Алгоритм построения двухмерной расчетной сетки для решения задач газовой динамики в решетках турбомашин

А.А. Степанов, Р.Ю. Старков
ОАО «НПО «САТУРН»
Россия, 152903, Ярославская обл., Рыбинск, пр. Ленина, 163
E-mail: stepanov_@supermail.ru

В последние годы при проектировании современных газотурбинных двигателей все более широкое применение находят методы численного моделирования задач гидроаэродинамики. Большинство этих методов основано на решении дифференциальных уравнений на конечно-разностных структурированных и неструктурированных сетках.

В данной работе представлен алгоритм построения расчетной сетки для решения задач газовой динамики с использованием программы TurboBlade2D, разработанной в ОАО «НПО «САТУРН» для численного моделирования течения газа в межлопаточных каналах турбомашин. Программа TurboBlade2D основана на решении двухмерных нестационарных уравнениях Навье-Стокса на криволинейной структурированной сетке типа «О-Н».

Построение сетки типа «О»

Построение сетки типа «О» необходимо для того, чтобы, существенно не изменяя количество сеточных узлов расчетной области, более качественно описать области, непосредственно примыкающие к физическим границам обтекаемых тел (рисунок 1).

При этом размер ячейки непосредственно примыкающей к границе может быть сколь угодно малым, что позволяет получать более детальные решения исследуемых задач на расчетной сетке. Однако следует помнить, что чрезмерное уменьшение высоты ячейки около профиля может привести к ухудшению качества сетки по параметру Aspect (максимальное отношение двух прилежащих сторон ячейки), и его значение более 600 – 1200 может существенно повлиять на решение или вообще привести к невозможности расчета на данной сетке, в зависимости от характеристик численной схемы.

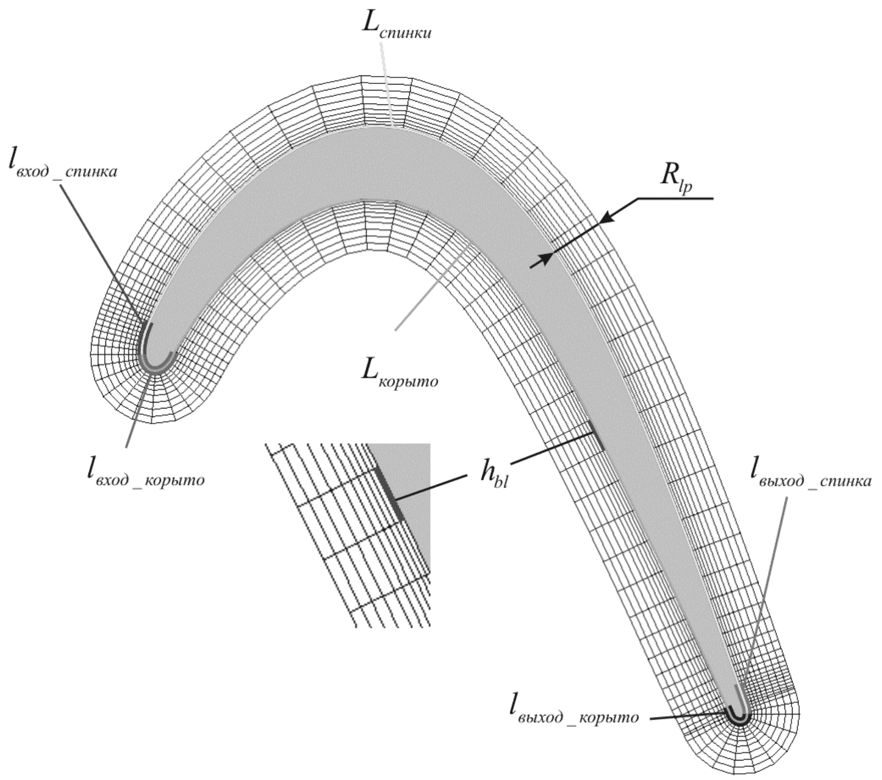

Рисунок 1. Сетка типа «О» и геометрическое представление параметров сгущения необходимых для ее построения.

