

# **Анизотропная адаптация трехмерных нерегулярных сеток к особенностям численного решения пространственных задач газовой динамики**

**Владмирова Н.А., Сорокин А.М.**

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е.Жуковского (ЦАГИ), г.Жуковский,  
Россия, e-mail: [vlana@progtech.ru](mailto:vlana@progtech.ru)

Применительно к трехмерным задачам обтекания пространственных тел сложной формы на основе решения уравнений конвекции-диффузии, Эйлера и Навье-Стокса разработана технология построения анизотропной нерегулярной (тетраэдральной) расчетной сетки, адаптивной к особенностям численного решения. Разработанный метод адаптации основан на определении в каждом узле трех направлений адаптации, дроблении ребер, направленных вдоль этих направлений, и на переключении ребер и граней. В качестве индикатора погрешности решения на ребре используется взвешенная сумма первых и вторых производных вдоль направления ребра. Предложенный алгоритм адаптации тетраэдральных сеток проверен на задаче конвекции-диффузии в кубе, которая моделирует трехмерный сдвиговый слой, а также на примере решения уравнений Эйлера для расчета трансзвукового обтекания изолированного крыла.

Для задачи конвекции-диффузии в кубе использовался метод Галеркина с разрывными базисными функциями (DG) высоких порядков ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Проведены сравнения порядков сходимости для равномерной, изотропной и анизотропной трехмерной адаптации. Полученные результаты показывают, что разработанный метод обеспечивает ожидаемый теоретический порядок сходимости.

## **1. Адаптация сетки путем дробления шага вдоль заданных направлений.**

Разработанная схема трехмерной адаптации сеток основана на следующих преобразованиях:

- Адаптация проводится вдоль заданных направлений, определяемых локально в зависимости от поведения монитор-функции.
- Приводится дробление ребер сетки, направленных вдоль линий адаптации.
- Для выстраивания ребер вдоль направления минимального изменения монитор-функции проводится трехмерное переключение ребер. Грани ячеек, направленные вдоль градиента монитор-функции, закрыты для переключения.

В большинстве методов построения адаптивных сеток качество численного решения определяется на основе оценки ошибки на ребрах сетки. Если ячейка выпуклая, достаточно контролировать размер ячейки только вдоль трех направлений. Контролирование плотности узлов сетки является эффективным, если одно из направлений дробления шага сетки совпадает с направлением минимального изменения адаптируемой функции, так как вдоль этой линии узлы могут быть распределены очень редко. Второй и третий ряд направлений – это ряд линий, которые пересекают поверхности уровней и дают возможность

конструировать и модифицировать сами поверхности уровней. Удобно определить второе направление как направление вектора градиента адаптируемой функции. Третье направление выбирется ортогональным двум предыдущим. Направление вдоль линии минимального изменения монитор-функции должно всегда быть представлено в структуре сетки. Это может быть достаточно легко достигнуто с помощью переключения ребер и «укладки» их вдоль этого направления. Другой ряд направлений представлен градиентным направлением. Ребра, которые его представляют, не должны подвергаться процедуре переключения, чтобы это направление не было потеряно для дробления. Таким образом, на каждом шаге дробления сетки размер ячейки контролируется только вдоль направления градиента, направления линии минимального изменения монитор-функции и вдоль направления, ортогонального этим двум.

Основные стадии работы алгоритма адаптации следующие:

- **Сортировка.** Три типа направлений приписываются каждому узлу с анизотропным поведением монитор-функции. Направление минимального изменения монитор-функции, направление максимального изменения и направление, ортогональное этим двум. Все ребра идентифицируются как лежащие вдоль одного из этих направлений, или как неориентированные, т.е. не совпадающие ни с одним из них. Все грани тетраэдральной сетки идентифицируются как коллинеарные двум из определенных выше направлений, или как не коллинеарные к ним.
- **Дробление ребер.** Дроблению подвергаются только ребра, лежащие вдоль одного из направлений адаптации. Индикатор ошибки численного решения на ребре основывается на ошибке линейной интерполяции и представляется взвешенной суммой первой и второй производных

$$\text{монитор-функции} \quad Error(\text{edge } \vec{e}) = w_1 \cdot \left| \frac{du}{d\vec{e}} \right| \cdot |\vec{e}| + w_2 \cdot \left| \frac{d^2u}{d\vec{e}^2} \right| \cdot |\vec{e}|^2, \quad \text{где}$$

вектор  $\vec{e}$  есть направление ребра, а  $u$  – адаптируемая функция. Все производные масштабируются их средним значением по всем ребрам сетки. Если индикатор ошибки решения на ребре, направленном вдоль направлений адаптации, превышает некоторую заданную величину, это ребро дробится. Неориентированные ребра не дробятся.

