Пространственные квазиизометричные отображения как решения задачи минимизации поливыпуклого функционала

©В.А. Гаранжа*, Н.Л. Замарашкин†.
*Вычислительный центр РАН, garan@ccas.ru
†Институт вычислительной математики РАН, kolya@bach.inm.ras.ru

Аннотация
Работа посвящена вариационному описанию квазиизометричных отображений. Рассмотрен поливыпуклый функционал, являющийся конечным только на множестве квазиизометричных отображений с конечным искажением. При помощи прямого метода доказана теорема существования для задачи безусловной минимизации этого функционала. Показано, что при соответствующем выборе коэффициентов функционала его абсолютный минимум достигается на любом заданном квазиизометричном отображении.

Введение

Управление свойствами пространственных отображений является важным инструментом при построении расчетных сеток, геометрическом моделировании, в задачах реконструкции и параметризации поверхностей, при адаптивном численном моделировании и во многих других практических приложениях.

Расчетные сетки и отображения должны удовлетворять ряду естественных условий, включая локальную обратимость. Это условие в общем случае оказывается несовместимым с условием выпуклости функционалов, используемых для построения отображений. Поэтому практически используемые вариационые методы построения расчетных сеток основаны на существенно нелинейных невыпуклых функционалах. Строгое математическое обоснование таких подходов, как правило, отсутствует, и методы строятся на основе различных эвристик. В каждом методе построения сеток, основанном на построении отображений, необходимо иметь ответы на следующие вопросы:

1) Является ли сходящейся последовательность все более подробных сеток?

2) Сохраняется ли качество ячеек сетки при ее измельчении?

3) Устойчива ли сетка к малым вариациям входных параметров?

4) Можно ли управлять свойствами сетки?

Первый шагом для ответа на эти вопросы оказывается анализ непрерывной задачи, которая используется для построения дискретного функционала.

Существуют несколько классических подходов для построения и анализа вариационных принципов для классов отображений.

Один из них - это метод гармонических отображений. На его основе построены многие методы построения расчетных сеток. Однако во многих практических случаях гармоническое отображение вырождается, так что ответы на заданные выше вопросы оказываются отрицательными.

Теория комформных отображений позволяет получить полное решение задачи для достаточно простых областей. Так, в [2] показано, что комформное отображение криволинейного четырехугольника на прямоугольник при некоторых условиях квазиизометрично и единственно, т.е. гарантированы поточечные оценки устойчивости и качества отображения и сетки, построенной на его основе. Однако этот подход нельзя обобщить на трехмерный случай.

Более общий подход был развит при построении математической теории гиперупругости с большими деформациями. Были предложены различные функционалы, которые позволяют строить локально обратимые отображения для многомерных задач, для достаточно общих областей и различных типов граничных условий. Общая теория существования решений этих задач была построена в [9], где было показано что два свойства являются ключевыми: 1) барьерное свойство, когда подинтегральное выражение стремится к $+\infty$ при стремлении якобиана локально отобратимого отображения к $+0$, 2) свойство поливыпуклости, когда подинтегральное выражение можно записать как выпуклую функцию всех миноров матрицы Якоби отображения. Серьезная трудность в этом подходе состоит в том, что функционалы могут допускать сингулярные отображения в качестве минимума. Может иметь место эффект Лаврентьева, когда минимум меняется при изменении класса функций, в котором он ищется. Во многих случаях неизвестно, имеет ли место слабая формулировка уравнений Эйлера-Лагранжа функционала [4].

Данная работа посвящена обоснованию вариационного принципа для построения квазиизометричных отображений. В работе [3] был предложен поливыпуклый функционал, определенный на подмножестве отображений с ограниченным искажением в смысле [1]. Фактически задание этого подмножества вырезает квазиизометричные отображения из класса отображений с ограниченным искажением.

Мы доказываем теорему существования для этого функционала при естественных ограничениях на форму области (липшиц-непрерывность). Удается показать, что функционал принимает конечные значения только на квазиизометричных отображениях, и его минимум также является квазиизометричным отображением.

Минимальная регулярность решений соответствует локальному условию липшиц-непрерывности, что исключает эффект Лаврентьева.

В работе [1] было показано, что любое отображение с ограниченным искажением можно получить как минимум интеграла типа Дирихле. Мы получаем аналогичный результат, а именно, любое квазиизометричное отображение можно получить как минимум функционала [3], т.е. вариационное описание класса квазиизометричных отображений является полным.

Проведенный теоретический анализ подкрепляет данные расчетов, в которых было показано, что методика построения сеток и отображений, основанная на минимизации дискретного функционала является надежной, устойчивой, сходящейся и легко управляемой.

Существует несколько открытых вопросов. Наиболее важные из них - это условия устойчивости локальных минимумов, условия глобальной единственности решения, а также при каких условиях имеет место слабая формулировка уравнений Эйлера-Лагранжа функционала.

