

УДК 519.6

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ

Г.К. Каменев

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,  
Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН

E-mail: [gkk@ccas.ru](mailto:gkk@ccas.ru)

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 10-01-00199 и 09-01-13534), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2982.2008.1), ПФИ Президиума РАН П-2 и ПФИ ОМН РАН №3

Статья посвящена Методу Множеств Идентификации: визуальному подходу к идентификации параметров моделей, основанному на построении и визуализации многомерного графика функции ошибок, а также множеств квазиоптимальных параметров. Предлагаемый подход может быть эффективен в условиях неопределенности решения, возникающих в процессе идентификации.

### **On one approach to the uncertainty investigation arising in model identification**

*G.K. Kamenev*

Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Joint SuperComputer Center of RAS

Paper is devoted to the Identification Sets Method: a visual approach to the identification of the models parameters, based on the construction and visualization of the multidimensional graph of error function, as well as of sets of quasi-optimal parameters. The proposed approach may be effective in conditions of the decision uncertainty arising in the process of identification.

1. Наличие неопределенности является фундаментальным свойством процесса математического моделирования [1]. Одной из важнейших в математическом моделировании является проблема идентификации, под которой обычно понимается выбор структуры модели (структурная идентификация) и совокупности значений параметров (идентификация параметров), соответствующих выбранной структуре. Поэтому соотношение структуры данных об объекте моделирования со структурой модели является важнейшим этапом процесса идентификации. Уже на этом этапе исследователь часто сталкивается с проблемой неопределенности в виде неоднозначности решения задачи идентификации. «Попытка определить параметры данного уравнения на основе лишь эмпирических наблюдений безнадежна, вне зависимости от того, насколько эти последние полны и обширны. Наблюденные данные не могут «идентифицировать» оцениваемое уравнение, иными словами, не могут различить его среди множества других возможных зависимостей, каждая из которых с тем же успехом могла бы генерировать эти наблюдения» [2].

Пусть имеется модель некоторого объекта, заданная в виде структурных уравнений  $F(z, \lambda) = 0$ , где  $F$  – вектор-функция  $\{F_i(\cdot), i=1 \dots m\}$ ,  $z$  – вектор наблюдаемых переменных,  $\lambda$  – неиз-

вестный вектор параметров,  $\lambda \in A$ . Пусть требуется идентифицировать вектор параметров  $\lambda$  на множестве наблюдений  $Z := \{z^k, k = 1, \dots, K\}$ .

Для некоторого значения вектора параметров  $\lambda$  вектор невязок, которые будем называть ошибками идентификации на векторе  $z^k$  из множества наблюдений  $Z$ , будет в рассматриваемом случае иметь вид  $w(z^k, \lambda) := F(z^k, \lambda)$ . Чтобы вместо совокупности векторов невязок на всех данных наблюдений оценивать качество идентификации одной (скалярной) характеристикой, вводится сначала некоторая норма невязки (метрика)  $\|w(z^k, \lambda)\|$  в пространстве векторов ошибок, например:  $\|w(z^k, \lambda)\| = \max \{\mu_i |w_i(z^k, \lambda)|: i=1 \dots m\}$  или  $\|w(z^k, \lambda)\| = [\sum \mu_i w_i(z^k, \lambda)^2]^{1/2}$ , где  $\mu_i \geq 0$  – весовые коэффициенты, характеризующие значимость (масштаб) отклонения по данному структурному уравнению. Потом выбирается некоторая функция ошибок идентификации  $\psi(\lambda)$  – свертка норм невязок по всем данным наблюдений. Например, максимальная по норме ошибка на данных наблюдений  $\psi_{\max}(\lambda) := \max \{p_k \|w(z^k, \lambda)\|: z^k \in Z\}$  или средняя по норме ошибка на данных наблюдений  $\psi_{\text{mean}}(\lambda) := \sum p_k \|w(z^k, \lambda)\|$ , где  $p_k \geq 0, \sum p_k = 1$ , – весовые коэффициенты, отражающие значимость того или иного наблюдения. Задачу идентификации сводят к нахождению значения  $\lambda^* \in A$ , минимизирующего значение функции ошибок  $\psi(\lambda)$ :  $\psi(\lambda^*) := \min \{\psi(\lambda): \lambda \in A\}$ .

Неопределенность возникает, если решение  $\lambda^*$  зависит от вида и параметров нормы невязки  $\|w(z^k, \lambda)\|$  или от вида и параметров функции ошибок идентификации  $\psi(\lambda)$ . Неопределенность возникает и тогда, когда решение задачи идентификации оказывается неоднозначным или неустойчивым, т.е. существуют достаточно отдаленные от решения  $\lambda^*$  допустимые векторы параметров  $\lambda^{**}$  такие, что  $\psi(\lambda^{**})$  близко к  $\psi(\lambda^*)$ . В случае неопределенности проблема идентификации становится частным случаем задачи принятия решения. Действительно, прогноз поведения системы при  $\lambda = \lambda^*$  может существенно отличаться от прогноза ее поведения при  $\lambda = \lambda^{**}$ , в то время как при  $\psi(\lambda^{**}) \approx \psi(\lambda^*)$  правильность предпочтения  $\lambda^*$  вектору  $\lambda^{**}$  неочевидна. Проблема идентификации в том, что структурные уравнения понятны специалистам в данной области моделирования, а свертка компонент невязок  $w_i(z^k, \lambda) := F_i(z^k, \lambda)$  в норму невязки  $\|w(z^k, \lambda)\|$ , а затем – в функцию ошибок  $\psi(\lambda)$ , как правило, выходит далеко за рамки их интуитивных представлений.