- **Трехмерное переключение ребер.** Грани/ребра подвергаются переключению, чтобы расположить ребра вдоль направления минимального изменения монитор-функции. Грани, лежащие вдоль направления градиента монитор-функции, закрыты для переключения ребер.
- **Разрежение сетки.** Все узлы идентифицируются как узлы с изотропным и анизотропным поведением монитор-функции. Для узлов с изотропным и анизотропным поведением адаптируемой функции используются различные критерии разрежения. Не всегда возможно провести тетраэдризацию многогранника без вставления дополнительного узла.

- **Построение ребер, направленных вдоль градиента монитор-функции.** Если поведение адаптируемой функции анизотропно в узле, при необходимости строятся градиентно направленные ребра с помощью переключения ребер либо добавления узлов.

Для разработанного метода адаптации необходимо произвести сортировку ребер по направлениям адаптации.

**Определение ребер, направленных вдоль градиента монитор-функции.** Идентификация градиентно направленных ребер проводится путем вычисления вектора градиента в середине ребра и проверке, лежит ли это ребро в некотором интервале вокруг направления вектора градиента адаптируемой функции.

**Определение ребер, направленных вдоль минимального изменения монитор-функции.** Для этого направления не может использоваться изложенный выше подход, так как переключение ребер располагает их вдоль этого направления, и в узел может входить много таких ребер. Поэтому используется другой подход. Для любого ребра АВ рассматривается множество ребер G, входящих в узел А и узел В под углом, лежащим в некотором интервале к ребру АВ.

Считается, что ребро АВ направлено вдоль линии уровня, если выражение  $\min_{edge \in G} |du / d\vec{e}|$  принимает минимальное значение на ребре АВ. Если абсолютные

величины первых производных близки между собой для всех ребер в множестве G, но для вторых производных это не так, как это имеет место в вязких следах, тогда для определения направленности ребра используется выражение  $\min_{edge \in G} |d^2u / d\vec{e}^2|$ .

**Определение ребер, направленных вдоль третьего направления адаптации.** Третье направление определяется как ортогональное первым двум. Для любого ребра  $t$  рассматривается множество ребер  $\{l_i | i=1, \dots, n\}$ , входящих в его узлы и направленных вдоль первых двух направлений адаптации. Если функционал

$F(t) = \sum_{i=1}^n \cos^2(l_i, t)$  принимает минимальное значение вдоль всех ребер,

входящих в узлы ребра  $t$  под некоторым углом, тогда это ребро считается направленным вдоль третьего направления адаптации.

## 2. Трехмерное переключение ребер. Многоуровневое переключение.

Если в двумерном случае любая триангуляция заданного множества узлов может быть получена из триангуляции с помощью двумерного переключения ребер, то в трехмерном случае переключение ребер приводит лишь к достижению локальной оптимизации. Такая ситуация часто имеет место, когда большое число узлов вставляется хаотическим образом, и последующее трехмерное переключение ребер не в состоянии ориентировать ребра вдоль минимального изменения монитор-функции. Чтобы достичь глобального минимума, применялось многоуровневое переключение. Это означает, что узлы добавляются порциями, после каждой порции внедрения новых узлов проводится трехмерное переключение ребер для ориентирования их вдоль линий уровня монитор-функции. В результате

каждая новая порция узлов вставляется в уже ориентированную сеточную структуру. Такая тактика приводит к хорошему выстраиванию ребер вдоль направлений адаптации для сложных сеточных структур.