1 Обозначения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с липшицевой границей $\partial\Omega$, а $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ – соболевское отображение с предписанными значениями на границе $u|_{\partial\Omega} = u_0$. Среди всех таких отображений будем искать минимум функционала $J(u)$

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} F(\nabla u(\omega))d\omega,$$

где $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ – функция на $\mathbb{R}^{n\times n}$, заданная для любого $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ следующими соотношениями [3]

$$F(M) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)\Phi_\theta(M)}{\det M - t\Phi_\theta(M)}, & \text{если } \det M - t\Phi_\theta(M) > 0; \\ +\infty, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

здесь $\Phi_\theta : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

$$\Phi_\theta(M) = \theta \left(\frac{\operatorname{tr}(M^\top M)}{n} \right)^{n/2} + \frac{(1-\theta)}{2} \left(\bar{v} + \frac{\det^2 M}{\bar{v}} \right),$$

а $\theta \in (0,1)$, $t \in (0,1)$, $\bar{v} \in \mathbb{R}_+$ – некоторые заданные числа.

Будем говорить, что функция $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ принадлежит допустимому множеству A и писать $u \in A$, если

$$\det(\nabla u(\omega)) - t\Phi_\theta(\nabla u(\omega)) > 0$$

почти всюду в Ω.

Мы докажем, что в A существует элемент доставляющий минимум функционалу $J(u)$, а именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1.1 *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Если существует хотя бы один элемент $v \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, для которого $J(v) < +\infty$, то существует элемент $\bar{u} \in A$ такой, что*

$$J(\bar{u}) = \inf_{v \in W^{1,\infty}} J(v).$$

Примечание 1.1 *В приложениях рассматриваемая задача имеет более общий вид. А именно, пусть на Ω задана матрица $H : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Будем предполагать, что $H(\omega)$ - конечная измеримая в Ω функция, которая почти всюду удовлетворяет условию*

$$\det(H) - \tilde{t}\Phi_\theta(H) > 0,$$

с некоторым $\tilde{t} \in (0,1)$. Тогда

$$J(u) = \int_\Omega F_1(\omega, \nabla u(\omega))d\omega,$$

где

$$F_1(\omega, \nabla u(\omega)) = F(\nabla u(\omega) H^{-1}(\omega)).$$

Тем самым подинтегральная функция теперь зависит от точки области Ω явным образом. Мы покажем, что Теорема 1.1 справедлива и в расширенном варианте.

2 Определения и внешние результаты

В этом разделе мы собрали все необходимые определения и результаты, которые потребуются в остальной части работы. Некоторые из них совершенно стандартные и могут быть найдены в классических учебниках по функциональному анализу. Остальные также хорошо ивестны. Исключение, пожалуй, составлют теорема Scorza-Dacorogna (теорема 2.4), а также наша формулировка теоремы 2.5 для пространств $W^{1,\infty}$.

Определение 2.1 *Говорят, что последовательность функций* $f_n \in L^\infty$ **-слабо сходится к* $f \in L^\infty$, *и пишут* $f_n \rightharpoonup *f$ *в* L^∞, *если для любой функции* $\varphi \in L^1$ *справедливы предельные соотношения*

$$\int\limits_\Omega f_n \varphi d\omega \to \int\limits_\Omega f \varphi d\omega.$$

Определение 2.2 *Говорят, что последовательность функций* $f_n \in W^{1,\infty}$ **-слабо сходится к* $f \in W^{1,\infty}$, *и пишут* $f_n \rightharpoonup *f$ *в* $W^{1,\infty}$, *если*

$$\begin{cases} f_n \rightharpoonup *f, \ \text{в } L^\infty, \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} \rightharpoonup *\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \ \text{в } L^\infty, \ \ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Теорема 2.1 *[7, 8]*
Пусть последовательность функций $f_n \in L^\infty$ *ограничена в* L^∞, *т.е. существует* K *такое, что для каждой функции* f_n *справедливо неравенство* $\|f_n\|_{L^\infty} < K$. *Тогда из последовательности* f_n *можно выбрать подпоследовательность, которая *-слабо сходится в* L^∞ *к элементу* $f \in L^\infty$.

Следующая теорема интересна сама по себе. В ней утверждается, что функция $\det \nabla u$ непрерывна относительно *-слабой сходимости функций в $W^{1,\infty}$. Более того, возможно указать все такие функции, но нам это не потребуется.

Теорема 2.2 *[9]*
Пусть $f_n \in W^{1,\infty}$ *и* $f_n \rightharpoonup *f$ *в* $W^{1,\infty}$. *Тогда* $\det \nabla f_n \rightharpoonup *\det \nabla f$ *в* L^∞.

Следующая теорема по формулировке подобна предыдущей, но имеет дело с *-слабо сходящимися в L^∞ последовательностями.

Теорема 2.3 *[10]*
Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция, а* $F(u;\Omega) = \int\limits_{\Omega} f(u(\omega))d\omega$*; тогда*

(i) *функционал F непрерывен для любой области Ω по отношению к *-слабой сходимости тогда и только тогда, когда f – аффинная функция;*

(ii) *функционал F полунепрерывен снизу для любой области Ω по отношению к *-слабой сходимости тогда и только тогда, когда f – выпуклая функция.*

Мы будем многократно использовать лемму Мазура в следующей упрощенной форме.

