

ISBN 978-5-91601-043-5

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА РАН

Г.К. КАМЕНЕВ

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ
МЕТОДОВ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ**



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
МОСКВА 2010

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Г.К. Каменев

**Численное исследование эффективности
методов полиэдральной аппроксимации
выпуклых тел**



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2010

УДК 519.6

Ответственный редактор
доктор физ. матем. наук А.В.Лотов

В работе рассматривается задача оптимальной аппроксимации выпуклых тел многогранниками. Предложена методика численного исследования эффективности методов полиэдральной аппроксимации с точки зрения таких критериев, как число вершин, гиперграней, вычислений опорной функции и т.д. Рассматривается класс оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации. Представлены результаты вычислительных экспериментов с методами из этого класса для различных аппроксимируемых тел: телесных эллипсоидов размерности от 2 до 6, циклических многогранников, дисков со счетным числом вершин. Показано, что оптимальность по порядку скорости сходимости имеет место уже при достижимых в численных экспериментах точностях аппроксимации. Численно исследована эффективность конкретных методов из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: выпуклые множества, многогранники, аппроксимация, методы и алгоритмы, численное исследование, вычислительный эксперимент, эффективность метода

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке
– Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 09-01-00599, 09-01-12098;
– программы фундаментальных исследований РАН №14;
– программы фундаментальных исследований ОМН РАН №3.

Работа публикуется в авторской редакции.

Рецензенты: И.Г.Поспелов, А.А.Шананин

Научное издание

© Учреждение Российской академии наук

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2010

© Г.К. Каменев, 2010

Введение

Традиционным средством теории выпуклых множеств является подход, основанный на их аппроксимации с помощью многогранников [1], [2]. В настоящее время задача аппроксимации выпуклых компактных тел (ВКТ) многогранниками возникает во многих приложениях: в математическом программировании [3], кодировании изображений [4], в многокритериальных задачах принятия решений [5–10]. Важное практическое значение вычислительные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел имеют в задачах принятия решений на основе использования математических моделей в методе обобщенных множеств достижимости, развиваемого в ВЦ РАН, начиная с 70-х годов (обзор этого направления дан в [7–10]). В рамках этого направления разработан метод уточнения оценок [7–10], являющийся в настоящее время одним из наиболее эффективных и широко используемых на практике методов полиэдральной аппроксимации. Результатам численного исследования этого метода и посвящена, во многом, настоящая работа.

Важным отличием методов полиэдральной аппроксимации (МПА) от методов приближенного описания с помощью отдельно взятых выпуклых тел (таких, как симплекс, параллелепипед, эллипсоид, цилиндр: см., например, обзоры теории в [11], [12], [94]) является возможность аппроксимации выпуклых компактных тел с любой степенью точности. За это преимущество, однако, приходится платить высокую цену: как показывают теоретические оценки ([13], [14], [15], [16] и др.), а также экспериментальные и прикладные исследования ([17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]), сложность описания аппроксимирующего многогранника быстро растет с увеличением точности и ростом размерности аппроксимируемого тела. В этой связи важной задачей является как разработка оптимальных методов, так и оценка эффективности существующих методов.

Задачей настоящей работы является обобщение опыта, выработка и применение методологии численного исследования эффективности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, рассмотренных в [95].

В главе 1 дается постановка задачи оптимальной полиэдральной

аппроксимации и рассматриваются свойства эталонов полиэдральной аппроксимации – многогранников наилучшей аппроксимации.

В главе 2 в самом общем виде рассматриваются методы полиэдральной аппроксимации, вводится понятие эффективности и оптимальности по порядку, приведены принципы классификации методов полиэдральной аппроксимации с точки зрения их эффективности.

В главе 3 рассматривается класс адаптивных методов полиэдральной аппроксимации (АМПА) и приводится обзор существующих методов из этого класса и близких к нему.

В главе 4 даются описания и приводятся основные известные теоретические свойства скорости сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации, численно исследуемых в работе. Приводимые теоретические результаты носят асимптотический характер. Оценки скорости сходимости исследуемых методов на начальном этапе приводятся, например в [95] и [97]. Они являются более слабыми. Одной из задач настоящего исследования является ответ на вопрос – наблюдается ли асимптотический характер сходимости исследуемых методов при достижимых в эксперименте точностях аппроксимации.

В главе 5 рассматриваются задачи и общая методика (п. 5.1) численного исследования эффективности методов полиэдральной аппроксимации. Заметим, что собственно методика исследования была разработана в работах [46], [18].

В п. 5.2 в качестве объектов аппроксимации выбраны многомерные телесные эллипсоиды. Важность исследования эффективности алгоритмов в классе эллипсоидов определяется тем фактом, что эллипсоиды являются наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике объема симметрической разности. Кроме того, этому классу принадлежит шар, являющийся наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике Хаусдорфа. Задача полиэдральной аппроксимации шара важна особенно тем, что на полиэдральной аппроксимации шара основаны некоторые неадаптивные МПА (см. п. 5.3.5). Основным результатом данного пункта является сведение задачи расчета константы аппроксимируемости в классе многомерных эллипсоидов к обычному интегрированию по прямоугольной области. Это позволяет проводить исследование методов в классе эллип-

соидов в полном объеме.

Далее (пп. 5.3, 5.4) излагаются результаты различных численных исследований, в основном – метода уточнения оценок, а также метода сближающихся многогранников [46, 41], прямо-двойственного [43, 90, 96] и комбинированного [91, 96] метода.

В п. 5.5 рассматриваются численные эксперименты по аппроксимации негладких тел: циклических многогранников и класса выпуклых дисков со счетным числом вершин и нетривиальной (лежащей между 0 и $\frac{1}{2}$) верхней оценкой для аппроксимационного числа. Эти классы выпуклых компактных тел (ВКТ) характеризуются, в первом случае, очень большим конечным, а во втором – бесконечным счетным числом вершин. Исследование эффективности МПА в этих классах ВКТ позволяет изучить поведение МПА в реальных практических задачах (например, в задачах многокритериальной оптимизации, решаемых в рамках подхода обобщенных множеств достижимости, в которых аппроксимируются проекции многогранников больших размерностей на подпространства 3-7 измерений).

В Заключение рассматриваются основные выводы из приведенных экспериментальных исследований.

В работе ведется отдельная нумерация и формул и таблиц в рамках отдельного пункта, а также единая нумерация рисунков в каждом подпункте.

Глава 1. Эталонная аппроксимация выпуклых компактных тел

1.1. Многогранники наилучшей аппроксимации

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{E}^d$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, расстоянием $\rho(\cdot, \cdot)$, нормой $\|\cdot\|$ и Лебеговой мерой μ . Пусть $B_r(z)$ обозначает замкнутый шар радиуса r с центром в z , B^d – единичный шар с центром в начале координат, S^{d-1} – сферу направлений, т.е. границу B^d , и пусть $\pi_d := \mu(B^d)$. Для ε , $0 < \varepsilon$, и $X \subset \mathbb{E}^d$ обозначим

$$[X]_\varepsilon := \{x \in \mathbb{E}^d: \rho(x, X) \leq \varepsilon\}, \quad (X)_\varepsilon := \{x \in \mathbb{E}^d: \rho(x, X) < \varepsilon\}.$$

Множество $K \subset \mathbb{E}^d$ называется конусом, если для любого $x \in K$ и λ , $0 \leq \lambda$, справедливо $\lambda x \in K$. Множество $C \subset \mathbb{E}^d$ называется выпуклым, если $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ для всех $x, y \in C$ и $0 < \lambda < 1$. Выпуклой оболочкой множества $X \subset \mathbb{E}^d$ называется множество $\text{conv } X$, являющееся пересечением всех выпуклых множеств, содержащих X . Выпуклой конической оболочкой множества $X \subset \mathbb{E}^d$ называется множество $\text{cone } X$, являющееся пересечением всех выпуклых конусов, содержащих X . Для двух выпуклых множеств C_1 и C_2 введем обозначение выпуклого множества

$$C_1 + C_2 := \{z \in \mathbb{E}^d: z = x + y, x \in C_1, y \in C_2\}$$

(сумма по Минковскому). Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и выпуклого C обозначим

$$\lambda C := \{z \in \mathbb{E}^d: z = \lambda x, x \in C\}.$$

Для $\lambda \geq 0$ введем внешнее и внутреннее параллельные множества как

$$C_\lambda := C + B_\lambda(0) = \bigcup_{x \in C} B_\lambda(x), \quad C_{-\lambda} := \{z \in \mathbb{E}^d: B_\lambda(z) \subset C\}.$$

Ясно, что в нашем случае $[C]_\lambda = C_\lambda$, $\lambda \geq 0$. Через $\text{proj}(x, X)$ обозначим проекцию точки x на множество X , через $\text{card } X$ – мощность множества X .

Обозначим через $\mathcal{C}$ класс выпуклых компактных множеств с непустой внутренностью, т.е. выпуклых компактных тел (ВКТ). В случае $d = 2$ говорят также о выпуклых дисках. Через ∂C обозначим границу тела C , через $\text{int } C$ – множество его внутренних точек, через $\alpha(C)$ – его асферичность (минимальное отношение радиусов концентрических внешнего $R(C)$ и внутреннего $r(C)$ шаров) и через $\sigma(C)$ – его поверхностный объем (см. [48]). Обозначим через $\mathcal{C}^s$ класс ВКТ с s раз непрерывно дифференцируемой границей, и пусть $\mathcal{C}_+^s$ – класс ВКТ с s раз непрерывно дифференцируемой границей положительными главными кривизнами, $s \geq 2$. ВКТ из класса $\mathcal{C}_+^2$ называют иногда «овалоидами». ВКТ из класса $\mathcal{C}^s$ мы будем иногда в тексте, для краткости, называть гладкими телами. Для $s \geq 2$ через $r_{\min}(C)$ и $r_{\max}(C)$ обозначим минимальный и, соответственно, максимальный радиусы кривизны ∂C , $C \in \mathcal{C}^s$.

Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{P} \subset \mathcal{C}$, – класс выпуклых телесных многогранников (выпуклых оболочек конечного множества точек, не лежащих в одной гиперплоскости). Для $P \in \mathcal{P}$ через $M(P)$ обозначим множество его вершин, а через $m(P)$ – число его вершин, через $M(P)$ обозначим множество векторов единичных внешних нормалей к его гиперграням (граней максимальной размерности), а через $m^f(P)$ – число его гиперграней. Для $C \in \mathcal{C}$ введем класс $\mathcal{P}^i(C)$ внутренних многогранников, вершины которых принадлежат ∂C (вписанных многогранников), и класс $\mathcal{P}^c(C)$ внешних многогранников, гиперграни которых касаются ∂C (описанных многогранников). Определим также классы

$$\mathcal{P}_m^i(C) := \{P \in \mathcal{P}^i(C) : m(P) \leq m\}, \quad \mathcal{P}_m^c(C) := \{P \in \mathcal{P}^c(C) : m^f(P) \leq m\}.$$
¹

Рассмотрим традиционные для рассматриваемой задачи метрики на $\mathcal{C}$ (см. [11], [12]): метрику Хаусдорфа (метрику Бляшке)

$$\delta^H(C_1, C_2) := \max \{ \sup \{ \rho(x, C_2) : x \in C_1 \}, \sup \{ \rho(x, C_1) : x \in C_2 \} \}$$

и метрику объема симметрической разности (Никодимову метрику)

$$\delta^S(C_1, C_2) := \mu(C_1 \Delta C_2),$$

где $C_1 \Delta C_2 := (C_1 \setminus C_2) \cup (C_2 \setminus C_1)$.

В дальнейшем, где это возможно, будем опускать индексные обозначения. Так, через δ будем обозначать δ^H и δ^S , через $\mathcal{P}_m(C)$ будем обозначать $\mathcal{P}_m^i(C)$ и $\mathcal{P}_m^c(C)$, через $\mathcal{A}(C)$ будем обозначать $\mathcal{P}_m(C)$ для любых $m \geq d+1$, через $M(P)$, $m(P)$ будем обозначать $M^f(P)$, $m^f(P)$ для $P \in \mathcal{P}^i(C)$ и $M(P)$, $m^f(P)$ для $P \in \mathcal{P}^c(C)$. Обозначим также

$$\delta(C, \mathcal{P}_m(C)) := \inf \{ \delta(C, P) : P \in \mathcal{P}_m(C) \}.$$

Пусть $\mathbb{E}_0^d := \mathbb{E}^d \setminus \{0\}$,

$$\mathcal{C}_0 := \{C \in \mathcal{C} : \{0\} \in \text{int } C\}$$

– класс ВКТ, содержащих внутри себя начало координат, $\mathcal{P}_0 := \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{P}$,

$$\mathcal{P}_0(C) := \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{A}(C),$$

Для $u \in \mathbb{E}_0^d$ введем обозначения опорной функции

$$g(u, C) := \max \{ \langle u, x \rangle : x \in C \},$$

¹ В работах [11], [60], [94] для класса $\mathcal{P}_m^c(C)$ используется обозначение $\mathcal{P}_{(m)}^c(C)$.

опорного полупространства

$$L(u, C) := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x \rangle \leq g(u, C)\},$$

опорной гиперплоскости

$$l(u, C) := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x \rangle = g(u, C)\},$$

множества точек касания

$$T(u, C) := \{p \in \partial C: \langle u, p \rangle = g(u, C)\}$$

и конуса внешних единичных нормалей в граничной точке $p \in \partial C$

$$S(p, C) := \{u \in S^{d-1}: \langle u, p \rangle = g(u, C)\}.$$

Для произвольного $p \in \mathbb{E}^d$ нам будет удобно использовать обозначения

$$g(u, p) := \langle u, p \rangle,$$

$$l(u, p) := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x \rangle = \langle u, p \rangle\},$$

$$L(u, p) := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x \rangle \leq \langle u, p \rangle\},$$

что, очевидно, не противоречит введенным ранее определениям опорных функции, гиперплоскости и полупространства.

Пусть $C \in \mathcal{C}_0$ и $x \in \mathbb{E}^d$, через

$$g^*(x, C) := \min \{\lambda \geq 0: x \in \lambda C\}$$

обозначим *дистанционную* [48] (*калибровочную* [49] или Минковского) *функцию* для C . Из определения дистанционной функции следует, что

$$g^*(x, C) = \|x\| / \|x_0\|,$$

где $x_0 = [0, x) \cap \partial C$ – точка пересечения луча, исходящего из начала координат и проходящего через x , и границы тела C (см. [48], замечание 11.1). Эту точку x_0 обозначим через

$$t(x, C) := x / g^*(x, C) \in \partial C, x \in \mathbb{E}_0^d.$$

Пусть $\omega_0(C)$ есть минимальное отношение радиусов $R_0(C)$ внешнего и $r_0(C)$ внутреннего шаров с центрами в начале координат. Ясно, что $\omega_0(C) \geq \omega(C)$.

Пусть $C \in \mathcal{C}$. Точку $z \in C$ будем называть *экстремальной*, если она не допускает представления в виде $(1-\lambda)x + \lambda y$, где $x, y \in C$ и

$0 < \lambda < 1$. Множество экстремальных точек тела C обозначим через $\text{ext } C$. Точку $z \in C$ будем называть экспонированной, если $C \cap l(u, C) = \{z\}$ для некоторого $u \in S(z, C)$. Множество экспонированных точек тела C обозначим через $\text{exp } C$. Точку $z \in C$ будем называть дальней, если существует шар, описанный вокруг C и содержащий z на своей границе. Множество дальних точек тела C обозначим через $\text{exp}^* C$.

Через $\text{const}_{a,b,\dots}$ будем обозначать положительные константы, зависящие от параметров $a, b, \dots$.

Пусть задано некоторое $C \in \mathcal{C}$. Классическим результатом теории выпуклых множеств (см. [11, 50]) является тот факт, что для метрики δ (т.е. δ^H и δ^S) в классе $\mathcal{P}_m(C)$ (т.е. $\mathcal{P}_m^i(C)$ и $\mathcal{P}_m^c(C)$) найдется многогранник Π_m , не обязательно единственный, на котором достигается $\delta(C, \mathcal{P}_m(C))$. Этот многогранник называется *многогранником наилучшей аппроксимации* (МНА):

$$\delta(C, \Pi_m) = \delta(C, \mathcal{P}_m(C)).$$

Даже для двумерных тел задача нахождения МНА чрезвычайно сложна (за исключением простейших специальных случаев) [27, 12]. Вместе с тем МНА могут служить эталоном полиэдральной аппроксимации ВКТ. Поэтому приведем необходимые нам известные оценки зависимости минимальной неточности аппроксимации $\delta(C, \mathcal{P}_m(C))$ от числа вершин (гиперграней) МНА m . Прочие сведения о МНА можно почерпнуть из обзоров [27, 12, 50, 94].

Прежде всего, известно, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta(C, \mathcal{P}_m) = 0. \quad (1.1.1)$$

Впервые этот факт (для внутренних многогранников) доказан, по-видимому, в [1]. Для классов $\mathcal{P}_m^i(C)$ и $\mathcal{P}_m^c(C)$ это свойство вытекает, например, из следующих верхних оценок, полученных независимо в [13] и [14]:

$$\delta(C, \mathcal{P}_m) \leq \frac{\text{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}. \quad (1.1.2)$$

Нижние оценки скорости сходимости МНА рассмотрим сначала

для достаточно гладких тел. Для $C \in \mathcal{C}_+^2$ справедлива следующая оценка, полученная в [15] и [16]:

$$\delta(C, \mathcal{P}_m) \geq \frac{\text{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}. \quad (1.1.3)$$

Более того, результаты исследований [26], [51] (метрика δ^H и $C \in \mathcal{C}_+^3$) [27], [28], [29], [30] (метрика δ^H и условие $C \in \mathcal{C}_+^2$, а также метрика δ^S), показывают, что для $C \in \mathcal{C}_+^2$ справедливо более сильное утверждение:

$$\delta(C, \mathcal{P}_m) \sim \frac{\text{const}_{C,d,\delta}}{m^{2/(d-1)}}. \quad (1.1.4)$$

При этом из [26] следует, что (1.1.4) справедливо, если граница ∂C является кусочно-гладкой, т.е. состоит из конечного числа гиперповерхностей класса C^3 с положительными главными кривизнами (см. замечание в конце настоящего следующего пункта).

Рассмотрим значения констант из (1.1.4) в асимптотике.

Пусть рассматривается метрика δ^H и $C \in \mathcal{C}^2$. Тогда, согласно [52] ($d=2,3$), [26], [51] ($\mathcal{C}_+^3$), [29] ($\mathcal{C}_+^2$) и [33] ($\mathcal{C}^2$), справедливо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta^H(C, \mathcal{P}_m) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)}, \quad (1.1.5)$$

где $\mathcal{G}_l$ есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса (см. [53]), $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x \in \partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x . Заметим, что точно известны только величины $\mathcal{G}_1=1$ и $\mathcal{G}_2=2\pi/\sqrt{27}$. Оценки для остальных величин $\mathcal{G}_l$ могут быть найдены, например, в [54]. Отметим, что члены следующего порядка малости по m в асимптотике вида (1.1.5) рассмотрены для метрики Хаусдорфа, например, в [55].

Рассмотрим метрику δ^S , и пусть $C \in \mathcal{C}^2$. Тогда, согласно [27], [28], [30] ($\mathcal{C}_+^2$) и [33] ($\mathcal{C}^2$), существуют константы del_{d-1} и div_{d-1} (триангуляционные числа Делоне и Дирихле-Вороного, соответственно), зависящие только от d , что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta^S(C, \mathcal{P}_m^i) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2} \text{del}_{d-1} \left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x) \right)^{(d+1)/(d-1)}, \quad (1.1.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta^S(C, \mathcal{P}_m^c) m^{2/(d-1)} = \frac{1}{2} \text{div}_{d-1} \left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x) \right)^{(d+1)/(d-1)}. \quad (1.1.7)$$

При этом точно известны только значения $\text{del}_1=1/6$, $\text{del}_2=1/(2\sqrt{3})$, $\text{div}_1=1/12$, $\text{div}_2=5/(18\sqrt{3})$. Отметим, что члены следующего порядка малости по m в асимптотиках вида (1.1.6)-(1.1.7) рассмотрены для метрики объема, например, в [56].

Таким образом, степень $2/(d-1)$ в оценках (1.1.2)-(1.1.4) для $C \in \mathcal{C}^2$ неулучшаема. Обратимся к нижним оценкам для тел с негладкой границей. Очевидно, что для любого $P \in \mathcal{P}$ справедливо

$$\delta(P, \mathcal{P}_m(C)) = 0, \quad m \geq m(P). \quad (1.1.8)$$

В случае, когда число экстремальных точек аппроксимируемого тела не является конечным, возможны скорости сходимости промежуточные между (1.1.4) и (1.1.8). Согласно [31], при $d=2$ для произвольного $C \in \mathcal{C}$ справедливо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta^S(C, \mathcal{P}_m^i) m^2 = \frac{1}{12} \left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/3} d\sigma(x) \right)^3, \quad (1.1.9)$$

где кривизна $k_C(x)$ определена почти везде на границе ∂C и интеграл рассматривается как Лебегов. Соответственно, при условии

$$\int_{\partial C} k_C(x)^{1/3} d\sigma(x) = 0 \quad (1.1.10)$$

мы получаем скорость сходимости со степенью большей, чем $2/(d-1)$. Однако результат [31] не дает определить эту степень. Существующий аппарат, который позволяет оценивать скорость сходимости МНА в этом случае, вместе с необходимыми для дальнейшего изложения нашими добавлениями излагается в следующем пункте.

1.2. Аппроксимируемость и аппроксимационное число выпуклых компактных тел

В этом разделе будет изучаться только метрика Хаусдорфа, так как для метрики симметричной разности содержательные результаты в негладком случае отсутствуют. Для характеристики аппрокси-

мационных свойств негладких тел введем следующие понятия. Пусть $C \in \mathcal{C}$. Пусть $s > 0$. Обозначим

$$\underline{a}^s(C) := \liminf_{m \rightarrow \infty} m [\delta^H(C, \mathcal{P}_m)]^s,$$

$$\bar{a}^s(C) := \limsup_{m \rightarrow \infty} m [\delta^H(C, \mathcal{P}_m)]^s.$$

В [15] для характеристики нижней границы скорости сходимости МНА введена величина

$$\underline{\alpha}(C) := \inf\{s > 0 : \underline{a}^s(C) = 0\}$$

и названа аппроксимационным числом тела C . Поскольку нас интересуют верхние границы скорости сходимости методов полиэдральной аппроксимации (а значит, как эталона и МНА), то назовем эту величину *нижним аппроксимационным числом C* . Введем *верхнее аппроксимационное число тела C* [57] как

$$\bar{\alpha}(C) := \inf\{s > 0 : \bar{a}^s(C) = 0\}.$$

Очевидно, что $\underline{\alpha}(C) \leq \bar{\alpha}(C)$, и в случае равенства этих величин можно говорить об *аппроксимационном числе $\alpha(C)$* .

Из (1.1.2) следует, что

$$\bar{\alpha}(C) \leq \frac{d-1}{2}, \quad (1.2.1)$$

причем из (1.1.4) следует, что при $C \in \mathcal{C}_+^2$ справедливо $\alpha(C) = (d-1)/2$.

Для дальнейшего изложения нам понадобится дать ряд определений из теории размерности Хаусдорфа (см., например, [58], [59]).

Пусть $\mathbb{R}$ – пространство с метрикой ρ . Для $U \subset \mathbb{R}$ через $D(U)$ обозначим диаметр множества

$$D(U) := \sup \{\rho(x, y) : x, y \in U\}$$

(примем, что $D(\emptyset) = 0$ и $D(U)^0 = 1$). Пусть s – произвольное действительное число, $0 \leq s < \infty$. Для $A \subset \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим

$$\mathbf{m}_s^\varepsilon(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} D(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathbb{R}, D(E_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

Определим s -размерную меру Хаусдорфа как

$$\mathbf{m}_s(A) := \sup_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{m}_s^\varepsilon(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{m}_s^\varepsilon(A).$$

Определим размерность Хаусдорфа как единственное число $\dim A$, такое что $\mathbf{m}_s(A) = \infty$ при $0 \leq s < \dim A$ и $\mathbf{m}_s(A) = 0$ при $\dim A < s < \infty$. Более формально,

$$\begin{aligned} \dim A &:= \sup \{s \geq 0: \mathbf{m}_s(A) > 0\} = \sup \{s \geq 0: \mathbf{m}_s(A) = \infty\} = \\ &= \inf \{s \geq 0: \mathbf{m}_s(A) < \infty\} = \inf \{s \geq 0: \mathbf{m}_s(A) = 0\}. \end{aligned}$$

В [15] получена нижняя оценка нижнего аппроксимационного числа $\underline{\alpha}(C)$, равная половине хаусдорфовой размерности множества дальних точек C (экстремальных точек, в которых существует внешняя касательная к телу окружность):

$$\underline{\alpha}(C) \geq \frac{1}{2} \dim \exp^* C. \quad (1.2.2)$$

В работе [15] из (1.2.2), как более общего результата, следует (1.1.3): при $C \in \mathcal{C}_+^2$ имеем $\exp^* C \equiv \partial C$, откуда $\underline{\alpha}(C) = \underline{\alpha}(C) = (d-1)/2$. При этом, как показано в [15], для любого s , $0 \leq s \leq 1/2$, существует выпуклый диск C , такой что $\underline{\alpha}(C) = s$.

Поскольку для нас важны верхние границы скорости сходимости неточности в методах аппроксимации, то в настоящей работе нас будет интересовать верхняя оценка верхнего аппроксимационного числа $\bar{\alpha}(C)$, для негладких тел более сильная, чем (1.2.1). Для получения верхних оценок использовать аппарат хаусдорфовых мер затруднительно по следующей, например, причине. Пусть имеется счетная совокупность множеств $\{A_i, i=1,2,\dots\}$ из $\mathbb{R}$. Тогда, согласно, например, [59],

$$\dim \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sup \{\dim A_i : i=1,2,\dots\}. \quad (1.2.3)$$

Поэтому хаусдорфова размерность счетного множества точек равна нулю. Вместе с тем, существуют выпуклые диски со счетным числом дальних точек и ненулевым нижним аппроксимационным числом.

Для получения верхних оценок сходимости методов полиэдральной аппроксимации нами будет использован аппарат метрической размерности, или размерности Минковского (см. гл. 4 или, например, [36], [59]).

В [57] показано, что, по крайней мере, в плоском случае верхнее аппроксимационное число ВКТ в определенном смысле связано с метрической размерностью его крайних точек.

Аппроксимационное число недостаточно полно описывает аппроксимационные свойства выпуклого тела. Например, $\alpha(C)=0$ при $C \in \mathcal{P}$, и существуют такие $C \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{P}$, причем строго выпуклые и регулярные, что $\underline{\alpha}(C)=0$ [15]. Равенство нулю верхнего аппроксимационного числа тела означает сверхполиномиальную сходимость МНА. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [95].

В заключение пункта определим класс ВКТ, для которого порядок $2/(d-1)$ является неуллучшаемым. Для $0 \leq \alpha \leq (d-1)/2$ обозначим

$$\mathcal{E}(\alpha) := \{C \in \mathcal{E} : \bar{\alpha}(C) = \alpha\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{E}_{\#} := \mathcal{E}((d-1)/2).$$

Из (1.1.3) следует, что $\mathcal{E}_+^2 \subset \mathcal{E}_{\#}$. Пусть также

$$\mathcal{E}_* := \{C \in \mathcal{E} : \dim \exp^* C = d-1\}.$$

Ясно, что $\mathcal{E}_+^2 \subset \mathcal{E}_*$. Однако из

$$C := \bigcap_{i=1}^n C_i \in \mathcal{E}, \quad C_i \in \mathcal{E}_+^2$$

также следует, что $C \in \mathcal{E}_*$. Действительно, как нетрудно показать, все точки границы будут в этом случае дальними, т.к. в точке на границе пересечения конечного семейства шаров всегда существует внешний касающийся шар. Исходя из (1.2.2), можно показать также [92], что к $\mathcal{E}_*$ принадлежат также множества с точкой, в окрестности которой граница дважды-непрерывно дифференцируема, а главные кривизны – положительны. Такой случай часто встречается в приложениях. В любом случае, для класса $\mathcal{E}_*$ из (1.2.1)-(1.2.2) следует, что

$$\underline{\alpha}(C) = \overline{\alpha}(C) = \alpha(C) = \frac{d-1}{2}, \quad C \in \mathcal{C}_*. \quad (1.2.4)$$

Поэтому $\mathcal{C}_* \subset \mathcal{C}_\#$. Таким образом, класс $\mathcal{C}_\#$ достаточно широк, чтобы охватить ВКТ, аппроксимация которых требуется в приложениях.

Результаты (1.1.2)-(1.1.4) показывают, что относительно класса $\mathcal{C}_\#$ известно достаточно много. Гораздо меньше известно о классе $\mathcal{C}(\alpha)$, когда $\alpha < (d-1)/2$. Ясно, что поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(0)$, то $\mathcal{C}(0) \neq \emptyset$. Из нашей работы [57] (см. следствие 4.7.1) вытекает также, что в плоском случае ($d=2$) справедливо $\mathcal{C}(\alpha) \neq \emptyset$ при любом α , $0 \leq \alpha \leq (d-1)/2$ (следствие 4.7.2). Результат (1.1.9), полученный в [31], говорит о том, что в плоском случае в класс $\mathcal{C}((d-1)/2)$ не входят ВКТ с нулевым аффинным периметром (см. условие (1.1.10)). Теория ВКТ из $\mathcal{C}(\alpha)$ при $\alpha < (d-1)/2$ требует своей разработки. Результаты работ [31] и [57] (см. [95], гл. 4) являются только начальным вкладом в эту теорию.

Глава 2. Методы полиэдральной аппроксимации и их эффективность

Пусть для $C \in \mathcal{C}$ имеется некоторый *метод полиэдральной аппроксимации* (МПА), под которым мы будем понимать способ построения последовательности многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$, $P^n \in \mathcal{A}(C)$ ($\mathcal{P}_m^i(C)$ или $\mathcal{P}_m^c(C)$), сходящейся к телу C в заданной метрике (такую последовательность мы будем называть *аппроксимирующей*). Примером может служить гипотетический метод построения МНА с последовательно растущим числом вершин (гиперграней).

Нас, прежде всего, будет интересовать качество аппроксимации с точки зрения числа вершин и/или гиперграней многогранников, получаемых с помощью данного метода. Надо сказать, что теория эффективности МПА долгое время была развита недостаточно. Причиной было отсутствие реальных МПА, порождающих многогранники, близкие по свойствам к МНА. Ниже приводится классификация МПА, развитая в наших работах по теоретическому [39], [40], [57] и экспериментальному [46], [18], [19], [20] исследованию адаптивных МПА.

Пусть $C \in \mathcal{C}$ и $P \in \mathcal{P}(C)$. Величину

$$\eta(P) := \frac{\delta(C, \mathcal{P}_{m(P)}(C))}{\delta(C, P)}$$

назовем *эффективностью аппроксимации тела C многогранником P* (с точки зрения числа вершин или гиперграней соответственно).

Пусть $F := \{P^n\}_{n=1,2,\dots}$ – сходящаяся к $C \in \mathcal{C}$ последовательность многогранников из $\mathcal{A}(C)$. Величины

$$\underline{\eta}(F) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \eta(P^n),$$

$$\overline{\eta}(F) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(P^n)$$

назовем, соответственно, *нижней и верхней асимптотической эффективностью аппроксимации тела C последовательностью F* . Если нижняя и верхняя асимптотическая эффективность совпадают, можно говорить об *эффективности аппроксимации тела C* . Наконец, под *эффективностью метода полиэдральной аппроксимации тела C* будем понимать эффективность порождаемой им последовательности многогранников.