Задача идентификации модели в регрессионной (приведенной) форме основана на том, что вектор наблюдаемых переменных  $z$  удастся разделить на векторы независимых (входных)  $x$  и зависимых (выходных) величин  $y$ . В этом случае «идентификация есть отождествление модели с объектом в смысле поиска оценки оператора, связывающего выход модели некоторого объекта со входом» [3].

Пусть имеется приведенная модель некоторого объекта вида  $y = f(x, \lambda)$ , где  $f$  – вектор-функция,  $x$  – вектор независимых (входных),  $y$  – вектор зависимых (выходных) переменных,  $\lambda$  –

неизвестный вектор параметров,  $\lambda \in A$ . Требуется идентифицировать вектор параметров  $\lambda$  на некотором множестве наблюдений  $Z := \{(x^k, y^k), k = 1, \dots, K\}$ .

Для вектора параметров  $\lambda$  вектор невязки на паре  $(x^k, y^k)$  из множества наблюдений  $Z$  будет в этом случае иметь вид  $w(x^k, y^k, \lambda) := y^k - f(x^k, \lambda)$ . Как и при задании модели в структурной форме, в данном случае вводится сначала некоторая норма невязок  $\|y^k - f(x^k, \lambda)\|$  в пространстве векторов ошибок, а затем – некоторая функция ошибок идентификации  $\psi(\lambda)$  – свертка норм невязок по всем данным наблюдений. Как и при задании модели в структурной форме, задача сводится к минимизации функции ошибок  $\psi(\lambda)$  на множестве допустимых значений вектора параметров  $A$ . При идентификации регрессионного описания модели возникают те же источники неоднозначности решения, что и при структурном описании. Однако, в то время как точность входных переменных часто можно контролировать, точность наблюдения выходных переменных контролировать не всегда удается.

В этом случае ошибка идентификации может отражать не только неправильный выбор значения параметра или неточность структурного описания модели, но и влияние ошибки наблюдений. Запишем регрессионную модель в виде, учитывающем неточность наблюдений за выходными переменными:  $y + \varepsilon = f(x, \lambda)$ , где  $\varepsilon$  – неизвестный вектор ошибок наблюдений. Если априори известно, что  $\varepsilon$  – случайная величина с известным распределением, и число наблюдений достаточно велико, то можно перейти к регрессионным уравнениям для математических ожиданий выходных переменных, и таким образом, снять неопределенность, вызываемую ошибками наблюдений.

Часто бывает и так, что исследователь имеет представление только о максимальной величине ошибок наблюдений. Так как пространство векторов невязок  $w$  совпадает с пространством выходных переменных  $y$ , то в этом пространстве можно ввести норму невязки  $\|y^k + \varepsilon^k - f(x^k, \lambda)\|$ , где  $y^k, k=1, \dots, K$ , – неизвестный вектор точных значений выходных переменных, а  $\varepsilon^k, k=1, \dots, K$ , – неизвестный вектор ошибок, соответствующих множеству наблюдений  $Z := \{(x^k, y^k + \varepsilon^k), k=1, \dots, K\}$ . Введем и функцию ошибок  $\psi_\varepsilon(\lambda)$ , основанную на этой норме. Пусть  $\lambda_{\varepsilon^*} \in A$  такой, что  $\psi_\varepsilon(\lambda_{\varepsilon^*}) = \min \{\psi_\varepsilon(\lambda) : \lambda \in A\}$ . Спрашивается, какое отношение решение  $\lambda_{\varepsilon^*}$  задачи минимизации «возмущенной» функции ошибок  $\psi_\varepsilon(\lambda)$  имеет к решению  $\lambda^*$  задачи минимизации функции ошибок  $\psi(\lambda)$  при условии, что  $\varepsilon^k = 0$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что для большинства функций ошибок справедливо свойство  $\psi_\varepsilon(\lambda) \leq \psi(\lambda) + \varepsilon_{\max}$ ,  $\psi(\lambda) \leq \psi_\varepsilon(\lambda) + \varepsilon_{\max}$ , где  $\varepsilon_{\max} := \max \{\|\varepsilon^k\| : (x^k, y^k + \varepsilon^k) \in Z\}$ . Поэтому  $\psi_\varepsilon(\lambda_{\varepsilon^*}) \leq \psi(\lambda_{\varepsilon^*}) + \varepsilon_{\max} \leq \psi(\lambda_{\varepsilon^*}) + \varepsilon_{\max} \leq \psi_\varepsilon(\lambda_{\varepsilon^*}) + 2\varepsilon_{\max}$ . Следовательно, если известна только максимальная величина  $\varepsilon_{\max}$  ошибок наблюдений, то можно только утверждать, что решение  $\lambda^*$  задачи минимизации функции ошибок  $\psi(\lambda)$  при условии, что  $\varepsilon^k = 0$ , лежит в области значений  $\lambda$ , таких что  $\psi_\varepsilon(\lambda) \leq \psi_\varepsilon(\lambda_{\varepsilon^*}) + 2\varepsilon_{\max}$ .

Аналогично можно учесть ошибки наблюдений входных переменных, если известна, например, константа Липшица оператора  $f$ . Таким образом, неточность в измерении наблюдаемых переменных может быть источником неопределенности при идентификации параметров.

Итак, идентификация параметров, основанная на минимизации функции свертки ошибок, строго обоснована при следующих предположениях: 1) известна структура математической модели; 2) число наблюдений асимптотически стремится к бесконечности; 3) наблюдаемые переменные – случайные величины известных типов; 4) найден глобальный минимум функции ошибок, а решение задачи минимизации не вырождено. Широко используемые устойчивые методы обработки данных основываются на этих предположениях. Но во многих задачах идентификации эти предположения не верны. Поэтому в случае неопределенности участие человека в решении задачи идентификации становится неизбежным.