Лемма 2.1 *Пусть $f_n \rightharpoonup f$ в L^2. Существуют выпуклые комбинации g_k вида $\sum\limits_{i=k}^{N(k)} \lambda_i^k f_i$ такие, что $g_k \to f$ (сильно) в L^2.*

При доказательстве расширенного варианта теоремы 1.1 нам также потребуется определение каратеодориевой функции и теорема Scorza-Dacorogna.

Определение 2.3 *[10] Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – открытое множество и $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Говорят, что F каратеодориевая функция, если:*

(1) *$F(\omega, \cdot, \cdot)$ – непрерывная для почти всех ω;*

(2) *$F(\cdot, u, \xi)$ – измеримая для всех (u, ξ).*

Теорема 2.4 *(Scorza-Dacorogna)*
Следующие условия эквивалентны:

(i) *F - каратеодориевая функция;*

(ii) *для любого компакта $K \subset \Omega$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт K_ε, такой, что $\mathrm{meas}(K - K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, и ограничение F на $K_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n}$ является непрерывной функцией.*

В дополнение к уже принятым ограничениям на область Ω, будем предполагать, что для нее справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5 *Для любой функции* $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *будем предполагать справедливость неравества типа Пуанкаре-Стеклова*

$$\|u\|_{W_0^{1,\infty}} \le \|\nabla u\|_{L^\infty}.$$

где под $W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *понимается пространство функций из* $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, *которые принимают нулевые значения на границе* Ω.

Эта теорема безусловно верна для областей с достаточно простой границей. Достаточно, например, если любые две точки области можно соединить ломаной, полностью лежащей в области, причем отношение длины этой ломаной к расстоянию между точками равномерно ограничено [5].

3 Функционал $\tilde{J}(F,\xi)$

Рассмотрим функционал $\tilde{J}(F,\xi)$ вида

$$\tilde{J}(F,\xi) = \int\limits_{\Omega} \tilde{F}(F,\xi)d\omega,$$

где $F \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$, $\xi \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, а подынтегральная функция $\tilde{F}$: $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ задается формулами

$$\tilde{F}(M,m) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m - t\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}, \text{ если } m - t\tilde{\Phi}_\theta(M,m) > 0; \\ +\infty, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

здесь $\tilde{\Phi}_\theta : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}_\theta(M,m) = \theta \left(\frac{\operatorname{tr} M^\top M}{n}\right)^{n/2} + \frac{(1-\theta)}{2}\left(\bar{v} + \frac{m^2}{\bar{v}}\right).$$

Будем говорить, что векторная функция $(F,\xi) \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R})$ принадлежит допустимому множеству $\tilde{A}$, и писать $(F,\xi) \in \tilde{A}$, если $(\xi(\omega) - t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi)) > 0$ почти всюду в Ω.

Мы докажем, что $\tilde{A}$ является выпуклым множеством, $\tilde{F}(F,\xi)$ – выпуклой непрерывной функцией на $\tilde{A}$, а функционал $\tilde{J}(F,\xi)$ полунепрерывен снизу по отношению к *-слабой сходимости в L^∞.

4 Выпуклость $\tilde{A}$.

Утверждение 4.1 *$\tilde{A}$ – выпуклое открытое подмножество в $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R})$.*

Доказательство. Пусть векторные функции (F_1,ξ_1) и (F_2,ξ_2) принадлежат допустимому множеству $\tilde{A}$. Покажем, что любая их выпуклая комбинация вида $\lambda(F_1,\xi_1)+(1-\lambda)(F_2,\xi_2)$ также принадлежит $\tilde{A}$. Для этого заметим, что $\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi)$ – выпуклая функция. Действительно, $\operatorname{tr} F^\top F$ – выпуклая, $x^{n/2}$ – выпуклая и возрастающая для $n\geq 2$, поэтому $\left(\operatorname{tr} F^\top F\right)^{n/2}$ – выпуклая. Следовательно, для векторной функции $\lambda(F_1,\xi_1)+(1-\lambda)(F_2,\xi_2)$ справедливо следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2-t\tilde{\Phi}_\theta(\lambda F_1+(1-\lambda)F_2,\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2)\geq\\
\geq\ &\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2-t(\lambda\tilde{\Phi}_\theta(F_1,\xi_1)+(1-\lambda)\tilde{\Phi}_\theta(F_2,\xi_2))=\\
=\ &\lambda\underbrace{(\xi_1-t\tilde{\Phi}_\theta(F_1,\xi_1))}_{>0}+(1-\lambda)\underbrace{(\xi_2-t\tilde{\Phi}_\theta(F_2,\xi_2))}_{>0}>0,
\end{aligned}
$$

