Полиэдральная аппроксимация шара Методом Глубоких Ям с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры

Г.К.Каменев
Вычислительный центр РАН, gkk@ccas.ru

Аннотация
В работе рассматривается задача полиэдральной аппроксимации шара. Известно, что норма *f*-вектора многогранника растет от отклонения в метрике Хаусдорфа не медленнее, чем со скоростью порядка (1-*d*)/2, где *d* – размерность пространства. В работе рассматривается итеративный метод Глубоких Ям, состоящий в последовательном пополнении вершин многогранника их глубокими метрическими ямами на поверхности шара. Показано, что мощность гранной структуры выпуклой оболочки такой системы будет иметь оптимальный порядок роста. Получены явные выражения для констант, зависящие от размерности пространства. Приведен пример алгоритма, реализующего метод Глубоких Ям.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00599, 09-01-12098 и 10-01-00199), ПФИ Президиума РАН П-14 и ПФИ ОМН РАН №3.

1. Аппроксимация многогранниками и метрические сети

Аппроксимация многогранниками является традиционным средством теории многомерных выпуклых множеств. Первые аппроксимационные теоремы восходят к Минковскому [1]. Эти утверждения широко использовались (см., например, [2]) для получения результатов, связанных с геометрией выпуклых поверхностей. Задача аппроксимации с минимизацией сложности аппроксимирующих многогранников в виде числа элементов гранной структуры, таких как вершины или гиперграни, также была исследована. Были получены асимптотические оценки минимального числа вершин или гиперграней, необходимых для получения заданной точности аппроксимации (см., например, обзоры в [3, 4]). Вместе с тем о полной мощности гранной структуры аппроксимирующих многогранников известно значительно меньше. Так в работах [5] получены для размерности пространства большей или равной четырем оценки зависимости точности аппроксимации от ограничения на число флагов, т.е., в частности, от ограничения на максимальное число граней произвольной размерности. Верхние оценки получены для гладких тел с точностью до неопределенных констант. В [6] в трехмерном случае получена асимптотика для числа ребер (1-мерных граней). Из формулы Эйлера следуют в этом случае оценки, аналогичные, полученным в [5].

Для выпуклых тел, имеющих гладкую границу, задача полиэдральной аппроксимации оказывается связанной с построением метрических сетей на их поверхности. Выпуклая оболочка такой сети дает аппроксимирующий многогранник. Так оказывается, что выпуклая оболочка центров системы шаров, дающих оптимальное покрытие поверхности в метрике второй квадратичной формы, асимптотически приводит к отклонению в метрике Хаусдорфа, совпадающему с отклонением многогранников наилучшей аппроксимации (см. [3, 4]).

Для негладких тел задача полиэдральной аппроксимации оказывается связанной с построением метрических сетей на поверхности внешних к аппроксимируемому тел, таких как объемлющий шар [13] или внешне-параллельное тело [14]. Этот вопрос значительно менее изучен (см., например, результат для дисков в [15] и [17]).

Наряду с задачей оценки минимального числа граней или вершин, необходимых для достижения заданной точности, стоит практически важная задача разработки оптимальных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел. Такая задача возникает во многих приложениях: в теории оптимального управления [7], кодировании изображений [8], математическом моделировании [9]. Важное практическое значение вычислительные алгоритмы полиэдральной аппроксимации имеют в задачах многокритериальной оптимизации и принятия решений [10], [11]. В рамках этих исследований был предложен [12] и разработан (см. [10], [11]) адаптивный метод «Уточнения Оценок», который показал себя практически пригодным для аппроксимации выпуклых тел большой размерности.

