О МОНОТОННЫХ СХЕМАХ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ СЕТОЧНЫХ УЗЛОВ

А.С. Холодов [1,2] , Я.А.Холодов [2]

([1] 123056 Москва, 2-я Брестская ул., 19/18, Институт автоматизации проектирования РАН, [2] 141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пер., 9, Московский физико-технический институт)

При численном решении задач со сложной, в том числе многосвязной областью интегрирования далеко не всегда удается построить преобразование независимых переменных, отображающее исходную область интегрирования на более удобную для введения регулярной разностной сетки. Кроме того, уравнения в новых переменных могут иметь "плохие" коэффициенты, дополнительные члены, процесс построения таких отображений может занимать существенную часть общего объема вычислений и т.п., что существенно осложняет численное решение подобных задач. В этом отношении предпочтительнее методы типа конечных элементов (конечных объемов), в которых сложная область интегрирования не преобразуется к каноническому виду, а покрывается нерегулярной (неструктурированной) сеткой. Однако, для многих важных свойств численных методов, хорошо разработанных и сравнительно легко реализуемых в случае регулярных сеток, заранее не очевидны пути их конструктивного обобщения на случай таких неструктурированных сеток.

В докладе, на основе анализа разностных схем в пространстве неопределенных коэффициентов для уравнений гиперболического и параболического типов рассматриваются явные разностные схемы, обладающие (в линейном приближении для задачи Коши) свойствами абсолютной устойчивости и мажорантности (монотонности по Фридрихсу [1]), пригодные для расчетов на неструктурированных (хаотических) сетках в сложных областях со многими несвязными границами (не требующие предварительной информации о соседстве сеточных узлов) [2-5]. Аналогичные схемы анализируются для уравнений эллиптического типа [6]..

Ранее сформулированные для явных двухслойных разностных схем и широко распространенные при численном решении уравнений гиперболического типа критерии монотонности (С.К.Годунова [7], TVD - А.Хартена [8], характеристический [9]) обобщены на случай многослойных, в том числе неявных сеточных шаблонов [10].

На основе анализа разностных схем в пространстве сеточных функций и характеристического критерия монотонности предлагается универсальный алгоритм построения нелинейных, монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации. Предложен ряд новых монотонных разностных схем 4-3 порядка аппроксимации на трехслойном компактном сеточном шаблоне и на нерасширяющихся (трехточечных) сеточных шаблонах для продолженной системы, что позволяет обеспечить монотонность разностных схем как для искомой функции, так и для ее производных [10].

Приводятся результаты тестирования предложенных разностных схем и рассматриваются некоторые вопросы обобщения предлагаемых монотонных схем на случай многомерных систем уравнений.

Литература

1. Fridrichs K.O. Symmetric hyperbolic linear differential equations // IBID. № 2. P. 345-392.

2. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1476-1492.

3. Холодов А.С. Разностные схемы с положительной аппроксимацией для многомерных систем уравнений гиперболического типа на нерегулярных сетках // В кн.: Рациональное численное моделирование в нелинейной механике. М.: Наука. 1990. С. 49-62.
4. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 24, № 9. С. 1346-1358.
5. Холодов А.С. О мажорантных разностных схемах для уравнения параболического типа на неструктурированных сетках // В кн.: Математическое. моделирование. М.: Изд. МГУ. 1993. С. 105-113.
6. Холодов А.С. Монотонные разностные схемы на нерегулярных сетках для эллиптических уравнений в области со многими несвязными границами. Журнал математическое моделирование. 1991. Т. 3, № 9. С. 104-113.
7. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т.47(89), вып.3. С.271-306.
8. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws//J. Comput. Phys. 1987. V. 49. No 3. P. 357-393.
9. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme//J. Comput. Physics. 1974. V. 14. P. 361-370
10. Холодов А.С., Холодов Я.А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа. Журн. вычисл. матем. и матем. физ., т.46, №9, с. 1638-1667.