### **3. Применение анизотропной адаптации к трехмерной задаче конвекции-диффузии.**

Разработанный метод трехмерной анизотропной адаптации был применен к задаче конвекции-диффузии в кубе с решением, подобным криволинейному вязкому следу (сдвиговому слою). Задача решалась методом DG (Discontinuous Galerkin) [1]. Для данной задачи были исследованы порядки сходимости разработанной схемы адаптации для различных значений  $k$  (порядок аппроксимации в трехмерном DG коде) при фиксированном значении коэффициента диффузии  $\mu=1 \cdot 10^{-3}$ . Были построены три последовательности адаптивных сеток для  $k=0, 1, 2$ . На рис. 1 представлена сходимость ошибки в  $L_2$ -норме. На рис. 2 показаны распределение численного решения на границах куба и структура полученных адаптивных сеток, представленная «сколом» граничных тетраэдров. На рис. 3-5 представлены результаты применения разработанной технологии адаптации к численному решению задачи конвекции-диффузии в кубе методом DG ( $k=1$ ) при различных значениях коэффициента диффузии в диапазоне  $\mu=5 \cdot 10^{-5}$ - $5 \cdot 10^{-3}$

### **4. Трехмерная изотропная адаптация.**

Описанная технология адаптации была применена к случаю изотропного дробления шага сетки. Разработанная техника производит вставку узлов на ребра, помеченные для дробления, и затем для поддержания изотропности сетки проводится переключение ребер по критерию Делоне. Представленная техника изотропной адаптации использует следующие шаги:

- Ребро может быть открыто или закрыто для дробления. Грань тетраэдра может быть открыта или закрыта для переключения 2 в 3.
- В начальной изотропной сетке все ребра открыты для дробления, а все грани закрыты для переключения 2-ух тетраэдров в 3.
- Все ребра, открытые для дробления, где уровень ошибки больше некоторой заданной величины, подвергаются дроблению. Если в тетраэдре дробятся 4 или 5 ребер, то дробятся и все его остальные ребра.
- Уровни дробления соседних тетраэдров не должны отличаться более чем на один.
- Все новые ребра закрыты для дробления. «Дети» дробленных ребер открыты для дробления.
- Все «дети» граней, закрытых для переключения совокупности 2-ух тетраэдров в 3, тоже закрыты для переключения 2 в 3. Все грани открыты для переключения 4 в 4.

- Осуществляется ограниченное переключение по критерию Делоне. Оно состоит в переключении 4-х тетраэдров в 4 внутри триангулируемых граней и дает тот же результат, что и двумерное переключение по критерию Делоне на грани, делая триангуляцию на этой грани, близкой к изотропной.
- Если новая грань считается изотропной, то все ее ребра открыты для дробления, а она закрыта для переключения 2 в 3.

#### **5. Изотропная адаптация применительно к трехмерному DG коду для задачи конвекции-диффузии.**

Метод изотропной адаптации объединен с трехмерным DG кодом для задачи конвекции-диффузии. На рис. 6 показана ошибка в  $L_2$ -норме для последовательности адаптивных сеток, полученная с помощью изотропного дробления, для  $k=1, 2$ . Сходимость изотропного дробления шага сетки сравнивается со сходимостью при равномерном дроблении сетки. Рис. 7 показывает распределение численного решения задачи на «сколе» куба (без граничных тетраэдров).

Таким образом, разработанная технология может осуществлять изотропную и анизотропную адаптацию сеток к численному решению.

#### **6. Применение анизотропной адаптации к численному решению трехмерных уравнений Эйлера.**

Рассматриваемая технология адаптации была применена к трехмерным задачам обтекания, моделируемым с помощью решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках [2], и использована для расчета трансзвукового обтекания крыла ONERA M6 при  $M=84$  and  $\alpha=3.06^\circ$ . Было проведено две итерации анизотропной адаптации. В качестве монитор-функции было выбрано число Маха. Использовался индикатор ошибки в виде взвешенной суммы первых и вторых производных монитор-функции.

Рис. 8 демонстрирует исходную (а) и адаптированную (б) сетку на поверхности крыла. На рис. 8 (с) видно, что адаптация на поверхности крыла проводилась вдоль хорды профиля и вдоль передней кромки крыла. На рис. 9 представлено распределение в давления в различных сечениях крыла, полученное из решения задачи обтекания на исходной и адаптивной сетках. Схема адаптации позволила успешно проадаптировать сетку к двум скачкам различной интенсивности, присутствующим в решении.