В [16] предложен метод Глубоких Ям – универсальный адаптивный итерационный метод аппроксимации вполне ограниченных множеств в произвольных метрических пространствах, основанный на построении близких к оптимальным метрических сетей (построения эффективных покрытий и упаковок метрических шаров). Метод Глубоких Ям состоит в последовательном пополнении аппроксимирующей базы глубокими метрическими ямами аппроксимируемого множества. В [16] показано, что при заданной мощности метрической сети метод Глубоких Ям позволяет строить аппроксимацию с радиусом покрывающих шаров не более чем вдвое большим минимально возможного. В [17] показано, что при аппроксимации гладких тел метод «Уточнения Оценок» порождает на поверхности тела последовательность вершин, асимптотически близкую к последовательности Глубоких Ям в метрике второй квадратичной формы. Как показано в [17], последовательности многогранников, соответствующие последовательностям Глубоких Ям, являются оптимальными по порядку числа вершин аппроксимирующих многогранников. В [18, 19] исследован рост числа гиперграней в классе методов, порождающих последовательности, близкие к последовательностям Глубоких Ям. В этих работах показано, что порядок роста числа гиперграней в выпуклых оболочках точек из этих последовательностей тот же, что и порядок роста числа вершин, и является оптимальным.

В настоящей работе рассматривается задача полиэдральной аппроксимации шара. Известно [3, 4], что норма f-вектора многогранника (в частности, число вершин или гиперграней) растет от отклонения в метрике Хаусдорфа не медленнее, чем со скоростью порядка $(1\text{-}d)/2$, где d – размерность пространства. В работе рассматривается итеративный метод Глубоких Ям, состоящий в рассматриваемом случае в последовательном пополнении вершин многогранника их глубокими метрическими ямами на поверхности шара. Показано, что мощность гранной структуры выпуклой оболочки такой системы будет иметь оптимальный порядок роста. Получены явные выражения для констант, зависящие от размерности пространства.

2. Основные определения

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$. Обозначим через $\mathscr{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел. Через ∂C обозначим границу тела C, через int C – множество его внутренних точек, через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем. Пусть $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P\in\mathscr{P}$ через $M^t(P)$ обозначим множество его вершин (граней нулевой размерности), а через $m^t(P)$ – число его вершин, через $M^f(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граням размерности $(d\text{-}1)$), а через $m^f(P)$ – число его гиперграней. Обозначим через $\mathbf{C}(n, k)$ число сочетаний из n по k, через card T – мощность множества T, через $\lfloor\cdot\rfloor$ – ближайшее целое снизу. Обозначим через $B^d(r, z)$ шар в $\mathbb{E}^d$ радиуса r с центром в z, а через $B^d(r)$ шар радиуса r с центром в начале координат, единичный шар обозначим через B^d, и пусть $S^{d\text{-}1} := \partial B^d$. Обозначим через cl операцию замыкания и через aff и conv – операции взятия аффинной и выпуклой оболочки, соответственно. Через proj (x, X) обозначим проекцию точки x на множество X. Конусом видимости $K(p, C)$ тела C из точки $p\notin C$ назовем минимальный конус с вершиной в p, содержащий C. Для $C\in\mathscr{C}$ и $u\in\mathbb{E}^d\setminus\{0\}$ введем обозначения опорной функции $g(u, C) := \max\ \{<u, x>: x\in C\}$, опорной гиперплоскости $l(u, C) := \{x\in\mathbb{E}^d: <u, x> = g(u, C)\}$ и множества точек касания $T(u,C) := \{p\in\partial C: <u, p> = g(u, C)\}$.

Пусть A и U – непустые подмножества метрического пространства $\mathbb{R}$ с метрикой ρ. Множество U называется метрической *ε-сетью* для A, если любая точка A расположена на расстоянии не большем, чем ε, от некоторой точки U. Множество U называется *ε-различимым*, если любые две его различные точки находятся на расстоянии, большем, чем ε. Множество A называется *вполне ограниченным*, если для любого положительного ε существует конечная ε-сеть для A. Будем считать оптимальными ε-сеть с минимально возможным числом элементов и ε-различимое подмножество с максимальным числом элементов.

