

Обзор современных параллельных алгоритмов решения больших систем линейных уравнений

В.Ю.Правильников*

*ООО «Нейрок Техсофт», pravilnikov@acnts.com

Аннотация

Решение больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений является одной из ключевых задач, возникающих при моделировании различных физических процессов, а также при решении задач оптимизации, в частности, в задаче глобальной вариационной оптимизации сеток. Современные тенденции таковы, что становится необходимо решать все более сложные задачи (происходит усложнение физических моделей) все большей размерности (до 10^6 - 10^8 неизвестных). Это приводит к тому, что для решения таких задач вычислительной мощности даже современного компьютера уже недостаточно и необходимо использование сетей (кластеров) компьютеров. В последние несколько десятилетий это направление вычислительной алгебры интенсивно развивается, и появляются многочисленные статьи, посвященные этой тематике, и программные пакеты, позволяющие решать очень большие системы линейных уравнений, используя параллельные алгоритмы. Предлагаемый доклад посвящен обзору таких алгоритмов. Заметим, что все алгоритмы, представленные в обзоре, доступны в печати и интернете и главной задачей было некоторым образом обобщить эту информацию и отметить наиболее интересные современные подходы к решению означенной задачи.

Рассматриваются следующие два основных класса параллельных алгоритмов: прямые решатели (direct sparse solvers) и итерационные решатели с предобуславливанием (preconditioned iterative solvers) типа неполного разложения на треугольные множители (incomplete Cholesky/LU decomposition). Рассмотрение параллельных алгебраических многосеточных методов (parallel algebraic multi-grid) или параллельных вложенных разложений (parallel nested factorization) находится вне рамок данного доклада.

Обзор прямых решателей включает в себя перечисление известных программных пакетов и ссылок на них, рассмотрение основных шагов построения как полного разложения Холецкого для симметричных положительно определенных матриц, так и полного LU разложения с итерационным уточнением. Затем более детально рассматривается, по мнению автора, один из наиболее эффективных и масштабируемых по числу процессоров подходов.

При рассмотрении итерационных решателей основное внимание уделяется вопросам построения эффективного масштабируемого предобуславливателя. Рассматриваются три основных подхода: подход, базирующийся на методе разбиения области на подобласти с перекрытием (overlapped domain decomposition) и без перекрытия (non-overlapped domain decomposition), а также с предобуславливанием, базирующемся на многоуровневом подходе (mlti-level approach). Два таких алгоритма рассматриваются более детально. По каждому алгоритму доклад содержит ссылки на соответствующие статьи и/или программные пакеты, доступные в интернете. Для некоторых алгоритмов приводятся данные численных экспериментов, взятые из статей.