $f(n)=n^\lambda$. Для максимального расстояния r_{ij} от отрезка $[T^iT^j]$, $i<j<\infty$, соединяющего вершины множества M_λ, до четверть-окружности S_+, описывающей аппроксимирующее множество справедливо равенство

$$r_{ij} = \frac{(f(j)-f(i))^2}{(f^2(i)+1)(f^2(j)+1)+\sqrt{f^2(i)+1}\sqrt{f^2(j)+1}(f(i)f(j)+1)}.$$

Отсюда, с учетом монотонного возрастания $f(n)$, получаем:

$$r_k(S) \le \frac{1}{2}\left(\frac{f(i_{k+1})-f(i_k)}{f^2(i_k)+1}\right)^2.$$

Подставив сюда для $n/2 \le k \le n$-2 значения $f(i_k)$ и $f(i_{k+1})$ и пренебрегая, в силу асимптотики, требованием целочисленности i_k и i_{k+1}, получаем:

$$r_k(S) \le \frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{(n/2)^{\lambda+1}}{(n-k)(n-k-1)}}{\dfrac{(n/2)^{2\lambda+2}}{(n-k)^2}+1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(n/2)^{\lambda+1}(n-k)}{(n-k-1)((n/2)^{2\lambda+2}+(n-k)^2)}\right)^2 \le$$

$$\le 2\left(\frac{(n/2)^{\lambda+1}}{(n/2)^{2\lambda+2}+(n-k)^2}\right)^2 \le 2^{2\lambda+3}\frac{n^{2\lambda+2}}{n^{4\lambda+4}} = O(\frac{1}{n^{2\lambda+2}}).$$

В случае k=n-1 расстояние рассчитывается иначе:

$$r_{n-1}(S) = \frac{1}{f^2(i_{n-1})+f(i_{n-1})\sqrt{f^2(i_{n-1})+1}+1}.$$

Подставив значение $f(i_{n-1})$ и пренебрегая, в силу асимптотики, требованием целочисленности i_{n-1}, получим:

$$r_{n-1}(S) = \frac{1}{(n/2)^{2\lambda+2}+(n/2)^{\lambda+1}\sqrt{(n/2)^{2\lambda+2}+1}+1} <$$

$$< \frac{2^{2\lambda+1}}{n^{2\lambda+2}} = O(\frac{1}{n^{2\lambda+2}}).$$

Итак, мы показали, что для всех ребер многоугольника выполняется требуемая оценка (4.7.9), откуда следует утверждение (4.7.8).

Таким образом, полученная оценка для аппроксимационного числа является не только верхней, но и нижней, и из (4.7.6) и (4.7.8) следует утверждение теоремы.

Теорема 4.7.1 доказана.

Теорема 4.7.2.

$$\overline{\mathrm{dm}}\, Z(\mathrm{ext}\, M_\lambda) \le \frac{1}{\lambda+1}.$$

Доказательство. Напомним, что верхняя метрическая размерность вполне ограниченного множества A определяется как

$$\overline{\mathrm{dm}}A := \limsup_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mathfrak{H}^R_\varepsilon(A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = \limsup_{\varepsilon\to 0+}\frac{\mathfrak{E}_\varepsilon(A)}{\log\frac{1}{\varepsilon}},$$

где $\mathfrak{H}^R{}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ и $\mathfrak{E}_\varepsilon(A) := \log \mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ являются, соответственно, относительной ε-энтропией и ε-емкостью A (под log здесь и далее понимается $\log_2$), а $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ – минимальное число точек ε-сети A и $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A. Из определения рассматриваемого класса аппроксимируемых множеств следует, что $\operatorname{ext} M_\gamma \equiv \{O, B, \{T^n\}_{n=1}^\infty\}$.

Рассмотрим подмножество вершин M_λ, совпадающее с множеством вершин многоугольника, введенного во второй части доказательства теоремы 4.7.1. То есть определим множество T_n^λ состоящим из начала координат 0, а также некоторого подмножества вершин $\{T^n\}$ с номерами $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$. Определим это подмножество следующим образом: если $1\le k\le n/2$, то $i_k = k$; если $n/2<k<n$, то

$$i_k = \left[\frac{(n/2)^{1+(1/\lambda)}}{(n-k)^{1/\lambda}}\right]_- ;$$

если $k = n$, то $i_k = +\infty$, то есть $T^{i_n} = T^\infty$.