Очевидно, что $0 \leq \underline{\eta}(F) \leq \overline{\eta}(F) \leq 1$, причем для любого МНА Π_m , $m=d+1, d+2, \dots$, эффективность аппроксимации равна единице. Поэтому гипотетический метод построения МНА будем называть *оптимальным*. МПА, порождающий для тела C последовательность с асимптотической эффективностью, равной 1, будем называть *асимптотически оптимальным*.

МПА, порождающий для тела C последовательность с нижней асимптотической эффективностью, большей нуля, будем называть *асимптотически эффективным*. Из (1.1.2)-(1.1.3) следует, что для асимптотически эффективной последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ справедливо

$$\delta(C, P^n) \leq \frac{\text{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}. \quad (2.1)$$

Более того, если $C \in \mathcal{C}_+^2$, то

$$\delta(C, P^n) \geq \frac{\text{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}. \quad (2.2)$$

Пусть $C \in \mathcal{C}$ и $\bar{\alpha}(C) > 0$. МПА назовем *оптимальным по порядку числа вершин (гиперграней)* для C , если он порождает последовательность многогранников с тем же порядком скорости сходимости, что и у МНА. Более формально, МПА назовем оптимальным по порядку числа вершин (гиперграней) для C , если он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$, в которой для любого $s > 0$ такого, что

$$\delta(C, \mathcal{P}_m) \leq \frac{\text{const}_{C,d,\delta,s}}{m^s}, \quad (2.3)$$

справедливо

$$\delta(C, P^n) \leq \frac{\text{const}'_{C,d,\delta,s}}{m(P^n)^s}. \quad (2.4)$$

МПА будем называть асимптотически эффективным (оптимальным по порядку) для класса $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}$, если он является асимптотически эффективным (оптимальным по порядку) для каждого $C \in \mathcal{C}^*$.

Нетрудно видеть, что асимптотически эффективный МПА является (при условии $\bar{\alpha}(C) > 0$) оптимальным по порядку. Вместе с тем заметим, что МПА может быть оптимальным по порядку и иметь, в то же время, асимптотическую эффективность, равную 0. Например, такой случай может иметь место, если $a^{\bar{\alpha}(C)}(C) = 0$, т.е.

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} m [\delta^H(C, \mathcal{P}_m)]^{\bar{\alpha}(C)} = 0,$$

в то время как

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} m(P^n) [\delta^H(C, P^n)]^{\bar{\alpha}(C)} > 0.$$

Для $C \in \mathcal{C}_+^2$ понятия асимптотической эффективности и оптимальности по порядку совпадают. Совпадают они и для класса ВКТ с частично гладкой границей (см. замечание после неравенства (1.1.4)). Однако для класса $\mathcal{C}_*$, а, следовательно, и для класса $\mathcal{C}_\#$, они могут

уже не совпадать. Заметим, наконец, что для того, чтобы некоторый метод был оптимален по порядку в классе $\mathcal{E}_\#$, необходимо и достаточно, чтобы для любого тела $C \in \mathcal{E}_\#$ в порождаемой методом последовательности $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ выполнялось

$$\delta(C, P^n) \leq \frac{\text{const}_{C,d,\delta}}{m(P^n)^{2/(d-1)}}. \quad (2.5)$$

Мы рассмотрели МПА с точки зрения их эффективности. Рассмотрим их с точки зрения той информации, которая требуется в процессе их выполнения, прежде всего с точки зрения способа задания аппроксимируемого тела.

ВКТ, полиэдральную аппроксимацию которого следует построить, может быть задано следующими основными способами:

1) функцией принадлежности (в случае неявного способа задания аппроксимируемого тела задача ее вычисления сводится к задаче оптимизации с квадратичным функционалом):

$$\chi(x, C) := \{1: x \in C; 0: x \notin C\};$$

2) аналитически;

3) через опорную или дистанционную (калибровочную) функции, которые могут быть заданы также либо через алгоритм расчета для конкретного аргумента, либо аналитически (сводятся к задаче оптимизации с линейным функционалом);

4) другими, более сложными способами, например, возможностью построения проекции внешней точки на границу аппроксимируемого тела (сводится к задаче оптимизации с квадратичным функционалом).

В задачах принятия решений основным можно считать способ неявного задания аппроксимируемого тела через алгоритм расчета значений его опорной или дистанционной функции.

Наконец, рассмотрим различие между *итерационными* (step-by-step [29], [30], [60]; sequential [4], [35]) и неитерационными методами.

В итерационных методах шаг за шагом осуществляется уточнение аппроксимации, при этом конечная точность может быть как задана заранее, так и определяться в процессе итераций. Среди итерационных методов выделяются методы *адаптивные* (active [4],

[35]), в которых, в отличие от методов неадаптивных (passive [4], [35]), строится последовательность многогранников, в которой построение описания каждого следующего многогранника существенно зависит от информации об аппроксимируемом теле, полученной на предыдущих итерациях. Так, например, на каждой итерации метода множество вершин (гиперграней) аппроксимирующего многогранника может увеличиваться на одну вершину (гипергрань), причем с учетом информации о близости текущего многогранника к аппроксимируемому телу. Заметим, однако, что гипотетические методы построения МНА не могут принадлежать к классу таких методов, так как множество $M(\Pi_{m+1})$ существенно отличается от $M(\Pi_m)$ (все вершины и гипергрani «сдвинуты»). В этом легко убедиться на примере правильных n - и $(n+1)$ -угольников, являющихся МНА для круга.

Иногда ([4], [35]) различают *бесконечно продолжимые* и *конечные* итерационные методы. В последних в алгоритме метода существенно используются параметры, связанные с пороговой (конечной) аппроксимацией.

Пусть аппроксимируемое тело задано через опорную или дистанционную (калибровочную) функции и аппроксимирующий многогранник P построен некоторым МПА. Обозначим через $m^g(P)$ и $m^{g*}(P)$ число вычислений опорной и дистанционной функции тела C , необходимое для построения P . Ясно, что для построения одной вершины (гипергрani) требуется как минимум один расчет опорной (дистанционной) функции. Пусть теперь $C \in \mathcal{C}$. По аналогии с определением оптимальности методов по порядку числа вершин (гиперграней) МПА назовем *оптимальным по порядку числа вычислений опорной функции*, если он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$, в которой для любого $s > 0$ такого, что выполняется (2.3), справедливо и

$$\delta(C, P^n) \leq \frac{\text{const}_{C,d,\delta,s}}{m^g(P^n)^s} . \quad (2.6)$$

МПА назовем *оптимальным по порядку числа вычислений дистанционной функции*, если он порождает последовательность $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$, в которой для любого $s > 0$ такого, что выполняется (2.3),

справедливо и

$$\delta(C, P^n) \leq \frac{\text{const}_{C,d,\delta,s}}{m^{g^*}(P^n)^s}. \quad (2.7)$$

Глава 3. Адаптивные методы полиэдральной аппроксимации

Введем (см. [95]) наиболее широким образом понятие итерационного (шагового, step-by-step, sequential) метода полиэдральной аппроксимации (с последовательно растущим числом вершин или гиперграней).

Определение 3.1. Итерационным методом аппроксимации ВКТ $C \in \mathcal{C}$ вписанными (описанными) многогранниками (с последовательно растущим числом вершин (гиперграней)) назовем совокупность из N отображений вида

$$\mathcal{P}_{m(P^0)+n-1}(C) \times (\Omega)^n \rightarrow \mathcal{P}_{m(P^0)+n}(C), n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где P^0 – многогранник начального приближения, $P^0 \in \mathcal{A}(C)$, Ω – «информационное пространство» (см. [72]), состоящее из сведений об аппроксимируемом теле, которые могут быть получены на итерациях метода, а $(\cdot)^n$ есть n -кратное декартово произведение. Например, Ω может иметь вид

$$\{(u, g(u, C), p): u \in U, p \in T(u, C)\},$$

где U – конечное или бесконечное подмножество сферы направлений S^{d-1} .

Заметим, что введенное определение итерационного метода не предполагает обязательного увеличения на каждой итерации числа вершин (гиперграней) аппроксимирующих многогранников. Возможно даже уменьшение их фактического числа (см. определение класса многогранников $\mathcal{P}_m(C)$ в п. 1.1). Не требуется также частичного совпадения множества вершин на ближайших итерациях (т.е. множество вершин может полностью меняться от итерации к итерации). В определении речь идет о последовательном расширении класса аппроксимирующих многогранников (т.е. возможностей ап-

проксимации) за счет увеличения возможного числа вершин (гиперграней). С одной стороны, такое широкое определение итерационного метода позволяет включить в них (хотя бы условно) даже неадаптивные методы (например, переход от сетки направлений с n узлами к сетке с $n+1$ узлом) и методы построения МНА (задача перехода от многогранника Π_n к построению Π_{n+1}). С другой стороны, это определение позволяет дать общие оценки сложности рассматриваемых методов на основе теории оптимальной полиэдральной аппроксимации ВКТ (см. п. 1.2).

В настоящей работе мы, как правило, будем рассматривать выпуклые тела, заданные своей опорной или дистанционной (калибровочной) функциями. Обозначим через $m^g(P)$ и $m^{g^*}(P)$ число вычислений опорной и дистанционной функции тела C , соответственно, необходимое для построения некоторым методом аппроксимирующего многогранника P . Для определенности, будем считать, что при вычислении опорной функции тела $g(u, C)$ находится одновременно некоторая точка касания из множества $T(u, C)$. Будем также считать, что при вычислении дистанционной функции тела $g^*(u, C)$ (фактически – граничной точки $u/g^*(u, C)$) находится некоторая внешняя нормаль в этой точке из множества $S(u/g^*(u, C), C)$. Число задач выпуклой оптимизации на множестве C , необходимое для построения аппроксимирующего многогранника P , обозначим через $m^{\text{opt}}(P)$. Ясно, что в нашей постановке

$$m^{\text{opt}}(P) = m^g(P) + m^{g^*}(P).$$

Ограничимся рассмотрением только случая, когда отображения (3.1) не зависят от N , т.е. случая *бесконечно-продолжимых* итерационных алгоритмов ([4]).

Конкретный *алгоритм* полиэдральной аппроксимации определяется способом выбора многогранника начальной аппроксимации P^0 и реализацией отображений (3.1) на итерациях, снимающей возможную неоднозначность порождаемой методом последовательности многогранников. В настоящей работе мы, как правило, будем употреблять термины метод и алгоритм как синонимы.

Из определения непосредственно следует, что, чем меньше итераций требует данный метод для достижения некоторой точности, тем меньшее число экспериментов с объектом аппроксимации, оп-

ределяемых пространством Ω , он потребует и тем меньшее максимально возможное число вершин (гиперграней) будет иметь аппроксимирующий многогранник. Поэтому представляет также интерес изучение способов конструирования методов, оптимальных по числу итераций, вне зависимости от конкретного вида отображений (3.1). В случае, когда получение информации об аппроксимируемом теле требует значительных затрат времени и/или ресурсов, помимо эффективности с точки зрения числа вершин или гиперграней можно рассматривать эффективность с точки зрения числа итераций (шагов). Как и для задачи выпуклого программирования, в „интерпретации «шаг есть эксперимент с реальным объектом» такой подход, как правило, естествен, если сам объект сложен и трудности, связанные с обработкой данных эксперимента, малы по сравнению с проведением самого эксперимента" [72].

Определим теперь *общие аппроксимационные схемы* – схему восполнения [46], [18], [38] и схему отсечения [73].

СХЕМА ВОСПОЛНЕНИЯ

Пусть построен $P^n \in \mathcal{P}^i(C)$. Тогда $(n+1)$ -я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбираем $p_n \in \partial C$.

Шаг 2. Кладем $P^{n+1} := \text{conv} \{p_n, P^n\}$.

Двумерная иллюстрация работы схемы восполнения приведена на рис. 3.1.

Конкретные методы, основанные на схеме восполнения, можно характеризовать способами решения двух задач:

- 1) способом выбора $p_n \in \partial C$;
- 2) способом построения $P^{n+1} := \text{conv} \{p_n, P^n\}$ в требуемом виде.

СХЕМА ОТСЕЧЕНИЯ

Пусть построен $P^n \in \mathcal{P}^e(C)$. Тогда $(n+1)$ -я итерация состоит из двух шагов.

Шаг 1. Выбирается направление $u_n \in S^{d-1}$;

Шаг 2. Кладется $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$.

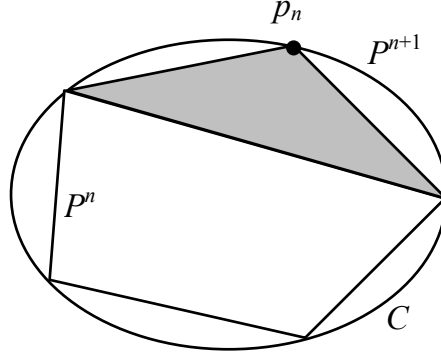


Рис. 3.1. Схема восполнения

Двумерная иллюстрация работы схемы отсечения приведена на рис. 3.2. Конкретные МПА, основанные на схеме отсечения, можно характеризовать способами решения задач:

- 1) способом выбора $u_n \in S^{d-1}$;
- 2) способом построения $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в требуемом виде.

Очевидно, что если в схеме восполнения (или отсечения) $P^n \in \mathcal{P}^i(C)$ (или $P^n \in \mathcal{P}^c(C)$), то $P^{n+1} \in \mathcal{P}^i(C)$ (или $P^{n+1} \in \mathcal{P}^c(C)$). Если в некоторой реализации схемы восполнения многогранник начального приближения P^0 принадлежит $\mathcal{P}^i(C)$ ($\mathcal{P}^c(C)$), то и $P^n \in \mathcal{P}^i(C)$ ($P^n \in \mathcal{P}^c(C)$) для любого n . В этом случае будем говорить, что последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ является последовательностью *восполнения (отсечения)* для C или последовательностью многогранников, *порождаемой* данной схемой для тела C и многогранника начального приближения $P^0 \in \mathcal{A}(C)$.

Ясно, что для последовательности восполнения справедливо неравенство

$$m^t(P^n) \leq m^t(P^0) + n, \quad (3.2)$$

а для последовательности отсечения – неравенство

$$m^f(P^n) \leq m^f(P^0) + n. \quad (3.3)$$

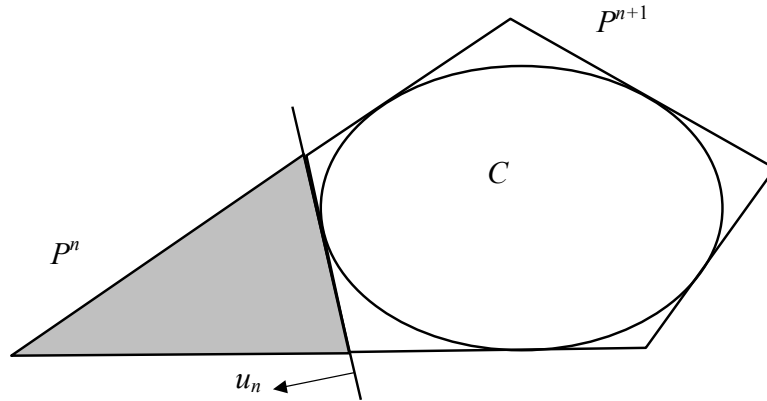


Рис. 3.2. Схема отсечения

Из этих свойств сразу следует, что при $n \geq N > 0$, $m(P^N) > m(P^0)$, справедливо неравенство

$$n \geq m(P^n) \left(1 - \frac{m(P^0)}{m(P^N)} \right). \quad (3.4)$$

Будем говорить, что итерационный метод аппроксимации $C \in \mathcal{C}$ *использует* или *реализует* некоторую итерационную схему, если он определяется набором отображений, удовлетворяющих свойствам рассматриваемой схемы. Если для любого $C \in \mathcal{C}$ схема выполнения или отсечения порождает последовательность многогранников, сходящуюся к C в метрике δ , то схему и порождаемую ею последовательность будем называть *аппроксимирующими*.

Приведем краткий обзор известных МПА, охарактеризовав среди них место адаптивных методов. Значительная часть из МПА не носит практического характера и содержится в доказательствах различных утверждений, касающихся возможностей аппроксимации ВКТ многогранниками. Мы приводим эти методы для полноты картины.

1) Классическим примером служит МПА, с помощью которого в [1] была доказана возможность аппроксимации ВКТ многогранниками с любой степенью точности. В этом методе аппроксимируемое тело задается своей характеристической функцией, рассматривается

метрическая ε -сеть, и в качестве аппроксимации берется выпуклая оболочка тех ее узлов, которые принадлежат аппроксимируемому телу. Нетрудно видеть, что в этом случае для построения полиэдральной аппроксимации с точностью ε в метрике Хаусдорфа требуется $O(\varepsilon^{1/d})$ вычислений характеристической функции, при этом число вершин может оказаться не меньше $O(\varepsilon^{-1/(d-1)})$.

2) Примерами асимптотически оптимальных методов служат теоретические конструкции, использованные в [26], [51] и [27], [28], [29], [30] для получения асимптотических оценок, соответственно, (1.1.5) и (1.1.6)-(1.1.7). Для метрики Хаусдорфа они состоят в распределении вершин (точек касания) на поверхности тела, равномерном в смысле минимального покрытия поверхности одинаковыми шарами в метрике Π квадратичной формы. Для метрики объема они состоят в распределении вершин (точек касания) на поверхности тела, равномерном в смысле минимизации объема, соответствующего триангуляции Делоне (разбиению Дирихле-Вороного) в метрике Π квадратичной формы. Заметим, что конкретный вид таких множеств неизвестен даже для сферы S^2 .

Единственным асимптотически оптимальным методом, который может использоваться на практике, является метод «баланса ошибок» из работы [25] для аппроксимации гладких выпуклых дисков с аналитически заданным вдоль границы интегралом от степенной функции кривизны (в этой работе получен первоначальный, двумерный вариант асимптотических оценок (1.1.5) и (1.1.6)-(1.1.7)). Обобщением этого аналитического подхода в тех же рамках двумерных гладких тел является работа [61], в которой рассматриваются асимптотически эффективные методы. Для метрики объема в случае произвольных двумерных тел метод «баланса ошибок» используется в [31], где получена оценка (1.1.9). Непонятно, однако, насколько эффективным является этот метод в случае выполнения условия (1.1.10) (см. замечание после (1.1.9)).

Для получения в этом «теоретическом» подходе конструктивных многомерных методов в [50], [60] предлагается метод проекции на тело точек, равномерно распределенных на гиперплоскостях, касательных к аппроксимируемому телу. Когда этих гиперплоскостей много и проектируемые точки расположены близко к аппроксими-

руемому телу, распределение их проекций будет «почти равномерным». Естественно, что этот МПА может быть использован только для аппроксимации тел из класса $\mathcal{C}^2$, причем ограниченность его применимости в реальных задачах очевидна.

3) «Конструктивным (well-defined) в некоторых случаях и «почти» конструктивным в других» является, по словам авторов, метод [62], [63], требующий знания (аналитического задания) объема произвольных l -мерных, $l \leq d-1$, сечений аппроксимируемого тела вдоль соответствующих осей координат. Такой метод сходится для произвольных тел в метрике объема со скоростью $O(m^{-2/(d-1)})$, где m – число вершин (гиперграней). При этом константа при $m^{-2/(d-1)}$ неизвестна, что затрудняет не только оценку эффективности метода, но и контроль над точностью аппроксимации. В работе [21] этот метод применен для аппроксимации эллипсоидов произвольной размерности (в этом случае объем требуемых сечений эллипсоидов задается простой аналитической формулой). К сожалению, по словам авторов, рассматриваемый подход «встретит большие препятствия в случае общих выпуклых тел». Таким образом, этот МПА не может применяться в большинстве приложений.

4) Не являются асимптотически эффективными также стохастические методы аппроксимации (сходимость вида $O(m^{-2/(d+1)})$ для метрики объема и $O(m^{-2/d(d+1)})$ – для метрики Хаусдорфа, см. [60]). В этом подходе вместо точности аппроксимации рассматривается ее математическое ожидание при аппроксимации выпуклой оболочкой случайных точек, распределенных внутри или на поверхности тела.

5) Из работ [13], [14], в которых получена оценка (1.1.2), можно вывести оптимальный по порядку в классе $\mathcal{C}_\#$ неадаптивный МПА. Этот метод основан на «равномерном» распределении точек на поверхности описанного шара и дальнейшем проектировании их на поверхность тел. Он требует нахождения проекции точки на поверхность ВКТ, что не всегда возможно в приложениях. Эффективность такого метода, как нетрудно видеть, зависит от асферичности аппроксимируемого тела².

² Задача «равномерного» распределения точек на поверхности многомерной сферы близка к проблеме минимального покрытия пространства шарами и сводится к построению минимального покрытия сферы поверх-

6) В ряде работ рассматриваются неадаптивные МПА, основанные на вычислении опорной функции аппроксимируемого тела в узлах сетки, априорно заданной на единичной сфере направлений. После нахождения опорных гиперплоскостей в направлении узлов сетки и соответствующих им точек касания в качестве аппроксимации предлагается брать их пересечение или выпуклую оболочку этих точек. К числу таких работ принадлежат, например, [17] и [34]. При условии «равномерности» выбора узлов сетки направлений (см. сноску к предыдущему пункту) эти МПА являются асимптотически эффективными только в случае аппроксимации тел из класса $\mathcal{C}_+^2$.

Как показано в [4], [35], никакой неадаптивный метод аппроксимации, основанный на вычислении опорной функции в узлах сетки направлений, не может быть оптимальным по порядку при аппроксимации негладких тел. Этим указанные методы отличаются от неадаптивных МПА, рассмотренных в предыдущем пункте, в которых вместо вычисления опорной функции использовалась операция проектирования на аппроксимируемое тело.

Если, однако, известно, что аппроксимируемое тело является сильно выпуклым или пересечением сильно выпуклых тел³, то, согласно [34], неадаптивный МПА, основанный на вычислении опорной функции в узлах сетки направлений, оказывается оптимальным по порядку. При этом для оценки точности аппроксимации требуется знать параметр выпуклости, что возможно не во всех приложениях.

ностными «кругами» равного диаметра. Эта задача изучается в рамках теории покрытий для сферических кодов (см. [54]). В настоящей работе мы не будем рассматривать эту сложную проблему. Заметим, что рассматриваемые нами АМПА дают, при аппроксимации шара, достаточно хорошее распределение вершин на его поверхности (см. [19], а также лемму 2.4.2 [95]).

³ Пусть $C \in \mathcal{C}$. Назовем C ν -выпуклым множеством, если для любых $x, y \in C$ справедливо $B_{\nu\|x-y\|/2}((x+y)/2) \subset C$. Назовем C *сильно выпуклым*, если оно ν -выпукло при некотором $\nu > 0$. Множество сильно выпуклых компактных тел обозначим через $\mathcal{C}^\circ$. Согласно [34], сильно выпуклыми являются выпуклые тела вида $\{x \in \mathbb{E}^d: F(x) \leq 0\}$, $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{E}^d)$, а также пересечения конечного числа тел этого вида.

7) Промежуточное место между адаптивными и неадаптивными МПА занимает метод [4], в котором рассматривается способ построения аппроксимирующих внешних многогранников. Каждый следующий многогранник образуется из предыдущего путем пересечения его с некоторым опорным к аппроксимируемому телу полупространством. В этом методе направление нормали, задающее это полупространство, выбирается из узлов априорно заданной регулярной сетки на поверхности сферы направлений с учетом теоретической оценки локального отклонения уточняемого многогранника от аппроксимируемого тела. В [35] показано, что метод из [4] является субоптимальным по порядку числа гиперграней аппроксимируемого многогранника и числа вычислений опорной функции аппроксимируемого множества. Под субоптимальностью понимается при этом оптимальность с точностью до неустранимого логарифмического мультипликативного фактора, т. е. сходимость в метрике Хаусдорфа вида $O(m^{-2/(d-1)} \log m)$, где m – число гиперграней. Как нам представляется, появление этого фактора обусловлено априорным выбором сетки направлений, используемой, однако, адаптивно. Субоптимальные свойства метода из [4], [35] справедливы для плоских и трехмерных тел с гладкими и негладкими границами. При размерности пространства большей, чем три, субоптимальность сохраняется только при аппроксимации тел класса $\mathcal{C}_+^2$.

8) Рассмотрим теперь адаптивные методы полиэдральной аппроксимации, обобщением которых явился класс методов, рассматриваемый в настоящей работе. В этих методах тело приближается последовательностью внутренних многогранников. В качестве нового аппроксимирующего многогранника выбирается выпуклая оболочка прежнего и не принадлежащей ему точки тела, выбранной из определенных соображений. В [64], [65], [66], [67] построенный многогранник уточняется в направлении той его гиперграней, где достигается наибольшее его отклонение от аппроксимируемого тела. Отметим, что эта идея впервые предложена, по-видимому, в [68], где рассматриваются несколько отличная двумерная задача – построение эффективной границы для выбора решения при двух критериях качества. Подход [68] получил также развитие для трехмерных задач (см. [69]), хотя способ решения не позволяет распространить его на большие размерности. Метод [64], [65], [66], [67] получил в даль-

нейшем развитии название метода «Уточнения Оценок» (УО) (см. историю этого вопроса в [7]).

В работе [70], вышедшей значительно позже указанных работ, предложено несколько методов, являющихся двумерными вариантами метода УО и метода из [4] и названных автором «сэндвичевыми» (sandwich) алгоритмами. Следует отметить, однако, что в работе [70] рассматриваются и некоторые другие принципы адаптации (чем, например, присоединение дальней точки). Однако эти принципы не могут быть распространены на многомерный случай. Аналогичные «сэндвичевым» идеи рассматриваются и в работе [71]. Дальнейшего распространения на аппроксимацию более чем двумерных тел «сэндвичевые» алгоритмы не получили.

9) Метод УО был исследован и обобщен в наших работах [46], [18], [40]. В [37], [38] был введен класс АМПА, характеризуемых через H -схемы. Теория АМПА из этого класса была развита в работах [37], [38], [39], [42], [57], [43], [44], [45]. Для H -методов полиэдральной аппроксимации были получены верхние оценки скорости сходимости для произвольных ВКТ, была доказана оптимальность по порядку в классе $\mathcal{C}_\#$, были получены независимые от тела (в т.ч. от его асферичности) оценки асимптотической эффективности в классе $\mathcal{C}_+^2$. В рамках указанного подхода в [38], [41], [57], [43], [44], [45] были предложены новые методы аппроксимации, в том числе – оптимальные по числу вычислений опорной и дистанционной функций аппроксимируемого тела. Изложению этой теории посвящена работа [95].

Глава 4. Исследуемые адаптивные методы полиэдральной аппроксимации и их теоретические свойства

4.1. Метод «Уточнения Оценок»

Метод «Уточнения Оценок» (УО) (см. историю его создания в [7] и п. 0.4 [95]) требует на каждой итерации метода конечного числа вычислений опорной функции и является в настоящее время основным АМПА, используемым на практике. Первоначально метод УО

был сформулирован для аппроксимации проекций выпуклых множеств. Мы приводим упрощенное описание этого метода, рассчитанное на аппроксимацию произвольных ВКТ и исследование его скорости сходимости, предложенное в [46], [18], [40].

МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ОЦЕНОК (УО)

Пусть для $C \in \mathcal{C}$ и $P^0 \in \mathcal{P}^i(C)$ построен $P^n \in \mathcal{P}^i(C)$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

Шаг 1. а). Найти $u_n := \arg \max \{g(u, C) - g(u, P^n); u \in M^f(P^n)\}$.

б). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := \text{conv} \{p_n, P^n\}$ в виде системы линейных неравенств, характеризующих множество $M^f(P^{n+1})$.

Метод УО обозначим через $M_{\text{УО}}$. Двумерная иллюстрация работы метода УО приведена на рис. 4.1.1.

На шаге 1а) метода УО требуется рассчитать значения опорной функции аппроксимируемого тела на множестве $M^f(P^n)$. Т.е. в этом случае информационное множество Ω имеет вид $\{(u, g(u, C), p): u \in U, p \in T(u, C)\}$, где U – конечное подмножество сферы направлений S^{d-1} . Ясно, что при конкретной реализации метода достаточно вычислять значения опорной функции на множестве

$M^f(P^n) \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} M^f(P^i)$. Кроме того, необходимо найти множество

$M^f(\text{conv} \{p_n, P^n\})$. Эта задача может быть решена, например, методами свертывания систем линейных неравенств (см. [8], [7]).

Далее, на каждой итерации метода УО, помимо внутренней оценки множества C многогранником P^n , имеется информация о многограннике внешней аппроксимации:

$$\bar{P}^n := \{x \in \mathbb{E}^d : \langle u, x \rangle \leq g(u, C), u \in M^f(P^n)\}.$$

Используя идею предварительной оценки значений опорной функции $g(u, C)$ для $u \in M^f(P^n)$ на многограннике $\bar{P}^{n-1}$, $g(u, C) \leq g(u, \bar{P}^{n-1})$, можно еще больше сократить число вычислений опорной функции аппроксимируемого множества [46]. Существуют и другие способы предварительной оценки значений $g(u, C)$ (см., например, метод [8] и [7]). Тем не менее, как показывает практика (см., например, [18],

[22], а также п. 5.4.2), число вычислений опорной функции аппроксимируемого тела в методе УО остается значительным.

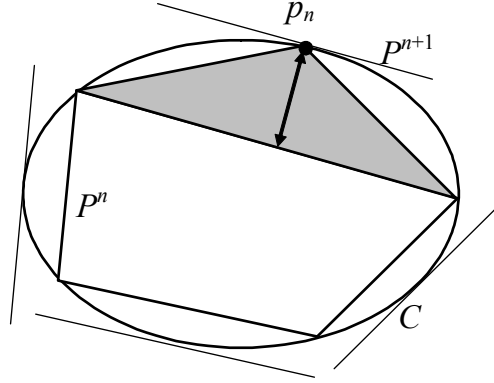


Рис. 4.1.1. Метод Уточнения Оценок

В настоящей работе мы не рассматриваем технические подробности способов выбора многогранника начальной аппроксимации P^0 , а также методов поддержания выпуклой оболочки многогранника при последовательном присоединении к нему вершин (об этих способах и методах см., например, [74], [75], [76], [8], [7], [9], [10]).