доказывающее утверждение. □

5 Выпуклость $\tilde{F}(M,m)$

Утверждение 5.1 *Функция $\dfrac{\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m}$ является выпуклой на $\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\dfrac{\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m}$

$$
\frac{\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m}=\theta\frac{\left(\dfrac{\operatorname{tr}(M^\top M)}{n}\right)^{n/2}}{m}+\frac{(1-\theta)}{2}\left(\frac{\bar{v}}{m}+\frac{m}{\bar{v}}\right),
$$

представленную в виде двух слагаемых. Второе слагаемое безусловно является выпуклой функцией, поэтому, чтобы доказать выпуклость функции $\dfrac{\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m}$, достаточно доказать выпуклость первого слагаемого $\left(\dfrac{\operatorname{tr}(M^\top M)}{n}\right)^{n/2}/m$. Учитывая, что функция $x^{n/2}$ является выпуклой и возрастающей, досаточно показать, что выпуклой является функция

$g(M,m) = \dfrac{\operatorname{tr} M^\top M}{n(m)^{2/n}}$. Рассмотрим вторые частные производные функции $g(M,m)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial M_{ij}\partial M_{k\ell}} &= \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\frac{2}{nm^{2/n}};\\
\frac{\partial^2 g}{\partial m \partial M_{ij}} &= -\frac{4}{n^2}M_{ij}m^{-\left(\frac{2+n}{n}\right)};\\
\frac{\partial^2 g}{\partial m^2} &= \frac{2(2+n)}{n^3}\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}^2 \cdot m^{-\left(\frac{2+2n}{n}\right)}.
\end{aligned}
$$

Если теперь будет установлено, что матрица, составленная из вторых производных, неотрицательна на выпуклом множестве $\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}_+$, то это будет означать, что $g(M,m)$ – выпуклая функция.

Итак, пусть $\mathcal{H}$ – матрица, составленная из вторых производных. Представим ее в блочном виде:

$$
\mathcal{H} = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{2}{nm^{2/n}}I_n & -\dfrac{4}{n^2}m^{-\left(\frac{2+n}{n}\right)}\vec{M} \\ \hline -\dfrac{4}{n^2}m^{-\left(\frac{2+n}{n}\right)}\vec{M}^\top & \dfrac{2(2+n)}{n^3}\operatorname{tr} M^\top M\left(m^{-\frac{2+2n}{n}}\right) \end{array}\right],
$$

где $\vec{M}$ – вектор, составленный из компонент матрицы M.

Разделим матрицу $\mathcal{H}$ на $\dfrac{2}{nm^{2/n}}$. Это преобразование не изменит инерции матрицы $\mathcal{H}$, которая теперь примет вид

$$
\mathcal{H} = \left[\begin{array}{c|c} I_n & -\dfrac{2}{n}\dfrac{\vec{M}}{m} \\ \hline -\dfrac{2}{n}\dfrac{\vec{M}^\top}{m} & \dfrac{(2+n)}{n^2}\dfrac{\operatorname{tr} M^\top M}{n^2} \end{array}\right].
$$

Определим матрицу S:

$$
S = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline \dfrac{2}{n}\dfrac{\vec{M}^\top}{m} & 1 \end{array}\right].
$$

Поскольку преобразование подобия также не изменяет инерции матрицы, то из положительности

$$
S\mathcal{H}S^\top = \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{\operatorname{tr} M^\top M(n-2)}{m^2} \end{array}\right] \geq 0 \text{ при } n\geq 2,
$$

следует, что и $\mathcal{H} \geq 0$ при $n \geq 2$. Это завершает доказательство требуемого утверждения. $\square$

Утверждение 5.2 *Пусть $\vec{m} \in \mathbb{R}^m$ и $\varphi(\vec{m})$ – выпуклая функция в $\mathbb{R}^m$; тогда $\dfrac{\varphi(\vec{m}}{(1-\varphi(\vec{m}))}$ является выпуклой функцией на подмножестве $\mathbb{R}^m$, для которого $1-\varphi(\vec{m}) > 0$.*

Это утверждение хорошо известно (см., например, [12]).

Утверждение 5.3 *Функция $\tilde{F}(M,m)$ является выпуклой всюду в $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}$.*

Доказательство. Функция $\tilde{F}(M,m)$ может быть записана следующим образом

$$\tilde{F}(M,m) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)\frac{\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m}}{1-t\frac{\tilde{\Phi}_\theta(M,m)}{m}}, & \text{если } m - t\tilde{\Phi}_\theta(M,m) > 0, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, по предыдущему утверждению, $\tilde{F}(M,m)$ является выпуклой на множестве $m-t\tilde{\Phi}_\theta(M,m) > 0$. Если же одна из точек (F_1,m_1), (F_2,m_2) не будет принадлежать этому подмножеству, то будет выполнено следующее очевидное неравенство

$$\tilde{F}(\lambda(F_1,\xi_1) + (1-\lambda)(F_2,\xi_2) \leq +\infty.$$

$\square$

6 Каратеодориевость $\tilde{F}(F,\xi)$

Поскольку $\tilde{\Phi}_\theta(M,m)$ является непрерывной функцией в $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}$, то таковой является и $\tilde{F}(M,m)$. Поэтому для любых измеримых $F(\omega)$, $\xi(\omega)$ функция $\tilde{F}(F(\omega),\xi(\omega))$ будет измеримой, а функционал $\tilde{J}(F,\xi)$ определен.