Для вполне ограниченного A обозначим через $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ минимальное число точек ε-сети A, через $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$ – минимальное число множеств диаметра не более чем 2ε, покрывающих множество A, и через $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ – максимальное число точек ε-различимого подмножества A. (Величины $\mathfrak{H}_\varepsilon(A) := \log\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{H}^R_\varepsilon(A) := \log\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$ и $\mathfrak{C}_\varepsilon(A) := \log\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ называются, соответственно, ε-энтропией, относительной ε-энтропией и ε-емкостью A, где под log здесь и далее понимается $\log_2$). Отметим некоторые свойства введенных функций [20]: $\mathfrak{N}(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{N}^R(\varepsilon, A)$, $\mathfrak{M}(\varepsilon, A)$ как функции ε являются невозрастающими и непрерывными справа; при этом имеют место следующие неравенства:

$$\mathfrak{M}(2\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}(\varepsilon, A) \le \mathfrak{N}^R(\varepsilon, A) \le \mathfrak{M}(\varepsilon, A).$$

Пусть T – конечное подмножество A (база покрытия) и card(T) – его мощность. Для $x\in A$ обозначим $\rho(x, T) := \min\ \{\rho(x, t): t\in T\}$ и пусть $\rho(A, T) := \sup\ \{\rho(x, T): x\in A\}$. Для ε, $0 < \varepsilon$, пусть $[T]_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}: \rho(x,T) \le \varepsilon\}$, и $(T)_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}: \rho(x,T) < \varepsilon\}$. Для заданного γ, $0 < \gamma \le 1$, обозначим

$$\mathrm{DH}_\gamma(T) := \{x\in A: \rho(x, T) \ge \gamma\,\rho(A, T)\}.$$

Точки $x \in \mathrm{DH}_1(T)$ в [21] (стр. 5) называются глубокими ямами (ГЯ). Множество $\mathrm{DH}_1(T)$ назовем множеством ГЯ базы T и обозначим его через $\mathrm{DH}(T)$, а множество $\mathrm{DH}_\gamma(T)$ назовем множеством ГЯ уровня γ.

3. Метод Глубоких Ям (МГЯ)

Опишем класс итерационных алгоритмов построения ε-сетей и ε-различимых подмножеств для вполне ограниченных множеств.

МЕТОД ГЛУБОКИХ ЯМ

Пусть $t_1 \in A$ и $T_1 := \{t_1\}$. Пусть множество T_n построено и $\rho(A, T_n) > 0$. Тогда $T_{n+1} := T_n \cup \{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1} \in \mathrm{DH}_\gamma(T_n)$.

Конкретный алгоритм МГЯ состоит в уточнении способа выбора $t_1 \in A$ и $t_{n+1} \in \mathrm{DH}_\gamma(T_n)$. Последовательность множеств $\{T_n\}_{n=1,2\ldots}$, порождаемую МГЯ для множества A с константой γ, будем называть $\mathrm{DH}(\gamma, A)$-последовательностью. Для $\gamma = 1$ будем говорить о последовательности ГЯ и обозначать ее через $\mathrm{DH}(A)$.

4. Внутренне-геометрические свойства последовательности ГЯ

Рассмотрим поверхность сферы S^{d-1} как метрическое пространство $\mathbb{R}$ с внутренней метрикой, совпадающей с минимальным углом между точками. Пусть дана последовательность $\mathrm{DH}(S^{d-1})$.

Перечислим некоторые свойства последовательности $\mathrm{DH}(S^{d-1})$. Пусть $\rho_n := \rho(t_{n+1}, T_n)$. Обозначим через $A(d, \varphi)$ максимальное число непересекающихся открытых сферических шапочек углового диаметра φ (наибольшую мощность сферического кода с минимальным углом φ) [21].

Свойство 1. $\mathfrak{N}^R(\rho_n, S^{d-1}) \le n \le A(d, \rho_n)$.