Из каждой точки T^k, $n>k\ge n/2$, восстановим нормаль к объемлющей множество M_λ окружности S_+ и обозначим соответствующую точку через $n(T^k)$ $(n(T^k):=2T^k)$. Определим множество $A_n:=Z(T_n^\lambda)$. Имеем

$$\operatorname{card} A_n = n+1. \qquad (4.7.10)$$

Оценим сверху величину радиуса покрытия (см. п. 2.4.1) $\rho^c(Z(\operatorname{ext} M_\lambda), A_n)$.

Достаточно оценить величины $\rho(Z(T^k), A_n)$ для $k>n/2$. Рассмотрим произвольную точку $t:=T^k$, $k>n/2$, не принадлежащую T_n^λ. Пусть она лежит между вершинами T_n^λ с номерами i_k, и i_{k+1}, где $i_k\ge n/2$, которые обозначим через t_k и t_{k+1}.

Рассмотрим сначала случай, когда $i_{k+1}<n$. В силу выпуклости $Z(t_k)$, $n(t_k)$, $Z(t)$, $n(t)$, $Z(t_{k+1})$, $n(t_{k+1})$, $Z(t_{k+2})$, $n(t_{k+2}) \in \partial(B+M_\lambda)$, причем $Z(t)$ и $Z(t_{k+1})$ лежат на границе $\partial(B+M_\lambda)$ между $n(t_k)$ и $n(t_{k+2})$. Поэтому

$$\rho(Z(t), Z(t_{k+1}))\le\rho(n(t_k), n(t_{k+2}))\le 2\rho(t_k, t_{k+2})\le 2(\rho(t_k, t_{k+1})+ \rho(t_{k+1}, t_{k+2})).$$

Поскольку отрезок $[t_k, t_{k+1}]$ – хорда окружности, то из (4.7.9) следует, что $\rho(t_k, t_{k+1})=O(n^{-(\lambda+1)})$, $\rho(t_{k+1}, t_{k+2})=O(n^{-(\lambda+1)})$, откуда получаем

$$\rho(Z(t), Z(t_{k+1}))= O(n^{-(\lambda+1)}).$$

Совершенно аналогично рассматривается случай $i_{k+1}=n$. Здесь $Z(t)$ лежит на границе $\partial(B+M_\lambda)$ между $n(t_{k-1})$ и $n(t_{k+1})$. Поэтому

$$\rho(Z(t), n(t_k))\leq\rho(n(t_{k-1}), n(t_{k+1}))\leq \rho(t_{k-1}, t_k)+\rho(t_k, t_{k+1}),$$

откуда из (4.7.9) и оценки $r_{n-1}(S)$ следует $\rho(Z(t), n(t_{k+1})) = O(n^{-(\lambda+1)})$.

Итак,

$$\rho^c(Z(\text{ext } M_\lambda), A_n) = O(n^{-(\lambda+1)}). \tag{4.7.11}$$

Наконец, из (4.7.10) и (4.7.11) следует, что для всякого, достаточно малого ε существует константа $C>0$ такая, что справедливо

$$\mathfrak{N}^R(\varepsilon, Z(\text{ext } M_\lambda)) \leq C/\varepsilon^{1/(\lambda+1)},$$

что и доказывает теорему.

Теорема 4.7.2 доказана.

Рассмотрим теперь качество оценки (4.7.2) для класса тел $\mathcal{M}$. В нашем случае множество

$$\text{exp* } M_\lambda \equiv \{O, B, \{T^n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

– счетно, поэтому

$$\dim \text{exp* } M_\lambda = 0 \tag{4.7.12}$$

(см., например, (0.2.3) и [59]). Подставляя в (4.7.2) значение для аппроксимационного числа M_λ, полученное из теоремы 4.7.1, его нижнюю оценку (4.7.12), полученную исходя из результата (4.1.5) [15], и его верхнюю оценку, полученную с помощью теорем 4.5.1 и 4.7.2, получаем

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\dim \exp^* M_\lambda \leq \alpha(M_\lambda) = \frac{1}{2\lambda+2} \leq \\ \leq \frac{1}{2}\overline{\text{dm}}\, Z(\text{ext } M_\lambda) = \frac{1}{2\lambda+2} \end{aligned} \tag{4.7.13}$$

Из (4.7.13) видно, что в случае данного класса оценка аппроксимационного числа, которую дает теорема 4.5.1, является точной, в то время как нижняя оценка (4.1.5) не дает полезной информации.

