ОБ УЧЕТЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ В МЕТОДЕ R-ФУНКЦИЙ

Семерич Ю.С.
Пензенский государственный университет
Пенза, Россия

Работа посвящена развитию конструктивных средств учета симметрии трансляционного типа в методе R-функций (международная аббревиатура R-functions method) при построении уравнений границ геометрических объектов.

Пусть Ω есть некоторая область в R^2 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, обладающая симметрией трансляционного типа в направлении некоторого вектора $\mathbf{s} \in R^2$. Очевидно, что такая область Ω совпадает сама с собой при преобразовании переноса вдоль вектора $\mathbf{s}$. Поставим задачу построить функцию $\omega(x, y)$, положительную внутри Ω, отрицательную вне Ω и равную нулю на $\partial\Omega$. Уравнение $\omega(x, y) = 0$ будет в неявной форме определять геометрическое место точек, представляющих границу $\partial\Omega$ области Ω.

С помощью метода R-функций уравнение границы области Ω, обладающей симметрией трансляционного типа, можно записать в виде

$$\omega(x, y) \equiv \sigma_0(\mu_n(x,h), y) = 0,$$

где область $\Sigma_0 = (\sigma_0(x, y) \geq 0)$ будем называть трансляционной.

Функция $\mu_n(x, h)$, где h – так называемый шаг трансляции, соответствует преобразованию переноса трансляционной области Σ_0 вдоль оси абсцисс на величины hi $(i \in Z)$ и может быть задана в виде

$$\mu_n(x,h) = \frac{4h}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2}\sin\left[\frac{(2i-1)x\pi}{h}\right].$$

Рассмотрим случай, когда уравнение границы области получено в результате преобразования переноса трансляционной области Σ_0 вдоль оси абсцисс на некотором отрезке прямой длины $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, то есть конечное число раз $k = l/h + 1 \in Z_+$. Тогда вместо функции $\mu_n(x, h)$ выберем

$$\mu^*(x,h) = (x \wedge_1 \mu_n(x,h)) \wedge_1 (l - x).$$

Здесь символ $\wedge_1$ соответствует R-операции, которая называется R-конъюнкцией и принадлежит системе R_1:

$$x \wedge_1 y \equiv (x + y - |x - y|)/2 \equiv \min(x, y),\ x \vee_1 y \equiv (x + y + |x - y|)/2 \equiv \max(x, y),$$

$$\bar{x} \equiv -x.$$

В работе рассмотрены случаи:

1) $\sigma_0(x, y) = \sigma_0(-x, y)$ и $\sigma_i(x, y) \cap \sigma_{i+1}(x, y) = \varnothing$ $(i \in Z)$, а область $\Sigma_0 \subset R^2$ является выпуклой;

2) $\sigma_0(x, y) \neq \sigma_0(-x, y)$ и $\sigma_i(x, y) \cap \sigma_{i+1}(x, y) = \varnothing$ $(i \in Z)$;

3) $\sigma_0(x, y) \neq \sigma_0(-x, y)$ и $\sigma_i(x, y) \cap \sigma_{i+2}(x, y) = \varnothing$ $(i \in Z)$.