Пусть $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ и $P \in \mathcal{P}$. Для исследования метода УО введем и изучим некоторые свойства функции

$$\delta_P(C_1, C_2) = \max \{ |g(u, C_1) - g(u, C_2)| : u \in M(P) \}.$$

Прежде всего, отметим, что для последовательности $\{P^n\}_{n=1,2,\dots}$, порождаемой для $C \in \mathcal{C}$ методом УО, при $n=0,1,\dots$ справедливо

$$g(u_n, C) - g(u_n, P^n) = \delta_{P^n}(P^n, P^{n+1}) = \delta_{P^n}(P^n, C). \quad (4.1.1)$$

Кроме того, функция $\delta_P(\cdot, \cdot)$ является псевдометрикой на $\mathcal{C}$ (т.е. ее значения всегда неотрицательны, $\delta_P(C, C) = 0$ для любого $C \in \mathcal{C}$ и выполняется неравенство треугольника). Получаем

$$\delta_P(C_1, C_2) \leq \delta^H(C_1, C_2).$$

Теорема 1.3.2 [95]. Пусть $C \in \mathcal{C}$, $P \in \mathcal{P}$. Тогда

$$\delta^H(P, C)/\omega(P) \leq \delta_P(P, C) \leq \delta^H(P, C).$$

Пусть, кроме того, $C \in \mathcal{C}_+^2$, $P \in \mathcal{P}^i(C)$ и $\delta^H(P, C) < r_{\min}(C)$, тогда

$$\delta^H(P, C) - \delta^H(P, C)^2 / r_{\min}(C) \leq \delta_P(P, C) \leq \delta^H(P, C).$$

Теорема 2.6.11 [95]. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}$ методом УО. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует номер N такой, что при $n \geq N$ справедливо

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{YO}(C) k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{YO}\sigma(C) k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$ и

$$\lambda^{YO}(C) := 16R(C)\omega(C) \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}}.$$

Теорема 2.6.13 [95]. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}_+^2$ методом УО. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta^H(C, P^n) k(n)^{2/(d-1)} \leq 2 \left(\frac{g_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta^S(C, P^n) k(n)^{2/(d-1)} \leq 2\sigma(C) \left(\frac{g_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)},$$

где $k(n)$ есть n или $m^t(P^n)$.

Теорема 2.6.14 [95]. M_{YO} оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин для класса $\mathcal{C}_\#$.

Теорема 2.6.15 [95]. Пусть $C \in \mathcal{C}_+^2$. Тогда M_{YO} асимптотически эффективен для C в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности.

Теорема 2.6.18 [95]. Пусть $F := \{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}^2$ методом УО. Тогда

$$\underline{\eta}^{iH}(F) \geq \frac{1}{4},$$

$$\underline{\eta}^{iS}(F) \geq \frac{1}{4} \text{del}_{d-1} \left(\frac{\pi_{d-1}}{\mathcal{G}_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

4.2. Методы «Уточнения Внешних Оценок»

Приведем теперь аналоги метода УО, сформулированные в [96] на основе теории двойственности АМПА (см. гл. 3 [95]). Эти методы напрямую не исследуются численно в настоящей работе, однако они необходимы для понимания прямо-двойственного и комбинируемого метода, рассматриваемых и численно исследуемых в работе.

ПЕРВЫЙ МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ВНЕШНИХ ОЦЕНОК (УВО₁)

Пусть для $C \in \mathcal{C}_0$ и $P^0 \in \mathcal{P}_0^c(C)$ построен $P^n \in \mathcal{P}_0^c(C)$ в виде множества $M^t(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. а). Найти $p_n := \arg \max \{ \rho(p, p/g^*(p, C)) : p \in M^t(P^n) \}$.

б). Найти $u_n \in S(p_n / g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

Метод УВО₁ обозначим через $M_{\text{УВО1}}$. Двумерная иллюстрация работы метода УВО₁ приведена на рис. 4.2.1.

Таким образом, в этом методе сначала находится вершина внешнего многогранника, наиболее отстоящая (вдоль луча из начала координат) от аппроксимируемого тела, и в качестве отсекающей плоскости выбирается опорная в точке пересечения соответствующего луча с телом.

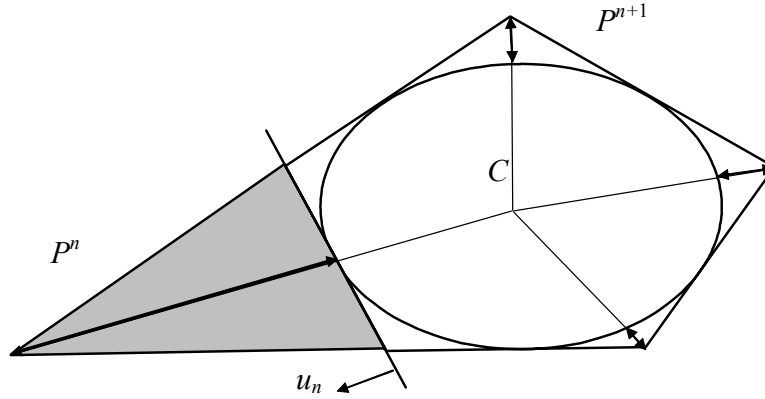


Рис. 4.2.1. Первый метод Уточнения Внешних Оценок

ВТОРОЙ МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ВНЕШНИХ ОЦЕНОК (УВО₂).

Пусть для $C \in \mathcal{C}_0$ и $P^0 \in \mathcal{P}_0^c(C)$ построен $P^n \in \mathcal{P}_0^c(C)$ в виде множества $M^t(P^n)$. Для построения P^{n+1} выполняются следующие процедуры:

ШАГ 1. а). Найти

$$p_n := \arg \max \{g(u(p), p) - g(u(p), C) : p \in M^t(P^n),$$

$$\text{где } u(p) \in S(p/g^*(p, C), C)\}.$$

б). Положить $u_n := u(p_n) \in S(p_n/g^*(p_n, C), C)$.

Шаг 2. Построить описание $P^{n+1} := P^n \cap L(u_n, C)$ в виде множества $M^t(P^{n+1})$.

Метод УВО₂ обозначим через $M_{\text{УВО}_2}$. Двумерная иллюстрация работы метода УВО₂ приведена на рис. 4.2.2.

Таким образом, в этом методе для каждой вершины внешнего многогранника сначала находится некоторая опорная гиперплоскость в точке пересечения луча, соединяющего начало координат с данной вершиной. Среди них в качестве отсекающей выбирается опорная гиперплоскость, от которой соответствующая ей вершина лежит на наибольшем расстоянии.

На шаге 1а) методов УВО₁ и УВО₂ требуется для нахождения точки $t(p_n, C) = p_n/g^*(p_n, C)$ найти значение дистанционной функции аппроксимируемого тела на множестве $M^t(P^n)$, т.е. решить конечное число задач выпуклой оптимизации.

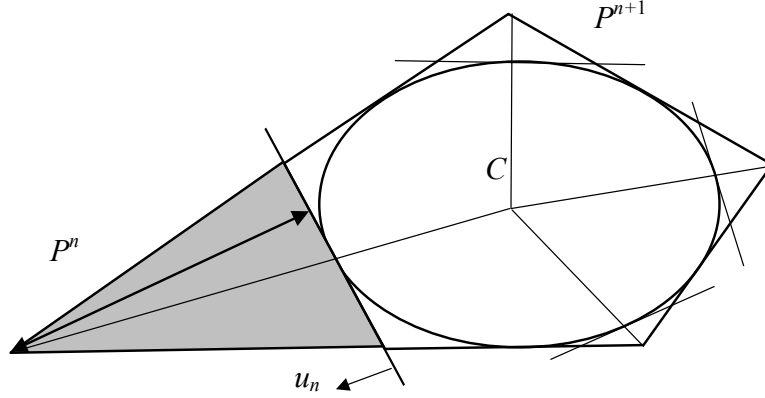


Рис. 4.2.2. Второй метод Уточнения Внешних Оценок

Из определения дистанционной функции следует, что в этом случае информационное множество Ω имеет вид $\{(p, g^*(u, C), u) : p \in U, u \in S(p/g^*(p, C), C)\}$, где U – конечное подмножество сферы направлений S^{d-1} . Ясно, что при конкретной реализации методов достаточно вычислять значения дистанционной функции на множестве $M^t(P^n) \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} M^t(P^i)$. Кроме того, необходимо найти множество $M^t(P^n \cap L(u_n, C))$. Эта задача может быть решена, например, методами свертывания систем линейных неравенств (см. [8], [7], [9], [10]).

Теорема 2.6.19 [95]. Пусть $C \in \mathcal{C}_0$ и $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для C методом $УВО_1$, $УВО_2$. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует номер N такой, что при $n \geq N$ справедливо

$$\delta^H(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{УВО_1}(C) k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^S(P^n, C) \leq (1+\varepsilon)\lambda^{УВО_1}\sigma(C) k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\lambda^{УВО_1}(C) := 16R(C)\omega_0(C) \left[\frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right]^{\frac{2}{d-1}},$$

где $k(n)$ есть n или $m^f(P^n)$ и

Теорема 2.6.22 [95]. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последователь-

ность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_+^2$ методом УВО₁. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta^H(C, P^n) k(n)^{\frac{2}{d-1}} \leq \frac{2}{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0(C)}}\right)^2} \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{\frac{2}{d-1}},$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta^S(C, P^n) k(n)^{\frac{2}{d-1}} &\leq \\ &\leq \frac{2\sigma(C)}{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0(C)}}\right)^2} \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{\frac{2}{d-1}}, \end{aligned}$$

где $k(n)$ есть n или $m^f(P^n)$.

Теорема 2.6.23 [95]. Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_+^2$ методом УВО₂. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta^H(C, P^n) k(n)^{2/(d-1)} \leq 2 \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)},$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta^S(C, P^n) k(n)^{2/(d-1)} &\leq \\ &\leq 2\sigma(C) \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)}, \end{aligned}$$

где $k(n)$ есть n или $m^f(P^n)$.

Теорема 2.6.24 [95]. $M_{УВО1}$ и $M_{УВО2}$ оптимальны в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа гиперграней для класса $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_\#$.

Теорема 2.6.25 [95]. Пусть $C \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_+^2$. Тогда $M_{УВО1}$ и $M_{УВО2}$ асимптотически эффективны для C в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности.

Теорема 2.6.29 [95]. Пусть $F := \{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_+^2$ методом УВО₁. Тогда

$$\underline{\eta}^H(F) \geq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \omega_0(C)^{-1}}\right)^2}{4},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \geq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \omega_0(C)^{-1}}\right)^2}{4} \operatorname{div}_{d-1} \left(\frac{\pi_{d-1}}{\mathcal{G}_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

Теорема 2.6.30 [95]. Пусть $F := \{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ есть последовательность, порождаемая для $C \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_+^2$ методом УВО₂. Тогда

$$\underline{\eta}^H(F) \geq \frac{1}{4},$$

$$\underline{\eta}^{cS}(F) \geq \frac{1}{4} \operatorname{div}_{d-1} \left(\frac{\pi_{d-1}}{\mathcal{G}_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}.$$

4.3. Метод «Сближающихся многогранников»

В [46], [41] был предложен метод «Сближающихся Многогранников» (СМ). В этом методе аппроксимируемое тело приближается парой из вписанного и описанного многогранников. На каждой итерации к множеству вершин вписанного многогранника добавляется одна вершина и к множеству гиперграней описанного многогранника добавляется одна гипергрань. В методе СМ вместо расчета значений опорной функции аппроксимируемого тела существенно используются значения опорных функций аппроксимирующих многогранников. Поэтому на каждой итерации вычисляется только одно значение опорной функции аппроксимируемого тела. Благодаря такой особенности, метод СМ в гладком случае оказывается оптимальным не только по числу вершин внутреннего и числу гиперграней внешнего многогранников, но и по числу вычислений опорной функции аппроксимируемого тела. К сожалению, для негладких тел оптимальной по порядку скорости сходимости по указанным параметрам получить не удастся.

МЕТОД СБЛИЖАЮЩИХСЯ МНОГОГРАННИКОВ (СМ)

Пусть для $C \in \mathcal{C}$ и $P^0 \in \mathcal{P}^i(C)$, $Q^0 \in \mathcal{P}^e(C)$ построены $P^n \in \mathcal{P}^i(C)$ и $Q^n \in \mathcal{P}^e(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие про-

цедуры:

Шаг 1. а). Найти $u_n := \arg \max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}$.

б). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.

Шаг 2. Построить $P^{n+1} := \text{conv} \{p_n, P^n\}$ и $Q^{n+1} := Q^n \cap L(u_n, C)$.

Метод СМ обозначим через $M_{\text{СМ}}$. Двумерная иллюстрация работы метода СМ приведена на рис. 4.3.1.

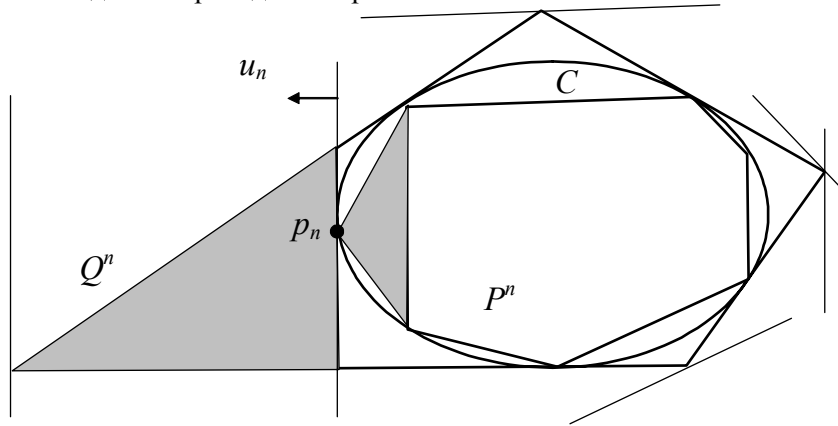


Рис. 4.3.1. Метод Сближающихся Многогранников

Таким образом, в этом методе сначала в множестве нормалей к гиперграням внутреннего многогранника находится направление (нормаль), на котором достигается максимальное отклонение между внешним и внутренним многогранниками. Далее, в этом направлении находится опорная гиперплоскость к аппроксимируемому телу и точка касания, которая присоединяется к множеству вершин внутреннего многогранника, причем внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью тела с этой нормалью. Ясно, что для последовательности выполнения $\{P^n\}_{n=1,2,\dots}$, генерируемой методом СМ, справедливо неравенство

$$m^t(P^n) \leq m^t(P^0) + n,$$

а для последовательности отсечения $\{Q^n\}_{n=1,2,\dots}$, генерируемой методом СМ, – неравенство

$$m^f(Q^n) \leq m^f(Q^0) + n.$$

Заметим далее, что в случае метода СМ информационное множе-

ство Ω имеет вид $\{(g(u_n, C), p), p \in T(u_n, C)\}$, где u_n – единственная точка на сфере направлений S^{d-1} . Поэтому на каждой итерации вычисляется только одно значение опорной функции аппроксимируемого тела, и для последовательности пар многогранников $\{(P^n, Q^n)\}_{n=1,2,\dots}$, генерируемой методом СМ, справедливо

$$m^g(P^n) \leq m^g(P^0) + n, \quad m^g(Q^n) \leq m^g(Q^0) + n.$$

Теорема 2.6.32 [95]. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\dots}$ – последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для $C \in \mathcal{C}$, $\omega(C) \neq 1$. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при $n \geq N$ справедливо

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_1^{CM}(C)k(n)^{1/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_2^{CM}(C)k(n)^{1/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n , $m^f(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ или $m^g(Q^n)$ и

$$\lambda_1^{CM}(C) = 2 \left\{ \frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}} \sigma(C)^d \right\}^{1/(d-1)} [\omega(C)^2 - 1]^{1/2} \omega(C)^{d/(d-1)},$$

$$\lambda_2^{CM}(C) = 2 \left\{ \frac{d}{(d-1)\pi_{d-1}} \sigma(C) \right\}^{1/(d-1)} [\omega(C)^2 - 1]^{1/2} \omega(C)^{d/(d-1)}.$$

Теорема 2.6.33 [95]. Пусть $\{(P^n, Q^n)\}_{n=0,1,\dots}$ – последовательность пар многогранников, порождаемая методом СМ для $C \in \mathcal{C}_+^2$. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, существует N такое, что при $n \geq N$ справедливо

$$\delta^S(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_3^{CM}(C)k(n)^{2/(1-d)},$$

$$\delta^H(P^n, Q^n) \leq (1+\varepsilon)\lambda_4^{CM}(C)k(n)^{2/(1-d)},$$

где $k(n)$ есть n , $m^f(P^n)$, $m^f(Q^n)$, $m^g(P^n)$ или $m^g(Q^n)$, и

$$\lambda_3^{CM}(C) = \left\{ \frac{2d}{(d-1)\pi_{d-1}} \sigma(C)^{(d+1)/2} \right\}^{2/(d-1)} \frac{8}{r_{\min}(C)},$$

$$\lambda_4^{CM}(C) = \left\{ \frac{(d+1)d}{(d-1)\pi_{d-1}} \sigma(C) \right\}^{2/(d-1)} \frac{8}{r_{\min}(C)}.$$

Теорема 2.6.34 [95]. M_{CM} оптимален в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности по порядку числа вершин внутренних, гиперграней внешних многогранников и по числу задач вычисления опорной функции аппроксимируемого множества для класса $\mathcal{C}_+^2$.

Теорема 2.6.35 [95]. Путь $C \in \mathcal{C}_+^2$. Тогда M_{CM} асимптотически эффективен для C в метрике Хаусдорфа и объема симметрической разности.

Теорема 2.6.36 [95]. Пусть $F_1 := \{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ есть последовательность внутренних и $F_2 := \{Q^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ — внешних многогранников, порождаемая для $C \in \mathcal{C}_+^2$ методом CM. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{\eta}^{iH}(F_1) &\geq \frac{1}{4} \eta_d^H \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}, \quad \underline{\eta}^{cH}(F_2) \geq \frac{1}{4} \eta_d^H \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}, \\ \underline{\eta}^{iS}(F_1) &\geq \frac{1}{4} \eta_d^{iS} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}, \quad \underline{\eta}^{cS}(F_2) \geq \frac{1}{4} \eta_d^{cS} \frac{r_{\min}(C)}{r_{\max}(C)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_d^H &= \frac{1}{4} \left(\frac{d-1}{d+1} \frac{\mathcal{G}_{d-1}}{d} \right)^{2/(d-1)}, \\ \eta_d^{iS} &= \frac{1}{4} \left(\frac{d-1}{2} \frac{\pi_{d-1}}{d} \right)^{2/(d-1)} \text{del}_{d-1}, \\ \eta_d^{cS} &= \frac{1}{4} \left(\frac{d-1}{2} \frac{\pi_{d-1}}{d} \right)^{2/(d-1)} \text{div}_{d-1}. \end{aligned}$$

Чтобы предотвратить включение в описание аппроксимирующих многогранников неэффективных вершин или гиперграней в [46] и [83] был предложен ряд модификаций метода CM, основанных на

идее [46] порогового условия включения вершин и гиперграней в описание аппроксимирующих многогранников. Опишем одну из таких модификаций.

Ниже приводится «Модифицированный метод Сближающихся Многогранников» (метод МСМ), предложенный в [83], в несколько видоизмененной формулировке.

Пусть задан пороговый параметр алгоритма λ , $0 < \lambda < 1$.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СБЛИЖАЮЩИХСЯ МНОГОГРАННИКОВ (МСМ)

Пусть для $C \in \mathcal{C}$ и $P^0 \in \mathcal{P}^i(C)$, $Q^0 \in \mathcal{P}^c(C)$ построены $P^n \in \mathcal{P}^i(C)$ и $Q^n \in \mathcal{P}^c(C)$. Для построения P^{n+1} и Q^{n+1} выполняются следующие процедуры:

- а). Найти $u_n := \arg \max \{g(u, Q^n) - g(u, P^n); u \in M^f(P^n)\}$.
- б). Найти $p_n \in T(u_n, C)$.
- с). Если

$$g(u_n, p_n) - g(u_n, P^n) \geq \lambda [g(u_n, Q^n) - g(u_n, P^n)],$$

то

$$\begin{aligned} \text{построить } P^{n+1} &:= \text{conv} \{p_n, P^n\}, \\ \text{положить } Q^{n+1} &:= Q^n \end{aligned}$$

иначе

$$\begin{aligned} \text{построить } Q^{n+1} &:= Q^n \cap L(u_n, C), \\ \text{положить } P^{n+1} &:= P^n. \end{aligned}$$

Метод МСМ обозначим через $M_{\text{МСМ}}$.

Таким образом, в этом методе сначала в множестве нормалей к гиперграням внутреннего многогранника находится направление u_n , на котором достигается максимальное отклонение между внешним и внутренним многогранниками. Далее, в направлении u_n находятся опорная гиперплоскость к аппроксимируемому телу и точка касания p_n . Если эта точка находится на достаточно большом, сравнительно с отклонением многогранников, расстоянии от внутреннего многогранника (определяется параметром λ), то p_n присоединяется к множеству вершин внутреннего многогранника. В противном случае внешний многогранник усекается опорной гиперплоскостью тела с этой нормалью.

Метод МСМ является обобщением метода УО и метода СМ: при выборе $\beta=0$ он соответствует методу СМ, а при выборе $\beta=1$ – методу УО. Некоторые результаты о его скорости сходимости приводятся в [83]

4.4. Прямо-двойственный метод

Приведем сначала необходимые сведения из теории двойственности АМПА (см. более подробно [96], глава 3 [95]). Пусть $C \in \mathcal{C}$, обозначим $C^* := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle x, y \rangle \leq 1, y \in C\}$ – *полярное множество* (полюсу) для C (относительно $\{0\}$). Пусть $y \in \mathbb{E}_0^d$ и $l_y := \{x \in \mathbb{E}^d: \langle x, y \rangle = 1\}$. Под *полюсой* $\pi(y)$ для точки y (относительно сферы $\langle x, x \rangle = 1$) будем понимать гиперплоскость l_y , а через $\pi(l_y) \equiv \{y\}$ обозначим *полюс* (относительно сферы $\langle x, x \rangle = 1$) для гиперплоскости l_y . Пусть $C \in \mathcal{C}_0$, тогда $C^* \in \mathcal{C}_0$, $C^{**} \equiv C$, полюс каждой (экстремальной) гиперплоскости, опорной к C , есть (экстремальная) граничная точка C^* , и полярка каждой (экстремальной) граничной точки C есть (экстремальная) опорная гиперплоскость для C^* (см. [48] теорема 6.8 и замечание 6.3). В наших обозначениях для $u \in S^{d-1}$ и $p \in \partial C$ имеем

$$\pi(l(u, C)) = \frac{u}{g(u, C)} \in \partial C^*,$$

$$\pi(p) = l(u_p, C^*), g(u_p, C^*) = \frac{1}{\|p\|}, u_p := \frac{p}{\|p\|}.$$

Вообще, если $C \in \mathcal{C}$ может быть задано как множество решений системы неравенств, порожденных опорной функцией (см. [48] теорема 12.3 и [49] п. 13)):

$$C = \{x \in \mathbb{E}^d: \langle u, x \rangle \leq g(u, C), u \in \mathbb{E}_0^d\},$$

то полярка C^* , $C \in \mathcal{C}_0$, допускает представление в виде множества уровня опорной функции (см. [48] теорема 12.2 и [49] п. 16)):

$$C^* = \{x \in \mathbb{E}^d: g(x, C) \leq 1\}.$$

Пусть $C \in \mathcal{C}_0$ и $x \in \mathbb{E}^d$. Напомним (см. п. 1.1.), что через $g^*(x, C) := \min \{\lambda \geq 0: x \in \lambda C\}$ мы обозначили *дистанционную* [48] (или *калибровочную* [49]) *функцию* для C . Из определения дистанционной функции

следует, что $g^*(x, C) = \|x\| / \|x_0\|$, где $x_0 = [o, x] \cap \partial C$ – точка пересечения луча, исходящего из начала координат и проходящего через x , и границы тела C , и $t(x, C) := x/g^*(x, C) \in \partial C$, $x \in \mathbb{E}_0^d$ (см. [48] замечание 11.1). Очевидно, что расчет дистанционной функции $g^*(x, C)$ сводится, в общем случае, к решению задачи выпуклой оптимизации

$$g^*(x, C) = 1 / \max \{ \lambda \geq 0 : \lambda x \in C \},$$

что по сложности, как правило, соответствует задаче нахождения значения опорной функции. Из определения дистанционной функции следует, что тело $C \in \mathcal{C}_0$ допускает представление в виде множества уровня дистанционной функции (см. [48] теорема 11.2 и [49] п. 14]):

$$C = \{x \in \mathbb{E}^d : g^*(x, C) \leq 1\}.$$

Для $C \in \mathcal{C}_0$ справедливо $C^{**} = C$ (см. [48] теорема 6.4 и [49] теорема 14.5), кроме того, опорная и дистанционная (калибровочная) функции полностью "дуальны": для $x \in \mathbb{E}^d$ справедливо (см. [48] теорема 12.2 и [49] теорема 14.5]):

$$g(x, C^*) = g^*(x, C), \quad g^*(x, C^*) = g(x, C).$$

В частности, из дуальности вытекает, что полара тела $C \in \mathcal{C}_0$ допускает представление в виде множества решений системы неравенств, порожденных дистанционной функцией:

$$C^* = \{x \in \mathbb{E}^d : \langle u, x \rangle \leq g^*(u, C), u \in \mathbb{E}_0^d\}.$$

Кроме того, нам понадобится представление

$$t(x, C) = x/g(x, C^*), x \in \mathbb{E}_0^d.$$

Каждая из рассматриваемых функций имеет свойства, делающие её удобной характеристикой при аппроксимации выпуклых множеств многогранниками. Так, при аппроксимации выпуклой оболочки объединения выпуклых тел из класса $\mathcal{C}_0$, а также их сумм Минковского с положительными коэффициентами удобно использовать аппарат опорных функций: для $x \in \mathbb{E}^d$ справедливо (см. [48] теорема 12.4):

$$g(u, C) = \max_{1 \leq i \leq m} g(u, C_i), \quad C = \text{conv} \left\{ \bigcup_{i=1}^m C_i \right\};$$

$$g(u, C) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g(u, C_i), \quad C = \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i, \quad \lambda_i \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

В то же время, при аппроксимации пересечения выпуклых тел из класса $\mathcal{C}_0$ удобно использовать аппарат дистанционных функций: для $x \in \mathbb{E}^d$ справедливо (см. [48] теорема 11.3):

$$g^*(u, C) = \max_{1 \leq i \leq m} g^*(u, C_i), \quad C = \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

Покажем, что определенные в гл. 1 аппроксимационные схемы отсечения и восполнения являются двойственными в смысле следующей теоремы.

Теорема 3.1.1 [95]. Пусть последовательность многогранников $\{P^n\}_{n=0,1,2,\dots}$, где $P^n \in \mathcal{C}_0$, $n=0,1,2,\dots$, является последовательностью восполнения (отсечения) для $C \in \mathcal{C}_0$. Тогда последовательность многогранников $\{(P^n)^*\}_{n=0,1,2,\dots}$ является последовательностью отсечения (восполнения) для C^* , причем для последовательности восполнения справедливо

$$(P^{n+1})^* = (P^n)^* \cap L(u_n, C^*), \quad u_n := p_n / \|p_n\| \in S^{d-1},$$

а для последовательности отсечения –

$$(P^{n+1})^* = \text{conv} \{p_n, (P^n)^*\}, \quad p_n := u_n / g(u_n, C) \in \partial C^*.$$

Эти формулы позволяют для произвольного метода аппроксимации, основанного на схеме восполнения (отсечения), переходить к его двойственному аналогу – методу отсечения (восполнения), применимому для аппроксимации полярного тела.

При аппроксимации выпуклых компактных тел, заданных дистанционной функцией, могут быть использованы и методы восполнения. Впервые такая идея была предложена в [43], [90]. Такой подход, использующий двойственные методы для решения прямой задачи, мы будем называть прямо-двойственным.

Приведем общее описание прямо-двойственных АМПА [96],

[95].

Прежде всего, выберем систему отсчета с центром во внутренней точке с возможно меньшим значением внешнего радиуса $R_0(C)$ тела C . Далее может быть использован некоторый метод восполнения (например, метод УО), основанный на вычислении опорной функции полярного множества C^* (с подстановкой в качестве значений опорной функции $g(\cdot, C^*)$ значения дистанционной $g^*(\cdot, C)$). В результате аппроксимации получается последовательность внутренних многогранников $\{P^n\}$.

В качестве искомой аппроксимирующей последовательности выберем $\{(P^n)^*\}$, описания которых легко получить из описаний $\{P^n\}$, используя соотношения, приведенные в начале настоящего пункта. Проблема состоит в том, что необходимо оценить точность аппроксимации многогранниками $\{(P^n)^*\}$ исходного тела C .

Прежде всего, для грубой оценки достигнутой точности можно использовать точность аппроксимации многогранником P^n полярного множества C^* (см. лемму 3.2.1 [95]):

$$\delta^H((P^n)^*, C) \leq R_0((P^n)^*) R_0(C) \delta^H(P^n, C^*).$$

Для получения более точной оценки отклонения внешнего многогранника от аппроксимируемого исходного тела заметим, что полярны к построенным с помощью метода восполнения многогранникам будут описаны своим множеством вершин. Так как искомая точность равна максимуму отклонения вершин аппроксимирующего внешнего многогранника $(P^n)^*$ от аппроксимируемого тела C , то в качестве её верхней оценки можно взять максимальную из величин $\rho(p, p/g^*(p, C))$ для

$$p \in M^f((P^n)^*) = \{u/g(u, P^n): u \in M^f(P^n)\}.$$

Итак, адаптивные методы восполнения, основанные на задании аппроксимируемого тела через опорную функцию, могут быть использованы и для аппроксимации тел, заданных дистанционной функцией. В этом способе, однако, адаптация метода происходит к полярному телу. При этом порядок скорости сходимости останется тем же, а константа будет, скорее всего, существенно хуже.

Пример реализации прямо-двойственного метода на основе метода УО приведен в [88]. Заметим, что экспериментальные исследо-

вания, проведенные в классе эллипсоидов, показали, что зависимость эффективности прямо-двойственного метода УО от асферичности аппроксимируемых тел выше, чем теоретические оценки (по крайней мере, в гладком случае), однако остается значительной (см. п. 5.4.3).

4.5. Комбинированный метод

До сих пор в работе рассматривалась *однородная задача* полиэдральной аппроксимации ВКТ в двух двойственных постановках:

- 1) аппроксимировать тело, заданное своей *опорной* функцией, (вписанным) многогранником с возможно меньшим числом *вершин*;
- 2) аппроксимировать тело, заданное своей *дистанционной* функцией, (описанным) многогранником с возможно меньшим числом *гиперграней*.

Смешанная задача построения многогранников с двойственным (прямым) описанием при аппроксимации тел заданных прямым (двойственным) способом имеет две следующие постановки:

- 1) аппроксимировать тело, заданное своей *дистанционной* функцией, (вписанным) многогранником с возможно меньшим числом *вершин*;
- 2) аппроксимировать тело, заданное своей *опорной* функцией, (описанным) многогранником с возможно меньшим числом *гиперграней*.

Сразу заметим, что методов решения смешанной задачи в нашей теории нет. Однако, если *отказаться от требования, что аппроксимирующий многогранник должен быть вписанным (описанным)*, то для её решения могут быть использованы последовательно (в виде двух фаз) методы решения двух двойственных однородных задач. Впервые такая идея использована в работе [90], [91]. Приведем краткое описание этого подхода [96], [95].

Для решения *третьей* задачи аппроксимируемое тело C может быть сначала приближено с внешним многогранником с помощью оптимальных по порядку числа гиперграней аппроксимирующего многогранника методов отсечения (например, УВО, или УО*, или прямо-двойственный УО). Пусть на этом этапе построен многогранник $P^n \in \mathcal{P}^c(C)$: $\alpha(P^n, C) \leq \varepsilon_1$. Далее для многогранника P^n применяется

какой-либо оптимальный по порядку числа вершин метод восполнения (например, УО). Использование метода восполнения в этом случае не вызывает затруднений, так как многогранник P^n имеет не слишком большое число гиперграней (а в методах УВО, или УО*, или прямо-двойственном УО, задан еще и своими вершинами) и вычисление его опорной функции может быть проведено стандартными методами. Пусть в результате применения метода восполнения строится многогранник $Q^n \in \mathcal{P}^i(P^n)$: $\delta(Q^n, P^n) \leq \varepsilon_2$. Нетрудно видеть, что

$$\delta(Q^n, C) \leq \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

что и решает рассматриваемую смешанную задачу.