Оценкам $\mathfrak{N}^R(\cdot, S^{d-1})$ и $A(d, \cdot)$ посвящена обширная литература [21]. В частности при $\varphi < 63°$ и $d \to \infty$ справедливо

$$\frac{1}{d}\log_2 A(d,\varphi) \le -\frac{1}{2}\log_2(1-\cos\varphi) - 0.0990 .$$

В силу того, что в малом поверхность сферы евклидова, получаем

Свойство 2.

$$\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \le \liminf_{n\to\infty} n\rho_n{}^{d-1};$$

$$\limsup_{n\to\infty} n\rho_n{}^{d-1} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{d-1} .$$

Здесь ϑ_l есть плотность покрытия и δ_l – плотность упаковки пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса (см. [22]), $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара. Заметим, что точно известны только величины $\delta_1=1$, $\delta_2=\pi/\sqrt{12}$ и $\vartheta_1=1$, $\vartheta_2=2\pi/\sqrt{27}$. Оценки величин ϑ_l и δ_l могут быть найдены, например, в [21]. В частности при $d\to\infty$ справедливо

$$\frac{d}{e\sqrt{e}} \le \vartheta_{d-1},\ \delta_{d-1} \le \frac{1}{2^{0.5990d}} .$$

5. Внешне-геометрические свойства последовательности ГЯ

Свойства 1, 2 относятся к «внутренней» геометрии поверхности сферы. Рассмотрим свойства многогранников с вершинами в точках последовательности ГЯ с точки зрения «внешней» геометрии – исследуем точность аппроксимации ими единичного шара B^d в объемлющем пространстве $\mathbb{E}^d$, а также комбинаторные свойства: число их граней произвольной размерности. Обозначим $P_n := \mathrm{conv}\, T_n$.

Свойство 3. $P_{2d-1} \in \mathscr{P}$.

Это свойство следует из того, что для любого подмножества S^{d-1}, лежащего в одной гиперплоскости, всегда имеется глубокая яма на расстоянии, не меньшем $\pi/2$, и $A(d, \pi/2)=2d$.

Обозначим через h_n расстояние по Хаусдорфу между P_n и B^d.

Свойство 4. $h_n = 1 - \cos\rho_n$.

Действительно, рассмотрим направление, на котором между опорными гиперплоскостями к P_n и B^d возникает расстояние h_n. Соответствующая опорная к P_n гиперплоскость содержит хотя бы одну точку T_n, которую обозначим через t. Пусть p – точка касания шара соответствующей гиперплосткостью. Поэтому $\rho(t, p)= \rho_n$, откуда получаем искомое свойство.

Таким образом, при $n\to\infty$ справедливо $\rho_n \approx (2h_n)^{1/2}$. Из свойства 2 и свойства 4 вытекает

Свойство 5.

$$\vartheta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{-(d-1)/2} \le \liminf_{n\to\infty} nh_n{}^{(d-1)/2};$$

$$\limsup_{n\to\infty} nh_n{}^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} .$$

6. Гранная структура многогранников, порождаемых МГЯ

Исследуем свойства гранной структуры многогранников P_n, порождаемых МГЯ Очевидно, что число вершин P_n есть n. Согласно [18], [19], рост числа $m^f(P_n)$ гиперграней P_n может быть оценен как

$$\limsup_{n\to\infty} m^f(P_n) h_n^{(d-1)/2} \le$$
$$\le \vartheta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2} \mathbf{C}\left(5^d, d-1\right).$$

Из сравнения этого результата и свойства 5 видно, что порядок роста числа гиперграней в P_n совпадает с порядком роста числа вершин и является оптимальным. В настоящей работе мы улучшим константу в последней оценке, а также получим новые верхние оценки на рост числа граней других размерностей.