При построении сетки типа «О» обычно пользуются следующими правилами:

- сеточные линии должны выходит из профиля по нормали;
- размеры ячеек должны быть соизмеримы между собой;
- не должно быть очень больших ячеек на внешней границе сетки «О»;
- сеточные линии не должны пересекаться.

Для построения сеток «О» вокруг лопаток турбомашин используется следующий алгоритм.

Пусть есть некоторый профиль пера лопатки, вокруг которого необходимо построить сетку типа «О».

Найдем на нем крайние точки по координате x (ось двигателя). По этим точкам произведем разделение лопатки на спинку и корыто. Для этого необходимо дополнительно создать файлы дополнительной нумерации, в которых порядковому номеру координаты профиля на спинке или корыте, будет соответствовать номер координаты считанного профиля.

Далее процесс построения сетки «О» для спинки и корыта можно разделить на два одинаковых.

Точки на профиле соединяем прямыми отрезками и вычисляем безразмерные длины дуг для всех точек профиля от координаты входной кромки до выходной.

Затем задаем ширину ячеек на входной и выходной кромках и строим узлы равномерно вдоль профиля в областях, отмеченных на рисунке 1 утолщенной линией (входная и выходная кромки).

Для построения ячеек в остальной области спинки (корыта) делим ее на три части с одинаковым количеством ячеек. Принимаем, в первой части ширина ячейки возрастает по степенному закону от величины на входной кромке до максимальной (задается параметром), во второй – постоянная максимальная ширина ячеек, в третьем – ширина ячейки убывает по степенному закону, от максимальной до величины на выходной кромке.

После того как на физической границе найдены все узлы, строятся перпендикуляры к поверхности по формулам

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + H_j \frac{\left(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}\right)}{\sqrt{\left(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}\right)^2 + \left(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}\right)^2}},$$

$$x_{i,j} = x_{i,j-1} + H_j \frac{\left(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}\right)}{\sqrt{\left(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}\right)^2 + \left(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}\right)^2}},$$

где H_j – высота j-ой ячейки.

Высота H_j определяется следующим образом: высота первой трети ячеек, считая от физической границы, возрастает по степенному закону, высота оставшихся ячеек постоянна и равна высоте последней ячейки из первой трети. Это позволяет удовлетворить требованиям к размерам ячеек для сетки «О».

После построения сетки типа «О» для корыта, ее координаты переносятся в направлении y на величину шага решетки турбомашины, вследствие чего получается расчетная область межлопаточного канала.

Построение сетки типа «Н»

При построении сетки типа «Н» необходимо задать координаты узлов на границе.

В начале передаются координаты, полученные при построении сетки «О» (координаты узлов на спинке и корыте), затем строятся входной и выходной участки.

Величина длины первой ячейки задается равной одной десятой от минимальной высоты первой или последней ячейки спинки (корыта).

Половина узлов, считая от лопатки, на каждом из участков строится по экспоненциальному закону, другая половина – равномерное распределение сеточных узлов.

Показатель степени находится исходя из известной длины входного (выходного) участка.

По координате y сгущение производится следующим образом. Для того чтобы при задании в файле параметров построения сетки отрицательная величина соответствовала разрежению, положительная – сгущению сеточных узлов к границам, ноль – равномерной сетке, заданный управляющий параметр сгущения пересчитывается по формуле

$$h_{YH} = 1.0 + \frac{2.0}{\pi} arctg\left(0.1 h_{YH}\right).$$

Далее в первой четверти ячеек N их высота определяется как

$$b1 = Высота\_первой\_ячейки \cdot e^{j \cdot x},$$

где

$$x = \frac{\ln\left(\dfrac{Step \cdot h_{YH}}{Jh \cdot Высота\_первой\_ячейки}\right)}{N},$$

Jh – количество ячеек сетки «Н» по высоте.

в следующей половине ячеек их высота равна

$$b2 = Высота\_первой\_ячейки \cdot e^{N \cdot x},$$

в последней четверти

$$b3 = Высота\_первой\_ячейки \cdot e^{(4N-j) x}.$$

Из условия

$$\sum_{i=1}^{N} b1 + \sum_{i=N+1}^{3N} b2 + \sum_{i=2N+1}^{4N} b3 = \textit{Шаг решетки}$$

находится Высота первой ячейки, и строятся сеточные узлы.