В статье предлагается подход к идентификации математических моделей, основанный на наглядном представлении графика функции ошибок  $\psi(\lambda)$  в окрестности минимума. Исследователь может не ограничиваться единственным сочетанием значений идентифицируемых параметров, а визуально исследовать график функции ошибок, который отражает качественный характер соответствия структуры данных структуре модели. Он получает больше информации для выбора значений параметров модели, на которых будут основаны оценки с помощью данной математической модели.

2. С начала 1980-х годов в Вычислительном центре РАН разрабатывается новый подход к решению проблемы многокритериальной оценки решений с помощью математических моделей: метод достижимых целей (МДЦ) [4-6].

В рассматриваемых здесь задачах идентификации принимается решение о выборе одного из допустимых значений вектора параметров  $\lambda$ , а критериями качества решения являются значения одной или нескольких функций ошибок  $\psi$ , например, – нескольких компонент невязок  $w_i(z^k, \lambda)$ . По МДЦ с помощью математической модели рассчитывается множество достижимых целей (совокупность достижимых сочетаний значений критериев, оценивающих решения) и представляется пользователю в графическом виде. Важно то, что МДЦ позволяет получить наглядную информацию не только о достижимых значениях критериев, но и разумных компромиссах между критериями: они задаются паретовской частью границы множества достижимых целей. Это – эффективная граница множества достижимых целей, она показывает, на сколько требуется ухудшить значение одного критерия для улучшения значения другого. По МДЦ, выбрав точку на эффективной границе (предпочтительную достижимую цель), пользователь получает и решение, реализующее эту цель. Пользователь выбирает решение из множества допустимых вариантов по собственному неформализованному предпочтению одного из разумных компромиссов

между критериями. Он может выбрать несколько целевых точек на эффективной границе и подвергнуть сравнительному анализу несколько решений.

Предложенный подход требует заранее построить явное описание множества достижимых в силу модели значений вектора критериев и интерактивно изобразить его средствами современной компьютерной графики. К настоящему времени разработаны численные методы аппроксимации множества достижимых целей и накоплен большой опыт применения визуальной технологии МДЦ для поддержки решений с помощью нелинейных моделей экономических, экологических, технических и управляемых систем [4-9].

В [10] предложено использовать метод, аналогичный МДЦ, для решения задачи идентификации. В этом случае объектом исследования становится не множество достижимых целей, а график и надграфик функции ошибок, а также его поведение в окрестности оптимальных параметров. Визуализация этого множества позволяет исследователю выбирать параметры модели, сочетая результаты наблюдений с собственным неформализованным опытом, дает ему дополнительную информацию об идентифицируемой модели (см. примеры в [10-15]).

Для метода, предложенного в [10], нужна модификация метода достижимых целей. В настоящей статье предлагается визуальный метод множеств идентификации (ММИ). Он основан на явном представлении графика и надграфика функции ошибок и использовании их визуализации для идентификации модели в диалоговом режиме.

3. Рассмотрим регрессионную модель некоторого объекта (случай структурной модели рассматривается аналогично). Пусть  $y = f(x, \lambda)$ , где  $x$  – входные,  $y$  – выходные переменные,  $\lambda$  – неизвестный вектор параметров,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda \in A \subset \mathbb{R}^p$ . Пусть требуется идентифицировать вектор параметров  $\lambda$  на некотором множестве наблюдений  $Z := \{(x^k, y^k), k = 1, \dots, K\}$ , используя в качестве критерия погрешности идентификации скалярную функцию ошибок идентификации  $\psi: A \rightarrow \mathbb{R}^1$ , являющуюся некоторой сверткой норм ошибок  $\|y^k - f(x^k, \lambda)\|$  на множестве наблюдений  $Z$ , и пусть  $\psi(\lambda^*) := \min \{\psi(\lambda): \lambda \in A\}$ .

Такой подход, разумный во многих случаях, при наличии неопределенности требует дополнительного исследования. В [17] указывается, что исследователям было бы разумно представить информацию о квазиоптимальных значениях параметров, для которых значение функции ошибок идентификации не превышает некоторую заданную величину, т.е. таких  $\lambda \in A$ , что  $\psi(\lambda) \leq \delta$ , где  $\delta \geq \psi^* := \psi(\lambda^*)$ .

Рассмотрим *график функции ошибок*  $\psi(\lambda)$ , т.е. множество  $G := \{(\lambda, \psi(\lambda)) \in A \times \mathbb{R}^1: \lambda \in A\}$ . График  $G$  представляет собой некоторую, вообще говоря, многомерную поверхность в пространстве  $\mathbb{R}^{p+1}$ . Если имеется только один параметр ( $p=1$ ), это множество представляет собой обычный график.

Рассмотрим также множество  $A_\delta := \{\lambda \in A: \psi(\lambda) \leq \delta\}$ . Назовем множество  $A_\delta$  *множеством квазиоптимальных параметров уровня  $\delta$*  (квазиоптимальным множеством). Нетрудно видеть, что множество  $A_\delta$  будет являться *сечением* надграфика функции ошибок  $\psi(\lambda)$ , т.е. множества  $G^+ := \text{epi } G := \{(\lambda, \sigma) \in A \times \mathbb{R}^1: \lambda \in A, \sigma \geq \psi(\lambda)\}$  гиперплоскостью  $\psi(\lambda) = \delta$ . Если имеется только один параметр, множество квазиоптимальных параметров  $A_\delta$  представляет собой подмножество оси абсцисс. Если функция ошибок имеет несколько локальных минимумов, то даже в случае одного параметра множество  $A_\delta$  может быть неодносвязным, т.е. представлять из себя набор отрезков.

Если параметров несколько, исследование многомерного множества квазиоптимальных параметров представляет для человека значительную проблему. Она решается рассматриваемым нами ММИ с помощью *диалоговых карт идентификации* (ДКИ), обеспечивающих интерактивную визуализацию *множеств идентификации*: графика функции ошибок и множеств квазиоптимальных параметров.