Обозначим через $\Phi(P)$ множество всех граней многогранника P. Обозначим через $\Phi_i(P)$ множество i-мерных граней многогранника P. Пусть $F\in\Phi_{d-1}(P)$. Аффинную оболочку $aff\, F$ гиперграни F можно представить в виде пары $(r_F; u_F)$, где $u_F\in M^f(P)$ и r_F такое, что для любой точки $q\in aff\, F$ выполняется $\langle u_F, q\rangle = r_F$.

Обозначим

$$\partial P_p^+ := \{F\in\Phi_{d-1}(P): \langle u_F, p\rangle > r_F\},$$
$$\partial P_p^0 := \{F\in\Phi_{d-1}(P): \langle u_F, p\rangle = r_F\},$$
$$\partial P_p^- := \{F\in\Phi_{d-1}(P): \langle u_F, p\rangle < r_F\}.$$

Пусть

$$M^t(p, P) := \{t\in M^t(P),\ t\in F_1\cap F_2\colon F_1\in\partial P_p^+,\ F_2\in\partial P_p^-\}$$

и $m^t(p, P) := \mathrm{card}\, M^t(p, P)$. Из [23] вытекает

Лемма 1 [19]. *Пусть $P\in\mathscr{P}$, $p\notin P$, $P' = \mathrm{conv}\,\{p, P\}$. Тогда*

$$m^f(P') - m^f(P) \le \mathbf{C}(m^t(p, P), d\text{-}1).$$

Обозначим через $f^i := \mathrm{card}\,(\Phi_i(P))$. Тогда $f(P) := (f^i)_{i=0,\ \dots\ d-1}$ будет представлять из себя f-вектор (или вектор чисел граней) многогранника P. Обозначим $f_n^i := \mathrm{card}\,(\Phi_i(P_n))$ и $f_n := f(P_n)$.

Новая грань любой размерности принадлежит обязательно хотя бы одной новой гиперграни. Так как i-мерная грань натянута по крайне мере на i+1 вершину, то справедлива

Лемма 2. *Пусть $P\in\mathscr{P}$, $p\notin P$, $P' = \mathrm{conv}\,\{p, P\}$. Тогда для d-2≥i≥1*

$$f^i(P') - f^i(P) \le \mathbf{C}(m^t(p, P), i+1).$$

Обозначим $T(n) := M^t(t_{n+1}, P_n)$ и оценим для последовательности $\{P_n\}$ величину $m_n := m^t(t_{n+1}, P_n)$.

Лемма 3. *Для любых малого $\nu>0$ и целого $K>2$ существует $N>0$ такое, что для любого $n\ge N$ выполняется*

$$m_n \le K\, A(d\text{-}1, \varphi(K, \nu))$$

где $\cos\varphi(K, \nu) = 7/8+1/(2K^2) + \nu$.

Доказательство. Для $h_n < 1$ обозначим $\Omega_B(n) := \mathrm{cl}\,(S^{d-1} \setminus K(t_{n+1}, B^d(1 - h_n)))$. В силу того, что по лемме 2 из [24] (лемма 1.3.4 из [17]) выполняется включение $B^d(1 - h_n)\subset P_n$, так что

$$K(p, B^d(1 - h_n)) \subset K(t_{n+1}, P_n).$$

Рассмотрим множество $\Omega_1(n) := \mathrm{cl}\,(S^{d-1} \setminus K(t_{n+1}, P_n))$. Из определения $T(n)$ следует, что $T(n)\subset\Omega_1(n)$, при этом $\Omega_1(n)\subset\Omega_B(n)$. Откуда

$$T(n) \subset \Omega_B(n).$$

Пусть l – касательная гиперплоскость к B^d в точке t_{n+1}. Проекция $\Omega_B(n)$ на l есть d-1 радиуса $R := 2\rho_n + o(\rho_n)$. Пусть $T'(n)$ есть проекция $T(n)$ на l. Точки $T'(n)$ отстоят друг от друга на расстоянии не менее, чем $r := \rho_n + o(\rho_n)$. Оценим их число.