Заметим, что построенный многогранник Q^n не принадлежит ни одному из классов $\mathcal{P}^i(C)$ или $\mathcal{P}^c(C)$, и, кроме того, двухфазный метод не является бесконечно-продолжимым: если первая фаза (аппроксимация исходного тела внешним многогранником) может быть продолжена для повышения точности, то вторая фаза (аппроксимация внешнего многогранника внутренним) должна быть в этом случае выполнена заново.

Для решения *четвертой* задачи аппроксимируемое тело C может быть сначала приближено с внутренним многогранником с помощью оптимальных по порядку числа вершин аппроксимирующего многогранника методов восполнения (например, УО). Далее для многогранника P^n применяется какой-либо оптимальный по порядку числа гиперграней метод отсечения (например, УВО). Использование метода отсечения в этом случае не вызывает затруднений, так как многогранник P^n имеет не слишком большое число вершин (а в методе УО задан еще и своими гипергранями) и вычисление его дистанционной функции может быть проведено стандартными методами.

Заметим, что, как и в случае двухфазного метода решения третьей смешанной задачи, построенный многогранник Q^n не принадлежит ни одному из классов $\mathcal{P}^i(C)$ или $\mathcal{P}^c(C)$, и, кроме того, двухфазный метод в этом случае также не является бесконечно-продолжимым.

В [90], [90] приведен пример использования двухфазного метода (в совокупности с прямо-двойственным использованием метода УО)

для построения экономного описания выпуклой оболочки большого числа точек (см. также п. 5.5.1).

Глава 5. Экспериментальное исследование скорости сходимости и эффективности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации

5.1. Задачи и методика численного исследования эффективности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации

Результаты теоретического исследования АМПА, приведенные в предыдущей главе (см. также [95]), показывают, что их асимптотическая скорость сходимости близка к оптимальной. Задачей настоящей работы является выработка методологии численного исследования асимптотической эффективности АМПА, экспериментальное подтверждение оптимальности предложенных в [95] методов, а также получение дополнительной информации об этих методах, которая может быть использована при их практическом применении. Более конкретно, в этом исследовании нас будет интересовать:

- подтверждение применимости асимптотической теории при достижимых на практике точностях аппроксимации;
- сравнение нижних оценок асимптотической эффективности с эффективностью методов в численных экспериментах;
- исследование дополнительных параметров сложности АМПА.

В качестве объектов аппроксимации в настоящем исследовании выбраны, прежде всего, многомерные телесные эллипсоиды. Важность исследования эффективности алгоритмов в классе эллипсоидов определяется тем фактом, что эллипсоиды являются наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике объема симметрической разности. Кроме того, этому классу принадлежит шар, являющийся наиболее сложным объектом при аппроксимации в метрике Хаусдорфа.

Отметим, что начало численного исследования эффективности

АМПА, в частности – в классе эллипсоидов, было положено в [18], [46], где рассматривалась сходимость в метрике Хаусдорфа и объема симметрической разности для метода УО; далее метод УО исследовался в [19], [20]. Продолжением исследований по данной методике явились работы [22], [23] и [24]: метод СМ численно исследовался в [22], метод МСМ – в [23], прямо-двойственный метод УО – в [24].

Собственно методика исследования была разработана в работах [46], [18]. Она основана на сравнении асимптотических оценок сходимости МНА со сходимостью АМПА, полученных в реальных численных экспериментах по аппроксимации, и состоит из двух основных этапов:

- 1) исследования порядка скорости сходимости;
- 2) исследования собственно эффективности.

1) Первый этап состоит в следующем. Согласно результатам п. 1.1 будем считать, что гипотетический оптимальный метод (метод построения МНА) для ВКТ C имеет асимптотическую скорость сходимости вида

$$\delta(C, P^n) \approx \frac{A(C)}{[m(P^n)]^{1/\alpha(C)}}, \quad (5.1.1)$$

где $\alpha(C)$ и $A(C)$ – некоторые константы, а m – некоторая вычислительная характеристика аппроксимирующего МНА P^n : число итераций n , число вычислений опорной или дистанционной функции G , число вершин m^t , число гиперграней m^f . После этого можно выделить две части исследования.

а). *Обоснование применимости асимптотической теории.* Пусть в процессе численной аппроксимации получена последовательность многогранников $\{P^n\}$. Проверим гипотезу о том, что асимптотически

$$\delta(C, P^n) \approx \frac{A'(C)}{[m(P^n)]^{1/\alpha^*(C)}}, \quad (5.1.2)$$

где $A'(C)$ и $\alpha^*(C)$ – некоторые положительные константы, минимизирующие ошибку интерполяции экспериментальных точек в координатах $\log \delta(C, P^n)$ и $\log m(P^n)$. Если разброс точек относительно прямой

$$\log \delta(C, P^n) = \log A'(C) - \log m(P^n) / \alpha^*(C) \quad (5.1.3)$$

невелик, гипотезу можно считать справедливой.

б). *Сравнение порядка скорости сходимости и аппроксимационного числа.* Сравним величины $\alpha(C)$ и $\alpha^*(C)$. Их близость говорит о том, что порядок скорости сходимости многогранников, порождаемых исследуемым методом и МНА, один и тот же. В этом случае численные исследования будут подтверждать применимость асимптотической теории для оценки скорости сходимости на конечных итерациях.

Заметим, что для проведения данного этапа экспериментального исследования достаточно знать только величину аппроксимационного числа тела: $\alpha(C)$. Поэтому данный этап исследования может быть применен в отношении, например, любых тел из класса $\mathcal{C}_\#$, для которых $\alpha(C) = (d-1)/2$, а также в том случае, когда величина аппроксимационного числа может быть рассчитана специально (см., например, класс тел из п. 4.7 [95], а также п. 5.5.2).

2) Второй этап состоит также из двух частей.

а). Исследование эффективности на итерациях метода.

Пусть $C \in \mathcal{C}$ и $P \in \mathcal{P}(C)$. Напомним (см. главу 2), что величину

$$\eta(P) := \frac{\delta(C, \mathcal{P}_{m(P)}(C))}{\delta(C, P)}$$

мы называем эффективностью аппроксимации тела C многогранником P (с точки зрения числа вершин или гиперграней соответственно). С учетом (5.1.1) эффективность аппроксимации может быть рассчитана как

$$\eta(P) := \frac{A(C)}{[m(P)]^{1/\alpha(C)} \delta(C, P)}. \quad (5.1.4)$$

Пусть $\{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ – сходящаяся к $C \in \mathcal{C}$ последовательность многогранников, построенная исследуемым методом. Начиная с некоторого номера N_0 , определим эмпирические величины

$$\eta_{\min}^*(C) := \min \{ \eta(P^n) : N_0 \leq n \leq N_1 \},$$

$$\eta_{\max}^*(C) := \max \{ \eta(P^n) : N_0 \leq n \leq N_1 \},$$

$$\eta^*(C) := \frac{\sum_{n=N_0}^{N_1} \eta(P^n)}{N_1 - N_0 + 1},$$

где N_1 – максимальный достигнутый в эксперименте номер итерации метода. Эти величины характеризуют эффективность метода на рассматриваемом отрезке последовательности $\{P^n\}$.

б). Исследование асимптотической эффективности метода.

Пусть $F := \{P^n\}_{n=0,1,\dots}$ – сходящаяся к $C \in \mathcal{C}$ последовательность многогранников из $\mathcal{A}(C)$. Напомним (см. главу 2), что величины

$$\underline{\eta}(F) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \eta(P^n), \quad \bar{\eta}(F) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(P^n)$$

мы называем, соответственно, нижней и верхней асимптотической эффективностью аппроксимации тела C последовательностью F . Если нижняя и верхняя асимптотическая эффективность совпадают, можно говорить об эффективности аппроксимации тела C . Наконец, под эффективностью метода полиэдральной аппроксимации тела C мы понимаем эффективность порождаемой им последовательности многогранников.

В случае, если на первом этапе исследования гипотеза (5.1.2) о сходимости рассматриваемой последовательности многогранников с оптимальным порядком $\alpha^* = \alpha(C)$ считается подтвержденной, начиная с номера N_0 , то, экстраполируя результаты аппроксимации, получаем, что величины $\eta^*_{\min}(C)$ и $\eta^*_{\max}(C)$ могут служить эмпирическими оценками для нижней и верхней асимптотической эффективности метода:

$$\underline{\eta}(C) \approx \eta^*_{\min}(C), \quad \bar{\eta}(C) \approx \eta^*_{\max}(C).$$

Если, наконец, с ростом N_0 величина $\eta^*_{\max}(C) - \eta^*_{\min}(C)$ уменьшается, то можно считать, что величина $\eta^*(C)$ может служить эмпирической оценкой для асимптотической эффективности метода:

$$\eta(C) \approx \eta^*(C).$$

Заметим, что для проведения данного этапа экспериментального исследования необходимо знать не только величину аппроксимационного числа тела $\alpha(C)$, но и уметь рассчитывать константу ап-

проксимируемости $A(C)$. Согласно п. 1.1, для $C \in \mathcal{C}^2$ справедливо

$$A^H(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^{2/(d-1)}, \quad (5.1.5)$$

$$A_i^S(C) = \frac{1}{2} \text{del}_{d-1} \left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x) \right)^{(d+1)/(d-1)}, \quad (5.1.6)$$

$$A_f^S(C) = \frac{1}{2} \text{div}_{d-1} \left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x) \right)^{(d+1)/(d-1)}, \quad (5.1.7)$$

где $\mathcal{G}_l$ есть плотность покрытия пространства $\mathbb{E}^l$ шарами фиксированного радиуса, del_l и div_l – триангуляционные числа Делоне и Дирихле-Вороноя, соответственно, – константы, зависящие только от l , $\pi_d := \pi^{d/2}/\Gamma((d/2)+1)$ – объем единичного шара, $k_C(x)$ – кривизна Гаусса-Кронекера (произведение главных кривизн) в точке $x \in \partial C$ и $\sigma(x)$ – элемент поверхностного объема в точке x . Заметим, что точно известны только величины $\mathcal{G}_1=1$ и $\mathcal{G}_2=2\pi/\sqrt{27}$, $\text{del}_1=1/6$, $\text{del}_2=1/(2\sqrt{3})$, $\text{div}_1=1/12$, $\text{div}_2=5/(18\sqrt{3})$. Оценки для остальных величин $\mathcal{G}_l$ могут быть найдены, например, в [54], а для констант del_{d-1} и div_{d-1} – в [60] и [98]. Поэтому второй этап численного исследования эффективности АМПА может быть проведен только в том случае, когда удастся рассчитать поверхностные интегралы (5.1.5)-(5.1.7) либо аналитически (что практически возможно только в простейшем случае шаров), либо приближенно, сведя их вычисление к обычному интегрированию. Именно так мы поступим в классе многомерных эллипсоидов.

Наконец, с величиной $A(C)$ может быть сравнена экспериментальная константа сходимости $A^*(C)$, полученная из (5.1.3) заменой $\alpha^*(C)$ на точное значение аппроксимационного числа $\alpha(C)$:

$$\log \tilde{\alpha}(C, P^n) = \log A^*(C) - \log m(P^n) / \alpha(C). \quad (5.1.8)$$

При этом предельная величина $A(C)/A^*(C)$ также, наряду с $\eta^*(C)$, может служить мерой эффективности метода аппроксимации.

5.2. Методика исследования в классе многомерных эллипсоидов

Рассмотрим класс $\mathcal{H}$ телесных эллипсоидов произвольной раз-

мерности. Изучение зависимости эффективности методов от движений аппроксимируемого тела выходит за рамки настоящего исследования, поэтому определим $C \in \mathcal{H}$ как

$$C(a_1, a_2, \dots, a_d) := \{x \in \mathbb{E}^d : \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\},$$

где $a_i > 0$ – некоторый набор полуосей.

Задача вычисления константы аппроксимируемости в метрике Хаусдорфа (5.1.5) в классе $\mathcal{H}$ может быть решена путем численного интегрирования по прямоугольной области в обобщенных сферических координатах $x = \Theta(\theta)$:

$$x_1 = a_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{d-1},$$

$$x_2 = a_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{d-1},$$

$$x_3 = a_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{d-1},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_d = a_d \cos \theta_{d-1}.$$

Определим область

$$U := \{\theta \in \mathbb{R}^{d-1} : 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi; 0 \leq \theta_i \leq \pi, i=2, \dots, d-1\}.$$

Теорема 5.2.1 [46]. Пусть $H := C(a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{H}$. Тогда

$$A^H(C)^{(d-1)/2} = \frac{\mathcal{G}_{d-1}}{2^{(d-1)/2} \pi_{d-1}} \int_U \prod_{j=1}^{d-1} |\sin \theta_j|^{j-1} \left[\sum_{m=1}^d \frac{x_m^2}{a_m^4} \right]^{(1-d)/4} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1}.$$

Поскольку источник [46] малодоступен, приведем полностью доказательство этой теоремы.

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (5.1.5) и нижеследующих лемм 5.2.1 и 5.2.2. Леммы 5.2.1 и 5.2.2 будут сформулированы и доказаны ниже. Для их доказательства понадобятся некоторые сведения из дифференциальной геометрии поверхностей, которые мы приводим по [99].

Введем поверхность S размерности d (или d -поверхность) в $\mathbb{R}^{d+1}$ как непустое подмножество $\mathbb{R}^{d+1}$ вида $S = f^{-1}(c)$, где $f: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ (U –

открытое множество в $\mathbb{R}^{d+1}$) есть гладкая функция со свойством $\nabla f(p) \neq 0$ для $\forall p \in S$.

Каждая d -поверхность S имеет в каждой точке $p \in S$ касательное пространство S_p векторов $\mathbf{v} = (p; \mathbf{v}) \in S_p$, где $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+1}$, которое является d -мерным векторным подпространством $\mathbb{R}_p^{d+1}$ всех векторов в точке p .

Векторным полем $\mathbf{X}$ на d -поверхности $S \subset \mathbb{R}^{d+1}$ назовем функцию, которая сопоставляет каждой точке $p \in S$ некоторый вектор $\mathbf{x}(p) \in \mathbb{R}_p^{d+1}$ в точке p . Если вектор $\mathbf{x}(p)$ ортогонален к S (т.е. $\mathbf{x}(p) \in S_p^\perp$) в каждой точке $p \in S$, то $\mathbf{X}$ называется нормальным векторным полем на S . Векторное поле $\mathbf{X}$ является гладким, если функция $X: S \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, где $\mathbf{x}(p) = (p; X(p))$, для всех $p \in S$ – гладкая (т.е. все ее частные производные любых порядков существуют)⁴. Гладкое единичное нормальное векторное поле на d -поверхности $S \subset \mathbb{R}^{d+1}$ называется ориентацией на S .

Пусть теперь $\mathbf{N}$ – ориентация d -поверхности S . Тогда функция $N: S \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, ассоциированная с векторным полем $\mathbf{N}$ по равенству $\mathbf{n}(p) = (p; N(p))$, $p \in S$, отображает S в единичную d -сферу $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Таким образом, каждой ориентированной d -поверхности S сопоставляется гладкое отображение $N: S \rightarrow S^d$, называемое гауссовым отображением, а $N(S)$ – сферическим образом поверхности S .

Теперь нам необходимо ввести меру искривления поверхности. Производную гладкого векторного поля $\mathbf{X}$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ относительно вектора $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_p^{d+1}$, $p \in U$, определим как $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} \in \mathbb{R}_p^{d+1}$, где

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{X} := (p; \nabla_{\mathbf{v}} X_1, \dots, \nabla_{\mathbf{v}} X_{d+1}),$$

X_i – компоненты $\mathbf{X}$, а $\nabla_{\mathbf{v}} X_i = \nabla X_i(p) \mathbf{v}$ – производная X_i по $\mathbf{v}$.

Линейное отображение $L_p: S_p \rightarrow S_p$, определенное как

⁴ Таким образом, все определения в настоящем пункте относятся к поверхностям класса C^∞ . Это сделано для простоты изложения и оказывается достаточным для целей исследования, так как поверхности эллипсоидов принадлежат этому классу.

$$L_p(\mathbf{v}) = -\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{N},$$

называется отображением Вейнгартена поверхности S . $L_p(\mathbf{v})$ измеряет поворот нормали при движении на S через p с различными скоростями $\mathbf{v}$. С отображением L_p в точке p ориентированной d -поверхности $S \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ассоциируется квадратичная форма $J_p(\mathbf{v}) = L_p(\mathbf{v})\mathbf{v}$, называемая второй основной квадратичной формой поверхности S в точке p ; собственные числа отображения Вейнгартена называются главными кривизнами, а их произведение, т.е. определитель $k(p) = \det L_p$, – кривизной Гаусса-Кронекера поверхности S в точке p .

Отметим, что абсолютная величина кривизны Гаусса-Кронекера дает локальный коэффициент изменения элемента поверхностного объема при переходе к сферическому образу плоскости.

Пусть теперь U – связное открытое множество в $\mathbb{R}^d$ и φ – параметризованная d -поверхность в $\mathbb{R}^{d+1}$, т.е. гладкое отображение $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, являющееся регулярным (касательное пространство к φ , соответствующее любой $p \in U$, является d -мерным). Поля $\mathbf{E}_i(p)$, задаваемые формулой

$$\mathbf{E}_i(p) = (\varphi(p); \frac{\partial \varphi(p)}{\partial u_i}),$$

где $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_{d+1}(p))$ для $p \in U$ и $(u_1, \dots, u_d) \in U$, называются координатными векторными полями вдоль φ , а функции $g_{ij} = \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ – метрическими коэффициентами поверхности φ . Определитель $\det(g_{ij})$ мы будем обозначать через $g(p)$. Элементом объема поверхности φ , соответствующим точке $p = (u_1, \dots, u_d) \in U$, будем называть величину $d\sigma(p) = \sqrt{g(p)} du_1 \dots du_d$ (d -мерный объем d -поверхности в $\mathbb{R}^{d+1}$).

Лемма 5.2.1 [46]. Пусть $H := C(a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{H}$. Тогда для $x := (x_1, \dots, x_d) \in \partial H$ справедливо

$$k(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^d a_j^2 \left[\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right]^{(d+1)/2}}.$$

Лемма 5.2.2 [46]. Пусть $H := C(a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{H}$. Тогда для $x := (x_1, \dots, x_d) = \Theta(\theta) \in \partial H$, где $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) \in U$, справедливо $d\sigma(x) = \sqrt{g(\theta)} d\theta$, где

$$\sqrt{g(\theta)} = \prod_{k=1}^{d-1} |\sin^{k-1} \theta_k| \prod_{l=1}^d a_l \left[\sum_{m=1}^d \frac{x_m^2}{a_m^4} \right]^{1/2}.$$

Доказательство леммы 5.2.1. Для вычисления кривизны воспользуемся теоремой 5 из [99] стр. 132. Пусть S – ориентированная d -поверхность в $\mathbb{R}^{d+1}$, и пусть $p \in S$. Далее, пусть $\mathbf{Z}$ – произвольное ненулевое нормальное векторное поле на S , такое, что $\mathbf{N} := \mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$, и пусть $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d\}$ – произвольный базис в $\mathbb{S}_p$. Тогда, согласно [99] стр. 132:

$$k(p) = \frac{(-1)^d}{\|\mathbf{Z}(p)\|^d} \det \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} \mathbf{Z} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_d} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_d} \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix}, \quad (5.2.1)$$

где для $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{d+1} \in \mathbb{R}_p^{d+1}$, $\mathbf{w}_i := (p; w_{i,1}, \dots, w_{i,d+1})$,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{d+1} \end{bmatrix} := \begin{vmatrix} w_{1,1} & \cdots & w_{1,d+1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{d+1,1} & \cdots & w_{d+1,d+1} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь S – поверхность эллипсоида $H \in \mathcal{H}$

$$S := \{p \in \mathbb{E}^d : f(p) = 1\}, f(p) := \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2},$$

где $p := (x_1, \dots, x_d)$ и $a_i > 0$, $i = 1, \dots, d$, ориентированная внутренней нормалью $\mathbf{Z}(p)$:

$$\mathbf{Z}(p) := -\frac{1}{2} \nabla f(p) = (p; -\frac{x_i}{a_i^2}),$$

где $p := (x_1, \dots, x_d) \in S$.

Поле $\mathbf{Z}$ – ненулевое, нормальное поле для $S = \partial H$. Базис в касательном пространстве $\mathbb{S}_p$ состоит из любых $d-1$ независимых векторов, ортогональных $\mathbf{Z}(p)$. При $x_1 \neq 0$ мы можем взять, например,

$$\mathbf{v}_i := (p; \frac{x_i}{a_i^2}, 0, \dots, -\frac{x_1}{a_1^2}, 0, \dots, 0), \quad i = 2, \dots, d.$$

i^e место

Тогда для $i = 2, \dots, d$ справедливо

$$\nabla_{\mathbf{v}_i} \mathbf{Z} = \{\nabla_{\mathbf{Z}_j} \mathbf{v}_i\}_{j=1, \dots, d} = \begin{cases} -\frac{x_i}{a_1^2 a_i^2}, j = 1; \\ \frac{x_1}{a_1^2 a_i^2}, j = i; \\ 0 - \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\det \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_2} \mathbf{Z} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_d} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{x_2}{(a_1 a_2)^2} & \frac{x_1}{(a_1 a_2)^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x_3}{(a_1 a_3)^2} & 0 & \frac{x_1}{(a_1 a_3)^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{x_d}{(a_1 a_d)^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{x_1}{(a_1 a_d)^2} \\ -\frac{x_1}{a_1^2} & -\frac{x_2}{a_2^2} & -\frac{x_3}{a_3^2} & \dots & -\frac{x_d}{a_d^2} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая сначала по левому столбцу, а затем – по нижней строке, получаем:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_2} \mathbf{Z} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_d} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} &= (-1)^d \left\{ \sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_{i+1}}{(a_1 a_{i+1})^2} (-1)^{1+i} \left(-\frac{x_{i+1}}{a_{i+1}^2} \right) (-1)^{d-1+i} \frac{\prod_{j=1}^{d-1} \frac{x_1}{(a_1 a_{j+1})^2}}{\frac{x_1}{(a_1 a_{i+1})^2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_1}{a_1^2} (-1)^{d+1} \prod_{j=1}^{d-1} \frac{x_1}{(a_1 a_{j+1})^2} \right\} = \\
&= (-1) \frac{\prod_{j=1}^{d-1} \frac{x_1}{(a_1 a_{j+1})^2}}{x_1} \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2} = \\
&= \frac{(-1)}{x_1} \prod_{j=1}^{d-1} \frac{x_1}{(a_1 a_{j+1})^2}.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_d \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x_2}{a_2^2} & -\frac{x_1}{a_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x_3}{a_3^2} & 0 & -\frac{x_1}{a_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{x_d}{a_d^2} & 0 & 0 & \dots & -\frac{x_1}{a_1^2} \\ -\frac{x_1}{a_1^2} & -\frac{x_2}{a_2^2} & -\frac{x_3}{a_3^2} & \dots & -\frac{x_d}{a_d^2} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая аналогично предыдущему, получаем:

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_d \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} &= (-1)^d \left\{ \sum_{i=1}^{d-1} \frac{x_{i+1}}{(a_{i+1})^2} (-1)^{1+i} \frac{x_{i+1}}{a_{i+1}^2} (-1)^{d-1+i} \frac{\prod_{j=1}^{d-1} (-1) \frac{x_1}{(a_1)^2}}{-\frac{x_1}{(a_1)^2}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_1}{a_1^2} (-1)^{d+1} \prod_{j=1}^{d-1} (-1) \frac{x_1}{(a_1)^2} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1) \left(\prod_{j=1}^{d-1} (-1) \frac{x_1}{(a_1)^2} \right) \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right) \frac{a_1^2}{x_1} = \\
&= (-1)^d \frac{a_1^2}{x_1} \left(\prod_{j=1}^d \frac{x_1}{(a_1)^2} \right) \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\|\mathbf{Z}(p)\| = \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right)^{1/2}.$$

Подставляя полученные величины в (5.2.1), получаем

$$\begin{aligned}
k(p) &= \frac{(-1)^{d-1}}{\|\mathbf{Z}(p)\|^{d-1}} \det \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_2} \mathbf{Z} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_d} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} / \det \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_2} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_d} \\ \mathbf{Z}(p) \end{bmatrix} = \\
&= (-1)^{d-1} \frac{\frac{(-1)^{d-1}}{x_1} \prod_{j=1}^{d-1} \frac{x_1}{(a_1 a_{j+1})^2}}{(-1)^d \frac{a_1^2}{x_1} \left(\prod_{j=1}^d \frac{x_1}{(a_1)^2} \right) \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right) \left(\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right)^{(d-1)/2}} = \\
&= \frac{1}{\prod_{j=1}^d a_j^2 \left[\sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^4} \right]^{(d+1)/2}}.
\end{aligned}$$

Лемма 5.2.1 доказана.

Доказательство леммы 5.2.2. Для вычисления элемента площади поверхности ∂H в обобщенных сферических координатах θ_i , $i=1, \dots, d-1$, введем вдоль ∂H координатные векторные поля

$${}^d \mathbf{E}^i = \{ {}^d E_k^i \}_{k=1, \dots, d} := \left\{ \frac{\partial ({}^d x_k)}{\partial \theta_i} \right\}_{k=1, \dots, d}, \quad i = 1, \dots, d-1$$

(верхний левый индекс у переменных означает размерность пространства).

Задача состоит в том, чтобы подсчитать величину

$${}^d g := \det ({}^d g_{ij}), \quad {}^d g_{ij} := {}^d \mathbf{E}^i {}^d \mathbf{E}^j.$$

Тогда для $x := (x_1, \dots, x_d) = \mathcal{C}(\theta) \in \partial H$, где $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) \in U$, элемент площади поверхности будет

$$d\sigma(x) = \sqrt{{}^d g(\theta)} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1}.$$

Покажем, что

$${}^p g = \prod_{k=1}^{p-1} \sin^{2(k-1)} \theta_k \prod_{l=1}^p a_l^2 \sum_{m=1}^p \frac{({}^p x_m)^2}{a_m^4}, \quad (5.2.2)$$

для любого натурального p . Доказательство будем проводить по индукции.

1). $p=2$:

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1; \quad x_1 = a_1 \sin \theta, \quad x_2 = a_2 \cos \theta,$$

$$d\sigma(x) = \sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + a_2^2 \sin^2 \theta} \, d\theta = a_1 a_2 \sqrt{\frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_1^2}{a_1^4}} \, d\theta.$$

2). $p=3$: справедливость (5.2.2) доказывается, например, в [100].

3). Предположим, что для некоторого $n \geq 3$ утверждение (5.2.2) верно для всех $p \leq n$. Тогда

$${}^{n+1} x_{k'} = \begin{cases} {}^n x_k \sin \theta_n, & k' = k \leq n \\ a_{n+1} \cos \theta_n, & k' = n+1 \end{cases},$$

$${}^{n+1} E_{k'}^{i'} = \begin{cases} {}^n E_k^i \sin \theta_n, & k' = k \leq n, i' = i \leq n-1 \\ {}^n x_k \cos \theta_n, & k' = k \leq n, i' = n \\ 0, & k' = n+1, i' = i \leq n-1 \\ -a_{n+1} \sin \theta_n, & k' = n+1, i' = n \end{cases}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
{}^{n+1}g_{i'j'} &= \sum_{k'=1}^{n+1} {}^{n+1}E_{k'}^{i' n+1} E_{k'}^{j'} = \left[\sum_{k=1}^n {}^n E_k^i {}^n E_k^j \right] \sin^2 \theta_n = \\
&= {}^n g_{ij} \sin^2 \theta_n, \quad i' = i \leq n-1, j' = j \leq n-1.
\end{aligned}$$

Рассмотрим ${}^{n+1}g_{i'j'}$, когда i' или j' равны n . В дальнейшем индекс размерности $n+1$ у величин g , E и x будет опускаться.