Итак, основными этапами ММИ являются:

- 1) предварительная аппроксимация множеств идентификации простыми фигурами;
- 2) визуализация аппроксимации на основе диалоговых карт идентификации.

4. Рассмотрим сначала основные методы визуализации с помощью диалоговых карт идентификации. Будем считать, что простое явное описание графика функции ошибок (его аппроксимация) построено, и мы можем достаточно быстро изобразить его различные двумерные сечения, т.е. множества, в которых все, кроме двух параметров зафиксированы, и срезы, т.е. множества, в которых на все, кроме двух параметров наложены ограничения типа неравенств. Проиллюстрируем некоторые особенности рассматриваемого нами подхода на примере функции ошибок с различным числом параметров.

Квазиоптимальные множества  $A_\delta$  (срезы графика ошибок) удобно изображать в координатах двух параметров идентификации линиями уровня соответствующими серии растущих значений уровня функции ошибок  $\delta$  (см. пример на рис. 1а). Заметим, что, в силу определения квазиоптимального множества,  $A_\delta \subseteq A_{\delta'}$  при  $\delta \leq \delta'$ , поэтому линии с меньшим уровнем ошибки оказываются вложенными в линии с большим уровнем. Это свойство характерно для географических карт, а также для диалоговых карт решений, используемых в ММД [4,5]. По аналогии, изображения, используемые в ММИ, мы будем называть *картами функции ошибок* (рис. 1а).

В случае трех параметров квазиоптимальное множество заданного уровня  $\delta$  можно представить и изобразить в координатах двух параметров идентификации линиями уровня, соответствующими серии растущих значений третьего параметра. В этом случае, однако, нельзя гарантировать вложенности линий уровня, как на картах функции ошибок (см. рис. 1б). Такие изображения мы будем называть *картами параметров*.

В многомерном случае множества идентификации можно представить проекциями их на подпространства, содержащие лишь часть параметров – тех, которые больше интересуют исследователя. Визуализация, основанная на изображениях проекций, обладает, однако тем недостатком, что скрывает неоднозначность, связанную с параметрами, не в данной проекции. Более информативны срезы графика функции ошибок, потому что на значения тех параметров, которые не интересуют исследователя, наложены заданные ограничения.

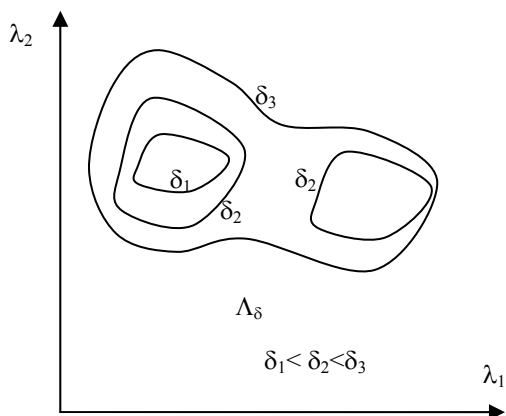


Рис.1а

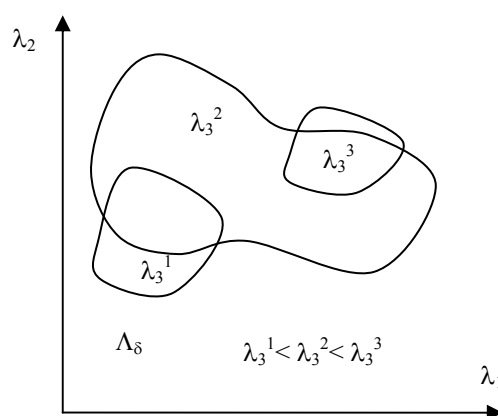


Рис.1б

Если параметров больше двух, то основным средством визуализации множеств идентификации становятся так называемые диалоговые карты идентификации. ДКИ – это карты идентификации, на которых исследователь может интерактивно выбирать состав параметров и ограничения на их значения, а живость диалога обеспечивается быстротой визуализации, основанной на предварительной аппроксимации графика функции ошибок.

Например, в случае трех параметров график функции ошибок можно представить совокупностью (например, строкой) карт функции ошибок, на каждой из которых изображено множество  $\Lambda_\delta$  при различных значениях  $\delta$  в пространстве двух выбранных параметров, а значение третьего параметра монотонно меняется от карты к карте. Вместо набора карт можно изобразить только одну: в ней значение третьего параметра можно менять в реальном времени (в виде анимации), либо выбирать на шкале (полосе прокрутки), изображенной на карте.

В случае четырех параметров можно изобразить совокупности карт функции ошибок, соответствующих различным значениям четвертого параметра, например, в виде матриц изображений, аналогичных матрицам карт решений [4, 5].

Случай пяти переменных можно представить в виде атласа (набора листов или вкладок) карт функции ошибок, соответствующих различным значениям пятого параметра.

В типичном случае идентификации модели исследуется множество квазиоптимальных параметров при заданном (или интерактивно изменяемом) уровне ошибки. Для визуализации таких множеств можно применить технологию диалоговых карт, описанную выше. Наглядное пред-

ставление квазиоптимального множества дает карта (строка, матрица, атлас или динамический объект из карт) параметров, т.е. карта, на которой изображено множество  $A_\delta$  при фиксированном уровне функции ошибки  $\delta$  в пространстве двух выбранных параметров и различных значениях третьего.

В общем случае множество идентификации (график функции ошибок или квазиоптимальное множество) визуализируется или в виде *срезов* (когда значения части параметров не интересуют исследователя, но на них наложены дополнительные ограничения), или в виде *сечений* (когда значения части параметров точно заданы). В любом случае визуализация осуществляется исследователем в интенсивном диалоге с компьютером, что обеспечивается предварительной аппроксимацией визуализируемого множества.