Разобьем $B^d(R)\backslash B^d(r)$ на K сферических слоев толщиной $s := (R-r)/K$. Рассмотрим часть $T'(n)$, попавшую в некоторый слой. Шары радиуса $r/2$ с центрами в точках этого множества образуют сферические шапочки несколько уменьшенного радиуса на границе внешнего слоя. Достаточно рассмотреть худший случай – последний слой. В этом случае число точек $T'(n)$, попавших в него, ограничено величиной $A(d\text{-}1, \varphi_n)$, где

$$\sin(\varphi_n/2) \ge ((r/2)^2-s^2)^{1/2}/R = (1-4K^{-2})^{1/2}/4+ o(\rho_n).$$

Поэтому

$$\cos\varphi_n = 1-2\sin^2(\varphi_n/2) \le 1-(1-4K^{-2})/8+ o(\rho_n),$$

откуда следует утверждение леммы.

Используем приведенную выше оценку на величину $A(d, \cdot)$. Положим, например, K=11. Тогда можно положить $\cos\varphi(K, \nu) = 0.88$, что соответствует $\varphi(K, \nu) \approx 28.5°$ и при $d\to\infty$ справедливо

$$\frac{1}{d}\log_2 A(d,\varphi_n) \le -\frac{1}{2}\log_2 0.12 - 0.0990\,.$$

Таким образом, $A(d\text{-}1, \varphi(K, \nu)) \le \lfloor 2^{1{,}4305(d-1)}\rfloor$ и $KA(d\text{-}1, \varphi(K, \nu)) \le 11\lfloor 2^{1{,}4305(d-1)}.\rfloor$.

При d=3 возьмем K=3. Тогда можно положить $\cos\varphi(K, \nu) = 0.93$, что соответствует $\varphi_n \approx 21.4°$. Таким образом, $A(2, \varphi(K, \nu)) = 16$ и $KA(2, \varphi(K, \nu)) = 48$.

Теорема 1. *Для любых малого $\nu>0$ и целого $K>2$ выполняется*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2}$$
$$\mathbf{C}\left(KA\left(d-1,\varphi(K,\nu)\right), i+1\right),$$
$$i=1,\ \dots,\ d-2;$$
$$\limsup_{n\to\infty} f_n^{d-1} h_n^{(d-1)/2} \le \delta_{d-1}\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} 2^{(d-1)/2}$$
$$\mathbf{C}\left(KA\left(d-1,\varphi(K,\nu)\right), d-1\right),$$
$$i=d-1;$$

где $\varphi(K, \nu) = \arccos\,(7/8+1/(2K^2) + \nu)$.

Доказательство. Из лемм 1, 2 и 3 вытекают свойства

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^i h_n^{(d-1)/2} \le \mathbf{C}\big(KA(d-1,\varphi(K,\nu)), i+1\big)$$

$$\limsup_{n\to\infty} n h_n^{(d-1)/2},$$

i=1, … , d-2;

$$\limsup_{n\to\infty} f_n^{d-1} h_n^{(d-1)/2} \le \mathbf{C}\big(KA(d-1,\varphi(K,\nu)), d-1\big)$$

$$\limsup_{n\to\infty} n h_n^{(d-1)/2},$$

i=d-1.

После чего достаточно учесть свойство 5. Теорема доказана.

7. Реализация МГЯ

Приведем краткое описание одной из реализаций МГЯ, являющейся применением для аппроксимации шара метода «Уточнения Оценок» [10], [11], предназначенного для построения полиэдральных аппроксимаций выпуклых компактных тел (см. также [17]).

МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК (УО)

Пусть для $C\in\mathscr{C}$ и $P^0\in\mathscr{P}^i(C)$ построен $P^n\in\mathscr{P}^i(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. a). Найти u_n := arg max $\{g(u, C) - g(u, P^n)$: $u\in M^f(P^n)\}$.

b). Найти $p_n\in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание P^{n+1} := conv $\{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Двумерная иллюстрация работы метода УО приведена на рис. 1.