Выразим $E_{k'}^n$ через $E_{k'}^{n-1}$, где это возможно.

$$\begin{aligned}
E_{k'}^n = \frac{\partial x_{k'}}{\partial \theta_n} &= \begin{cases} x_{k'} \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n}, & k' = k \leq n \\ -x_{k'} \frac{\sin \theta_n}{\cos \theta_n}, & k' = n+1 \end{cases}; \\
E_{k'}^{n-1} = \frac{\partial x_{k'}}{\partial \theta_{n-1}} &= \begin{cases} x_k \frac{\cos \theta_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}}, & k' = k \leq n-1 \\ -x_k \frac{\sin \theta_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}}, & k' = k = n \\ 0, & k' = n+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

(деление на $\sin \theta_n$, $\cos \theta_n$, $\sin \theta_{n-1}$, $\cos \theta_{n-1}$ не ограничительно и введено для удобства записи). Обозначим

$$\delta_1 := \frac{\sin \theta_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n},$$

$$\delta_2 := \frac{\cos \theta_{n-1}}{\sin \theta_{n-1}} \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n}.$$

Тогда

$$E_{k'}^n = \begin{cases} \delta_1 E_{k'}^{n-1}, & k' \leq n-1 \\ -\delta_2 E_{k'}^{n-1}, & k' = n \end{cases}.$$

Имеем теперь

$$g_{nj'} = \sum_{k=1}^n E_k^n E_k^{j'} + E_{n+1}^n E_{n+1}^{j'}.$$

1) $j'=j \leq n-2$. Учитывая, что $E_{n+1}^j = 0$ и $E_n^j = 0$, получаем

$$g_{nj} = \sum_{k=1}^{n-1} E_k^n E_k^j = \delta_1 \sum_{k=1}^{n-1} E_k^{n-1} E_k^j = \delta_1 \sum_{k'=1}^{n+1} E_{k'}^{n-1} E_{k'}^j = \delta_1 g_{n-1j}.$$

2) $j'=j=n-1$. Учитывая, что $E_{n+1}^j = E_{n+1}^{n-1} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} g_{nj} &= g_{nn-1} = \sum_{k=1}^{n-1} E_k^n E_k^{n-1} + E_n^n E_n^{n-1} = \\ &= \delta_1 \sum_{k=1}^n E_k^{n-1} E_k^{n-1} - (\delta_1 + \delta_2) E_n^{n-1} E_n^{n-1} = \\ &= \delta_1 \sum_{k'=1}^{n+1} (E_{k'}^{n-1})^2 - (\delta_1 + \delta_2) (E_n^{n-1})^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$g_{nj} = \delta_1 g_{n-1j} + \delta_3 (E_n^{n-1})^2,$$

где

$$\delta_3 := \frac{1}{\cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-1}} \frac{\cos \theta_n}{\sin \theta_n}.$$

3) $j'=n$. Учитывая, что $E_{n+1}^{n-1} = 0$, получаем

$$\begin{aligned} g_{nj'} &= g_{nn} = \sum_{k=1}^{n-1} (E_k^n)^2 + (E_n^n)^2 + (E_{n+1}^n)^2 = \\ &= \delta_1 \sum_{k=1}^{n-1} E_k^{n-1} E_k^n - \delta_2 E_n^{n-1} E_n^n + (E_{n+1}^n)^2 = \\ &= \delta_1 \sum_{k'=1}^n E_k^{n-1} E_k^n - (\delta_1 + \delta_2) E_n^{n-1} E_n^n + (E_{n+1}^n)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$g_{nj''} = g_{nn} = \delta_1 g_{n-1n} - \delta_3 E_n^{n-1} E_n^n + (E_n^{n-1})^2.$$

Вычтем теперь из n -й строки матрицы $({}^{n+1}g_{ij}) = [{}^{n+1}\mathbf{E}^{i'} {}^{n+1}\mathbf{E}^{j'}]$ $(n-1)$ -ю строку, умноженную на δ_1 , а затем из n -го столбца полученной матрицы вычтем $(n-1)$ -й столбец, умноженный на то же число. Определитель матрицы при этом не изменится. Получим, что ${}^{n+1}g$ есть детерминант матрицы

$({}^{n-1}g_{i''j''}) \sin^2 \theta_{n-1} \sin^2 \theta_n$		0
$({}^n g_{ij}) \sin^2 \theta_n$		$-\delta_3 (E_n^{n-1})^2$
0	$-\delta_3 (E_n^{n-1})^2$	$\hat{g}_{nn}$

где

$$\hat{g}_{nn} := -\delta_3 E_n^{n-1} E_n^n + (E_{n+1}^n)^2 + \delta_1 \delta_3 (E_n^{n-1})^2.$$

Раскладывая по нижней строке, получаем

$${}^{n+1}g = \hat{g}_{nn} {}^n g \sin^{2(n-1)} \theta_n + \delta_3 (E_n^{n-1})^2 (-\delta_3) (E_n^{n-1})^2 ({}^{n-1}g \sin^{2(n-2)} \theta_{n-1} \sin^{2(n-2)} \theta_n).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (E_{n+1}^n)^2 &= a_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n, \quad (E_{n+1}^{n-1})^2 = a_n^2 \sin^2 \theta_{n-1} \sin^2 \theta_n, \\ \hat{g}_{nn} &= (E_{n+1}^n)^2 + (E_n^{n-1})^2 (\delta_3 \delta_1 + \delta_3 \delta_2) = (E_{n+1}^n)^2 + (E_n^{n-1})^2 \delta_3 = \\ &= a_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n + a_n^2 \cos^2 \theta_n / \cos^2 \theta_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставляя их в выражение для ${}^{n+1}g$, получаем рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} {}^{n+1}g &= (a_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n + a_n^2 \cos^2 \theta_n / \cos^2 \theta_{n-1}) \sin^{2(n-1)} \theta_n {}^n g - \\ &- a_n^4 (\cos^2 \theta_n / \cos^2 \theta_{n-1}) \sin^{2(n-1)} \theta_{n-1} \sin^{2(n-1)} \theta_n {}^{n-1}g. \end{aligned}$$

По предположению индукции

$${}^{n-1}g = \prod_{k''=1}^{n-2} \sin^{2(k''-1)} \theta_{k''} \prod_{l''=1}^{n-1} a_{l''}^2 \sum_{m''=1}^{n-1} \frac{({}^{n-1}x_{m''})^2}{a_{m''}^4},$$

$${}^n g = \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{2(k-1)} \theta_k \prod_{l=1}^n a_l^2 \sum_{m=1}^n \frac{({}^n x_m)^2}{a_m^4}.$$

Тогда ${}^{n+1} g =$

$$\begin{aligned} &= \left(a_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n + a_n^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \right) \sin^{2(n-1)} \theta_n \\ &\prod_{k=1}^{n-1} \sin^{2(k-1)} \theta_k \prod_{l=1}^n a_l^2 \sum_{m=1}^n \frac{({}^n x_m)^2}{a_m^4} - \\ &- a_n^4 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \sin^{2(n-1)} \theta_{n-1} \sin^{2(n-1)} \theta_n \\ &\prod_{k''=1}^{n-2} \sin^{2(k''-1)} \theta_{k''} \prod_{l''=1}^{n-1} a_{l''}^2 \sum_{m''=1}^{n-1} \frac{({}^{n-1} x_{m''})^2}{a_{m''}^4} = \\ &= \sin^{2(n-1)} \theta_n \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{2(k-1)} \theta_k \prod_{l=1}^n a_l^2 \\ &\left[\left(a_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n + a_n^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \right) \sum_{m=1}^n \frac{({}^n x_m)^2}{a_m^4} - \right. \\ &\left. - a_n^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \sin^2 \theta_{n-1} \sum_{m''=1}^{n-1} \frac{({}^{n-1} x_{m''})^2}{a_{m''}^4} \right]. \end{aligned}$$

a).

$$a_{n+1}^2 \sin^2 \theta_n \sum_{m=1}^n \frac{({}^n x_m)^2}{a_m^4} = a_{n+1}^2 \sum_{m=1}^n \frac{({}^{n+1} x_m)^2}{a_m^4}$$

б).

$$\begin{aligned} &a_n^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \frac{({}^n x_n)^2}{a_n^4} = a_n^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \frac{a_n^2 \cos^2 \theta_{n-1}}{a_n^4} = \\ &= \cos^2 \theta_n = \frac{({}^{n+1} x_{n+1})^2}{a_{n+1}^2} \end{aligned}$$

в).

$$a_n^2 \frac{\cos^2 \theta_n}{\cos^2 \theta_{n-1}} \left[\sum_{m=1}^{n-1} \frac{({}^n x_m)^2}{a_m^4} - \sin^2 \theta_{n-1} \sum_{m''=1}^{n-1} \frac{({}^{n-1} x_{m''})^2}{a_{m''}^4} \right] = 0 ,$$

так как $\sin^2 \theta_{n-1} {}^{n-1} x_{m''} = {}^n x_{m''}$ при $m'' \leq n-1$.

Итак,

$${}^{n+1} g = \prod_{k'=1}^n \sin^{2(k'-1)} \theta_{k'} \prod_{l'=1}^{n+1} a_{l'}^2 \sum_{m'=1}^{n+1} \frac{({}^{n+1} x_{m'})^2}{a_{m'}^4} .$$

Лемма 5.2.2 доказана.

Теорема 5.2.2 [46]. Пусть $H := C(a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{H}$. Тогда

$$A_i^S(C) = \frac{d}{2} \operatorname{del}_{d-1}(d\pi_d)^{2/(d-1)} \mu(C) ,$$

$$A_f^S(C) = \frac{d}{2} \operatorname{div}_{d-1}(d\pi_d)^{2/(d-1)} \mu(C) .$$

Доказательство. Расчет констант аппроксимации (5.1.6) и (5.1.7) для метрики объема мог бы быть произведен, как и в случае теоремы 5.2.1, путем подстановки выражений в обобщенных сферических координатах для кривизны (из леммы 5.2.1) и элемента поверхностного объема (из леммы 5.2.2) в (5.1.6) и (5.1.7). Однако в этом случае может быть использовано аффинное изопериметрическое неравенство Бляшке [93] (см. обзор доказательств в [102]), которое позволяет получить точное выражение констант аппроксимации через объем эллипсоида.

Согласно аффинному изопериметрическому неравенству Бляшке для $C \in \mathcal{H}$ справедливо

$$\left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/(d+1)} d\sigma(x) \right)^{(d+1)} = (d\pi_d)^2 (d\mu(C))^{d-1} . \quad (5.2.3)$$

Подставляя (5.2.3) в (5.1.6) и (5.1.7), получаем утверждение теоремы 5.2.2.

Теорема 5.2.2 доказана.

5.3. Результаты численных исследований в классе многомерных эллипсоидов

5.3.1. Результаты предварительных численных исследований методов полиэдральной аппроксимации

Прежде всего, следует отметить, что в литературе, посвященной МПА, обсуждение результатов численных экспериментов практически отсутствует. Единственным примером, в котором приводятся результаты численной аппроксимации многомерных множеств, является, пожалуй, работа [17]⁵, в которой рассматривается неадаптивный МПА, основанный на апостериорно прореженной метрической сетке в сферических координатах (см. в конце главы 3 пункт 4)).

В табл. 5.3.1.1 сопоставлены результаты сравнения метода [17] и метода УО, полученные в [18], [46]. В таблице приводятся данные о результатах аппроксимации трех трехмерных тел: единичного шара B , эллипсоида H (с полуосями длины 1, 1, 0.5) и куба K с ребром длины 2. Через ε обозначена точность аппроксимации в метрике Хаусдорфа, через m^f – число гиперграней, через m^t – число вершин аппроксимирующих многогранников, через m^g – число вычислений опорной функции. Кроме того, для сравнения приводится асимптотически оптимальное число вершин (совпадающее с соответствующим числом гиперграней), обозначенное через m^{opt} , рассчитанное для тел B и H в [18], [46] согласно (5.1.1), (5.1.5) с использованием теоремы 5.2.1.

Из таблицы видно, что эффективность метода УО на 2-3 порядка выше, чем у неадаптивного метода из [17]. Приведенный результат количественно характеризует тот факт, что адаптивные алгоритмы по скорости сходимости качественно превосходят неадаптивные (особенно при отсутствии информации о гладкости аппроксимируемого тела) (см. [4], [35] и обзор методов в главе 3).

⁵ Результаты численных экспериментов по аппроксимации представлены также в работе [21], где рассматривается МПА, пригодный исключительно для многомерных эллипсоидов. К сожалению, исследования эффективности аппроксимации в этой работе нет, а также отсутствуют параметры аппроксимированных тел, что не позволяет провести сравнение с рассматриваемыми нами АМПА.

Таблица 5.3.1.1

Точность ε	Метод [17]		Метод УО			m^{opt}	Тело
	m^t	m^g	m^t	m^f	m^g		
0.10	5 139	10 125	47	89	203	24	B
0.01	49 612	1 023 640	417	830	1 732	244	
0.10	3 362	10 125	34	64	146	13	H
0.01	30 514	1 023 640	226	648	1 324	129	
0.10	464	30 597	8	6	14	6	K
0.01	5 642	3 074 688	8	6	14	6	

Первые численные исследования скорости сходимости АМПА в классе многомерных эллипсоидов по описанной в начале главы методике проводились в [18], [46]. В этих работах впервые численно аппроксимировались методом УО небольшое число эллипсоидов с различными аппроксимационными константами в пространствах от двух до пяти переменных. По результатам экспериментов был сделан вывод о близости скорости сходимости многогранников, полученных методом УО, к асимптотически оптимальным. Заметим, что в это время ещё не был получен точный порядок скорости сходимости этих методов, рассмотренный в п. 4.1. Поэтому полученные в ходе численных экспериментов результаты явились дополнительным стимулом к дальнейшим теоретическим исследованиям.

5.3.2. Простой пример численного исследования методов полиэдральной аппроксимации

Прежде чем описать результаты подробного экспериментального исследования методов аппроксимации в классе эллипсоидов, продемонстрируем на простом примере некоторые особенности аппроксимации ВКТ с помощью АМПА.

Рассмотрим двумерный единичный шар B^2 . Вписанным МНА с n -вершинами в этом случае будет правильный n -угольник P_n , а точность аппроксимации:

$$\delta^H(B^2, P_n) = 1 - \cos(\pi / n),$$

$$\delta^S(B^2, P_n) = \pi - n \cos(\pi / n) \sin(\pi / n).$$

Заметим, что переход от МНА с n вершинами к МНА с $n+1$ вершинами требует изменения положения всех вершин. Это свойство типично для МНА.

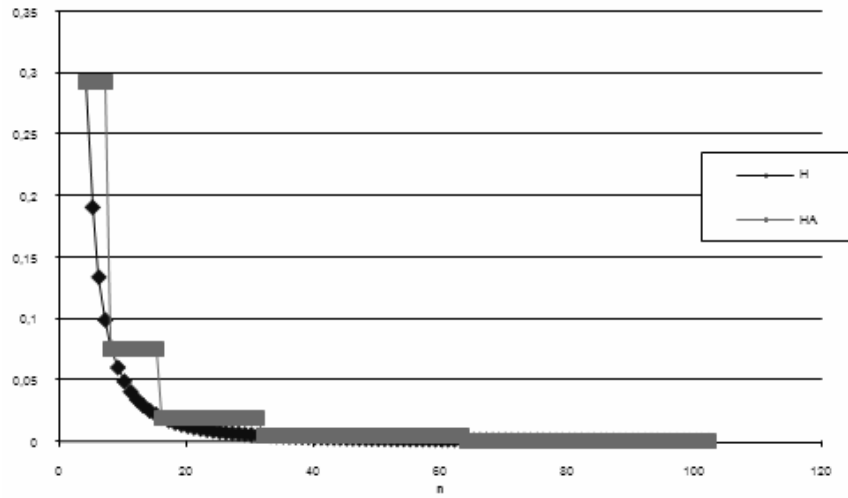


Рис. 5.3.2.1.

Рассмотрим аппроксимацию тела B^2 , например, методом БВ₁ (в данном случае совпадающим с методом УО), начиная, скажем, с правильного четырехугольника P_4 . В генерируемой этим адаптивным методом последовательности многоугольников $\{P(n)\}$ при числе вершин $n = 2^k$, $k=2, 3, \dots$, получаются многоугольники, совпадающие с МНА: $P(2^k) \equiv P_{2^k}$, в то время как в многоугольниках $P(n)$ при $n=2^k+i$, $i=1, \dots, 2^k-1$, присутствует $2i$ ребер многоугольника $P(2^{k+1}) \equiv P_{2^{k+1}}$ и сохраняются 2^k-i ребер от многоугольника $P(2^k) \equiv P_{2^k}$. При этом

$$\delta^H(B^2, P(2^{k+i})) = \delta^H(B^2, P_{2^k}) = 1 - \cos(\pi / 2^k),$$

$$\delta^S(B^2, P(2^{k+i})) = \pi - (2^k-i) \cos(\pi / 2^k) \sin(\pi / 2^k) - 2i \cos(\pi / 2^{k+1}) \sin(\pi / 2^{k+1}),$$

где $i=0, 1, \dots, 2^k-1$, $k=2, 4, \dots$. Такое поведение точности аппрокси-

мации есть следствие именно адаптивного характера алгоритма, т.к. в процессе аппроксимации часть вершин с предыдущих итераций сохраняется.

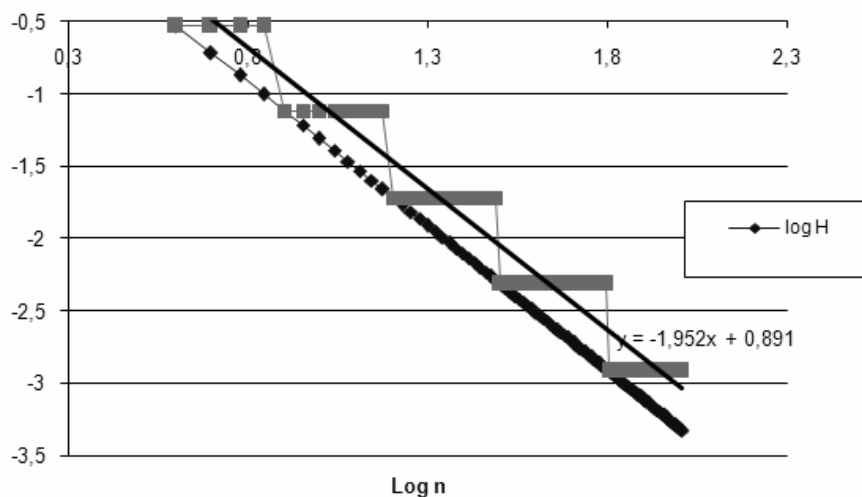


Рис. 5.3.2.2.

На рис. 5.3.2.1 представлены графики величин $\delta^H(B^2, P_n)$ (график Н) и $\delta^H(B^2, P(n))$ (график НА) в зависимости от числа вершин n , а на рис. 2 – графики $\log_{10} \delta^H(B^2, P_n)$ (график $\log H$) и $\log_{10} \delta^H(B^2, P(n))$ (график $\log \text{НА}$) в зависимости от $\log_{10} n$. Из рисунков видно, что график точности адаптивного метода в метрике Хаусдорфа имеет характерные уступы, т.е. на протяжении ряда итераций точность аппроксимации не меняется, а затем резко падает. На рис. 5.3.2.2 (в логарифмических координатах) представлен также линейный тренд и его уравнение, из которого видно, что порядок скорости сходимости адаптивного метода и $\alpha^* \approx 1.953$ близок к оптимальному $\alpha(C)=2$ (см. (5.1.3)).

Замечание. Наличие скачков в графиках точности метода приводит к трудностям в оценке порядка скорости сходимости, так как неудачный выбор отрезка наблюдения может существенно повлиять на результаты применения метода наименьших квадратов (т.е. на величину наклона линейного тренда).

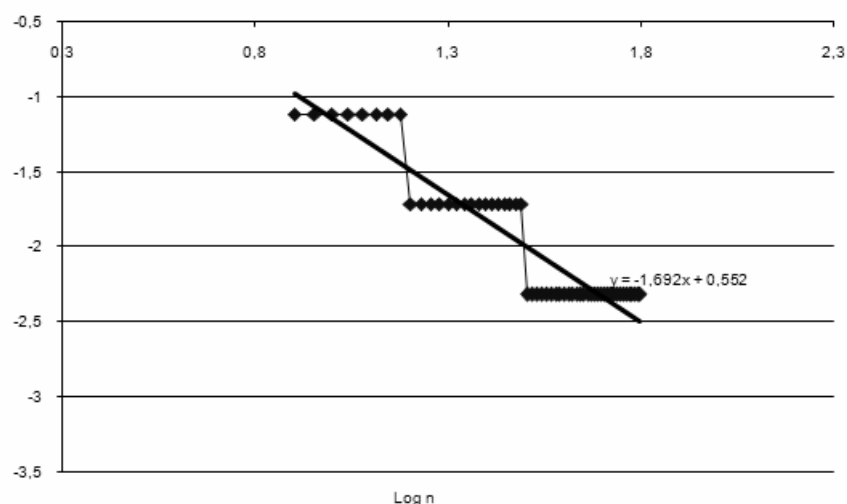


Рис. 5.3.2.3.

Так, на рис. 5.3.2.3 представлена часть графика $\log_{10} \delta^H(B^2, P(n))$ из рис. 5.3.2.2, а также линейный тренд, построенный для этих данных. Видно, что в этом случае оценка порядка скорости сходимости адаптивного метода $\alpha^* \approx 1.693$ значительно дальше от оптимальной. Теоретические исследования (см. гл. 2) свидетельствуют о том, что асимптотически порядок скорости сходимости изучаемых методов совпадает с оптимальным. Однако совпадение порядка скорости сходимости на начальных этапах является вопросом экспериментального исследования. Некоторые подходы к анализу данных, получаемых в численных экспериментах, позволяющие алгоритмическим путем преодолеть эту трудность, приведены в работе [27]. Мы не будем более специально останавливаться на этом вопросе, тем более, что, как мы увидим далее, с ростом точности аппроксимации (за исключение рассматриваемого в настоящем пункте случая двумерного шара), а также размерности скачки точности становится менее выраженными.

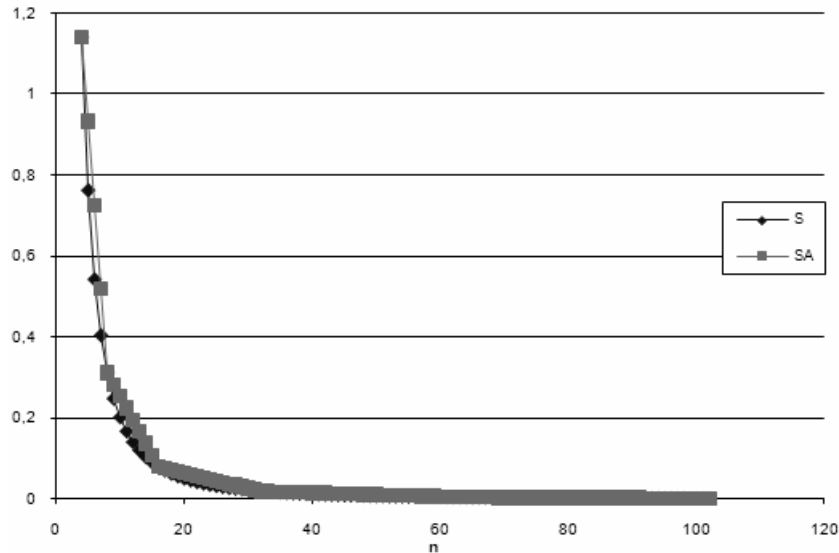


Рис. 5.3.2.4.

На рис. 5.3.2.4 представлены графики величин $\delta^S(B^2, P_n)$ (график S) и $\delta^S(B^2, P(n))$ (график SA) в зависимости от числа вершин (ребер) n , а на рис. 5.3.2.5 – графики $\log_{10}\delta^S(B^2, P_n)$ (график log S) и $\log_{10}\delta^S(B^2, P(n))$ (график log SA) в зависимости от $\log_{10}n$. Из рисунков видно, что график точности адаптивного метода в метрике объема имеет также характерные уступы, но значительно менее вырожденные (на протяжении ряда итераций точность аппроксимации меняется слабо, а затем достаточно резко падает).

На рис. 5.3.2.5 (в логарифмических координатах) представлен также линейный тренд и его уравнение, из которого видно, что порядок скорости сходимости адаптивного метода и $\alpha^* \approx 1.955$ близок к оптимальному $\alpha(C)=2$ (см. (5.1.3)).

На рис. 5.3.2.6 представлена зависимость эффективности метода аппроксимации, т.е. величины

$$\eta(P(n)) = \delta(B^2, P_n) / \delta(B^2, P(n))$$

от числа вершин (ребер) n .

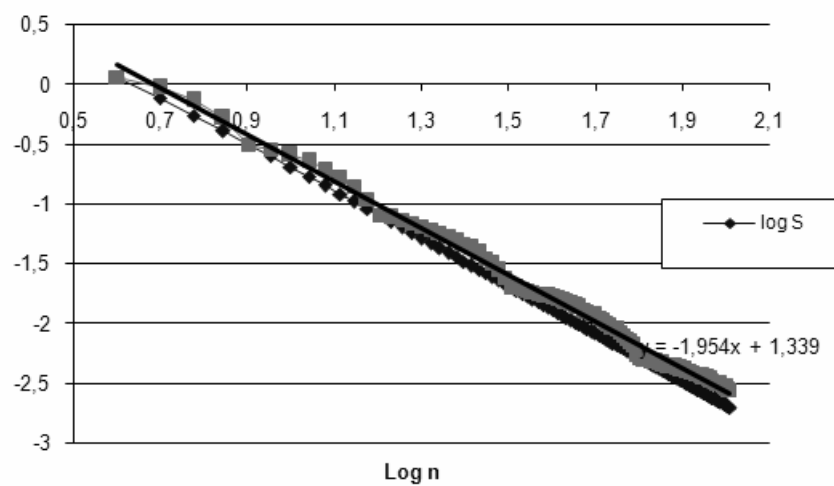


Рис. 5.3.2.5.

При этом первый график (eff H) соответствует метрике Хаусдорфа, а второй график (eff S) – метрике объема.

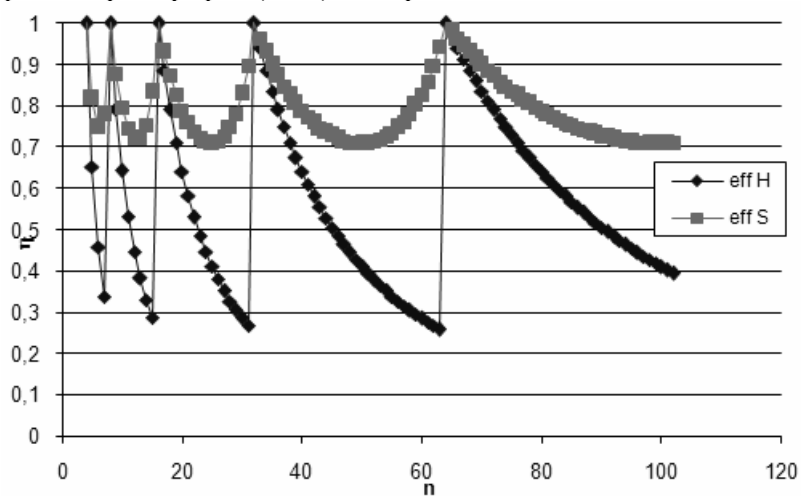


Рис. 5.3.2.6.

Из рисунка видно, что скачки точности приводят к скачкам эффективности. При этом верхняя эффективность в обеих метриках равняется 1, а нижняя эффективность в метрике Хаусдорфа не менее

0.25 (т.е. $\frac{1}{4}$), а в метрике объема – не менее 0.7.

5.3.3. Некоторые общие вопросы реализации численных исследований методов полиэдральной аппроксимации в классе эллипсоидов

Класс аппроксимируемых тел. Прежде всего, заметим, что АМ-ПА, которые будут рассмотрены ниже, требуют описания аппроксимируемого тела через его опорную функцию и точку касания опорной гиперплоскости. Пусть $C \in \mathcal{H}$, т.е.

$$C(a_1, a_2, \dots, a_d) := \{x \in \mathbb{E}^d : \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\},$$

где $a_i > 0$ – некоторый набор полуосей. Нетрудно видеть, что

$$g(u, C) = \left[\sum_{i=1}^d a_i^2 u_i^2 \right]^{1/2},$$

$$T(u, C) \equiv \{t(u, C)\}, \quad t(u, C) = \left(\frac{a_j^2 u_j}{\left[\sum_{i=1}^d a_i^2 u_i^2 \right]^{1/2}} \right)_{j=1,2,\dots,d}.$$

Методы построения выпуклой оболочки. В используемых нами методах на каждой итерации требуется рассчитывать множество внешних нормалей к гиперграням выпуклой оболочки многогранника и не принадлежащей к нему точки. Для получения этого множества можно использовать любой алгоритм поддержания выпуклой оболочки точек, например, гл. 3 [103] или [74], [75], [76]. В наших исследованиях использовался алгоритм [74], [75], [76], как по причине устойчивости в случае приближенных вычислений, так и по причине того, что он позволяет рассчитывать объем аппроксимирующих многогранников (см. ниже).

Построение многогранника начальной аппроксимации. В качестве многогранника начальной аппроксимации использовался симплекс, вписанный в аппроксимируемое тело, построенный по методу [75].

Расчет точности аппроксимации. Следующей проблемой, возникающей при численном исследовании рассматриваемых методов, является расчет точности аппроксимации в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности.

Прежде всего, рассмотрим метрику Хаусдорфа. Согласно алгоритмической схеме метода УО, на каждой его итерации вычисляется величина $\delta_{P^n}(P^n, P^{n+1}) = \delta_{P^n}(P^n, C)$, где

$$\delta_P(C_1, C_2) = \max \{ |g(u, C_1) - g(u, C_2)| : u \in M(P) \}.$$

По теореме 1.3.2 [95],

$$\delta^H(P, C)/\omega(P) \leq \delta_P(P, C).$$

Далее, по той же теореме, с учетом того, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_+^2$, при $\delta^H(P, C) < r_{\min}(C)$ справедливо

$$\delta^H(P, C) - \delta^H(P, C)^2/r_{\min}(C) \leq \delta_P(P, C) \leq \delta^H(P, C).$$

Для $C \in \mathcal{H}$ имеем $r_{\min}(C) = a_{\min} := \min \{a_i\}_{i=1,2,\dots,d}$, а для аппроксимирующей последовательности $\{P^n\}$, порождаемой методом УО, $\omega(P^n) \leq a_{\max}/r_0(P^0)$, где $a_{\max} := \max \{a_i\}_{i=1,2,\dots,d}$. Поэтому при условии

$$\delta_{P^n}(P^n, P^{n+1}) \leq \frac{a_{\min}}{a_{\max}} r_0(P^0) \quad (5.3.1)$$

различием между величиной $\delta_{P^n}(P^n, P^{n+1})$ и точностью в метрике Хаусдорфа $\delta^H(P^n, C)$ можно считать имеющим второй порядок малости и им можно пренебречь.

Рассмотрим теперь метрику объема симметрической разности. Объем аппроксимируемого эллипсоида известен и равен

$$\mu(C) = \pi_d \prod_{i=1}^d a_i.$$

Алгоритм построения выпуклой оболочки [74] позволяет вычислять объем многогранника P^{n+1} , получаемого на $(n+1)$ -й итерации метода УО, путем добавления к объему многогранника P^n объема симплицеального разбиения множества $\text{conv} \{P^n, P^n\} \setminus P^n$, $p_n \in \partial C$. Поэтому расстояние в метрике объема между аппроксимируемым телом и вписанным многогранником P^n может быть рассчитано как разность

$$\delta^S(P^n, C) = \mu(C) - \mu(P^n).$$

Нормировка. Наконец, рассмотрим вопрос о выборе набора эллипсоидов для исследования скорости сходимости методов. Выбор объектов исследования в различных работах, посвященных этой теме, определялся целями исследований.

Рассмотрим вначале исследования в метрике Хаусдорфа. В работах [46], [18], [19], [20] аппроксимируемые эллипсоиды нормировались так, чтобы их константы аппроксимации совпадали с константой аппроксимации единичного шара. Пусть

$$C_1 := C(a_1, \dots, a_d), \lambda > 0, C_2 := C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d).$$

Подставив полуоси C_2 в утверждение теоремы 5.2.1 и определение сферических координат $x = \Theta(\theta)$, получим

$$A^H(C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)) = \frac{1}{\lambda} A^H(C(a_1, \dots, a_d)). \quad (5.3.2)$$

Таким образом, для получения из эллипсоида $C_1 := C(a_1, \dots, a_d)$ эллипсоида $C_2 := C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)$ со свойством

$$A^H(C_2) = A^H(B^d)$$

необходимо выбрать нормировку осей с параметром

$$\lambda^H(C_1) = A^H(C_1) / A^H(B^d). \quad (5.3.3)$$

В работах [22], [24], [23] применялась нормировка на поверхностный объем единичного шара, впервые такая нормировка была рассмотрена в [18]. Из неравенства Коши-Шварца и (5.1.5) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi_{d-1}}{\mathcal{G}_{d-1}} \right)^2 (2A^H(C))^{d-1} &= \left(\int_{\partial C} k_C(x)^{1/2} d\sigma(x) \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_{\partial C} d\sigma(x) \right) \left(\int_{\partial C} k_C(x) d\sigma(x) \right) \end{aligned}$$

Но по теореме Гаусса-Бонне (см., например, [99] стр. 301-302))

$$\left(\int_{\partial C} k_C(x) d\sigma(x) \right) = d\pi_d. \quad (5.3.4)$$

Поэтому

$$A^H(C) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\pi_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} (\sigma(C) d\pi_d)^{1/(d-1)}, \quad (5.3.5)$$

где равенство достигается в случае шара. Таким образом, среди всех изопериметричных (т.е. с одинаковым поверхностным объемом) ВКТ единичному шару соответствует максимальное значение константы аппроксимации. Так как

$$\sigma(C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)) = \lambda^{d-1}(\sigma(C(a_1, \dots, a_d))),$$

то для получения из эллипсоида $C_1 := C(a_1, \dots, a_d)$ эллипсоида $C_2 := C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)$ изопериметричного единичному шару, т.е. со свойством

$$\sigma(C_2) = \sigma(B^d),$$

необходимо выбрать нормировку осей с параметром

$$\lambda^\sigma(C_1) = \left(\frac{d\pi_d}{\sigma(C_1)} \right)^{1/(d-1)}, \quad (5.3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma(C) &= \int_{\partial C} d\sigma(x) = \int_U \sqrt{g(\theta)} d\theta = \\ &= \int_U \prod_{k=1}^{d-1} |\sin^{k-1} \theta_k| \prod_{l=1}^d a_l \left[\sum_{m=1}^d \frac{x_m^2}{a_m^4} \right]^{1/2} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1} \end{aligned}, \quad (5.3.7)$$

рассчитываемая, согласно лемме 5.2.2, в обобщенных сферических координатах $x = \mathcal{O}(\theta)$ по прямоугольной области

$$U := \{\theta \in \mathbb{R}^{d-1}: 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi; 0 \leq \theta_i \leq \pi, i=2, \dots, d-1\}.$$

Рассмотрим теперь метрику объема. Исследования в этой метрике проводились в работах [46], [18], [19], [20]. Имеем

$$\mu(C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)) = \lambda^d \mu(C(a_1, \dots, a_d)).$$

Поэтому из теоремы 5.2.2 вытекает, что

$$A^H(C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)) = \lambda^d A^H(C(a_1, \dots, a_d)), \quad (5.3.8)$$

и для получения из эллипсоида $C_1 := C(a_1, \dots, a_d)$ эллипсоида $C_2 := C(\lambda a_1, \dots, \lambda a_d)$ со свойством

$$A^S(C_2) = A^S(B^d)$$

необходимо выбрать нормировку осей с параметром

$$\lambda^S(C_1) = \left(\frac{\pi_d}{\mu(C_1)} \right)^{1/d}. \quad (5.3.9)$$

Выбор исследуемой совокупности аппроксимируемых тел. В ранних работах [46], [18] исследовалась скорость сходимости эллипсоидов на небольшом числе «типичных» эллипсоидов в пространстве от двух до пяти размерностей. В остальных работах параметры эллипсоидов выбирались таким образом, чтобы исследовать влияние различных свойств аппроксимируемого тела на скорость сходимости и эффективность методов.