5. Пусть имеется возможность тем или иным способом изобразить график функции ошибки  $G$  или квазиоптимальные множества параметров  $A_\delta$  при различных уровнях  $\delta$  и представить их для визуального исследования экспертам. Следует рассмотреть две ситуации. В одной исследователь имеет некоторое представление об уровне ошибки, которая может наблюдаться в моделируемой действительности. В другой ситуации, более вероятной, эксперт ничего не может сказать об уровне ошибки, выражаемой функцией  $\psi$ , однако имеет некоторые, заранее трудно формализуемые, представления о возможных значениях параметров  $\lambda$ . В первом случае исследователя могут заинтересовать множества  $A_\delta$ , соответствующие допустимым, с его точки зрения, значениям функции ошибок  $\delta$ ; во втором – его может заинтересовать устойчивость множества квазиоптимальных решений  $A_\delta$  при значениях  $\delta$ , близких к минимальному, и наличие в нем допустимых, с его точки зрения, значений параметров  $\lambda$ .

Поведение функции ошибок вблизи точки оптимума имеет существенное значение для обоснованности решения задачи об идентификации. На рис. 2 представлены типичные случаи поведения графика функции ошибок вблизи глобального минимума:

- *устойчивое* (рис. 2а), когда при небольшом увеличении уровня функции ошибок расширение квазиоптимального множества не очень значительно;
- *неустойчивое* (рис. 2б), когда при небольшом увеличении уровня функции ошибок происходит резкое расширение квазиоптимального множества;
- *вырожденное* (рис. 2в), когда глобальному минимуму функции ошибок отвечает целое множество параметров.

По мере накопления данных (увеличения числа наблюдений  $K$ ) неустойчивое поведение графика функции ошибок может превращаться в устойчивое. Это может свидетельствовать о соответствии идентифицируемой модели объекту наблюдения и перспективности дальнейших наблюдений для улучшения качества идентификации. Может, разумеется, наблюдаться и обратная картина.



На основе полученной визуальной информации и своего опыта исследователь должен выбрать некоторое подмножество значений параметров из  $\Lambda$  в качестве решения задачи идентификации. Например, он может выбрать пороговую величину уровня ошибки  $\delta^*$  и множество  $\Lambda_{\delta^*}$  квазиоптимальных решений уровня  $\delta^*$ . Или может выбрать несколько характерных вариантов сочетаний значений параметров (не обязательно совпадающих с точкой минимума функции ошибок  $\lambda^*$ ). Разумеется, исследователь может выбрать точку  $\lambda^*$  минимума функции ошибок, особенно если этот выбор оправдан устойчивостью графика функции ошибок вблизи оптимума, гипотетической адекватностью модели и высокой точностью данных наблюдений.

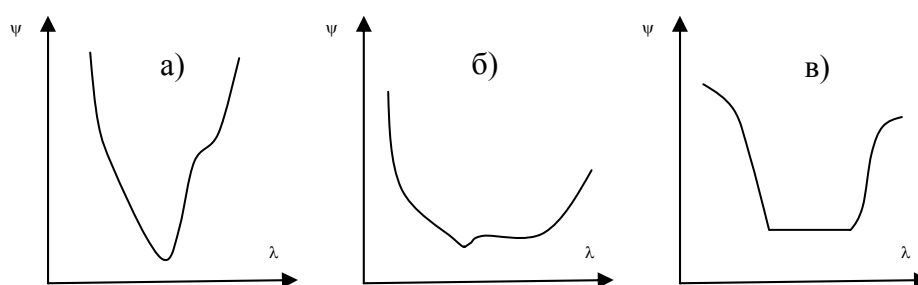


Рис.2

Заметим, что не обязательно выбирать в качестве решения задачи идентификации единственное сочетание значений параметров. В общем случае результатом исследования может быть множество таких сочетаний значений идентифицируемых параметров, которое эксперт считает необходимым учесть при оценке последствий использования данной математической модели. Результатом исследования может быть и более глубокое проникновение в свойства рассматриваемой модели на конкретных данных наблюдения, а также соотнесение структуры данных со структурой модели.

6. Теперь рассмотрим проблему аппроксимации множеств идентификации. Выше было отмечено, что визуализация принципиально интерактивна, т.к. заранее неизвестно, какая область квазиоптимальных решений заинтересует исследователя. Поэтому она должна осуществляться достаточно быстро (если не сказать мгновенно), при этом исследователь должен иметь возможность уточнить построенное описание до необходимой точности. Однако расчет по модели при заданном сочетании значений параметров  $\lambda$  (например, вычисление модельной функции  $f(x, \lambda)$  на множестве наблюдений независимых переменных  $\{x^k\}$ ) может занимать значительное время. Тогда этот предварительный этап идентификации надо проводить на высокопроизводительных, в том числе параллельных, вычислительных машинах. После него визуализация проходит в интенсивном интерактивном (диалоговом) режиме. На предварительном, автономном этапе должен быть проведен расчет функции ошибок для всех допустимых сочетаний значений идентифицируемых параметров, или должна быть осуществлена аппроксимация множеств идентификации с точностью, достаточной для содержательного визуального анализа. Ясно, что это очень непро-

стая задача. Аналогичная задача возникала и в МДЦ, поэтому значительные усилия были направлены на разработку методов аппроксимации множеств, заданных неявно с помощью многомерных отображений [18, 4, 5]. Изложим некоторые из этих методов в контексте ММИ.