После того, как граничные тачки построены, остальные находятся обычной линейной экстраполяцией

$$a = \frac{y_{0,j} - y_{0,0}}{y_{0,Jh} - y_{0,0}}, \quad y_{i,j} = y_{i,0} + a\left(y_{i,Jh} - y_{i,0}\right),$$

$$x_{i,j} = x_{i,0} + a\left(x_{i,Jh} - x_{i,0}\right).$$

Это будет необходимое первое распределение координат x,y на нулевом шаге. Далее для построения сетки «Н» используются решения дифференциальных уравнений Лапласа

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0,$$

в переменных x,y уравнения примут вид

$$L(x) = \alpha\ x_{\xi\xi} - 2\beta\ x_{\xi\eta} + \gamma\ x_{\eta\eta} = 0,$$

$$L(y) = \alpha\ y_{\xi\xi} - 2\beta\ y_{\xi\eta} + \gamma\ y_{\eta\eta} = 0.$$

Для решения данной системы уравнений используется аппроксимацию производных по центральным разностям. Тогда в дискретном виде задача будет выглядеть следующим образом

первые производные (шаг в расчетной области i,j равен единице)

$$x_{\xi\, i,j} = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2}, \quad y_{\xi\, i,j} = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2},$$

$$x_{\eta\, i,j} = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2}, \quad y_{\eta\, i,j} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2},$$

тогда $\alpha_{i,j} = x_{\xi\, i,j}^2 + y_{\xi\, i,j}^2$, $\beta_{i,j} = x_{\xi\, i,j} y_{\xi\, i,j} + x_{\eta\, i,j} y_{\eta\, i,j}$,

$\gamma_{i,j} = x_{\eta\, i,j}^2 + y_{\eta\, i,j}^2$,

вторые производные

$$x_{\xi\xi_{i,j}} = x_{i-1,j} - 2x_{i,j} + x_{i+1,j}, \quad y_{\xi\xi_{i,j}} = y_{i-1,j} - 2y_{i,j} + y_{i+1,j},$$

$$x_{\eta\eta_{i,j}} = x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}, \quad y_{\eta\eta_{i,j}} = y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1},$$

$$x_{\xi\eta_{i,j}} = \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}}{4},$$

$$y_{\xi\eta_{i,j}} = \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}}{4},$$

тогда

$$L(x)_{i,j} = \alpha_{i,j} x_{\xi\xi} - 2\beta_{i,j} x_{\xi\eta_{i,j}} + \gamma_{i,j} x_{\eta\eta_{i,j}},$$

$$L(y)_{i,j} = \alpha_{i,j} y_{\xi\xi_{i,j}} - 2\beta_{i,j} y_{\xi\eta_{i,j}} + \gamma_{i,j} y_{\eta\eta_{i,j}}.$$

Если известно некоторое распределение координат x,y на n-шаге, то на следующем это распределение найдется как

$$x_{ij}^{n+1} = x_{ij}^{n} + \tau \frac{(L(x))_{ij}}{2(\alpha)_{ij} + 2(\gamma)_{ij}}, \tag{*}$$

$$y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^{n} + \tau \frac{(L(y))_{ij}}{2(\alpha)_{ij} + 2(\gamma)_{ij}}.$$

Шаг по времени τ должен быть в пределах от 0 до 1, иначе разностная схема будет расходиться, обычно его принимают равным 0.9 [1].

На нулевом шаге распределение координат x,y необходимо задать. Для этого используется обычная линейная интерполяция (33).

После того как сетка «Н» построена, формируется сетка типа «О-Н» совмещением соответственно сеток «О» и «Н». Сетка «О-Н», полученная с использованием решения уравнений Лапласа представлена на рисунке 2.

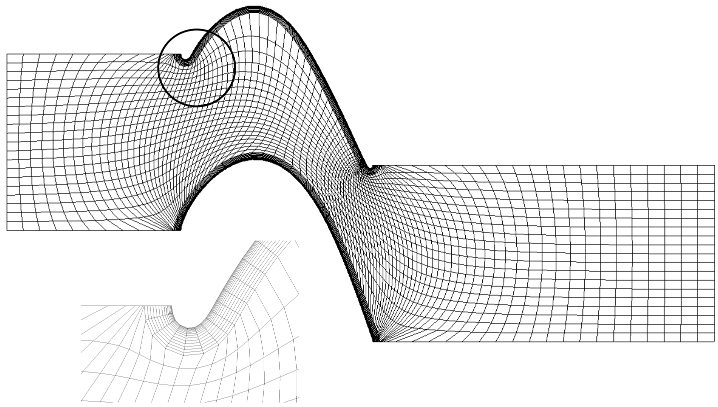

Рисунок 2. Расчетная сетка «О-Н», полученная с использованием уравнений Лапласа.