7 Свойства функций из $\tilde{A}$

Утверждение 7.1 *Предположим, что векторная функция* (F,ξ) *принадлежит допустимому множеству* $\tilde{A}$*; тогда почти всюду в* Ω *выполняются неравенства*

$$\begin{cases} \xi \geq \frac{1}{2}t\dfrac{(1-\theta)}{2}\bar{v}; \\ \xi \leq \dfrac{2\bar{v}^2}{t(1-\theta)}; \\ \left(\dfrac{\operatorname{tr} F^\top F}{n}\right)^{n/2} \leq \dfrac{2\bar{v}}{t^2\theta(1-\theta)}. \end{cases}$$

Иначе говоря, существует такая постоянная K*, зависящая только от констант* $\bar{v}$*,* t*,* θ*, которая ограничивает сверху нормы функций*

$$\|\xi\|_{L^\infty} < K; \quad \|\xi^{-1}\|_{L^\infty} < K; \quad \|F\|_{L^\infty} < K.$$

Доказательство. По определению $(F,\xi) \in \tilde{A}$, если почти всюду

$$\xi - t\left(\theta\left(\frac{\operatorname{tr}(F^\top F)}{n}\right)^{n/2} + \frac{(1-\theta)}{2}\left(\bar{v} + \frac{\xi^2}{\bar{v}}\right)\right) > 0.$$

Каждый член суммы в скобках положительный, поэтому, исключая их, можно получить неравенства вида

$$\xi - t\frac{(1-\theta)}{2}\left(\bar{v} + \frac{\xi^2}{\bar{v}}\right) > 0, \quad \xi - t\theta\left(\frac{\operatorname{tr} F^\top F}{n}\right)^{n/2} > 0.$$

Из первого неравенства следует, что $\xi \geq t\dfrac{(1-\theta)}{2}\bar{v}$ и $\xi \leq \dfrac{2\bar{v}}{t(1-\theta)}$. В тоже время из второго неравенства заключаем, что

$$\left(\frac{\operatorname{tr} F^\top F}{n}\right)^{n/2} < \frac{\xi}{t\theta}$$

и окончательно

$$\left(\frac{\operatorname{tr} F^\top F}{n}\right)^{n/2} < \frac{\bar{v}}{t^2\theta(1-\theta)}.$$

□

Рассмотрим последовательность векторных функций (F_n, ξ_n), каждая из которых принадлежит допустимому множеству $\tilde{A}$. Предположим, что на некотором подмножестве $\mathcal{S}$ множества Ω значения функции $\xi - t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi)$ равномерно на $\mathcal{S}$ сходятся к 0. Тогда из доказанного следует, что значения функции $\tilde{F}(F,\xi)$ равномерно стремятся к бесконечности на $\mathcal{S}$. Действительно, по утверждению 7.1 $\|\xi_n\| > 1/K$ почти всюду в Ω. Следовательно, начиная с некоторого n, $t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi) > t/(2K)$ почти всюду в $\mathcal{S}$, а это доказывает утверждение.

8 *-слабая полунепрерывность снизу $\tilde{J}(F,\xi)$

Мы собираемся доказать, что для любой *-слабо сходящейся последовательности векторных функций $(F_n, \xi_n) \in \tilde{A}$, $(F_n, \xi_n) \rightharpoonup *(F,\xi)$, для которой существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{J}(F_n, \xi_n)$, справедливо неравенство

$$\tilde{J}(F,\xi) \le \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(F_n, \xi_n).$$

Иначе говоря, функционал $\tilde{J}(F,\xi)$ *-слабо полунепрерывен снизу.

Во-первых, мы докажем, что предельная функция (F,ξ) принадлежит допустимому множеству $\tilde{A}$, что по определению означает справедливость строго неравенства $(\xi - t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi)) > 0$ почти всюду в Ω.

Докажем нестрогое неравенство

$$(\xi - t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi)) \ge 0.$$

Для этого воспользуемся тем, что из *-слабой сходимости $(F_n, \xi_n) \rightharpoonup *(F,\xi)$ в L_∞ следует, что $(F_n, \xi_n) \rightharpoonup (F,\xi)$ в L_2. По лемме Мазура, существует такая подпоследовательность и такие выпуклые комбинации элементов этой подпоследовательности, что

$$\sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i) \to (F,\xi) \quad \text{сильно в} \quad L_2.$$

