

О классе примарных многогранников

Данная статья будет посвящена вопросам, связанным с известной гипотезой теории выпуклых многогранников — 3^d -гипотезой. Рассматривается класс всех выпуклых d -мерных центрально-симметричных многогранников и определяется число m — точная нижняя грань числа всех граней таких многогранников. 3^d -гипотеза предполагает, что $m = 3^d$. Совершенно очевидным представляется, что для любой размерности d выполнено $m \leq 3^d$, достаточно для примера взять d -мерный куб, для которого полное число граней в точности равняется 3^d . Наиболее значительные результаты в проверке 3^d -гипотезы принадлежат Р.Стенли. В своей работе он при использовании алгебраических методов доказал справедливость утверждения гипотезы для таких центрально-симметричных многогранников, у которых все грани являются симплексами, а также для простых центрально-симметричных многогранников. Однако метод Р.Стенли не дал результатов в общем случае.

Наряду с самой 3^d -гипотезой возникают еще и смежные задачи. Например, как описать класс таких d -мерных центрально-симметричных многогранников, у которых общее число граней в точности равно 3^d (будем называть такие многогранники *критическими*)? Какие операции над многогранниками сохраняют свойство критичности? Очевидно, что многогранник, двойственный к критическому, тоже критический. Кроме того, прямое произведение двух критических многогранников также будет критическим многогранником. Д.Калаи предположил, что все критические многогранники могут быть получены из многомерных кубов с помощью прямого произведения и взятия дуального. Обозначим множество таких многогранников через $\mathbb{K}$.

Рассмотрим в качестве примера бипирамиду над трехмерным кубом. Можно установить, что она является критическим многогранником, и что она не может быть получена как прямое произведение пары многогранников. Н.П.Долбиллин, на основе некоторого обобщения бипирамид над многогранниками, предложил конструкцию некоторого подкласса класса критических многогранников. Этот подкласс будем называть примарными многогранниками.

В работе будет представлено точное определение этого класса через выпуклую оболочку многогранников в специальном положении и через прямое произведение многогранников. Будет также доказана формула, связывающая эти две операции [1]:

$$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} = (CH(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*))^* \quad (1)$$

Здесь $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — произвольные комбинаторные типы выпуклых центрально-симметричных многогранников; $\otimes$ — прямое произведение; CH — выпуклая оболочка многогранников в специальном положении; $*$ — дуальный комбинаторный тип многогранника [2].

На основе формулы (1) доказывается, что класс примарных многогранников совпадает с $\mathbb{K}$.

Литература.

- [1] М. Панов "О некоторых классах центрально-симметричных многогранников", Материалы девятого международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", издательство механико-математического факультета МГУ, Москва 2007.
- [2] B.Grunbaum "Convex polytopes", Interscience Publishers, 1967.