В [19], [20] применялась в метрике Хаусдорфа нормировка (5.3.3), а в метрике объема – нормировка (5.3.9), позволяющие исследовать эллипсоиды, имеющие одинаковую константу аппроксимации. Задавая различные наборы полуосей (с помощью таблицы случайных величин [104]) и нормируя согласно (5.3.3) и (5.3.5), получаем эллипсоиды с различной асферичностью, но с одинаковыми аппроксимационными свойствами (совпадающими со свойствами единичного шара). Сравнивая показатели скорости сходимости и эффективности проверяемого метода, мы можем исследовать зависимость этих величин от асферичности аппроксимируемого тела.

В дальнейших исследованиях по данной методике, в работах [22], [24], [23], проводились исследования только в метрике Хаусдорфа и использовалась нормировка (5.3.6). В этих работах с помощью генератора случайных чисел формировалась совокупность наборов полуосей, для каждого из которых рассчитывался поверхностный объем эллипсоида (5.3.7), а затем нормировка (5.3.6). Согласно (5.3.5) для таким образом нормированного эллипсоида C гарантировано, что $A^H(C) \leq A^H(B^d)$. При этом в исследуемую совокупность включались лишь такие эллипсоиды, чтобы в ней константы аппроксимированности $A^H(C)$ имели равномерное распределение на полуинтервале $(0, A^H(B^d)]$. Такой способ формирования исследуемой совокупности эллипсоидов позволяет изучить влияние аппроксимационных свойств тела на показатели сходимости методов.

5.3.4. Результаты численных исследований метода «Уточнение Оценок» в классе многомерных эллипсоидов

Численное исследование метода УО проводилось в работах [46],

[18], [19], [20], а также, в дальнейшем, по той же методике, в [22], [23]. Мы рассмотрим основные результаты этих исследований.

Таблица 5.3.4.1

d	Полуоси	Теоретическая сходимость МНА ($1/\delta^H$)	Экспер. сходимость УО ($1/\delta_P$)	Макс. точность δ_P
2	1, 0.1	$0.99 n^2$	$0.73 n^{1.91}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$
3	1, 1, 1	$0.41 n$	$0.13 n^{1.12}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
	1, 0.5, 0.5	$0.68 n$	$0.40 n^{1.00}$	$0.98 \cdot 10^{-2}$
	1, 1, 0.1	$0.58 n$	$0.79 n^{1.03}$	$0.39 \cdot 10^{-2}$
4	1, 1, 1, 1	$0.55 n^{0.67}$	$0.49 n^{0.60}$	$8.2 \cdot 10^{-2}$
	1, 1, 0.5, 0.5	$0.82 n^{0.67}$	$1.12 n^{0.51}$	$5.6 \cdot 10^{-2}$
	1, 0.5, 0.25, 0.125	$0.55 n^{0.67}$	$1.67 n^{0.61}$	$2.9 \cdot 10^{-2}$
5	1, 1, 1, 1, 1	$3.8 n^{0.5}$	$2.2 n^{0.41}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$
	1, 1, 0.5, 0.25, 0.125	$11 n^{0.5}$	$2.4 n^{0.65}$	$2.65 \cdot 10^{-2}$

В табл. 5.3.4.1 представлены результаты первых численных исследований сходимости метода УО в [46], [18] на небольшом числе «типичных» эллипсоидов в пространстве от двух до пяти размерностей⁶. Из таблицы видно, что при $d = 2, 3, 4$ имеется хорошее совпадение показателя экспериментальной скорости сходимости с теоретическим значением $1/\alpha(C)=2/(d-1)$. При $d=5$ разброс экспериментальных значений этой величины вокруг теоретической слишком велик, что вызвано, по-видимому, недостаточной достигнутой точностью аппроксимации. В целом, вычисление аппроксимационных

⁶ При $d=5$ аппроксимировалась 1/32 часть эллипсоида, находящаяся в положительном ортанте.

характеристик и аппроксимация пятимерных эллипсоидов с достаточной для применимости асимптотической теории точностью оказываются настолько трудоемкими, что в дальнейших исследованиях рассматривались только значения $d \leq 4$.

Таблица 5.3.4.2

Метрика	d	Число элл-в	Асферичность	Макс. точность δ_p
δ^H	2	21	1 – 28	10^{-4}
	3	25	1 – 36	10^{-2}
	4	10	1 – 44	$5 \cdot 10^{-2}$
δ^S	2	21	1 – 28	$4 \cdot 10^{-4}$
	3	25	1 – 36	$6 \cdot 10^{-2}$
	4	9	1 – 3.9	$5 \cdot 10^{-1}$

Из приведенной таблицы также видно, что метод УО хорошо реагирует на изменение аппроксимационных констант исследуемых тел, хотя специального исследования эффективности метода в этих работах не проводилось.

Рассмотрим теперь результаты исследования метода УО в работах [19], [20]. Основной целью данных исследований было изучение влияния асферичности аппроксимируемого тела на эффективность аппроксимации методом УО. Заметим, что на момент этих исследований известны были только оценки скорости сходимости метода УО методом изменения объема на итерациях (см. теоремы 2.2.2 и 2.6.12 из [95]). Указанные оценки зависят от минимального радиуса кривизны поверхности эллипсоида, а значит, оценки эффективности, полученные через них, – от его асферичности (см. теорему 2.6.16 из [95]).

Некоторые параметры исследованных эллипсоидов представлены в табл. 5.3.4.2.

В табл. 5.3.4.3 и на рис. 5.3.4.1-5.3.4.18 представлены некоторые результаты исследования.

Таблица 5.3.4.3

δ	d	α	α^*	Эффективность по всем ЭЛЛ-М		
				$\eta^*_{\min}$	η^*	$\eta^*_{\max}$
δ^H	2	2	1.7 – 2.0	0.25	0.5	1.0
	3	1	0.96 – 0.98	0.49	0.60	0.76
	4	0.67	0.64 – 0.68	0.58	0.62	0.68
δ^S	2	2	1.2 – 2.8	0.3	0.75	1.0
	3	1	0.93 – 1.1	0.7	0.8	0.89
	4	0.67	0.63 – 0.79	–	–	–

Как видно из табл. 5.3.4.3, показатель скорости сходимости алгоритма по числу вершин α^* при всех размерностях d близок к аппроксимационному числу $\alpha = (d-1)/2$.

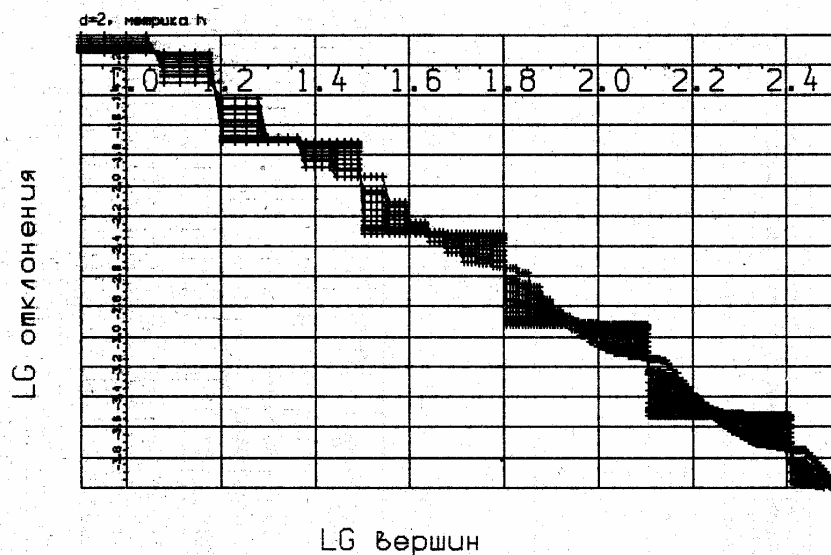


Рис. 5.3.4.1. $d=2$, метрика H

На рис. 5.3.4.1, 5.3.4.2, 5.3.4.3 изображены полученные в [19], [20] зависимости десятичных логарифмов отклонения в метрике Хаусдорфа (точнее, величины δ_p) от логарифма числа вершин для всех используемых в численных экспериментах эллипсоидов данной размерности и метрики.

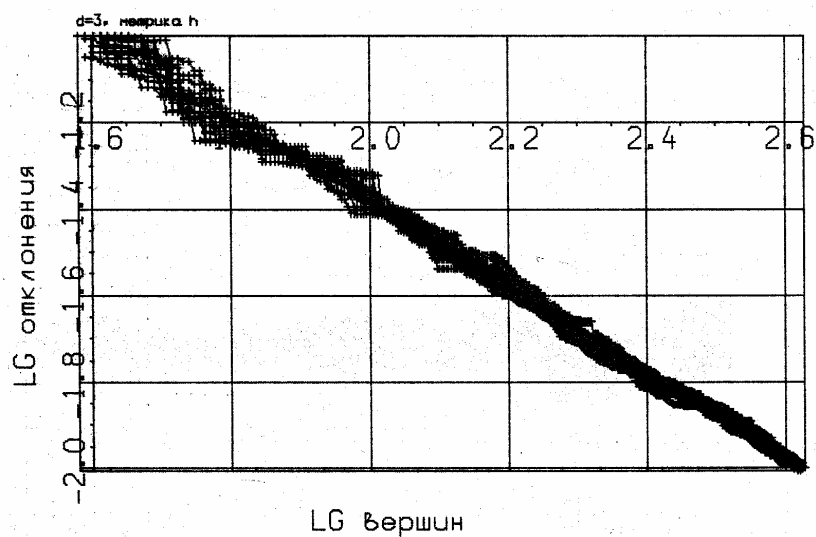


Рис. 5.3.4.2. $d=3$, метрика H

На рис. 5.3.4.4, 5.3.4.5 изображены зависимости десятичных логарифмов отклонения в метрике объема от логарифма числа вершин. Как видно из этих рисунков, разброс точек относительно прямой (5.1.3) для каждого эллипсоида невелик.

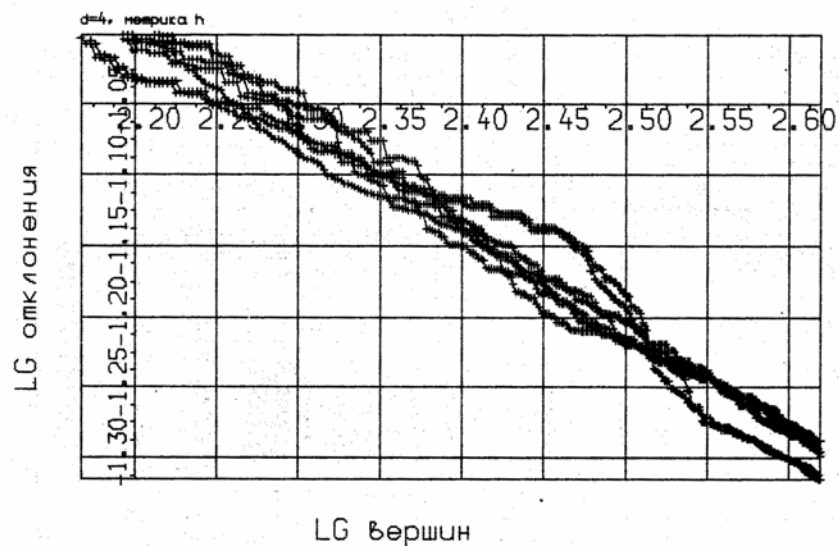


Рис. 5.3.4.3. $d=4$, метрика H

Это дает возможность использовать значения эффективности, полученные в экспериментах, в качестве асимптотических.

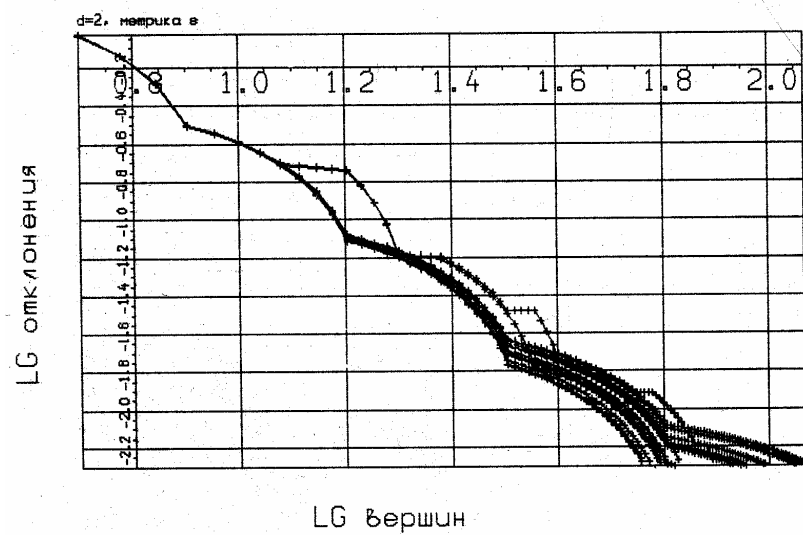


Рис. 5.3.4.4. $d=2$, метрика S

Рассмотрим величину $\eta_{\min}^*$. Во всех случаях минимальная эффективность алгоритма не падает ниже $\frac{1}{4}$. С ростом размерности происходит рост минимальной эффективности алгоритма. Отметим, что наименьшая минимальная эффективность наблюдается при аппроксимации двумерного шара.

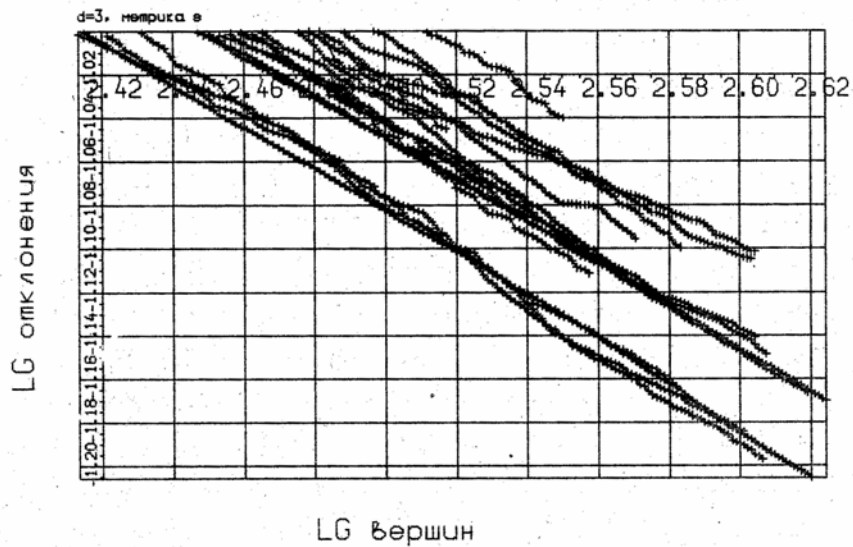


Рис. 5.3.4.5. $d=3$, метрика S

Из табл. 5.3.4.3 также следует, что средняя эффективность алгоритма в метрике объема симметрической разности выше, чем в метрике Хаусдорфа, и близка к единице. Отсутствие данных по триангуляционным константам del_d и div_d при $d > 2$ не позволяет исследовать эффективность метода в метрике объема при $d=4$.

На рис. 5.3.4.6, 5.3.4.7, 5.3.4.8, 5.3.4.9, 5.3.4.10 изображена зависимость эффективности на итерациях, т.е. зависимость величины

$$\eta_n^*(C) := \eta(P^n) := \frac{A(C)}{[m(P^n)]^{1/\alpha(C)} \delta(C, P^n)},$$

от отклонения $\delta_P(P, C) \approx \delta^H(P, C)$.

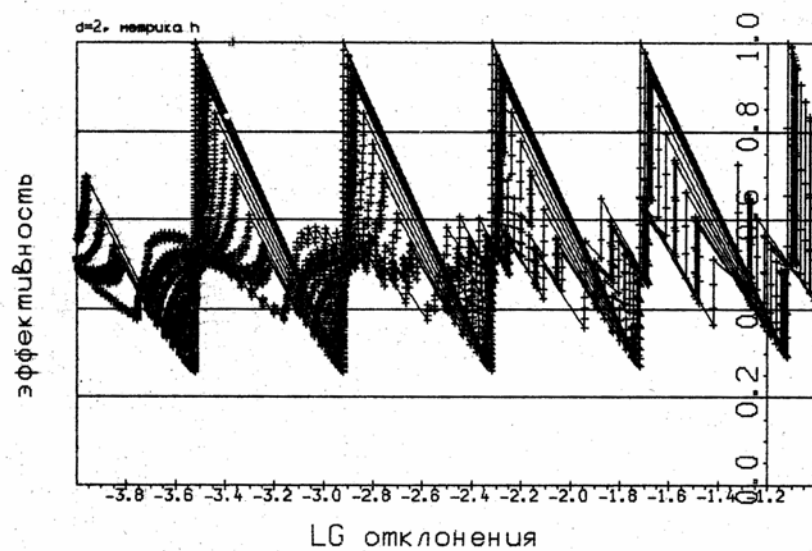


Рис. 5.3.4.6. $d=2$, метрика H

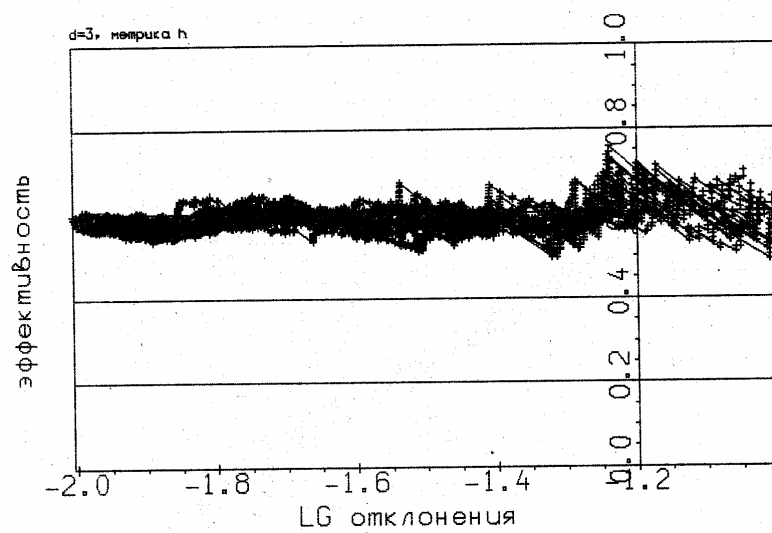


Рис. 5.3.4.7. $d=3$, метрика H

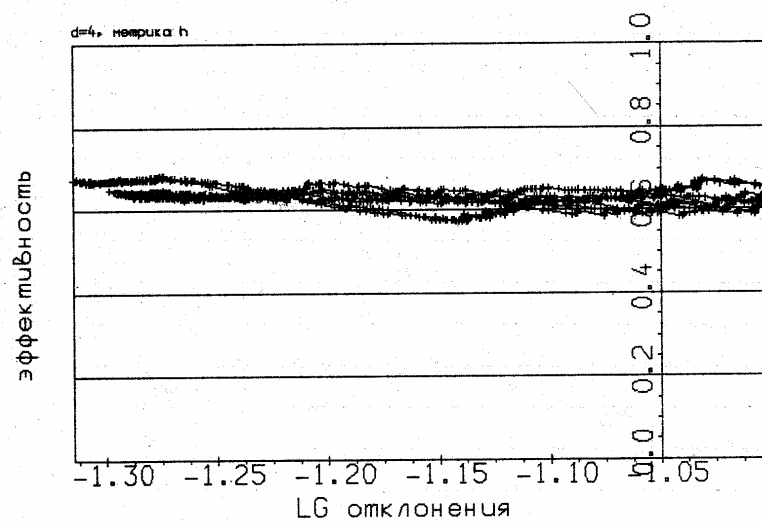


Рис. 5.3.4.8. $d=4$, метрика H

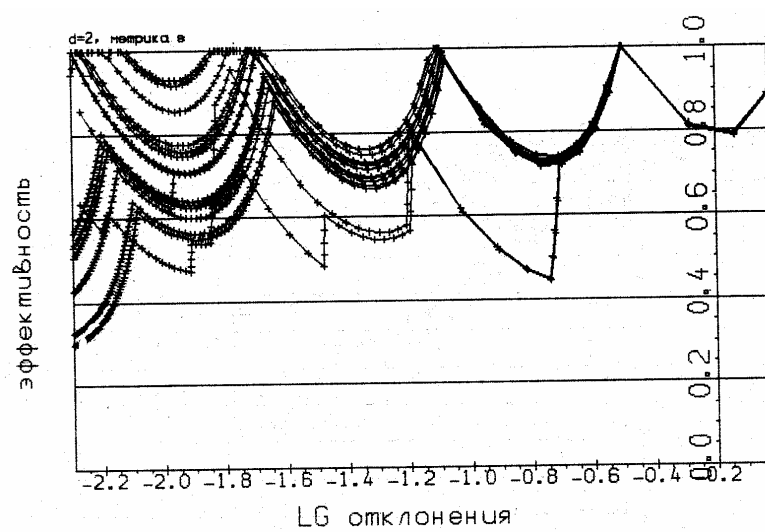


Рис. 5.3.4.9. $d=2$, метрика S

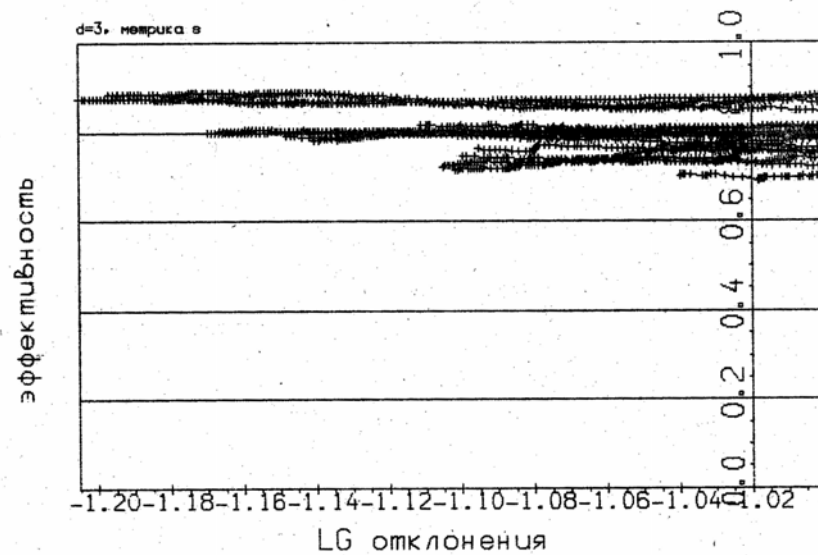


Рис. 5.3.4.10. $d=3$, метрика S

На рис. 5.3.4.11, 5.3.4.12, 5.3.4.13, 5.3.4.14, 5.3.4.15 изображена зависимость эффективности $\eta_n^*(C)$ при $n_0 \leq n \leq n_1$ от асферичности $\alpha(C) = a_{\min}(C)/a_{\max}(C)$. Величина n_0 выбиралась такой, чтобы исключить эффекты, связанные с начальным этапом работы алгоритма, и так, чтобы можно было воспользоваться условием (5.3.1) для вычисления отклонения в метрике Хаусдорфа.

На этих рисунках для каждого C величина $\eta_n^*(C)$ меняется в зависимости от n между величиной $\eta_{\min}^*$ и величиной $\eta_{\max}^*$, заполняя вертикаль, соответствующую конкретной величине $\alpha(C)$.

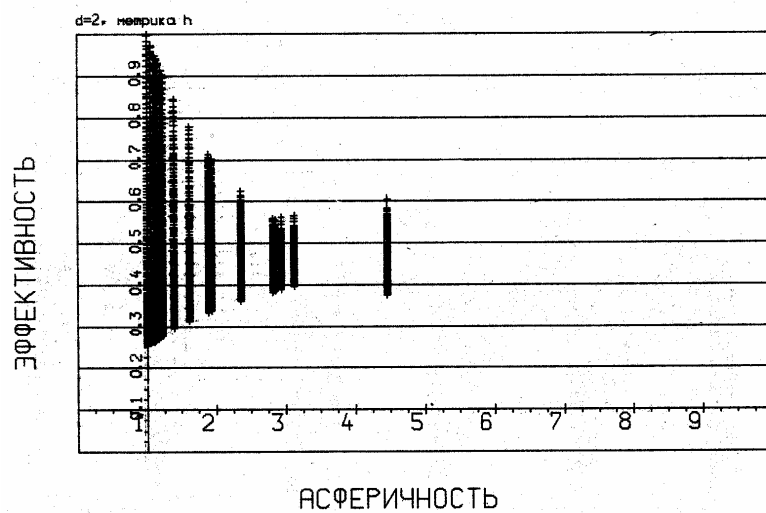


Рис. 5.3.4.11. $d=2$, метрика H

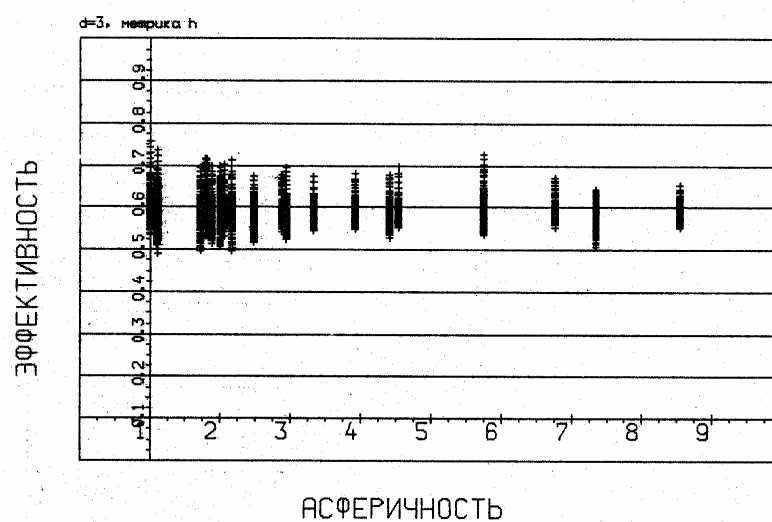


Рис. 5.3.4.12. $d=3$, метрика H

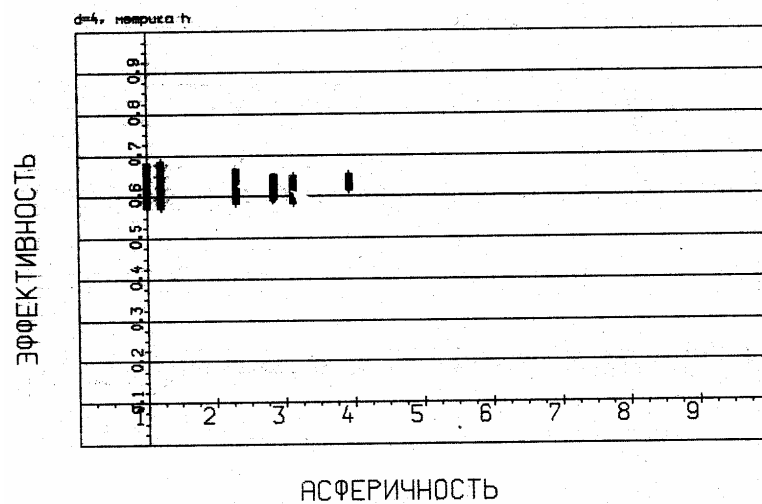


Рис. 5.3.4.13. $d=4$, метрика H

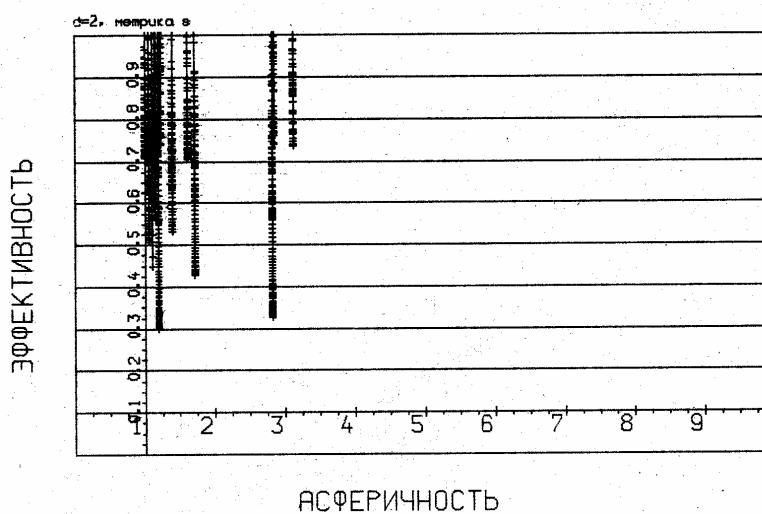


Рис. 5.3.4.14. $d=2$, метрика S

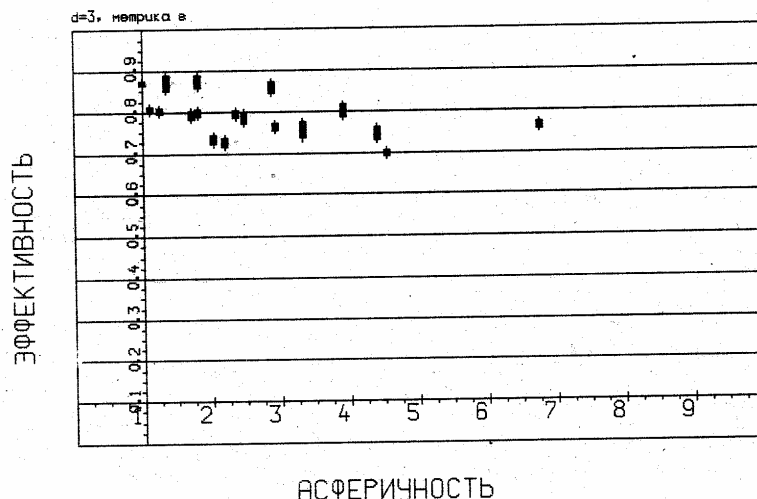


Рис. 5.3.4.15. $d=3$, метрика S

Пусть $d=2$. Из рис. 5.3.4.6, 5.3.4.11 (метрика Хаусдорфа) и 5.3.4.9, 5.3.4.14 (метрика объема) видно, что для размерности $d=2$ наблюдаются большие колебания значений $\eta_n^*(C)$ при различных n . В метрике Хаусдорфа с ростом асферичности эти колебания затухают (рис. 5.3.4.6). Среднее значение эффективности не зависит от асферичности тел и равно $\frac{1}{2}$ (рис. 5.3.4.11).