Выбирая подпоследовательность в $\sum\limits_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i)$, можно говорить о поточечной сходимости подпоследовательности к (F,ξ). Поскольку $\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi)$ выпукла и непрерывна на выпуклом $\tilde{A}$, то почти всюду

$$\xi - \tilde{\Phi}_\theta(F,\xi) \quad = \quad \lim_{\nu\to\infty} \left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu \xi_i - t\tilde{\Phi}_\theta \left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i) \right) \right) \ge$$

$$\geq \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)}\lambda_i^\nu\xi_i - t\sum_{i=\nu}^{N(\nu)}\lambda_i^\nu\tilde{\Phi}_\theta(F_i,\xi_i)\right) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)}\lambda_i^\nu\underbrace{(\xi_i - t\tilde{\Phi}_\theta(F_i,\xi_i))}_{>0}\right) \geq 0,$$

и нестрогое неравенство доказано. Теперь докажем, что если $S = \{\omega \in \Omega : \xi - t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi) = 0\}$, то $\mathrm{meas}S = 0$. Действительно, предположим, что $\mathrm{meas}S \neq 0$. Тогда

$$\int\limits_S (\xi - t\tilde{\Phi}_\theta(F,\xi))dw = 0.$$

Определим функционал $I(F,\xi)$:

$$I(F,\xi) = \int\limits_S (\xi - t\Phi_\theta(F,\xi))d\omega.$$

Поскольку ξ – аффинная функция, а $\Phi_\theta(F,\xi)$ – выпуклая непрерывная функция, то $I(F,\xi)$ *-слабо полунепрерывен сверху (см. теорему 2.3), а, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} I(F_n,\xi_n) \leq I(F,\xi),$$

всякий раз когда $(F_n,\xi_n) \rightharpoonup *(F,\xi)$. Последнее означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_S (\xi_n - t\tilde{\Phi}_\theta(F_n,\xi_n))d\omega = 0,$$

а последовательность функций $\xi_n - t\tilde{\Phi}_\theta(F_n,\xi_n)$ сильно сходится в L_1 к 0, или, для некоторой подпоследовательности, поточечно почти всюду в S. По доказанному в предыдущем разделе $\tilde{F}(F_n,\xi_n)|_S \to +\infty$ почти всюду, а, следовательно,

$$\lim_{N_0\to+\infty}\int\limits_S \inf_{n>N_0}\tilde{F}(F_n,\xi_n)d\omega \leq$$

по лемме Фату

$$\leq \lim_{N_0\to+\infty}\inf_{n>N_0}\int\limits_S \tilde{F}(F_n,\xi_n)d\omega \leq$$

так как $S \subset \Omega$

$$\leq \lim_{N_0 \to +\infty} \inf_{n > N_0} \tilde{J}(F_n, \xi_n).$$

Таким образом, если meas$S > 0$, то $+\infty \leq \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{J}(F_n, \xi_n)$, а это противоречит конечности предела в правой части неравенства. Тем самым установлено, что предельная векторная функция (F, ξ) принадлежит допустимому $\tilde{A}$.

Чтобы закончить доказательство *-слабой полунепрерывности функционала $\tilde{J}(F, \xi)$, будем использовать выпуклость $\tilde{F}(F, \xi)$ на $\tilde{A}$. Действительно, пусть $\sum\limits_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i)$ – такие выпуклые комбинации, которые сходятся сильно в L_2 (по лемме Мазура) и поточечно почти всюду к (F, ξ). Тогда, в силу непрерывности $\tilde{F}(F, \xi)$ на $\tilde{A}$,

$$\tilde{F}(F, \xi) = \lim_{n\to\infty} \tilde{F}\left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i)\right).$$

Запишем

$$\int\limits_\Omega \tilde{F}(F, \xi) d\omega = \int\limits_\Omega \left(\lim_{k\to\infty} \inf_{\nu > k} \tilde{F}\left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i)\right)\right) d\omega \leq$$

причем первое равенство справедливо в силу поточечной сходимости почти всюду последовательности $\sum\limits_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i)$, а неравенство

$$\leq \lim_{k\to\infty} \inf_{\nu > k} \int\limits_\Omega \tilde{F}\left(\sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu (F_i, \xi_i)\right) d\omega \leq$$

верно в силу леммы Фату

$$\leq \lim_{k\to\infty} \inf_{\nu > k} \sum_{i=\nu}^{N(\nu)} \lambda_i^\nu \int\limits_\Omega \tilde{F}(F_i, \xi_i) d\omega =$$

где использовалась выпуклость $\tilde{F}$ на $\tilde{A}$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \tilde{F}(F_k, \xi_k) d\omega = \lim_{k\to\infty} \tilde{J}(F_k, \xi_k).$$

Утверждение доказано.

9 Теорема существования

Докажем, что функционал $J(u)$, введенный нами ранее, коэрцитивен.