При использовании модифицированных уравнений Пуассона

$$\alpha\ x_{\xi\xi} - 2\beta\ x_{\xi\eta} + \gamma\ x_{\eta\eta} = a\ x_{\xi} + b\ x_{\eta},$$

$$\alpha\ y_{\xi\xi} - 2\beta\ y_{\xi\eta} + \gamma\ y_{\eta\eta} = a\ y_{\xi} + b\ y_{\eta},$$

решение задачи ищется по тем же итерационным формулам (*), что и при решении уравнений Лапласа, только используется система

$$L(x)_{i,j} = \alpha_{i,j} x_{\xi\xi\,i,j} - 2\beta_{i,j} x_{\xi\eta\,i,j} + \gamma_{i,j} x_{\eta\eta\,i,j} - a_{i,j} x_{\xi\,i,j} - b_{i,j} x_{\eta\,i,j},$$

$$L(y)_{i,j} = \alpha_{i,j} y_{\xi\xi\,i,j} - 2\beta_{i,j} y_{\xi\eta\,i,j} + \gamma_{i,j} y_{\eta\eta\,i,j} - a_{i,j} y_{\xi\,i,j} - b_{i,j} y_{\eta\,i,j}.$$

где

$$\alpha_{i,j} = x^2_{\xi\,i,j} + y^2_{\xi\,i,j}, \quad \beta_{i,j} = x_{\xi\,i,j} x_{\eta\,i,j} + y_{\xi\,i,j} y_{\eta\,i,j},$$

$$\gamma_{i,j} = x^2_{\eta\,i,j} + y^2_{\eta\,i,j},$$

$$a_{i,j}=\frac{\alpha_{i,j}\varphi_{\xi\xi_{i,j}}-2\beta_{i,j}\varphi_{\xi\eta_{i,j}}+\gamma_{i,j}\varphi_{\eta\eta_{i,j}}}{\varphi_{\xi_{i,j}}\psi_{\eta_{i,j}}-\varphi_{\eta_{i,j}}\psi_{\xi_{i,j}}}\psi_{\eta_{i,j}}-\frac{\alpha_{i,j}\psi_{\xi\xi_{i,j}}-2\beta_{i,j}\psi_{\xi\eta_{i,j}}+\gamma_{i,j}\psi_{\eta\eta_{i,j}}}{\varphi_{\xi_{i,j}}\psi_{\eta_{i,j}}-\varphi_{\eta_{i,j}}\psi_{\xi_{i,j}}}\varphi_{\eta_{i,j}},$$

$$b_{i,j}=\frac{\alpha_{i,j}\psi_{\xi\xi_{i,j}}-2\beta_{i,j}\psi_{\xi\eta_{i,j}}+\gamma_{i,j}\psi_{\eta\eta_{i,j}}}{\varphi_{\xi_{i,j}}\psi_{\eta_{i,j}}-\varphi_{\eta_{i,j}}\psi_{\xi_{i,j}}}\varphi_{\xi_{i,j}}-\frac{\alpha_{i,j}\varphi_{\xi\xi_{i,j}}-2\beta_{i,j}\varphi_{\xi\eta_{i,j}}+\gamma_{i,j}\varphi_{\eta\eta_{i,j}}}{\varphi_{\xi_{i,j}}\psi_{\eta_{i,j}}-\varphi_{\eta_{i,j}}\psi_{\xi_{i,j}}}\psi_{\xi_{i,j}}.$$