Пусть $d=3$. Рассмотрим рис. 5.3.4.7 (метрика Хаусдорфа) и 5.3.4.10 (метрика объема). При $d=3$ в метрике Хаусдорфа и объема симметрической разности различие между $\eta_{\min}^*$ и $\eta_{\max}^*$ для каждого эллипсоида C невелико и уменьшается с ростом точности аппроксимации. Это позволяет говорить об асимптотической эффективности $\eta(C)$, близкой к средней эффективности $\eta^*(C)$.

Рассмотрим рис. 5.3.4.7 и 5.3.4.12 ($d=3$, метрика Хаусдорфа). В случае метрики Хаусдорфа средняя эффективность не зависит от асферичности. Указанные свойства сохраняются для данной метрики и при $d=4$ (см. рис. 5.3.4.8, 5.3.4.13).

Рассмотрим рис. 5.3.4.10 и 5.3.4.15 ($d=3$, метрика объема). Из них видно, что в случае метрики объема симметрической разности средняя эффективность алгоритма составляет приблизительно 0.8,

однако зависит от асферичности. Какой бы то ни было закономерности в этой зависимости обнаружить не удалось.

5.3.5. Результаты численных исследований метода «Уточнение Оценок» по аппроксимации шаров различной размерности

Приведем теперь результаты последних численных экспериментов по аппроксимации единичного шара B^d в пространствах $d > 2$. Задача полиэдральной аппроксимации шара важна особенно тем, что на полиэдральной аппроксимации шара основаны некоторые неадаптивные МПА (см., например, [19]).

Согласно теореме 2.6.18 [95] асимптотическая эффективность метода УО не может быть ниже $1/4$ (см. п. 4.1).

При $d=2$ эта оценка не может быть улучшена теоретически (см. п. 5.3.2, рис. 5.3.2.2) и подтверждается экспериментально (см. таблицу 5.3.2.3 и рис. 5.3.4.1 и 5.3.4.6).

При $d \geq 3$ для сферы из [105] следует более сильная оценка скорости сходимости метода УО:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \delta^H(B^d, P^n) n^{2/(d-1)} \leq 2 \left(\delta_{d-1} \frac{d\pi_d}{\pi_{d-1}} \right)^{2/(d-1)},$$

и его эффективности:

$$\underline{\eta}^{iH} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\mathcal{G}_{d-1}}{\delta_{d-1}} \right)^{2/(d-1)} \geq \frac{1}{2} \frac{(d-1)}{d}. \quad (5.3.10)$$

Численные эксперименты по аппроксимации шара методом УО, проведенные в п. 5.3.4 и [106], показывают, что и эта оценка эффективности метода УО является заниженной.

На рис. 5.3.5.1- 5.3.5.4 сравниваются полученные в [106] зависимости от числа вершин для отклонения в метрике Хаусдорфа многогранников, полученных с помощью метода УО (ряд hDH(n)), и для асимптотического отклонения МНА (ряд hMNA(n)). Графики проводятся в логарифмических шкалах.

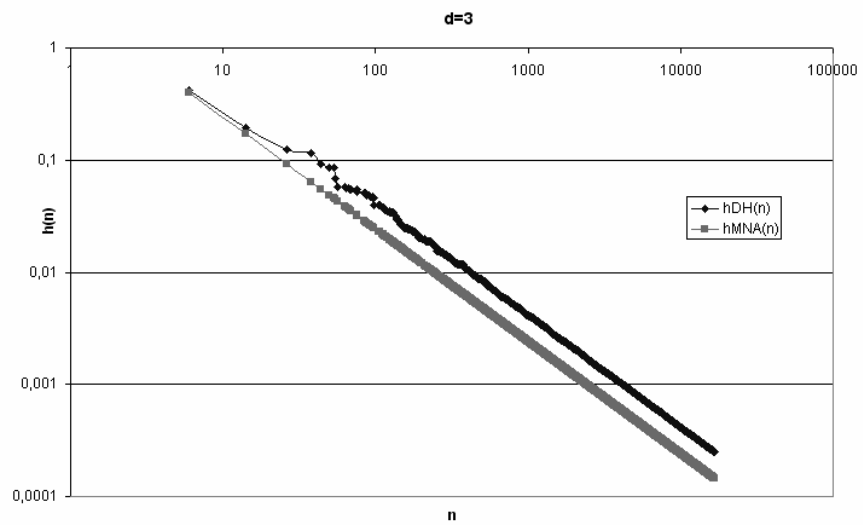


Рис. 5.3.5.1

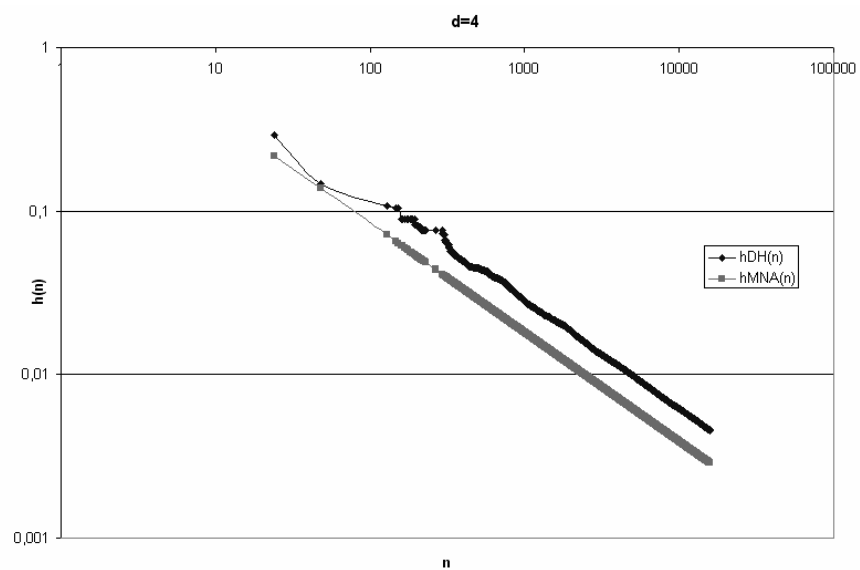


Рис. 5.3.5.2

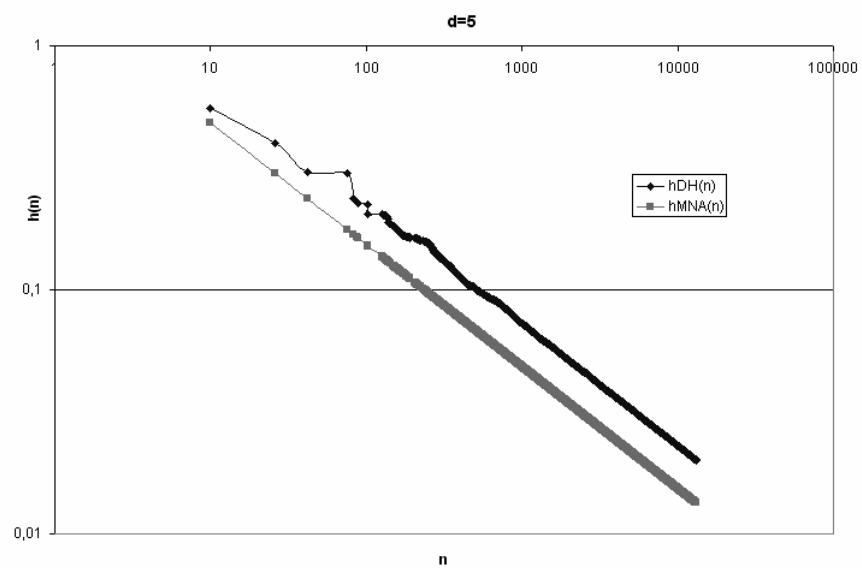


Рис. 5.3.5.3

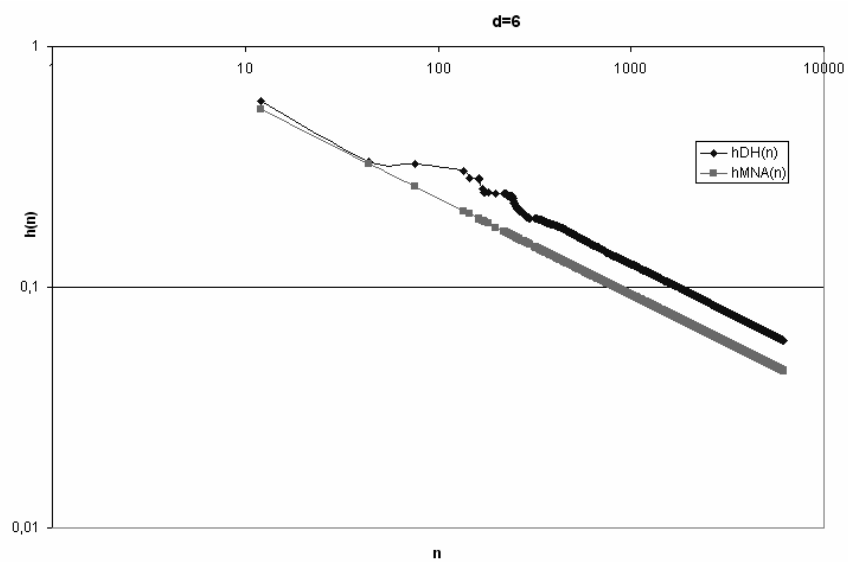
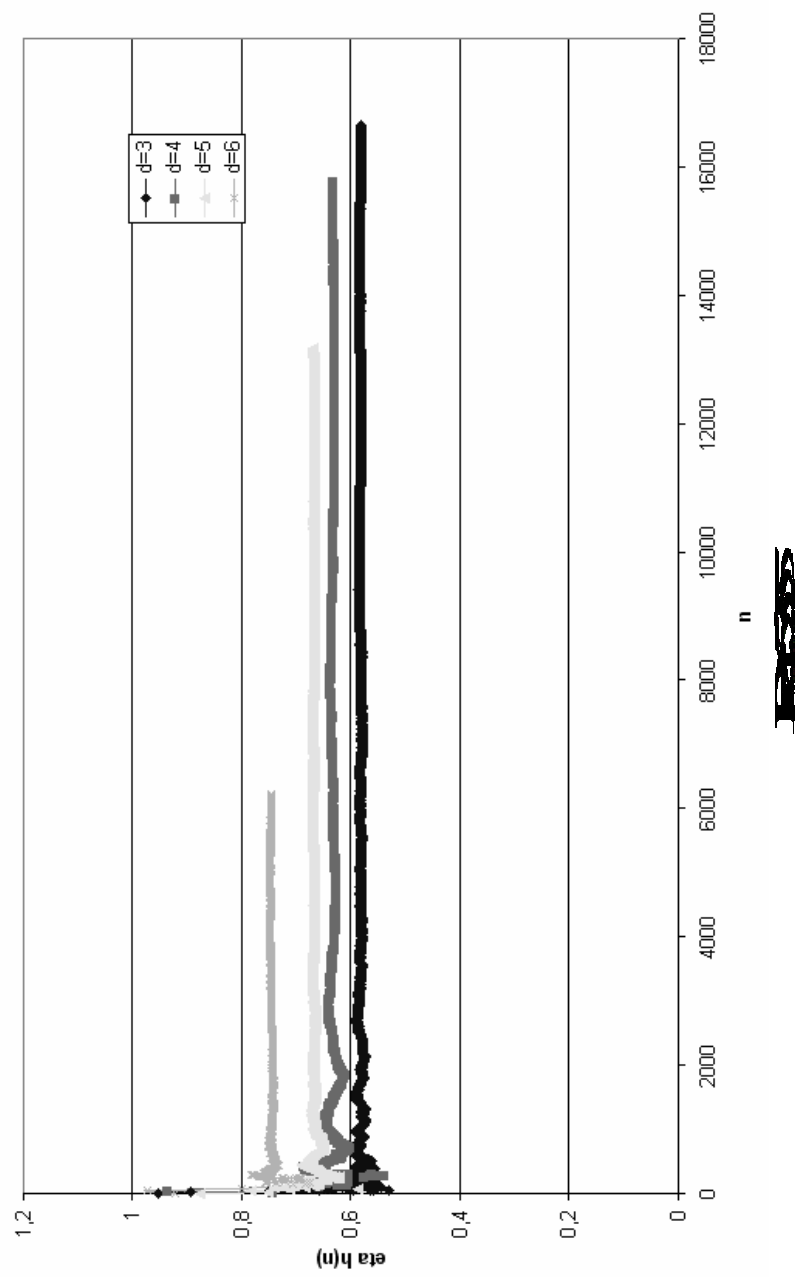


Рис. 5.3.5.4



Из рисунков видно, что скорость сходимости метода УО быстро выходит на асимптотический тренд сходимости МНА, определяемый порядком $-2/(d-1)$ наклона соответствующей прямой. Зависимость для метода УО лежит раномерно выше зависимости для МНА. Это означает, что при равном числе вершин метод УО дает отклонение, превышающее отклонение МНА на один и тот же фпктор – обратный к величине экспериментальной эффективности. На рис. 5.3.5.5 изображена зависимость эффективности на итерациях, т.е. величины

$$\eta(P^n) := \frac{A(B^d)}{[m(P^n)]^{2/(d-1)} \delta(B^d, P^n)}$$

от отклонения $\delta_P(P, C) \approx \delta^H(P, C)$ (ср. рис. 5.3.4.7, 5.3.4.8).

Соответствующие значения экспериментальной величины асимптотической эффективности в сравнении с теоретической оценкой (5.3.10) приводятся в табл. 5.3.5.1.

Табл. 5.3.5.1.

d	$\eta_{\text{теор}}^h$	$\eta_{\text{экспер}}^h$
3	0,33	0,58
4	0,39	0,63
5	0,42	0,67
6	0,46	0,75

Из таблицы видно, что для $d > 2$ экспериментальная величина асимптотической эффективности метода УО при аппроксимации шара превосходит $1/2$ и растет с ростом размерности.

5.3.6. Основные выводы из численных исследований метода «Уточнение Оценок» в классе многомерных эллипсоидов

Численное исследование метода УО, проведенное в работах [46], [18], [19], [20], [106], позволяет сделать следующие основные выводы.

При аппроксимации в классе эллипсоидов:

- 1) Изучаемый адаптивный метод может рассматриваться как оптимальный по порядку числа вершин аппроксимирующих многогранников в метриках Хаусдорфа и объема симметрической разности.

- 2) При размерности пространства выше 2 можно ожидать, что средняя асимптотическая эффективность метода превосходит $\frac{1}{2}$.
- 3) Можно ожидать, что асимптотическая эффективность метода в каждой из рассматриваемых метрик растёт с ростом размерности.
- 4) Полученные оценки асимптотической эффективности метода в метрике объема выше, чем в метрике Хаусдорфа, и их значения близки к единице.
- 5) Асимптотическая эффективность рассмотренного адаптивного метода в метрике Хаусдорфа не зависит от асферичности аппроксимируемого тела.

Последний вывод рассматриваемого экспериментального исследования в дальнейшем был подтвержден в работе [28] (см. теорему 2.6.18 в [95] и в п. 4.1).

5.4. Дальнейшие исследования адаптивных методов полиэдральной аппроксимации

Методика численного исследования эффективности АМПА, в частности – в классе эллипсоидов, предложенная в [46], [18], [19], [20], применялась и получила дальнейшее развитие в работах [22], [23], [24]. Остановимся, кратко, на основных результатах этих работ.

5.4.1. Дальнейшие исследования метода «Уточнения Оценок»

Исследование метода УО в работе [22] направлено на сравнение этого метода с методом СМ. Поэтому основные результаты этой работы будут рассмотрены в пункте, посвященном численному изучению последнего.

Рассмотрим теперь результаты исследования метода УО в работе [23]⁷. Исследование метода УО в этой работе направлено на сравнение метода УО с методом МСМ. Поскольку в данной работе мы подробно не рассматриваем последний метод, то остановимся на основных результатах этой работы, касающихся метода УО.

Основной целью рассматриваемых исследований было изучение

⁷ В этой работе методу УО соответствует метод МСМ с константой 0.99.

влияния константы аппроксимации аппроксимируемого тела на эффективность. В работе рассматривалась только метрика Хаусдорфа. В работе представлены результаты исследования для $d=4$ и совокупности $\{H_i^4\}$ из 91 эллипсоида, нормированных согласно (5.3.6), с константой аппроксимации, равномерно меняющейся от 0.2 до 1.81 (константа аппроксимации для шара), а асферичность – от 1 (шар) до 360.

Как показали предыдущие исследования ([46], [18], [19], [20]), надежная оценка скорости сходимости (аппроксимационного числа) возможна при условии, если разброс экспериментальных точек ($m(P^n)$, $\delta(C, P^n)$) вокруг регрессионной прямой (5.1.3) невелик. При этом существенное значение имеет достигнутая точность аппроксимации (или номер итерации с числом вершин m_0), начиная с которой проводятся статистические исследования (см. также замечание к рис. 5.3.2.1 в п. 5.3.2). В работе [23] для оценки разброса экспериментальных точек вокруг линейного тренда использовался коэффициент детерминации R^2 , в данном случае совпадающий с квадратом коэффициента корреляции Пирсона (коэффициент корреляции Пирсона r – безразмерный индекс в интервале от -1,0 до 1,0 включительно), который отражает степень линейной зависимости между двумя множествами данных. Использование коэффициента детерминации позволило в рассматриваемых исследованиях выделить широкий класс эллипсоидов, для которых при достигнутых в рассматриваемом эксперименте точностях экспериментальный порядок $\alpha^*(H)$ близок к аппроксимационному числу $\alpha(H)$.

5.4.2. Результаты численных исследований метода «Сближающихся Многогранников»

Численное исследование метода СМ проводилось в работах [46], [23], [22]. Мы рассмотрим основные результаты этих исследований.

В работе [46], где был предложен и впервые численно исследован метод СМ, было показано, что этот метод позволяет значительно уменьшить число вычислений опорной функции аппроксимируемого тела по сравнению с методом УО. При этом отношение числа вычислений опорной функции в методе СМ к числу вычислений в методе УО существенно уменьшается с ростом точности аппроксимации и размерности аппроксимируемого множества. Подробному ис-

следованию этого эффекта, а также скорости сходимости собственно метода СМ в рамках рассмотренной выше методики была посвящена работа [22].

Заметим, что метод СМ и метод УО используют различные характеристики для оценки отклонения от тела аппроксимирующих многогранников. В методе УО тело C аппроксимируется внутренним многогранником P , и точность оценивается через величину $\delta_P(P, C)$ (см. пункт 5.3.3). В методе СМ тело C аппроксимируется парой из внутреннего многогранника P и внешнего – Q , причем точность оценивается через величину $\delta_P(P, Q)$. Очевидно, что

$$\delta_P(P, C) \leq \delta_P(P, Q),$$

поэтому для сравнения методов в рассматриваемой работе, где необходимо, проводилось дополнительное вычисление величины $\delta_P(P, C)$.

Итак, в работе [7], на основе изложенной в начале главы методики, получены численные оценки порядка скорости сходимости метода СМ и оценки констант, характеризующих его скорость сходимости, для представительной выборки трех-, четырехмерных эллипсоидов с равномерным распределением аппроксимируемости, а также получены численные оценки эффективности метода. Исследования показали, что метод СМ можно считать оптимальным по порядку скорости сходимости последовательности многогранников по числу вершин, т.е. порядок его скорости сходимости асимптотически совпадает с порядком скорости сходимости последовательности многогранников наилучшей аппроксимации. Константы, характеризующие асимптотическую скорость сходимости метода, не зависят от аппроксимируемости тела, эффективность метода также не зависит от аппроксимируемости тела.

Далее, в работе [22] проведено сравнение скорости сходимости метода СМ со скоростью сходимости метода УО. Показано, что при использовании метода СМ требуется значительно меньшее число вычислений опорной функции, чем при использовании метода УО. Так при аппроксимации трехмерной сферы с точностью 5,5% метод СМ требует в 3,47 раза меньше вычислений опорной функции, чем метод УО, а при аппроксимации четырехмерной сферы – в 9,78 раз.

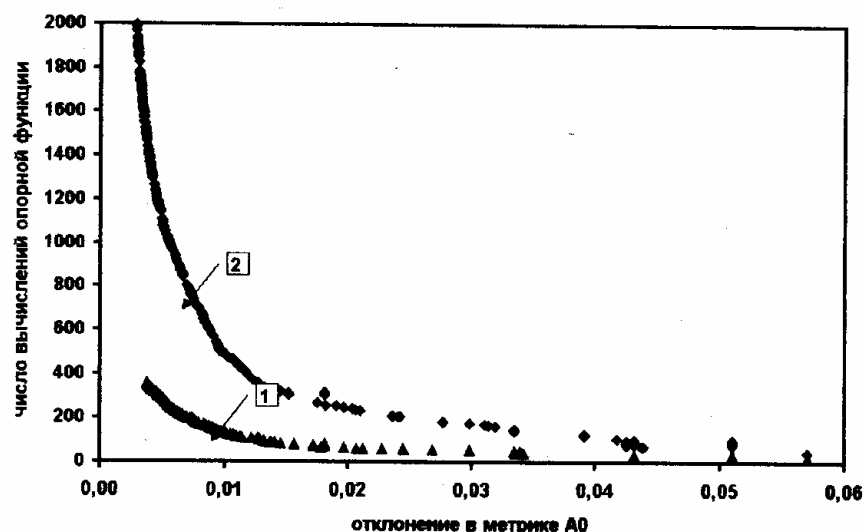


Рис. 5.4.1. $d=3$

На рисунках 5.4.1-5.4.2 представлены зависимости между отклонением и числом вычислений опорной функции методом СМ (график 1) и методом УО (график 2) аппроксимируемого множества. Видно, что с ростом точности аппроксимации (уменьшением отклонения) метод УО требует все большего числа вычислений опорной функции по сравнению с методом СМ.

В работе делается вывод, что указанные свойства позволяют использовать метод СМ в качестве математического обеспечения компьютерных систем поддержки принятия решений при исследовании сложных многокритериальных проблем.

5.4.3. Результаты численных исследований прямо-двойственного метода

Напомним (см. п. 4.4), что прямо-двойственные методы предполагают использование методов работы с опорной функцией для аппроксимации выпуклых компактных тел, заданных дистанционной функцией. При этом сначала аппроксимируется полярное множество: для него опорная функция оказывается известной как совпадающая с дистанционной функцией исходного тела. В качестве искомого многогранника, аппроксимирующего исходное тело, берется по-

лярное множество к многограннику, аппроксимирующему полярное тело.

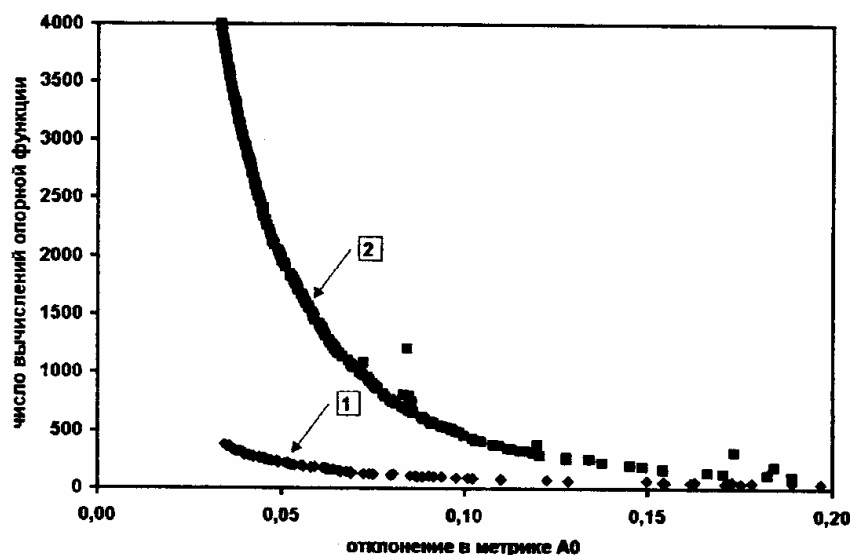


Рис. 5.4.2. $d=3$

В работе [24] сформулирован прямо-двойственный метод, использующий в качестве метода восполнения метод УО. На основе теории двойственности H -последовательностей многогранников, развитой в [96] (см. п. 3.2 и главу 3 [95]), и асимптотических оценок эффективности H -последовательностей отсечения [88] (теорема 2.4.1 и следствие 2.4.9 из [95]) в работе [24] получена нижняя оценка эффективности прямо-двойственного метода на основе метода УО вида:

$$\eta_{\min} \geq \frac{1}{16\omega^4(C)} + o\left(\frac{1}{\omega^4(C)}\right). \quad (5.4.1)$$

Таким образом, в отличие от метода УО, для которого нижняя оценка асимптотической эффективности аппроксимации не зависит от асферичности аппроксимируемого тела (теорема 2.6.18 из [95] и п. 4.1), оценка прямо-двойственного метода, основанного на нем, обратно пропорциональна четвертой степени асферичности. Одной из целей экспериментальной части работы [24] было исследование эф-

эффективности прямо-двойственного метода в классе эллипсоидов и проверка реальной зависимости этой эффективности от асферичности аппроксимируемых множеств.

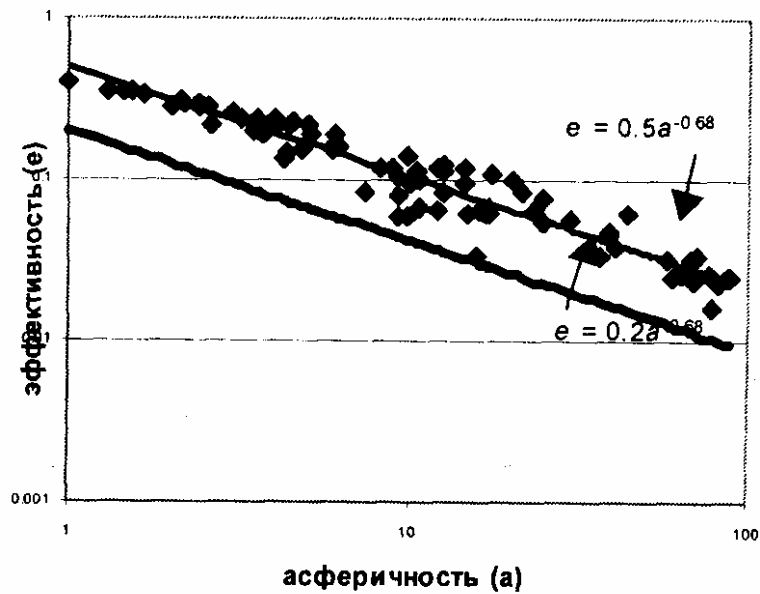


Рис. 5.4.3

Из результатов численных экспериментов, приведенных в этой работе, следует, что оценка (5.4.1) оказывается сильно заниженной в сравнении с экспериментальными данными, так как ее правая часть имеет вид показательной функции от асферичности со степенью, равной -4 , в то время как в проведенных экспериментах эту зависимость удалось оценить снизу показательной функцией со степенью -0.78 для $d=3$ и -0.68 для $d=4$ (см. рис. 5.4.3).

Из рисунка, например, видно что при $d=4$ экспериментальная зависимость эффективности прямо-двойственного метода от асферичности описывается соотношением вида:

$$\eta_{\min} \geq \frac{1}{5\omega^{0.68}(C)}. \quad (5.4.2)$$

Таким образом, эффективность прямо-двойственного метода, основанного на методе УО, оказалась чувствительной к таким свойствам аппроксимируемого тела, как асферичность, однако эта чувствительность существенно ниже, чем указывают теоретические оценки, следующие непосредственно из теории двойственности. Поэтому прямо-двойственный метод требует, по-видимому, более точной, «прямой», оценки своей скорости сходимости и эффективности.

5.5. Исследования в классе негладких выпуклых компактных тел

5.5.1. Результаты численных исследований в классе циклических многогранников

В настоящем пункте представлен пример [90], [91] использования методики, изложенной в начале главы, для исследования комбинированного АМПА (см. п. 4.5). Напомним, что комбинированные методы рассчитаны на решение смешанной задачи – построения многогранников с двойственным (прямым) описанием при аппроксимации тел заданных прямым (двойственным) способом. В рассматриваемом случае эта задача имеет следующую постановку:

аппроксимировать тело, заданное своей *опорной* функцией, (описанным) многогранником с возможно меньшим числом *гиперграней*.

Для решения этой задачи аппроксимируемое тело может быть сначала приближено с внутренним многогранником с помощью оптимальных по порядку числа вершин аппроксимирующего многогранника методов восполнения (например, УО). Далее для внутреннего многогранника P применяется какой-либо оптимальный по порядку числа гиперграней метод отсечения. Использование метода отсечения в этом случае не вызывает затруднений, так как многогранник P имеет не слишком большое число вершин (а в методе УО задан еще и своими гипергранями), и вычисление его дистанционной функции может быть проведено стандартными методами. В результате применения метода отсечения строится внешний для P многогранник Q , что и решает рассматриваемую смешанную задачу.

В [90], [91] приведен пример использования комбинированного метода (прямой метод УО в совокупности с прямо-двойственным

методом УО) для построения описания выпуклой оболочки большого числа точек – метод Экономного Описания Аппроксимации (ЭОА). В рассматриваемом случае аппроксимируемая выпуклая оболочка содержит огромное число гиперграней, так что вычисление её дистанционной функции затруднительно. Вместе с тем требуется построить её приближенное описание с небольшим числом гиперграней (с целью дальнейшей визуализации).

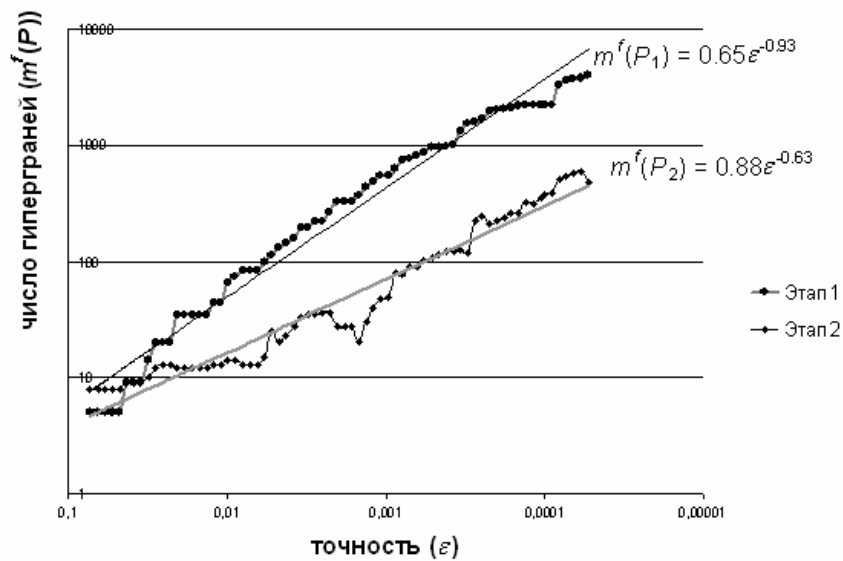


Рис. 5.5.1.

