НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ.

В. Г. Грудницкий
(ВЦ РАН)

В докладе излагаются основные результаты разрабатываемой автором последние годы нелинейной теории законов сохранения сплошной среды.

На необходимость использовать законы сохранения в дивергентной форме ранее обращали внимание А.Н.Тихонов и А.А.Самарский. Условие устойчивости для линейных уравнений впервые сформулировал В.С.Рябенький [1]. Распад произвольного разрыва, как элемент вычислительной схемы, впервые использовал С.К.Годунов [2].

Эти результаты использовались нами в работах [3-13], основные выводы из которых выглядят так.

1. Сведены в одно семейство квазилинейные характеристики и разрывы. При этом возникает возможность характеристического анализа разрывных решений всюду, в том числе на разрывах.
2. Показана обоснованность и результативность применения характеристического анализа не только к гиперболической (невязкой) форме законов сохранения, но и при учёте вязких свойств среды. Для этого случая удаётся получить достаточные условия устойчивости непрерывным образом переходящие от гиперболического типа к параболическому по мере роста коэффициента вязкости.
4. Удаётся определять влияние правых частей различного типа на условия устойчивости.
5. Главными результатами теории являются достаточные условия устойчивости, в большинстве случаев являющиеся необходимыми. Они получены для широкого набора процессов: одномерных и многомерных нестационарных разрывных течений в декартовых и криволинейных координатах; стационарных, сверхзвуковых в некотором направлении течений; нестационарных течений сжимаемого вязкого газа. Полученные условия обеспечивают монотонность численных решений вблизи разрывов.

Все перечисленные выводы не относятся к конкретным численным схемам. Характеристический анализ на основании тождественных преобразований законов сохранения можно проводить для любой схемы использующей эти законы в дивергентной форме. При этом распад разрыва может содержаться в качестве элемента схемы (например, схема Годунова), или не содержаться в ней (например, схема Лакса).

Устойчивость в нелинейном случае всюду (в модельных примерах и в законах сохранения) доказывается путём разбиения нелинейных операций на последовательность (суперпозицию) устойчивых. Эти операции могут быть линейными (в модельных примерах) или часть из них линейная (усреднение в законах сохранения), а часть нелинейная (процедура распада произвольного разрыва, для которой устойчивость доказана). Нами показано, что любую устойчивую вычислительную схему, использующую дивергентную форму законов, можно представить как последовательность операций распада произвольных разрывов между параметрами соседних ячеек и операций усреднения полученных решений на каждой ячейке

В законах сохранения сумма безразмерных коэффициентов перед слагаемыми в формуле, которая описывает переход от слоя к слою, должна быть равна единице. Это свойство следует из дивергентного характера законов сохранения - поверхностного характера взаимодействия в механике сплошной среды. В этом случае под устойчивостью естественно понимать невозрастание любых однажды возникших элементов решения, что обеспечивается неотрицательностью коэффициентов в формуле перехода. Нарастание ошибок при выполнении условий устойчивости происходит за счёт возмущений, возникающих на каждом шаге (стохастическое, диффузионное накопление), и не носит «катастрофического» характера. Анализ такого процесса содержится в [13]

Предельный переход к «точке» при традиционной записи законов сохранения на разрывах невозможен, независимо от того, записаны они в квазилинейной или в дивергентной форме. Это обусловлено тем, что изменение разрывных функций относится к изменению непрерывных (независимых координат). Разница между двумя этими формами заключается в том, что в квазилинейных уравнениях разрывные решения уже потеряны, дивергентную же форму можно преобразовать к виду, допускающему предельный переход к «точке». Собственно, при этом и возникает обобщённо-характеристическая форма законов сохранения.

Такая форма записи законов сохранения (на её основании получены все приводимые здесь результаты) допускает предельный переход к «точке» всюду, в том числе на разрывах. В связи с этим она имеет больше оснований считаться универсальной формой представления законов сохранения.

Для разрывных течений более естественно нормировать (дифференцировать) изменение потоков на изменение соответствующих им в каждом уравнении функций. Другими словами, разрывные функции относить к разрывным. Такие производные имеют механический смысл (скорости), и существуют всюду, в том числе и на разрывах. Любая комбинация параметров течения, имеющая размерность скорости должна удовлетворять определённым механическим условиям (в данном случае условиям Галилея), если возмущение с такой скоростью существует устойчиво. Включение механических свойств в процесс преобразования уравнений позволяет не только преодолеть их нелинейный характер, но и использовать его для получения квазилинейной формы уравнений на основе тождественных преобразований, без потери каких либо свойств. Единственной функцией, которая входит в законы сохранения нелинейным образом является скорость среды. Разложение скоростей фронтов возмущений по степеням скорости течения и применение к ним условия Галилея обеспечивают тождественный переход от дивергентной формы законов сохранения к обобщённо – характеристической.

Литература.

1.В.С.Рябенький, А.Ф.Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений-М, Гостехиздат, 1956г.

2. С.К.Годунов. Разностный метод расчёта ударной волны - УМН, 1957г, т. 12, вып.1, с.176-177.

3. В.Г.Грудницкий. Обобщённые характеристики для системы уравнений Эйлера - Сб. «Алгоритмы для численного исследования разрывных течений», ВЦ РАН, 1993, с.191-203.

4. В.Г.Грудницкий. Обобщённые характеристики и достаточное условие устойчивости для уравнений Эйлера с разрывными решениями - Мат. моделирование, 1997, т.9, №12, с.121-125.

5. В.Г.Грудницкий. Достаточное условие устойчивости при явном построении разрывных решений системы уравнений Эйлера - Док. Академии наук, 1998, т.362, №3, с.298-299.

6. В.Г.Грудницкий. Достаточное условие устойчивости многомерного расчёта нестационарных разрывных решений уравнений Эйлера - Мат. моделирование, 2000, т. 12, №1, с.65-78.

7. В.Г.Грудницкий, П.В.Плотников. Обобщённые характеристики и достаточное условие устойчивости при построении разрывных решений системы уравнений Эйлера - Сб. Новое в численном моделировании», 2000, с.148-164.

8. V.G.Grudnitskiy. Sufficient conditions of stability for discontinuous solutions of the Euler equations - Computational Fluid Dynamics Journal, 2001, v.10, №.2, p.334-337.

9. В.Г.Грудницкий. Прямой обобщённо-характеристический метод для расчёта разрывных решений законов сохранения газовой динамики - Мат. моделирование, 2004, т.16, №1, с.90-96.

10. В.Г.Грудницкий. О достаточных условиях устойчивости для схемы С.К. Годунова - Мат. моделирование, 2005, т.17, № 12, с.119-128.

11. В.Г.Грудницкий. Достаточные условия устойчивости при расчёте разрывных решений нестационарных законов сохранения в криволинейных координатах и при наличии правых частей. - Мат. моделирование, 2006г., т.18, №10, стр.76-80.

12. В.Г.Грудницкий. Достаточные условия устойчивости в расчётах стационарных сверхзвуковых течений маршевым способом и нестационарных течений с учётом вязкости.- Мат.моделирование, 2008г., т.20, № 2, стр.93-104.

13. В.Г.Грудницкий. О поведении численного решения краевых задач для эволюционных уравнений в больших областях. Жур. Доклады Академии Наук СССР, т.252, №5, 1980г.