Сначала рассмотрим случай, когда надграфик функции  $\psi(\lambda)$ , множество  $G^+$ , является выпуклым множеством. В этом случае если  $A$  выпукло, то множества  $A_\delta$ , которые являются сечениями  $G^+$ , тоже будут выпуклы. Для аппроксимации надграфика  $G^+$  или его выпуклых проекций можно использовать методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел (см. обзоры в [19, 18, 4, 11, 5, 20, 21]). Практически применяемые оптимальные методы аппроксимации выпуклых тел основаны, как правило, на итерационном уточнении аппроксимирующего многогранника. На каждой итерации многократно вычисляется опорная функция аппроксимируемого множества (решается задача выпуклой оптимизации), поэтому алгоритмы этих методов можно эффективно распараллелить.

7. Теперь рассмотрим нелинейный случай. Универсальным способом «кодирования» невыпуклых множеств является построение метрических сетей. Геометрически это означает, что множество аппроксимируется набором простых фигур (таких как шар или куб) с диаметром тем меньшим, чем выше точность аппроксимации.

Под метрической  $\varepsilon$ -сетью множества  $A$  понимается такое его подмножество  $T$ , что любая точка  $A$  удалена от  $T$  на расстояние не больше  $\varepsilon$ . Если вокруг точек метрической  $\varepsilon$ -сети построить «шары» в рассматриваемой метрике пространства, то они покроют все аппроксимируемое множество. В евклидовой метрике с нормой  $\|z\|=(\sum z_j^2)^{1/2}$ , это – аппроксимация множества системой обычных шаров; а в метрике Чебышева с нормой  $\|z\|=\max\{|z_j|\}$ , – системой кубов. Для каждой точки такой системы можно быстро найти «подлинную» точку аппроксимируемого множества  $A$  (ближайшую точку метрической  $\varepsilon$ -сети  $T$ ), отстоящую от нее не более чем на  $\varepsilon$  в рассматриваемой метрике. При этом чем меньше величина  $\varepsilon$ , тем ближе будут «подлинные» точки из  $T$  к точкам аппроксимируемого множества, тем меньше будет «лишних» точек в аппроксимирующей системе «шаров», но тем больше требуется построить точек в используемой метрической сети  $T$ .

Если известна константа Липшица функции  $\psi(\lambda)$ , для аппроксимации графика ошибки идентификации можно использовать равномерные или псевдо-случайные сетки на множестве допустимых параметров  $A$ . В общем случае могут быть использованы адаптивные стохастические методы аппроксимации ограниченных множеств [11, 10, 22] (см. также [4-6]). По этим методам на аппроксимируемом множестве, неявно заданном с помощью нелинейного отображения, строится метрическая сеть, аппроксимирующая его с заданной точностью и полнотой. Полнота аппроксимации характеризуется тем, что остается лишь небольшая часть аппроксимируе-

мого множества, лежащая вне построенной системы шаров с центрами в точках метрической сети.

8. Предложенная методика может быть распространена и на случай, когда имеется несколько функций ошибок идентификации, образующих вектор-функцию ошибок  $\Psi: A \rightarrow \mathbb{R}^s$ , а также на случай, когда вместо параметров модели требуется идентифицировать значение вектор-функции от параметров  $\Xi: A \rightarrow \mathbb{R}^t$ . Например, в линейной регрессии исследователя могут интересовать не коэффициенты матрицы  $\{a_{ij}\}$ , а ее след, собственные числа или какая-либо норма.

В общем виде задача сводится к аппроксимации и визуальному анализу множества  $G^{\Psi\xi} := \{(\psi, \xi) \in \mathbb{R}^{s+t}: \lambda \in A, \psi = \Psi(\lambda), \xi = \Xi(\lambda)\}$  и может быть решена с помощью изложенной выше методологии ММИ.

9. Проиллюстрируем предложенную визуальную технологию идентификации простым характерным примером нелинейной регрессии. Пусть модель имеет вид  $y = f(x, \lambda)$ , где  $f(x, \lambda) = e^{jx} (\alpha + \sin(ax + \varphi))$ ,  $\lambda = (\gamma, \alpha, \omega, \varphi)$  - неизвестные параметры. Требуется идентифицировать значения, например, параметров  $\omega$  и  $\gamma$  на множестве наблюдений  $Z = \{(k, e^{-0,05k} (1 + \sin(0,5k + \pi)) + \xi), k=1, \dots, N\}$ , где  $\xi$  - случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[-0,25, 0,25]$ ,  $N=8$ . Таким образом, «истинное» сочетание параметров есть точка  $\lambda^* = (-0,05, 1, 0,5, \pi)$ .

Предположим, что исследователю неизвестен закон распределения величины  $\xi$ , либо нет возможности воспользоваться средствами усреднения из-за малого числа наблюдений. Пусть для параметров имеется следующая априорная локализация значений:  $\gamma \in [-0,1, -0,01]$ ,  $\alpha \in [0, 2]$ ,  $\omega \in [0, 1]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Пусть функция ошибки имеет вид  $\psi_{\max}(\lambda) := \max \{|y - f(x^k, \lambda)|: (x^k, y^k) \in Z\}$

На рис.3 изображены проекции в пространство значений параметров  $(\omega, \gamma)$  квазиоптимальных множеств, соответствующих различным значениям  $\delta \leq 0,75$ . Квазиоптимальные множества, соответствующие разным  $\delta$ , различаются штриховкой (на экране – цветом). Соответствие штриховки значениям  $\delta$  показано шкалой, приведенной вверху рисунка. Множества, соответствующие меньшей величине  $\delta$  (более темные), наложены на множества, соответствующие большей ее величине. Для иллюстрации методики использована достаточно грубая аппроксимация – на рисунке видны прямоугольники, совокупность которых покрывает график ошибки идентификации с заданной полнотой.