## ВЫВОДЫ

Разработана трехмерная технология анизотропной адаптации неструктурных тетраэдральных сеток. Схема трехмерной адаптации применена к методу Галеркина с разрывными базисными функциями высокого порядка (DG,  $k=0, 1, 2, \dots$ ) численного решения задачи конвекции-диффузии. Схема адаптации обеспечивает порядок сходимости для трехмерной задачи конвекции-диффузии с численной реализацией в рамках DG метода для базисных полиномов с  $k=0, 1, 2$ . Метод трехмерной адаптации применен к решению трехмерных уравнений Эйлера на неструктурированных сетках и использован в задаче трансзвукового обтекания изолированного крыла.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Галеев, Д.М. “Исследование свойств схемы для аппроксимации законов сохранения с высоким порядком точности”, *Материалы XIII-ой Школы-семинара ЦАГИ «Аэродинамика летательных аппаратов»*, пос. Володарского, Московская обл., Россия, 28 февраля-1 марта 2002 г.
- [2] Sakovich, V.S., “Numerical solution of Euler and Navier-Stokes equations on unstructured grids”, *Proceedings of 6<sup>th</sup> International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, Cross, M., et al. (Editors), Greenwich, UK, July 6-9, 1998, pp. 931-941

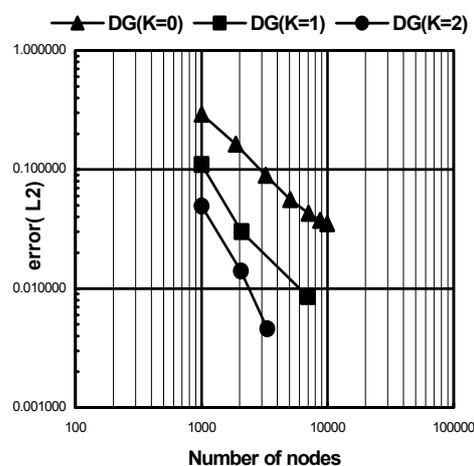
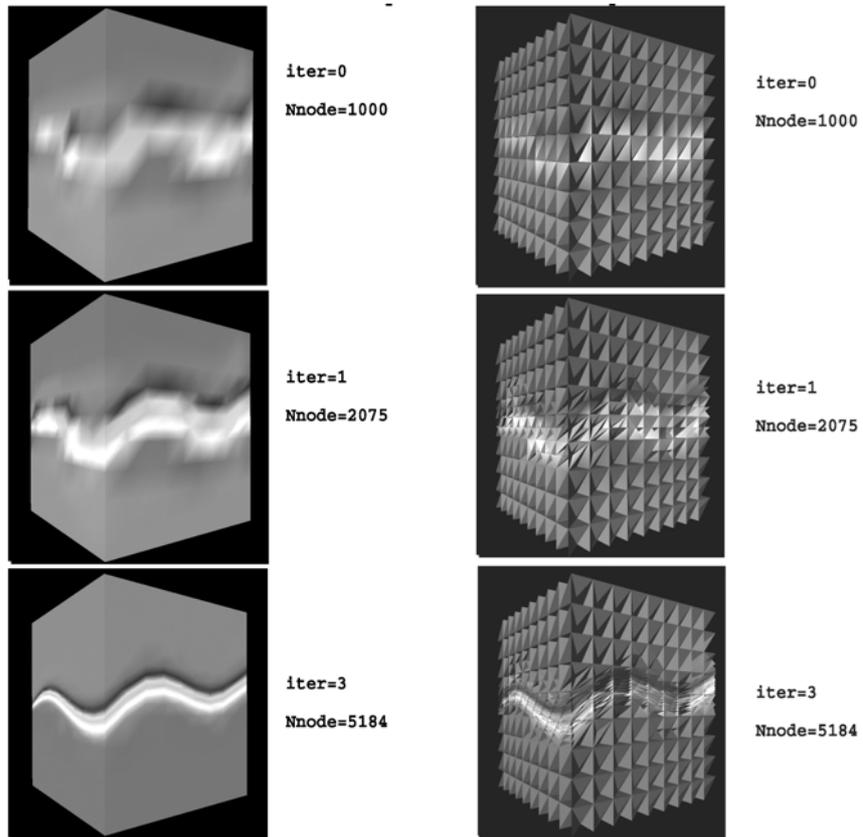


Рис. 1. Адаптация сетки к численному решению DG ( $k=0, 1, 2$ ) трехмерного уравнения конвекции-диффузии с коэффициентом диффузии  $\mu=1 \cdot 10^{-3}$ . Ошибка в  $L_2$ -норме.



Распределение численного решения  
на границе куба

Распределение численного решения  
(вид без граничных тетраэдров)

Рис. 2 Адаптация сетки к численному решению DG ( $k=1$ ) трехмерного уравнения конвекции-диффузии с коэффициентом диффузии  $\mu=1 \cdot 10^{-3}$ .