Теорема 9.1 *Для функционала $J(u)$ справедлива оценка*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{J(u)}{\|u\|_{W^{1,\infty}}} > c > 0.$$

Доказательство. Пусть v – произвольная функция из $W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, принимающая на границе Ω заданные значения $v|_{\partial\Omega} = u_0$. Тогда каждая функция $u \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, принимающая те же значения на границе может быть представлена в виде $u = v + \phi$, где $\phi \in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Используя это представление, запишем

$$J(u) = J(v+\phi) > c_1(\|\nabla v\|_{L^\infty} + \|\nabla\phi\|_{L^\infty}) >$$
$$c(\|v\|_{W^{1,\infty}} + \|\phi\|_{W^{1,\infty}}) > c\|u\|_{W^{1,\infty}}.$$

□

Рассмотрим последовательность u_n, которая минимизирует функционал $J(u)$, т.е. такую, что

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in W^{1,\infty}} J(u) < +\infty.$$

Поскольку $J(u)$ коэрцитивен, то последовательность u_n равномерно ограничена по норме $W^{1,\infty}$

$$\|u_n\|_{W^{1,\infty}} \le K.$$

Из этой последовательности выберем *-слабо сходящуюся подпоследовательность $u_n \rightharpoonup *\bar{u}$ в $W^{1,\infty}$, что возможно по теореме 2.1. Так как $\det\nabla u$ является непрерывной функцией относительно *-слабой сходимости в $W^{1,\infty}$, то из сходимости $u_n \rightharpoonup *\bar{u}$ в $W^{1,\infty}$ следует сходимость $\nabla u_n \times \det\nabla u_n \rightharpoonup *\nabla\bar{u} \times \det\nabla\bar{u}$ в L^∞ (см. теорему 2.2). Для каждого u_n фукционал $J(u_n)$ ограничен, то есть $J(u_n) < +\infty$. Следовательно, $u_n \in A$, а $\nabla u_n \times \det\nabla u_n \in \tilde{A}$. Кроме того функционал $\tilde{J}(F,\xi)$ *-слабо полунепрерывен снизу, поэтому

$$\tilde{J}(\nabla\bar{u}, \det\nabla\bar{u}) \le \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(\nabla u_n, \det\nabla u_n).$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$J(\bar{u}) \le \lim_{n\to\infty} J(u_n).$$

Тем самым доказана теорема 1.1.

10 Замечание о функционале общего вида.

В этом разделе мы рассмотрим функционалы вида

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} F_1(\omega, \nabla u(\omega)) d\omega,$$

где

$$F_1(\omega, \nabla u(\omega)) = F(\nabla u(\omega) H^{-1}(\omega)),$$

а измеримая функция $H : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет неравеству

$$\det(H) - \tilde{t}\Phi_\theta(H) > 0,$$

с некоторым $\tilde{t} \in (0, 1)$.

Заметим, что если дополнительно потребовать непрерывности $H(w)$, то доказательство теоремы 1.1 можно повторить без изменений. Однако, если $H(w)$ всего лишь измерима, то необходимо внести уточнения в те места доказательства, где использовалась непрерывность F (это в основном относится к разделу 8). Стандартный способ рассуждений состоит в использовании теоремы 2.4. С ее помощью доказательство выполнения того или иного свойства почти всюду в Ω происходит в два этапа. Во-первых, рассматриваются компактные множества, на которых $H(w)$ непрерывна. Для таких компактов рассуждение полностью совпадает с рассуждениями для частного случая теоремы. Закончить доказательство позволяет, то, что такие компакты можно выбрать сколь угодно близкими к Ω. Таким образом, расширенный вариант теоремы также справедлив.

11 Минимальная регулярность решений и эффект Лаврентьева.

Рассмотрим произвольную функцию $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Предположим, что значение функционала на этой функции конечно. По определению, это возможно только в том случае, когда функция u принадлежит допустимому множеству A. Мы знаем, что любая функция в A обладает ограниченными в $L^\infty(\Omega)$ обобщенными частными производными (см. утверждение 7.1). Мы также предполагали ранее, что область Ω такова, что для функций из $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ справедливо неравенство Пуанкаре-Стеклова. Поэтому всякая функция u, на которой функционал приобретает конечное значение, принадлежит $W^{1,\infty}(\Omega)$ и более того ограничена по норме в $W^{1,\infty}(\Omega)$. Это гарантирует отсутствие для функционала $J(u)$ эффекта Лаврентьева, когда при минимизации на различных функциональных пространствах минимумы функционала различны.

12 Произвольное квазиизометричное отображение как абсолютный минимум функционала

Покажем, что функция $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$F(M) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)\Phi_\theta(M)}{\det M - t\Phi_\theta(M)}, & \text{если } \det M - t\Phi_\theta(M) > 0; \\ +\infty, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

достигает своего минимума на матрицах, которые отличаются от единичной на ненулевой множитель. Вообще говоря, минимум достигается на ортогональных матрицах, но единичная матрица также является ортогональной. Для этого запишем F в виде

$$F(M) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)\dfrac{\Phi_\theta(M)}{\det M}}{1 - t\dfrac{\Phi_\theta(M)}{\det M}}, & \text{если } \det M - t\Phi_\theta(M) > 0; \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что функция $\dfrac{\Phi_\theta(M)}{\det M}$ достигает минимума на матрицах вида $M = \lambda I$. Действительно, эта функция состоит из двух слагаемых:

$$\frac{\tilde{\Phi}_\theta(M, \det M)}{\det M} = \theta \frac{\left(\dfrac{\operatorname{tr}(M^\top M)}{n}\right)^{n/2}}{\det M} + \frac{(1-\theta)}{2}\left(\frac{\bar{v}}{\det M} + \frac{\det M}{\bar{v}}\right).$$

