Решение задач линейной оптимизации большой размерности с помощью обобщенного метода Ньютона

А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко

Вычислительный центр им А.А.Дородницына РАН, gol@ccas.ru, evt@ccas.ru

Для решения больших линейных систем равенств и/или неравенств, больших задач линейного программирования предлагается использовать теоремы об альтернативах, вспомогательные функций кусочно квадратичного вида и обобщенный метод Ньютона для их безусловной минимизации.

Теоремы об альтернативах дают возможность построить новые эффективные методы нахождения нормального решения линейных систем, существенно упростить вычисления в методах наискорейшего спуска, предложить новые методы решения задач линейного программирования, новые методы построения семейства гиперплоскостей, разделяющих полиэдры и т.д. С исходной линейной системой связана альтернативная система такая, что одна и только одна из этих систем совместна. У альтернативной системы число неизвестных равно общему количеству равенств и неравенств (кроме ограничений на знак переменных) в исходной системе. Если исходная система разрешима, то численный метод нахождения ее нормального решения сводится к минимизации невязки несовместной альтернативной системы. Из результатов этой минимизации по простым формулам находится нормальное решение исходной системы. Так как размерности переменных исходной и альтернативной систем различны, то переход от исходной системы к минимизации невязки альтернативной системы может быть с вычислительной точки зрения очень полезен. Эта редукция может привести к задаче минимизации с меньшим числом неизвестных, что упрощает нахождение нормального решение исходной системы с большим числом неизвестных.

Теоремы об альтернативах и обобщенный метод Ньютона позволяют также строить семейство гиперплоскостей, разделяющих полиэдры, заданные большим количеством линейных неравенств (несколько миллионов). Предлагается использовать обобщенный метод Ньютона для безусловной минимизации, возникающей при нахождении нормального решения линейной системы с очень большим (несколько десятков миллионов) количеством неотрицательных переменных и средним (несколько тысяч) количеством линейных равенств. Аналогично обобщенный метод Ньютона применяется для нахождения проекции заданной точки на множество решений прямой задачи линейного программирования с таким же соотношением между количеством неотрицательных неизвестных и ограничениями-равенствами. Начиная с некоторого фиксированного значения коэффициента штрафа, после однократной безусловной минимизации вспомогательной функции вычисляется по простым формулам точная проекция заданной точки на множество решений прямой задачи линейного программирования. При определенном предположении получена формула для порогового значения коэффициента штрафа. Подставляя найденную проекцию в вспомогательную функцию и минимизируя ее, находим точное решение двойственной задачи линейного программирования. Предложен простой итеративный процесс, в котором начиная с произвольного положительного коэффициента штрафа и произвольного начального вектора прямой задачи, получаются точные решения прямой и двойственной задачи за конечное число шагов. Методы были реализованы в системе MATLAB. Вычислительные эксперименты показали высокую эффективность метода при решении задачи линейного программирования с большим числом неотрицательных неизвестных (несколько десятков миллионов) и средним числом ограничений-равенств (несколько тысяч). Время решения таких задач на компьютере Pentium-IV с тактовой частотой 2.6 ГГц составляло от несколько десятков сек. до полутора часов. Сравнение с некоторыми известными коммерческими и исследовательскими программами показали полное преимущество программной реализации нового метода в системе MATLAB при решении задач большой размерности и близкие результаты по времени и точности при решении задач малой размерности. Этот метод хорошо поддается распараллеливанию. Как показали эксперименты число ограничений-равенств в задаче линейного программирования при использовании 8 процессоров можно увеличить до 30 тысяч.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00619 и программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3.

Список литературы

1. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.* Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43, № 3. С.354-375.
2. *Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н.* Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности. // Ж. вычислит. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1564-1573.