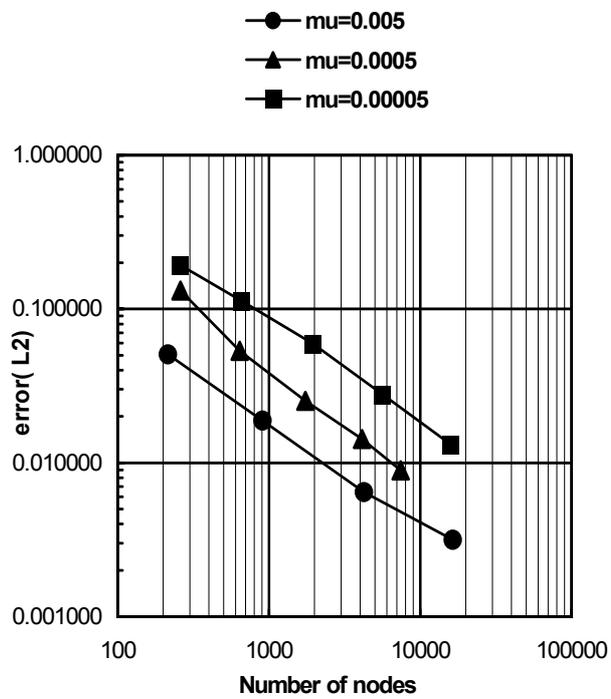


Рис. 3. Адаптация сетки к численному решению DG ( $k=1$ ) трехмерного уравнения конвекции-диффузии с различными коэффициентами диффузии. Ошибка в  $L_2$ -норме. Начальная сетка  $5 \times 5 \times 5$  узлов.

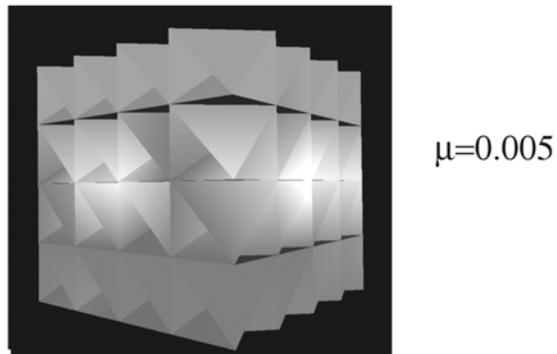
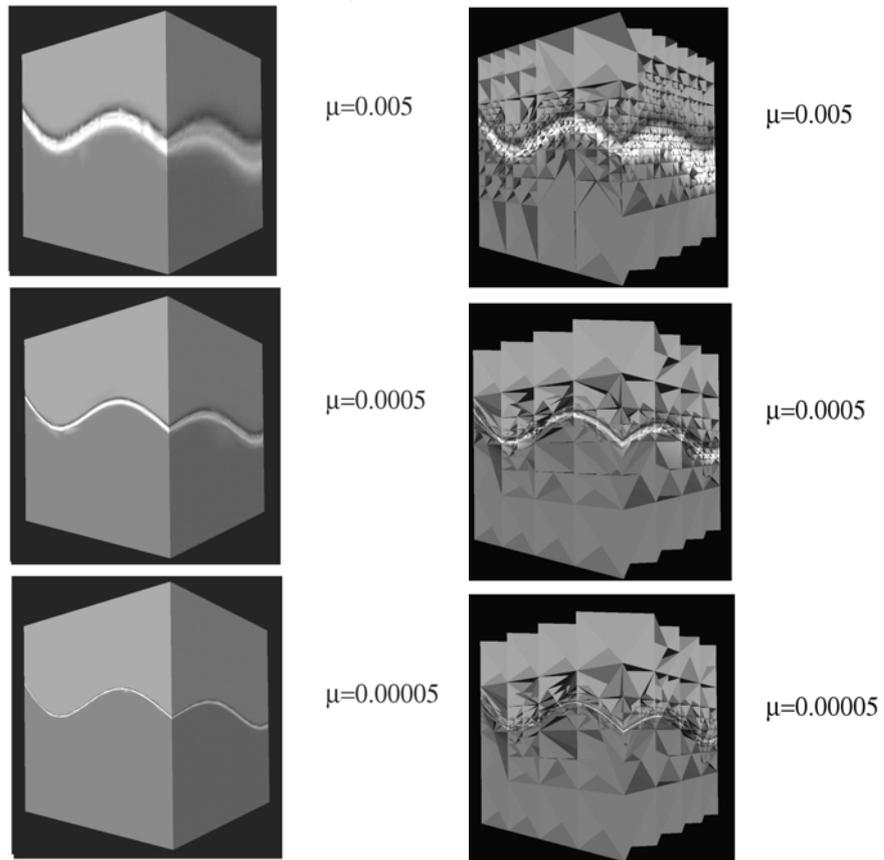


Рис. 4. Распределение численного решения на начальной сетке. Вид без граничных тетраэдров.