Прежде всего, заметим, что минимум «возмущенной» функции ошибок достигается при  $\tilde{\lambda}^{**} = (\omega^{**}, \gamma^{**}) = (0,45, 0,02)$ , тогда как «истинная» точка есть  $\tilde{\lambda}^* = (\omega^*, \gamma^*) = (0,5, 0,05)$ , при этом  $\psi(\lambda^{**}) = 0,18 \leq \psi(\lambda^*) \approx 0,25$ . Проекция  $\tilde{\lambda}^{**} = (\omega^{**}, \gamma^{**})$  точки  $\lambda^{**}$  принадлежит множеству, соответствующему уровню ошибки 0,23, так как существуют сочетания параметров  $(\alpha, \varphi)$ , от-

личные от  $(\alpha^*, \varphi^*)$ , при которых значение «возмущенной» функции ошибки идентификации меньше, чем  $\psi(\lambda^*)$ .

Из рисунка видно, что при уровне функции ошибки в  $\delta=0,23$  «истинное» сочетание параметров расположено близко к нижней границе квазиоптимального множества. С увеличением величины  $\delta$  проекция  $\hat{\lambda}^*$  точки  $\lambda^*$  попадает в середину множества допустимых сочетаний параметров. Заметим, что это множество покрывает почти весь исходный интервал локализации параметра  $\gamma$ , и в то же время более узко по  $\omega$ . Это означает, что решение задачи идентификации по параметру  $\omega$  устойчивее относительно ошибки, чем относительно параметра  $\gamma$ . Исследователь может варьировать параметр  $\gamma$  в достаточно широких пределах.

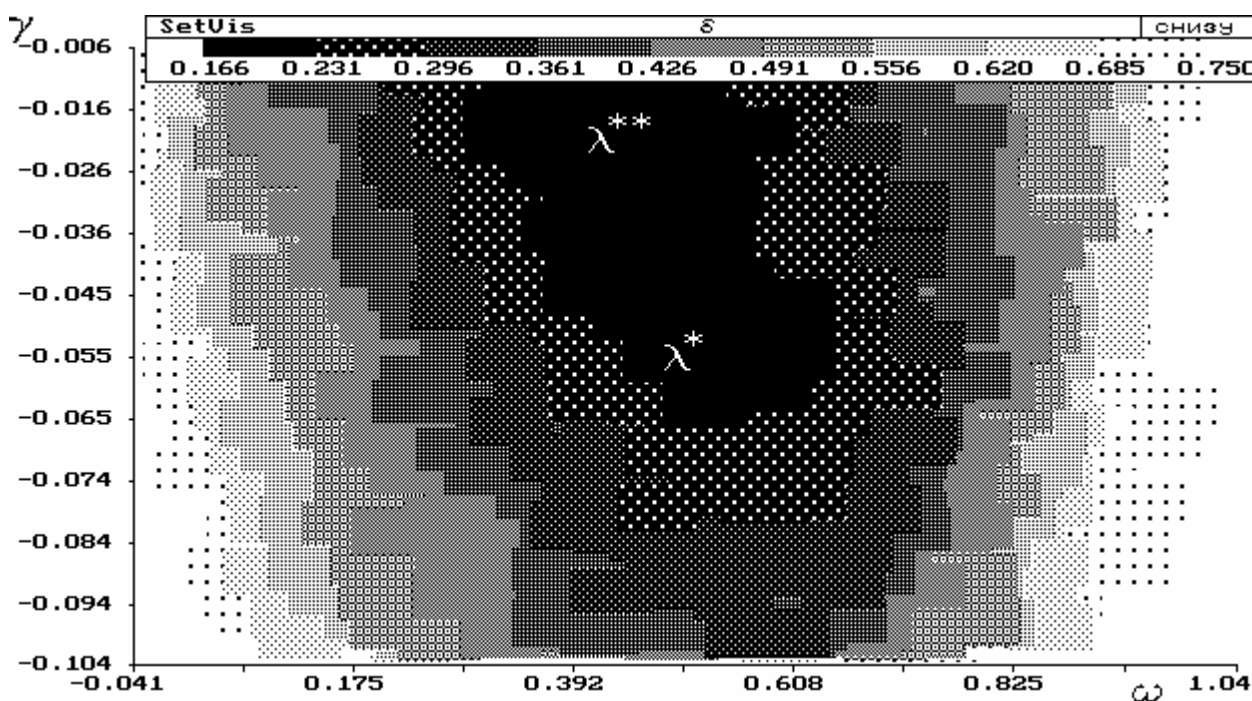


Рис.3

Выбор возможного значения параметра  $\gamma$  влияет на множество допустимых значений  $\omega$ . Так, при уровне функции ошибки  $\delta = 0.23$  если  $\gamma \approx -0.01$ , то  $\omega \in [0.2, 0.55]$ , а если  $\gamma \approx -0.06$ , то  $\omega \in [0.4, 0.65]$ . Пример показывает, что дополнительная информация о значении одного из параметров может существенно повлиять на результат идентификации.

10. В следующем примере требуется оценить не только значения параметров, но и решить вопрос об адекватности структуры самой параметрической модели. В [23] приведена модель и данные наблюдений, описывающие относительное содержание радиоактивного трассера (меченых атомов) в двух отделах (частях) человеческого тела в различные моменты времени после инъекции. Модель содержит по три параметра на каждый отдел, соответственно сходных по своему физическому смыслу. Необходимо: 1) Решить, можно ли оба отдела описывать одними и

теми же тремя параметрами одновременно (согласованная модель); 2) Идентифицировать эти параметры по данным наблюдений.

В [23] по методу наименьших квадратов получена оценка параметров сначала на основе только данных по первому отделу, а затем – по второму отделу. Оказалось, что эти две оценки слишком далеко расходятся (особенно по первому параметру), что ставит под сомнение гипотезу о применимости одних и тех же параметров одновременно (согласованная модель) к описанию обеих частей тела.