Аппроксимация в методе ЭОА происходит в две фазы. На первом этапе с помощью метода УО строится внутренний многогранник с небольшим числом вершин и сравнительно небольшим числом гиперграней m_1^f . На втором этапе прямо-двойственным методом, основанным на методе УО, аппроксимацией полученного на первой фазе многогранника строится окончательный многогранник с небольшим числом гиперграней m_2^f .

В качестве объекта эксперимента рассматривается четырехмерный циклический многогранник [5] $C(400000, 4)$ с большим числом вершин (400000 вершин и около $8 \cdot 10^{10}$ гиперграней). Исследовались зависимости числа гиперграней m_1^f (первая фаза) и m_2^f (вторая фаза)

от точности аппроксимации в метрике Хаусдорфа ε . Для этих зависимостей методом линейной регрессии были построены оценки степенными функциями вида $m^f_i(\varepsilon) = \text{const} \cdot \varepsilon^k$, $i=1, 2$. Порядок k на первой фазе (скорость сходимости по числу гиперграней метода УО) оказался равным -0.93, а порядок на второй фазе (скорость сходимости по числу гиперграней метода ЭОА) оказался равным -0.63 (см. рис. 5.5.1).

Таким образом, удалось, например, аппроксимировать с точностью 0.0001 циклический многогранник с $8 \cdot 10^{10}$ гипергранями на первой фазе метода с помощью многогранника со сравнительно небольшим числом гиперграней ($m^f_1(0.0001)=2269$), а на второй фазе – с малым числом гиперграней ($m^f_2(0.0001)=383$).

Заметим также, что асимптотически-оптимальный рост числа гиперграней при аппроксимации гладких тел определяется порядком $(d-1)/2$ (см. п. 1.1), т.е в рассматриваемом случае: $m^f \sim \varepsilon^{-1.5}$. При аппроксимации циклического многогранника с очень большим числом вершин скорость роста числа гиперграней аппроксимирующих многогранников оказалась значительно меньшей: $m^f \sim \varepsilon^{-0.93}$ на первом этапе и $m^f \sim \varepsilon^{-0.63}$ на втором. Таким образом, рассматриваемый класс тел (циклических многогранников) допускает более быструю сходимость по числу гиперграней (вида $\varepsilon \sim (m^f)^{-1.59}$), чем сходимость гладких тела (вида $\varepsilon \sim (m^f)^{-0.67}$). Как уже отмечалось в п. 1.2, этот эффект характерен для аппроксимации негладких тел. В следующем пункте он представлен еще более наглядно.

5.5.2. Результаты численных исследований в классе дисков с бесконечным числом вершин

В настоящем пункте рассматриваются численные эксперименты [106] по аппроксимации введенного в п. 4.7 из [95] класса выпуклых дисков со счетным числом вершин и нетривиальным (лежащим между 0 и $1/2$) значением аппроксимационного числа ([57] и теорема 4.7.2 из [95]).

Класс аппроксимируемых тел. Рассматриваемый класс $\mathcal{M}$, состоящий из множеств M_λ ($\lambda > 0$) из $\mathcal{C}$, определяется следующим образом. На плоскости $\mathbb{E}^2$ в положительном ортанте рассмотрим четверть окружности $S_+ := \{x^2 + y^2 = 1: x \geq 0, y \geq 0\}$. Далее на оси y рассмот-

рим последовательность точек Q_λ^n с координатами $(0, n^\lambda)$, $n=0,1,\dots$. Каждую из вершин Q_λ^n соединим отрезком D^n с точкой $B(1, 0)$. Точки пересечения отрезков D^n с S_+ обозначим T^n . И определим, наконец, множество M_λ :

$$M_\lambda = \text{conv}\{O, B, \{T^n\}_{n=1}^\infty\},$$

где O – начало координат $(0, 0)$ (см. также рис. 5.5.2.1).

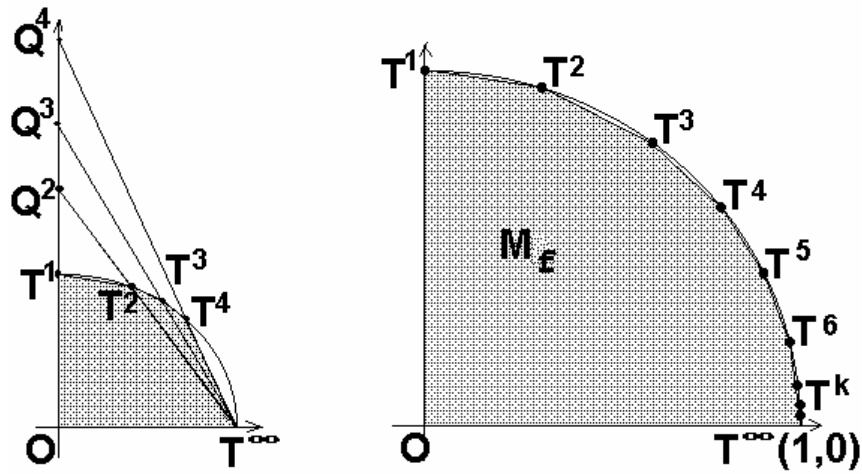


Рис. 5.5.2.1

Для множества M_λ справедливо следующее утверждение теоремы 4.7.1 из [95] об аппроксимационном числе (обратная величина к которому определяет порядок скорости сходимости МНА):

$$\alpha(M_\lambda) = \frac{1}{2\lambda + 2}. \quad (5.5.1)$$

Этот результат говорит о том, что класс тел $\mathcal{M}$ существенно отличается от класса гладких тел $\mathcal{E}^2$ в $\mathbb{E}^2$, для которых значение аппроксимационного числа на плоскости равно $(d-1)/2 = 1/2$. Таким образом, класс тел $\mathcal{M}$ допускает более быструю сходимость, чем гладкие тела, и при соответствующем выборе параметра λ , сколь угодно быструю.

Как следует из следствия 4.7.2 [95], метод УО имеет ту же оптимальную скорость сходимости, определяемую аппроксимационным числом (5.5.1). Целью исследования, излагаемого в настоящем рунк-

те, является экспериментальное подтверждение оптимальности по порядку метода УО в рассматриваемом классе со сверхвысокой (по сравнению с гладкими телами) скоростью сходимости при достижимых в эксперименте точностях.

Реализация метода УО для класса $\mathcal{M}$. Суть метода УО в том, что для каждой гиперграни (ребра) многогранника (многоугольника) P^k ищется точка границы M_λ , максимально удаленная от этой гиперграни (ребра) в направлении внешней нормали, а из найденных точек присоединяется та (y^* , соответствующая нормали u^*), расстояние до которой максимально. При этом дополнительно используется следующее соображение: если существует несколько точек $y^* \in \partial M_\lambda$, таких, что $\langle u^*, y^* \rangle = g(u^*, M_\lambda)$, то выбираем ту из них, которая является крайней точкой множества M_λ (см. [57] и главу 4 в [95]). Положим $P^1 = \text{conv} \{O, T^\infty, (1,0)\}$. Тогда для любого k , то есть на любом шаге метода, будет присоединяться одна точка из множества $\{T^n\}$.

Чтобы найти точку T^n , максимально удаленную от ребра $T^{i_m} T^{i_{m+1}}$, воспользуемся следующей идеей: из середины K ребра $T^{i_m} T^{i_{m+1}}$ восстановим перпендикуляр KM . Точка M пересечения этого серединного перпендикуляра с четверть-окружностью S_+ будет максимально удаленной от ребра $T^{i_m} T^{i_{m+1}}$ точкой S_+ , но она не обязательно принадлежит ∂M_λ . Поэтому найдем две соседние точки T^n и T^{n+1} такие, что точка M расположена между ними на S_+ . Нетрудно видеть, что в этом случае максимальное расстояние до рассматриваемого ребра достигается на одной из этих точек (а именно – на ближайшей из них к точке M). Указанные соображения позволяют найти аналитические выражения для номера вершины, присоединяемой к описанию аппроксимирующего многоугольника, что обеспечивает быструю работу метода.

Результаты численных экспериментов. Поскольку в данном исследовании речь идет только об изучении порядка скорости сходимости, то оно проводилось по методике первого этапа численных экспериментов, описанной в 5.1.

Для 10000 итераций были сгенерированы последовательности $\delta_n = \delta^H(P_n, M_\lambda)$ для различных значений λ . Будем исходить из того, что рассматриваемые величины асимптотически сходятся со скоростью

$$\delta_n = \frac{C_1(\lambda)}{n^{\frac{1}{\alpha(M_\lambda)}}}, \quad (5.5.2)$$

где $C_1(\lambda)$ – некоторая константа. Чтобы определить реальный порядок скорости сходимости $\alpha^*(M_\lambda)$, рассматривалась зависимость

$$\ln n = C_2(\lambda) - \alpha^*(M_\lambda) \ln \delta_n. \quad (5.5.3)$$

Табл. 5.5.1. Скорость сходимости метода УО в классе $\mathcal{M}$

λ	$\alpha(M_\lambda)$	$\alpha^*(M_\lambda)$
0.2	0.417	0.418
0.4	0.357	0.359
1.5	0.200	0.200

Результаты экспериментов представлены на рис. 5.5.2.1-5.5.2.3 и в табл. 5.5.1. Из рисунков видно, что разброс экспериментальных точек относительно прямой (5.5.3) невелик, поэтому гипотезу об асимптотическом поведении точности аппроксимации (5.5.2) можно считать справедливой.

Далее, результаты, приведенные в табл. 5.5.1, свидетельствуют о хорошем совпадении порядка скорости сходимости метода УО с аппроксимационным числом множеств в классе $\mathcal{M}$.

Итак, результаты [57] и главы 4 из [95], свидетельствующие о существовании отличных от многогранников тел со сверхвысокой (по сравнению с гладкими телами) скоростью сходимости полиэдральной аппроксимации нашли свое экспериментальное подтверждение.

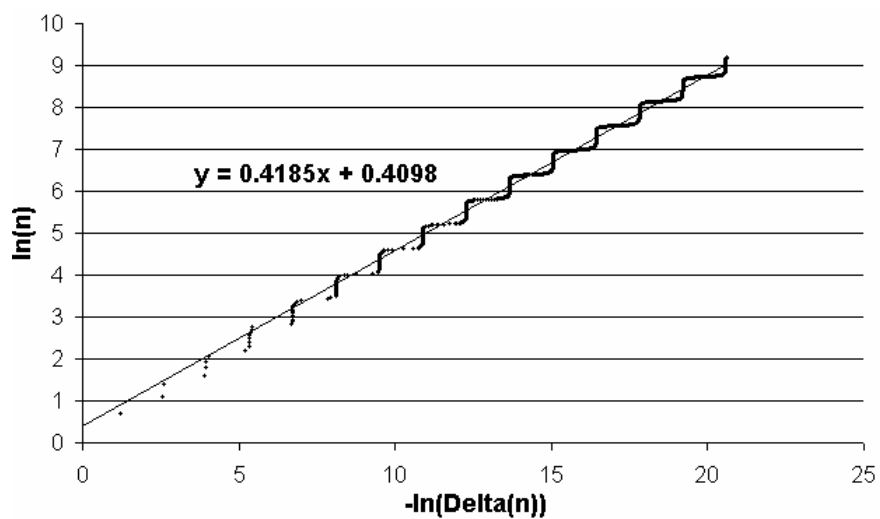


Рис. 5.5.1.1. Аппроксимация тела M_λ при $\lambda=0.2$, $\alpha(M_\lambda)=0.417$

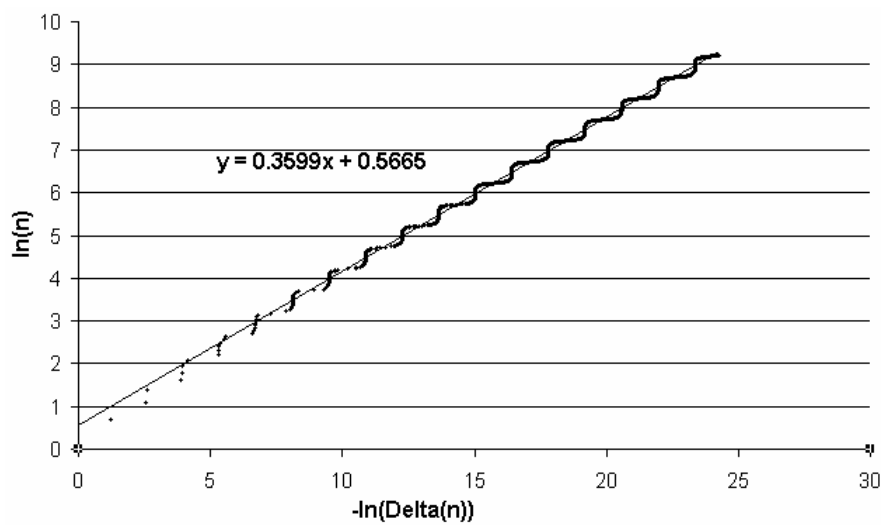


Рис. 5.5.2.2. Аппроксимация тела M_λ при $\lambda=0.4$, $\alpha(M_\lambda)=0.357$

Кроме того, для метода УО экспериментально подтверждено утверждение следствия 4.7.3 из [95] об оптимальности по порядку для рассматриваемого класса тел со сверхвысокой скоростью сходимости

сти при достижимых в численных экспериментах точностях.

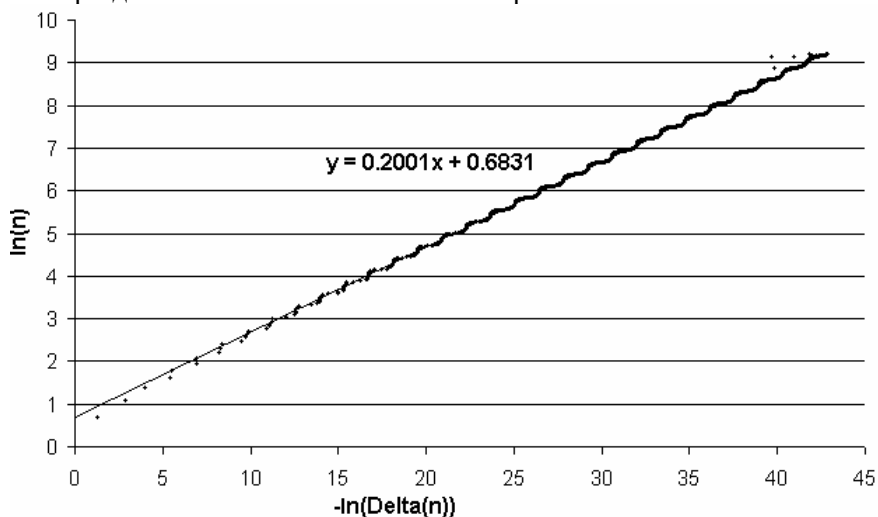


Рис. 5.5.2.3. Аппроксимация тела M_λ при $\lambda=1.5$, $\alpha(M_\lambda)=0.200$

Заключение

Приведенные в настоящей работе результаты экспериментальных исследований АМПА позволяют сделать следующие основные выводы:

1) предложенная в главе 5 методика экспериментального исследования полиэдральной аппроксимации ВКТ является универсальным средством для исследования различных методов и различных классов тел (гладкие тела, тела с бесконечным числом вершин, многогранники с огромным числом вершин и гиперграней);

2) предложенная методика позволяет исследовать как порядок асимптотической скорости сходимости, так и асимптотическую эффективность;

3) рассматриваемые АМПА (в частности, методы УО, СМ, прямо-двойственный, комбинированный) являются оптимальными по порядку для различных классов тел и метрик, при этом асимптотическая скорость сходимости достигается в большинстве случаев уже

при достижимой в экспериментах точности;

4) полученные экспериментальные результаты подтверждают теоретические выводы о скорости сходимости и эффективности рассматриваемых АМПА.

Заметим также, что ряд результатов численных экспериментов (независимость эффективности метода УО в классе эллипсоидов от свойств аппроксимируемого тела, сверхбыстрая по сравнению с гладкими телами скорость сходимости метода УО в классе тел с бесконечным числом вершин) был получен раньше, чем соответствующие теоретические результаты, что явилось стимулом для разработки соответствующего математического обоснования.

Литература

1. Minkowski H. Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd. 57. P. 447-496.
2. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948.
3. Мухамедиев Б. М. Приближенный метод решения задачи вогнутого программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 3. С. 727-732.
4. Sonnevend G. Asymptotically optimal, sequential methods for the approximation of convex, compact sets in R^n in the Hausdorff metrics // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai. 1980. V. 35 (2). P. 1075-1089.
5. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
6. Поспелов Г.С., Ириков В.А. Программно-целевое планирование и управление. М.: Советское радио, 1976.
7. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. Метод достижимых целей. Математические основы и экологические приложения. The Edwin Mellen Press, Lewiston, NY, USA, 1999.
8. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
9. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Feasible Goals Method Search for Smart Decisions. М.: ВЦ РАН, 2001.

10. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004. - 310 P.
11. Gruber P.M. Approximation of convex bodies // Convexity and its Applics. Basel etc.: Birkhäuser, 1983. P. 131-162.
12. Gruber P.M. Aspects of Approximation of Convex Bodies. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Sci. Publishers B.V. 1993. Ch. 1.10. P. 321-345.
13. Dudley R. Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries // J. Approximat. Theory. 1974. V. 10. P. 227-236; Corr., ibid, 1979. V. 26. P. 192-193.
14. Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д. О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский матем. ж. 1975. Т. 26. № 5. С.1110-1112.
15. Schneider R., Wieacker J.A. Approximation of convex bodies by polytopes // Bull. London Math. Soc. 1981. V. 13. P. 149-156.
16. Gruber P. M., Kenderov P. Approximation of convex bodies by polytopes // Rendiconti Circolo mat. Palermo. Ser. II. 1982. Т. 31. № 2. P. 195-225.
17. Самсонов С. Л. Восстановление выпуклого множества по его опорной функции с заданной точностью // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1983. № 1. С. 68-71.
18. Каменев Г.К. Исследование итерационных методов аппроксимации выпуклых множеств многогранниками. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
19. Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К. Экспериментальное исследование аппроксимации выпуклых тел многогранниками. М.: ВЦ АН СССР, 1991.
20. Джолдыбаева С.М., Каменев Г.К. Численное исследование эффективности алгоритма аппроксимации выпуклых тел многогранниками. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 6. С. 857-866.
21. Lopez M.A., Reisner Sh. Algorithms for Polyhedral Approximation of Multidimensional Ellipsoids // J. Algorithms. 1999. V. 33. P. 140-165.
22. Бурмистрова Л.В. Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками. М.: ВЦ

РАН, 1999.

23. Бурмистрова Л.В. Экспериментальный анализ нового адаптивного метода полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т.43. № 3. С. 328-346.
24. Ефремов Р.В. Экспериментальный анализ методов внешней полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: ВЦ РАН, 2002.
25. McClure D. E., Vitale R. A. Polygonal approximation of plane convex bodies // J. Math. Analys. and Appl. 1975. V. 51. № 2. P. 326-358.
26. Schneider R. Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder // Math. Ann. 1981. Bd. 256. № 3, S. 289-301.
27. Gruber P. M. Volume approximation of convex bodies by inscribed polytopes // Math. Ann. 1988. Bd. 281. № 2. S. 229-245.
28. Gruber P.M. Volume approximation of convex bodies by circumscribed polytopes. In: Applied Geometry and Discrete Mathematics. The Victor Klee Festschrift, DI-MACS Ser., 1991, Vol. 4 (Amer. Math.Soc., Providence, RI), pp. 309-317.
29. Gruber P.M. Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies I // Forum Math. 1993. N5. P. 281-297.
30. Gruber P.M. Asymptotic estimates for best and stepwise approximation of convex bodies II. // Forum Math. 1993. N5. P. 521-538.
31. Ludwig M. A Characterization of Affine Length and Asymptotic Approximation of Convex Discs // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1999. V. 69. P. 75-88.
32. Ludwig M. Asymptotic approximation of smooth convex bodies by general polytopes // Mathematika. 1999. V. 46. P. 103-125.
33. Böröczky K.Jr. Approximation of General Smooth Convex Bodies // Advanc. Math. 2000. V. 153. P. 325-341.
34. Васильев И. С. О неулучшаемых оценках аппроксимации сильно выпуклых тел // Вопр. кибернетики. 1988. Т. 136. С. 49-56.
35. Sonnevend G. An optimal sequential algorithm for the uniform approximation of convex functions on $[0, 1]$ // Appl. Math. and Optimizat. 1983. № 10. P. 127-142.
36. Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3-86.
37. Каменев Г. К. Об одном классе адаптивных схем аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Матем. моделирование и дис-

кретная оптимизация. М.: ВЦ АН СССР, 1988. С. 3-9.

38. Каменев Г. К. Об одном классе адаптивных алгоритмов аппроксимации выпуклых тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 1. С. 136-152.

39. Каменев Г.К. Об эффективности хаусдорфовых алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 5. С. 796-805.

40. Каменев Г.К. Исследование одного алгоритма аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 4. С. 608-616.

41. Каменев Г.К. Алгоритм сближающихся многогранников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 4. С. 134-147.

42. Каменев Г.К. Эффективные алгоритмы внутренней полиэдральной аппроксимации негладких выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 3. С. 446-450.

43. Каменев Г.К. Сопряженные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 9. С. 1351-1367.

44. Каменев Г.К. Метод полиэдральной аппроксимации выпуклых тел, оптимальный по порядку числа расчетов опорной и дистанционной функций // Доклады Академии наук. 2003. Т. 388. № 3. С. 309-311.

45. Каменев Г.К. Самодвойственные адаптивные алгоритмы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 8. С. 1123-1137.

46. Каменев Г.К. Методы аппроксимации выпуклых тел многогранниками и их применение для построения и анализа обобщенных множеств достижимости: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ, 1986. 219 с.

47. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом глубоких ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 11. С. 1751-1760.

48. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

49. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

50. Gruber P.M. Approximation by convex polytopes. In Polytopes: Abstract, Convex and Computational. Kluwer Acad. Publ.: 1994, pp. 173-203.

51. Schneider R. Polyhedral approximation of smooth convex bodies // J. Math. Analys. and Appl. 1987. V. 128. № 2. P. 470-474.
52. Fejes Tóth L. Approximation by polygons and polyhedra // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. № 4. P. 431-438.
53. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
54. Конвей Дж., Слоен Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М.: Мир, 1990. Т.1.
55. Böröczky K.Jr. About the Error Term for Best Approximation with Respect to the Hausdorff Related Metrics // Discrete Comput. Geom. 2001. V. 25. P. 293-309.
56. Gruber P.M. Error of Asymptotic Formula for Volume Approximation of Convex Bodies in E^d // Monatsh. Math. 2002. V. 135. P. 279-304.
57. Каменев Г.К. Об аппроксимационных свойствах негладких выпуклых дисков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 10. С. 1464-1474.
58. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Ин. Литерат., 1948.
59. Mattila P. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge Univercity Press. 1995. P. 1-343.
60. Gruber P.M. Comparisons of best and random approximation of convex bodies by polytopes // Rendiconti Circolo mat. Palermo. Ser. II. 1997. Suppl. 50. P. 189-216.
61. Müller J.S. Step by step approximation of plane convex bodies // Arch. Math. 1992. V. 58. P. 606-610.
62. Gordon Y., Meyer M., Reisner Sh. Volume approximation of convex bodies by polytopes – a constructive method // Studia Mathematica. 1994. III. № 1. P. 81-95.
63. Gordon Y., Meyer M., Reisner Sh. Constructing a Polytope to Approximate a Convex Body // Geometriae Dedicata. Kluver Acad. Publ.: 1995. V. 57. P. 217-222.
64. Бушенков В. А. Численный алгоритм построения проекций многогранных множеств // Аэрофиз. и прикл. ма-тем. М.: МФТИ, 1981. С. 108-110.
65. Бушенков В. А., Лотов А. В. Методы построения и использования обобщенных множеств достижимости. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
66. Бушенков В. А. Итерационный метод построения орто-

гональных проекций выпуклых многогранных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 9. С. 1285-1292.

67. Лотов А.В. Методы анализа математических моделей управляемых систем на основе построения множества достижимых значений показателей качества управления. Дис. на соискан. учен. степ. докт. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1986.

68. Cohon J. Multiobjective programming and planning. N. Y.: Acad. Press, 1978.

69. Appino P.A. A solution technique for approximating the non-inferior set of three objective linear programs: Ph. D. Diss. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins Univ., 1984.

70. Rote G. The Convergence Rate of the Sandwich Algorithm for Approximating Convex Functions. Techn. Univer. Graz. Austria. 1992.

71. Richardson T.J. Approximation of Planar Convex Sets from Hyperplane Probes // Discrete Comput. Geom. 1997. V. 18. P. 151-177.

72. Юдин Д. Б., Немировский А. С. Оценка информационной сложности задач математического программирования // Экономика и матем. методы. 1976. Т. 12. Вып. 1. С. 128-142.

73. Button L., Wilker J.-B. Cutting exponents for polyhedral approximations to convex bodies // Geometriae Dedicata. 1978. V. 7. № 4. P. 417-430.

74. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек при приближенных вычислениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 9. С. 1386-1396.

75. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек на основе триангуляции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 8. С. 1231-1242.

76. Черных О.Л. Построение выпуклой оболочки множества точек в виде системы линейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 8. С. 1213-1228.

77. Карманов В. Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.

78. Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967.

79. Koutroufiotis D. On Blaschke's rolling theorems // Arch. Math. 1972. V. 23. P. 655-660.

80. Schneider R. Closed convex hypersurfaces with curvature restrictions. // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. P. 1201-1204.

81. Brooks I.N., Strantzen J.B. Blaschke's rolling theorem in R^n // Mem. Amer. Math. Soc. Providence. 1989. V. 80. № 405. P. 2-5.
82. Leichtweiß K. Convexity and Differential Geometry. In: Handbook of Convex Geometry. Edited by P.M.Gruber and J.M.Wills. Elsevier Science Publishers B.V. 1993. Ch. 4.1. P. 1045-1080.
83. Бурмистрова Л.В. Исследование нового метода аппроксимации выпуклых компактных тел многогранниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 10. С. 1475-1490.
84. Kamenev G.K. One class of effective step-by-step algorithms for polyhedral approximation // Konvexgeometrie. Mat. Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht. 1997. № 44. P. 12-14.
85. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования. М.: Гос. Изд-во Физ. – Мат. Лит., 1959.
86. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
87. Ефремов Р.В., Каменев Г.К. Априорная оценка асимптотической эффективности одного класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 1. С. 23-32.
88. Ефремов Р.В. Априорная оценка эффективности адаптивных алгоритмов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 1. С. 149-160.
89. Schneider R. Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory. Cambridge, 1993.
90. Ефремов Р.В. Анализ методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел и их применение в задачах многокритериальной оптимизации. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 2003.
91. Ефремов Р.В., Каменев Г.К., Лотов А.В. Построение экономного описания многогранника на основе теории двойственности выпуклых множеств, Доклады АН, 2004. Т.399, N5.
92. Брусникина Н.Б., Каменев Г.К. О сложности и методах полиэдральной аппроксимации выпуклых тел с частично гладкой границей// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2005. Т. 45, N9, С. 1577-1587.
93. Popov V.A. Approximation of convex figures // C.R. Acad. Bulgare. Sci. 1968. V. 21. P. 993-995.
94. Бронштейн Е.М. Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные

- направления. Т. 22, Геометрия, 2007. С. 5–37.
95. Каменев Г.К. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007, 230 с.
 96. Каменев Г.К. Теория двойственности оптимальных адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т. 48. N3. С. 397-417.
 97. Каменев Г.К. Скорость сходимости адаптивных методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел на начальном этапе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008, Т. 48. N5. С. 35-50.
 98. Mankiewicz P., Schütt C. On the Delone Triangulation Numbers // J. Approxim. Theory. 2001. III. P. 139-142.
 99. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1982.
 100. Moran P.A.P. The surface area of an ellipsoid. In: Statistics and Probability. Essays in honor of C.R.Rao. North-Holland, 1982.
 101. Blaschke W. Vorlesungen Über Differentialgeometrie II. Springer-Verlag. Berlin, 1923.
 102. Petty C.M. Affine isoperimetric problems // Ann. New York Acad. 1985. Sci. 440. P. 113-127.
 103. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1989.
 104. Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., 1961.
 105. Каменев Г.К. Полиэдральная аппроксимация шара Методом Глубоких Ям с оптимальным порядком роста мощности гранной структуры // Международная научн. конфер. «Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления» NUMGRID2010. Сборник трудов. М.: «Фолиум», 2010. С. 47-52.
 106. Майская Т.С. Разработка и анализ методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето для выпуклых задач многокритериальной оптимизации: Дипл. раб. М.: ВМК МГУ, 2010.
 107. Олюнина О.В. Исследование и реализация метода “Бег по множеству Парето” на основе аппроксимации выпуклых множеств»: Дипл. раб. М.: ВМК МГУ, 1999.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ЭТАЛОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТНЫХ ТЕЛ	5
1.1. Многогранники наилучшей аппроксимации	5
1.2. Аппроксимируемость и аппроксимационное число выпуклых компактных тел	11
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ИХ ЭФФЕКТИВНОСТЬ	15
ГЛАВА 3. АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ	20
ГЛАВА 4. ИССЛЕДУЕМЫЕ АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ИХ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА	29
4.1. Метод «Уточнения Оценок»	29
4.2. Методы «Уточнения Внешних Оценок»	33
4.3. Метод «Сближающихся многогранников»	37
4.4. Прямо-двойственный метод	42
4.5. Комбинированный метод	46
ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ АДАПТИВНЫХ МЕТОДОВ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ	48
5.1. Задачи и методика численного исследования эффективности адаптивных методов полиэдральной аппроксимации	48
5.2. Методика исследования в классе многомерных эллипсоидов	52
5.3. Результаты численных исследований в классе многомерных эллипсоидов	66
5.3.1. Результаты предварительных численных исследований методов полиэдральной аппроксимации	66
5.3.2. Простой пример численного исследования методов полиэдральной аппроксимации	67
5.3.3. Некоторые общие вопросы реализации численных исследований методов полиэдральной аппроксимации в классе эллипсоидов	73
5.3.4. Результаты численных исследований метода «Уточнение	

Оценок» в классе многомерных эллипсоидов	77
5.3.5. Результаты численных исследований метода «Уточнение Оценок» по аппроксимации шаров различной размерности	90
5.3.6. Основные выводы из численных исследований метода «Уточнение Оценок» в классе многомерных эллипсоидов	94
5.4. Дальнейшие исследования адаптивных методов полиэдральной аппроксимации	95
5.4.1. Дальнейшие исследования метода «Уточнения Оценок»	95
5.4.2. Результаты численных исследований метода «Сближающихся Многогранников»	96
5.4.3. Результаты численных исследований прямо-двойственного метода	98
5.5. Исследования в классе негладких выпуклых компактных тел	101
5.5.1. Результаты численных исследований в классе циклических многогранников	101
5.5.2. Результаты численных исследований в классе дисков с бесконечным числом вершин	103
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	108
ЛИТЕРАТУРА	109

Каменев Георгий Кириллович

Численное исследование эффективности методов
полидральной аппроксимации выпуклых тел

Подписано в печать 29.12.2010

Формат бумаги 60×84 1/16

Уч.-изд. л.5. Усл.-печ. 7,5

Тираж 120 экз. Заказ 53

Отпечатано на ротاپринтах в Учреждении Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
119991, Москва, ул. Вавилова, 40