Рассмотрим каждое из слагаемых раздельно. Первое слагаемое минимально для матриц, у которых все сингулярные числа равны, так как его числитель и знаменатель представляют собой отношение среднего арифметического к среднему геометрическому квадратов сингулярных чисел матрицы M. Заметим также, что значение этого слагаемого неизменно для всех матриц M вида λI.

Анализ второго слагаемого показывает, что функция $\frac{1}{2}(1-\theta)\left(\frac{\bar{v}}{\det M} + \frac{\det M}{\bar{v}}\right)$ достигает своего минимума, равного 1, на отображении $\bar{v}I$.

Пусть теперь задано произвольное квазиизометричное отображение ϕ. Если H - это градиент ϕ, то есть $\nabla\phi(w) = H(w)$, то и H, и H^{-1} принадлежат L^{∞}. Для любой квазиизометричной функции можно так подобрать параметры t, θ и $\bar{v}$, что будет выполняться

$$\det(H) - t\Phi_{\theta}(H) > 0.$$

Будем искать отображение u, дающее минимум функционалу $J(u) = \int\limits_{\Omega} F(\nabla u H^{-1}(w))dw$ и принимающее на границе Ω те же самые значения, что и отображение ϕ. Как следует из предыдущих рассуждений, само отображение ϕ будет решением данной задачи, если только положить константу $\bar{v}$ в функционале J равной единице. Действительно, в этом случае подынтегральная функция принимает наименьшее возможное значение почти всюду в Ω. Таким образом, доказано, что всякое квазиизометричное отображение является абсолютным минимумом функционала указанного типа.

13 Глобальная обратимость квазиизометричных отображений

В своей работе [6] J.M. Ball доказал следующую теорему: пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ - строго липшицева связная ограниченная открытая область, функция $u \in W^{1,p}(\Omega), p > n$ такова, что $\det\nabla u > 0$ почти всюду, u совпадает на границе Ω с гомеоморфным отображением u_0 на Ω, являющимся непрерывным на $\bar{\Omega}$. Кроме того, справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \|\nabla u^{-1}(x)\|^q \det\nabla u dx < \infty,\ q > n.$$

Если $u_0(\Omega)$ удовлетворяет условию конуса, тогда u – глобальный гомеоморфизм Ω на $u_0(\Omega)$ и обратная функция $x(u)$ принадлежит классу $W^{1,q}(u_0(\Omega))$ Если $u_0(\Omega)$ также является строго липшицевой, то u – глобальный гомеоморфизм $\bar{\Omega}$ на $u_0(\bar{\Omega})$.

Мы здесь только заметим, что это интегральное условие истинно для любой функции, принадлежащей допустимому множеству A. Поэтому такие функции обратимы на Ω, если на границе Ω совпадают со следом некоторого гомеоморфизма, заданного на Ω.

Список литературы

[1] Reshetnyak Y.G., Mappings with bounded deformation as extremals of Dirichlet type integrals - Siberian Math. J., 9, 1968, 487-498.

[2] S.K. Godunov, V.M. Gordienko and G.A. Chumakov. Quasi-isometric parametrization of a curvilinear quadrangle and a metric of constant curvature. Siberian Advances in Mathematics. 1995, V.5, N.2, P.1-20.

[3] В.А. Гаранжа. Барьерный метод построения квази-изометричных сеток. ЖВМ и МФ, Т.40, N.11, 2000

[4] J.M. Ball. Singularities and computation of minimizers for variational problems, 1999. Preprint of Math. Institute of Univ. of Oxford.

[5] В.Н. Коновалов. Критерий продолжения пространств Соболева $w^(r)_\infty$ из ограниченных плоских областей. ДАН СССР, 1961, Т.141, N.2, С.308-311.

[6] J.M. Ball. "Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter", Proc. Royal Soc. of Edinburgh, 88A, 315-328,1981

[7] Yosida, K. "Functional Analysis". Springer, Berlin, 1966.

[8] B. Dacorogna, "Direct Methods in the Calculs of Variations", 1989.

[9] J.M. Ball, "Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity", Arch. Rat. Mech. Anal., 63 (1977), 337–403.

[10] Б. Дакоронья, "Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу нелинейных функционалов", УМН, т.44, вып.4 (1989).

[11] Ciarlet, P.G., Mathematical Elasticity, Vol.1: Three Dimensional Elasticity, Studies in Mathematical Applications, vol.20, Elsevier: New York, 1998.

[12] Rockafellar, R.T. "Convex Analysis". Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.