Совместная идентификация (т.е. идентификация с одними и теми же параметрами для обоих отделов) дала различные оценки первого параметра [23] [17], что указывает на неоднозначность решения. С другой стороны, так как эти различия невелики, на первый взгляд кажется, что имеет место устойчивость решения рассматриваемой задачи идентификации. Поэтому на основании полученных оценок в [17] делается заключение, что при ошибке идентификации в пределах 6-7% нет оснований отвергать согласованную модель, даже если отдельные модели дают лучшую аппроксимацию.

Для прояснения вопроса об адекватности моделей в [10] использована техника визуализации графика функции ошибок. В этой работе показано, что если ошибки идентификации больше 6% (в частности, это соответствует 3% точности экспериментальных данных по содержанию трассера), то квазиоптимальные множества значений первого параметра у всех моделей покрывают практически весь априорный диапазон значений первого параметра. Следовательно, его идентификация и вывод об адекватности некорректны ни для одной из рассмотренных моделей.

11. Другой пример применения предлагаемой визуальной технологии содержится в [12], где рассмотрена проблема идентификации параметров грубой динамической модели газовой залежи. Модель упрощенно описывает движение газа вследствие добычи его из залежи. Весь объем залежи разбит на несколько крупных частей, называемых далее зонами. Предполагается, что давление газа одинаково во всем объеме зоны и падает со временем вследствие уменьшения количества газа из-за добычи. Предполагается также, что давления измеряются с шагом по времени порядка 0,5 - 1 год. Движение газа внутри каждой зоны не описано, рассмотрены лишь перетоки газа через границы из зоны с большим давлением в соседние зоны с меньшим давлением. Параметрами модели являлись начальные объемы газа в каждой зоне и коэффициенты перетока газа, а исследователя интересовала проблема идентификации суммарного объема газа. Как и в первом примере, в данной задаче мы наблюдали эффект замещения параметров, когда различные сочетания значений идентифицируемых параметров обеспечивали точность идентификации рядов давлений, близкую к оптимальной. В отличие от примера, рассмотренного в предыдущем пункте, данные рядов давлений в зонах не могут в принципе быть получены с высокой точностью, т.к. являются величинами, агрегированными по скважинам зоны и усредненными по значительным отрезкам времени. Поэтому идентификация отдельных параметров была невозможна,

однако грубая оценка такого значимого для принятия решений показателя, как суммарный объем газа в месторождении, оказалась, в принципе, выполнимой.

12. Приведенные примеры показывают, каким образом использование метода множеств идентификации позволяет выявить внутренние ограничения, заложенные в рассматриваемой задаче, и проанализировать те возможности идентификации, которые в ней имеются.

Автор выражает глубокую благодарность А.А.Петрову и А.В.Лотову за многочисленные конструктивные замечания и плодотворное обсуждение.

### Литература

1. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М., ФАЗИС, ВЦ РАН: 2000, 411 с.
2. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии. М., Статистика, 1978, 223 с.
3. Райбман Н.С. Что такое идентификация. М., Наука, 1970.
4. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997, 239 с.
5. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004, 310 p.
6. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K., Loucks D.P., Camara A.S. Water resource conflict resolution based on interactive tradeoffs display // Restoration of Degrad. Rivers: Challenges, Issues and Exper. Kluwer Acad. Publ.: 1998. P. 447-470.
7. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999, 400 с.
8. Lotov A., Bourmistrova L., Bushenkov V. Efficient strategies: an application in water quality planning. In: G. Kersten, Z. Mikolajuk, M. Rais, and A. Yeh (eds.) Decision Analysis and Support for Sustainable Development. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1999, pp. 145-166.
9. Lotov A., Berezkin V., Kamenev G., Miettinen K. Optimal Control of Cooling Process in Continuous Casting of Steel Using a Visualization-Based Multi-Criteria Approach// Applied Mathematical Modelling, 2005. 29(7), P. 653-672.
10. Каменев Г.К. Визуальный метод идентификации параметров // Доклады Академии наук. 1998. Т. 359. № 3. С. 319-322.
11. Каменев Г.К., Кондратьев Д.Л. Об одном методе исследования незамкнутых нелинейных моделей // Математическое моделирование. 1992. №3. С. 105-118.
12. Гереш П.А., Сушков Б.Г., Фуругян М.Г., Каменев Г.К., Гереш Г.М., Сухих А.В., Мирошник С. Н., Кондратьев О.Л., Гончар Д.Р. Оценка параметров газовой залежи с помощью обобщенной динамической модели. М.: ВЦ РАН, 1994. – 40 с.
13. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996, 544.
14. Поспелов И.Г., Хохлов М.А. Идентификация экономических систем на основе метода множеств достижимости. // II Всероссийская научн. конфер. «Матем. моделирование развивающейся экономики ЭКОМОД-2007», Сборник трудов. Киров: ВятГУ, 2007. С. 205-215.

15. *Каменев Г.К.* Визуальная технология идентификации параметров моделей технических и биологических систем // III Всероссийская научн. конфер. «Матем. моделирование развивающейся экономики, экологии и биотехнологий ЭКОМОД-2008». Киров: ВятГУ, 2008. С. 30.
16. *Мостеллер Ф., Тьюки Дж.* Анализ данных и регрессия. М., Финансы и статистика, 1982.
17. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров. М., Статистика, 1979.
18. *Bushenkov, O.L. Chernykh, G.K. Kamenev, and A.V. Lotov.* Multidimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization // Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. V. 5. №1. P. 35-56.
19. *Каменев Г.К.* Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.
20. *Каменев Г.К.* Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007, 230 с.
21. *Бронштейн Е.М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5-37.
22. *Каменев Г.К.* Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.
23. *Beauchamp J.J. and Cornell R.G.* Simultaneous nonlinear estimation // Technometrics. N8, 1966, P. 40-51.