Следствие 4.7.1. *Для любого* α, $0\leq\alpha\leq 1/2$, *существует* $C\in\mathcal{C}$, *такое что* $\alpha(C)=\alpha$ *и*

$$\alpha(C)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\,Z(\mathrm{ext}\,C)\,.$$

Доказательство. Для $0<\alpha<1/2$ результат следствия вытекает непосредственно из (4.7.13). Для $\alpha=1/2$ – из того факта, что при $C\in\mathscr{C}^2$ имеем

$$\overline{\mathrm{dm}}\,Z(\mathrm{ext}\,C)=\overline{\mathrm{dm}}\,Z(\partial C)=d-1\,,$$

причем $\alpha(C)=1/2$ (см., например, (4.1.3)). Наконец, для $\alpha=0$ имеем $\overline{\mathrm{dm}}\,Z(\mathrm{ext}\,P)=0$ и $\alpha(P)=0$ при $P\in\mathscr{P}$.

Следствие 4.7.1 доказано.

Следующее следствие дополняет результат работы [157] (касающийся величины $\underline{\alpha}(C)$). Оно вытекает из следствия 4.7.1, свойств класса тел $\mathscr{M}$ и определения класса $\mathscr{C}(\alpha)$, данного в параграфе 0.2.

Следствие 4.7.2. *Для любого* α, $0\le\alpha<1/2$, *существует* $C\in\mathscr{C}$ *со счетным числом вершин и такое, что* $\alpha(C)=\alpha$, *и, таким образом,* $\mathscr{C}(\alpha)\neq\varnothing$.

Следствие 4.7.3. *Метод ЭЯ оптимален по порядку при аппроксимации тел из класса* $\mathscr{M}$.

Это следствие непосредственно вытекает из следствия 4.7.1, теоремы 4.5.1 и теоремы 4.5.1.

В настоящей главе в двумерном случае приведено наиболее полное во всей диссертации исследование аппроксимационных свойств ВКТ, включающее исследование не только порядка скорости сходимости МНА (аппроксимационного числа), но и аппроксимируемости (множества функциональных зависимостей точности аппроксимации от сложности описания МНА, которые могут иметь не только полиномиальный вид).

Как продемонстрировано в последнем параграфе (теорема 4.7.2), результат настоящей главы, касающийся скорости сходимости МНА, позволяет в двумерном случае численно оценивать аппроксимационное число и аппроксимируемость конкретных негладких выпуклых тел. При этом получаемая оценка может оказаться точной.

Реализация метода ЭЯ во многих случаях (например, для рассмотренного в главе класса M_λ) совпадает с методом УО, уточненным в смысле выбора присоединяемой *экстремальной* точки. В этом случае уточненный метод УО дает оптимальную скорость сходимости, определяемую аппроксимационным числом тела.

Заключение

В работе систематически изложены основные положения теории оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Введены классы адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, основанные на адаптивных схемах восполнения и отсечения. Введено понятие H-методов отсечения и восполнения и исследованы их свойства. Введено понятие более узкого класса H_1-методов отсечения и восполнения с более сильными свойствами. Для H- и H_1-методов получены верхние оценки скорости сходимости, исследована их эффективность. Приведены и исследованы конкретные методы полиэдральной аппроксимации, принадлежащие к рассматриваемому классу. Доказана оптимальность по порядку числа вершин (методы восполнения) и числа гиперграней (методы отсечения) для гладких (H-методы) и произвольных (H_1-методы) тел. В гладком случае доказана независимость эффективности H_1-методов восполнения от свойств аппроксимируемых тел.

Литература

1. Minkowski H. Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. P. 447-496.

2. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948.

3. Мухамедиев Б. М. Приближенный метод решения зада-чи вогнутого программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 3. С. 727-732.

4. Sonnevend G. Asymptotically optimal, sequential methods for the approximation of convex, compact sets in R^n in the Hausdorff metrics // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai. 1980. V. 35 (2). P. 1075-1089.

5. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.

6. Поспелов Г.С., Ириков В.А. Программно-целевое планирование и управление. М.: Советское радио, 1976.

7. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999.
8. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
9. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Feasible Goals Method Search for Smart Decisions. M.: ВЦ РАН, 2001.
10. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
11. Gruber P.M. Approximation of convex bodies // Convexity and its Applics. Basel etc.: Birkhäuser, 1983. P. 131-162.
12. Gruber P.M. Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
13. Dudley R. Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // J. Approximat. Theory. 1974. V. 10. P. 227-236; Corr., ibid, 1979. V. 26. P. 192-193.
14. Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д. О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский матем. ж. 1975. Т. 26. № 5. С.1110-1112.
15. Schneider R., Wieacker J.A. Approximation of convex bodies by polytopes // Bull. London Math. Soc. 1981. V. 13. P. 149-156.
16. Gruber P. M., Kenderov P. Approximation of convex bodies by polytopes // Rendiconti Circolo mat. Palermo. Ser. II. 1982. T. 31. № 2. P. 195-225.
17. Самсонов С. Л. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1983. № 1. С. 68-71.
18. Каменев Г.К. Исследование итерационных методов аппроксимации выпуклых множеств многогранниками. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
19. Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К. Экспериментальное исследование аппроксимации выпуклых тел многогранниками. М.: ВЦ АН СССР, 1991.

20. Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К. Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 6. С. 857-866.
21. Lopez M.A., Reisner Sh. Algorithms for Polyhedral Approximation of Multidimensional Ellipsoids // J. Algorithms. 1999. V. 33. P. 140-165.
22. Бурмистрова Л.В. Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками. М.: ВЦ РАН, 1999.
23. Бурмистрова Л.В. Экспериментальный анализ нового адаптивного метода полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и ма-тем. физ. 2003. Т.43. № 3. С. 328-346.
24. Ефремов Р.В. Экспериментальный анализ методов внешней полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: ВЦ РАН, 2002.
25. McClure D. E., Vitale R. A. Polygonal approximation of plane convex bodies // J. Math. Analys. and Appl. 1975. V. 51. № 2. P. 326-358.
26. Schneider R. Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder // Math. Ann. 1981. Bd. 256. № 3, S. 289-301.
27. Gruber P. M. Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes // Math. Ann. 1988. Bd. 281. № 2. S. 229-245.
28. Gruber P.M. Volume approximation of convex bodies by circumscribed polytopes. In: Applied Geometry and Discrete Mathematics. The Victor Klee Festschrift, DI-MACS Ser., 1991, Vol. 4 (Amer. Math.Soc., Providence, RI), pp. 309-317.
29. Gruber P.M. Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies I // Forum Math. 1993. N5. P. 281-297.
30. Gruber P.M. Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies II. // Forum Math. 1993. N5. P. 521-538.
31. Ludwig M. A Characterization of Affine Length and Asymptotic Approximation of Convex Discs // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1999. V. 69. P. 75-88.
32. Ludwig M. Asymptotic approximation of smooth convex bodies by general polytopes // Mathematika. 1999. V. 46. P. 103-125.
33. Böröczky K.Jr. Approximation of General Smooth Convex Bodies // Advanc. Math. 2000. V. 153. P. 325-341.
34. Васильев И. С. О неулучшаемых оценках аппроксимации сильно выпуклых тел // Вопр. кибернетики. 1988. Т. 136. С. 49-56.

35. Sonnevend G. An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on [0, 1] // Appl. Math. and Optimizat. 1983. № 10. P. 127-142.
36. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.
37. Каменев Г. К. Об одном классе адаптивных схем ап-проксимации выпуклых тел многогранниками // Матем. моделирование и дискретная оптимизация. М.: ВЦ АН СССР, 1988. С. 3-9.
38. Каменев Г. К. Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.
39. Каменев Г.К. Об эффективности хаусдорфовых алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 5. С. 796-805.
40. Каменев Г.К. Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 4. С. 608-616.
41. Каменев Г.К. Алгоритм сближающихся многогранников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 4. С. 134-147.
42. Каменев Г.К. Эффективные алгоритмы внутренней полиэдральной аппроксимации негладких выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 3. С. 446-450.
43. Каменев Г.К. Сопряженные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 9. С. 1351-1367.
44. Каменев Г.К. Метод полиэдральной аппроксимации выпуклых тел, оптимальный по порядку числа расчетов опорной и дистанционной функций // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388. № 3. С. 309-311.
45. Каменев Г.К. Самодвойственные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 8. С. 1123-1137.
46. Каменев Г.К. Методы аппроксимации выпуклых тел многогранниками и их применение для построения и анализа обобщенных множеств достижимости: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ, 1986. 219 с.

47. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 11. С. 1751-1760.
48. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
49. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
50. Gruber P.M. Approximation by convex polytopes. In Polytopes: Abstract, Convex and Computational. Kluver Acad. Publ.: 1994, pp. 173-203.
51. Schneider R. Polyhedral approximation of smooth convex bodies // J. Math. Analys. and Appl. 1987. V. 128. № 2. P. 470-474.
52. Fejes Tóth L. Approximation by polygons and polyhedra // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. № 4. P. 431-438.
53. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
54. Конвей Дж., Слоен Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.
55. Böröczky K.Jr. About the Error Term for Best Approximation with Respect to the Hausdorff Related Metrics // Discrete Comput. Geom. 2001. V. 25. P. 293-309.
56. Gruber P.M. Error of Asymptotic Formula for Volume Approximation of Convex Bodies in E^d // Monatsh. Math. 2002. V. 135. P. 279-304.
57. Каменев Г.К. Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 10. С. 1464-1474.
58. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Ин. Литерат., 1948.
59. Mattila P. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge Univercity Press. 1995. P. 1-343.
60. Gruber P.M. Comparisons of best and random approximation of convex bodies by polytopes // Rendiconti Circolo mat. Palermo. Ser. II. 1997. Suppl. 50. P. 189-216.
61. Müller J.S. Step by step approximation of plane convex bodies // Arch. Math. 1992. V. 58. P. 606-610.
62. Gordon Y., Meyer M., Reisner Sh. Volume approximation of convex bodies by polytopes – a constructive method // Studia Mathematica. 1994. III. № 1. P. 81-95.
63. Gordon Y., Meyer M., Reisner Sh. Constructing a Polytope to Approximate a Convex Body // Geometriae Dedicata. Kluver Acad. Publ.:

1995. V. 57. P. 217-222.
64. Бушенков В. А. Численный алгоритм построения проекций многогранных множеств // Аэрофиз. и прикл. ма-тем. М.: МФТИ, 1981. С. 108-110.
65. Бушенков В. А., Лотов А. В. Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
66. Бушенков В. А. Итерационный метод построения ортогональных проекций вы¬пуклых многогранных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 9. С. 1285-1292.
67. Лотов А.В. Методы анализа математических моделей управляемых систем на основе построения множества достижимых значений показателей качества управления. Дис. на соискан. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
68. Cohoп J. Multiobjective programming and planning. N. Y.: Acad. Press, 1978.
69. Appino P.A. A solution technique for approximating the non-inferior set of three objective linear programs: Ph. D. Diss. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins Univ., 1984.
70. Rote G. The Convergence Rate of the Sandwich Algorithm for Approximating Convex Functions. Techn. Univer. Graz. Austria. 1992.
71. Richardson T.J. Approximation of Planar Convex Sets from Hyperplane Probes // Discrete Comput. Geom. 1997. V. 18. P. 151-177.
72. Юдин Д. Б., Немировский А. С. Оценка информационной сложности задач математического программирования // Экономика и матем. методы. 1976. Т. 12. Вып. 1. С. 128-142.
73. Button L., Wilker J.-B. Cutting exponents for polyhedral approximations to convex bodies // Geometriac De-dicata. 1978. V. 7. № 4. P. 417-430.
74. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек при приближенных вычислениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 9. С. 1386-1396.
75. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек на основе триангуляции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 8. С. 1231-1242.
76. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки множества точек в виде системы линейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем.

физ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1213-1228.
77. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
78. Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967.
79. Koutroufiotis D. On Blaschke's rolling theorems // Arch. Math. 1972. V. 23. P. 655-660.
80. Schneider R. Closed convex hypersurfaces with curvature restrictions. // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. P. 1201-1204.
81. Brooks 1.N., Strantzen J.B. Blaschke's rolling theorem in Rn // Mem. Amer. Math. Soc. Providence. 1989. V. 80. № 405. P. 2-5.
82. Leichtweiβ K. Convexity and Differential Geometry. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Science Publishers B.V. 1993. Ch. 4.1. P. 1045-1080.
83. Бурмистрова Л.В. Исследование нового метода аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 10. С. 1475-1490.
84. Kamenev G.K. One class of effective step-by-step algorithms for polyhedral approximation // Konvexgeometrie. Mat. Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht. 1997. № 44. P. 12-14.
85. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования. М.: Гос. Изд-во Физ. – Мат. Лит., 1959.
86. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
87. Ефремов Р.В., Каменев Г.К. Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 23-32.
88. Ефремов Р.В. Априорная оценка эффективности адаптивных алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 1. С. 149-160.
89. Schneider R. Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory. Cambridge, 1993.
90. Ефремов Р.В. Анализ методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел и их применение в задачах многокритериальной оптимизации. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 2003.
91. Ефремов Р.В., Каменев Г.К., Лотов А.В. Построение экономного описания многогранника на основе теории двойственности выпук-

лых множеств, Доклады АН, 2004. Т.399, N5.
92. Брусникина Н.Б., Каменев Г.К. О сложности и методах полиэдральной аппроксимации выпуклых тел с частично гладкой границей// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005. Т. 45, N9, С. 1577-1587.
93. Popov V.A. Approximation of convex figures // C.R. Acad. Bulgare. Sci. 1968. V. 21. P. 993-995.

Содержание