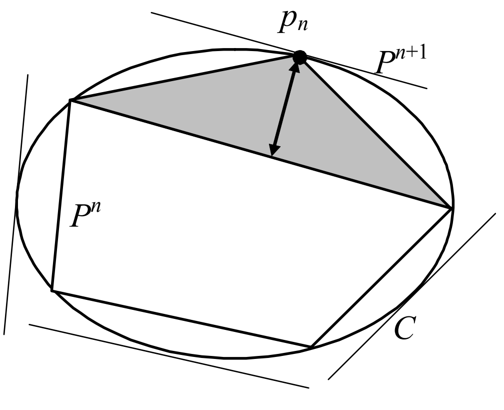

Рис.1.

Заметим, что в рассматриваемом случае $C \equiv B^d$, $g(u, C) = 1.$ и $T(u_n, C) = \{u_n\}$. Можно показать, что при соответствующем выборе P^0 последовательность $\{M^t(P^n)\}$ будет являться DH(S^{d-1}) - последовательностью. В качестве P^0 может быть взята, например, выпуклая оболочка правильного обобщенного октаэдра, вписанного в сечение сферы центральной гиперплоскостью, и соответствующего сечению полюса сферы. Сложность каждой итерации метода УО зависит от числа новых гиперграней многогранника P^{n+1}, и в случае аппроксимации шара определяется только размерностью задачи (см. теорему 1).

Дальнейшие свойства метода УО и другие алгоритмы, реализующие Метод Глубоких Ям для выпуклых тел, рассмотрены, например, в [17].

8. Заключение

Теорема 1 и свойство 5 полностью характеризуют мощность гранной структуры многогранников, порождаемых методом ГЯ, причем порядок роста нормы f-вектора в зависимости от точности аппроксимации шара в метрике Хаусдорфа оказывается при этом оптимальным и равным (1-d)/2.

Эти результаты говорят о хорошей масштабируемости задачи: сложность гранной структуры растет с той же скоростью, что и число вершин, так что сложность локальной карты аппроксимирующего многогранника вблизи любой его вершины определяется сверху константами, зависящими только от размерности.

Список литературы

1. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. P. 447-496.
2. *Александров А.Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948.
3. *Gruber P.M.* Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
4. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37
5. *Böröczky K. Jr.* Polytopal Approximation Bounding the Number of *k*-Faces // J. of Approx. Theory. 2000, V. 102. P. 263-285.
6. *Böröczky K.J., Fodor F., Vígh V.* Approximating 3-dimensional convex bodies by polytopes with a restricted number of edges // Beit. Alg. Geom, 2008. 49. P. 177-193.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

8. *Sonnevend G.* An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on [0, l] // Appl. Math. and Optimizat. 1983. № 10. P. 127-142.
9. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
10. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
11. *Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K.* Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
12. *Бушенков В.А., Лотов А.В.* Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
13. *Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д.* О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский матем. ж. 1975. Т. 26. № 5. С.1110-1112.
14. *Dudley R.* Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // J. Approximat. Theory. 1974. V. 10. P. 227-236; Corr., ibid, 1979. V. 26. P. 192-193.
15. *Каменев Г.К.* Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 10. С. 1464-1474.
16. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т.41. N11. С. 1751-1760.
17. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007, 230 с.
18. *Efremov R.V., Kamenev G.K.* Properties of a method for polyhedral approximation of the feasible criterion set in convex multiobjective problems // Ann. Oper. Res. 2009. 166. P. 271–279.
19. *Ефремов Р.В., Каменев Г.К.* Об оптимальном порядке роста числа вершин и гиперграней в классе хаусдорфовых методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. В печати.
20. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.
21. *Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.
22. *Роджерс К.* Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
23. *McMullen P. and Shephard G.C.* Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture. Cambridge University Press. Cambridge, England. 1971.
24. *Каменев Г. К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.