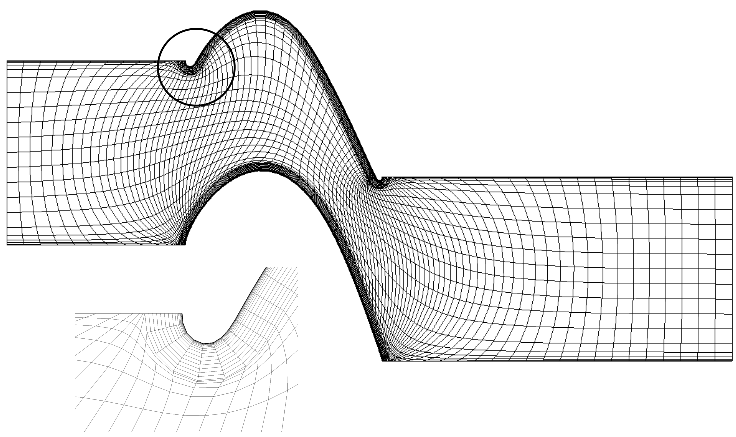

Рисунок 3. Расчетная сетка «О-Н», полученная с использованием уравнений Пуассона.

Границы вспомогательной области φ,ψ формировались так, чтобы сгущение узлов на них соответствовало сгущению узлов на границах физической области x,y (отношение длин соответствующих дуг к длине границы, на которой лежит дуга, для обеих областей одинаковы).

Построение узлов внутри вспомогательной области проводилось с помощью линейной интерполяции (рисунок 4).

$$\varphi_{i,j} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \psi_{i,j} = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

где коэффициенты уравнений прямых, соединяющих соответствующие граничные узлы равны

$$a_1 = \psi_{i,Jd} - \psi_{i,0}, \quad b_1 = -\left(\varphi_{i,Jd} - \varphi_{i,0}\right), \quad c_1 = b_1 \psi_{i,0} - a_1 \varphi_{i,0},$$

$$a_2 = \psi_{Id,j} - \psi_{0,j}, \quad b_2 = -\left(\varphi_{Id,j} - \varphi_{0,j}\right), \quad c_2 = a_2 \varphi_{0,j} - b_2 \psi_{0,j}.$$

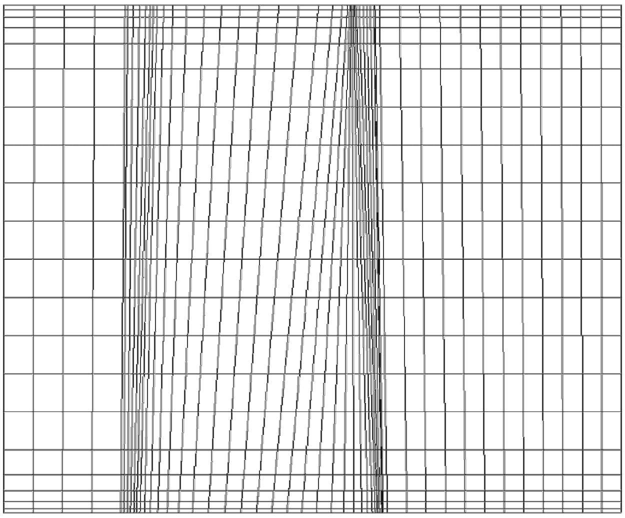

Рисунок 4. Вспомогательная область φ, ψ представляет собой единичный квадрат.

Сравнивая полученные результаты (рисунок 2 и рисунок 3) можно сделать вывод, что расчетная сетка, построенная по уравнениям Пуассона, более пригодна для проведения газодинамического расчета, так как в отличие от сетки, построенной по уравнениям Лапласа, здесь не наблюдается «дыр» (очень больших расчетных ячеек) со стороны области давления.

При таком представлении вида функций $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ и $\psi = \psi(\xi, \eta)$ не выполняется ортогональность сеточных линий сетки «H» к границам расчетной области. В настоящее время ведется работа по разработке алгоритма построения вспомогательной области φ, ψ чтобы расчетная сетка удовлетворяла данному условию.

Список используемых источников

1. Иваненко С.А. Адаптивно-гармонические сетки. М.: Вычислительный центр РАН, 1997, – 182 с.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х томах. М.: Мир,1990, – 728 с.
3. Winslow A.M. (1966) Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in a non-uniform triangle mesh. J. Comput. Phys, Vol.1, No 2/. p. 149 – 172.
4. Годунов С.К., Прокопов Г.П. (1972) Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т.12, №2, с. 429-440.