Распределение численного решения  
на границе куба

Распределение численного решения  
(вид без граничных тетраэдров)

Рис. 5. Адаптация сетки к численному решению DG ( $k=1$ ) трехмерного уравнения конвекции-диффузии с различными коэффициентами диффузии.

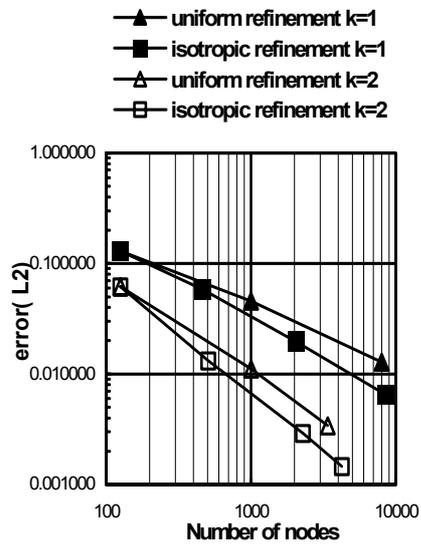


Рис. 6. Изотропная адаптация к численному решению DG ( $k=1, 2$ ) трехмерного уравнения конвекции-диффузии с коэффициентом диффузии  $\mu=5 \cdot 10^{-3}$ . Ошибка в  $L_2$ -норме.

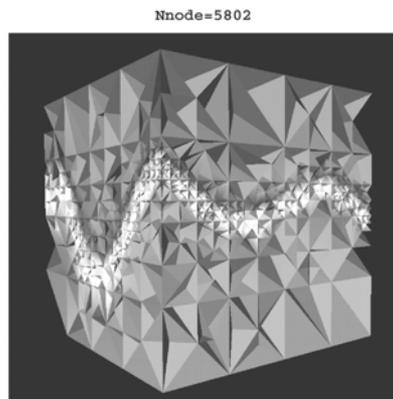
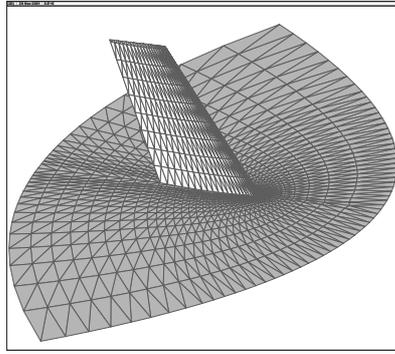
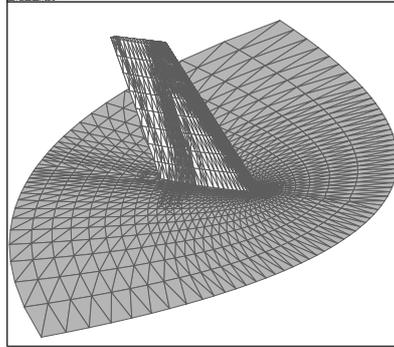


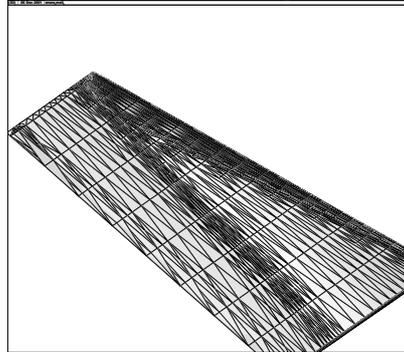
Рис. 7. Изотропная адаптация к численному решению DG ( $k=1, 2$ ) трехмерного уравнения конвекции-диффузии с коэффициентом диффузии  $\mu=5 \cdot 10^{-3}$ . Распределение численного решения (вид без граничных тетраэдров).



а) Начальная сетка, 18448 узлов



б) Адаптивная сетка после 2-ой итерации, 41330 узлов



в) Фрагмент сетки на крыле. Распределение чисел Маха. 41330 узлов.

Рис.8. Адаптивные сетки

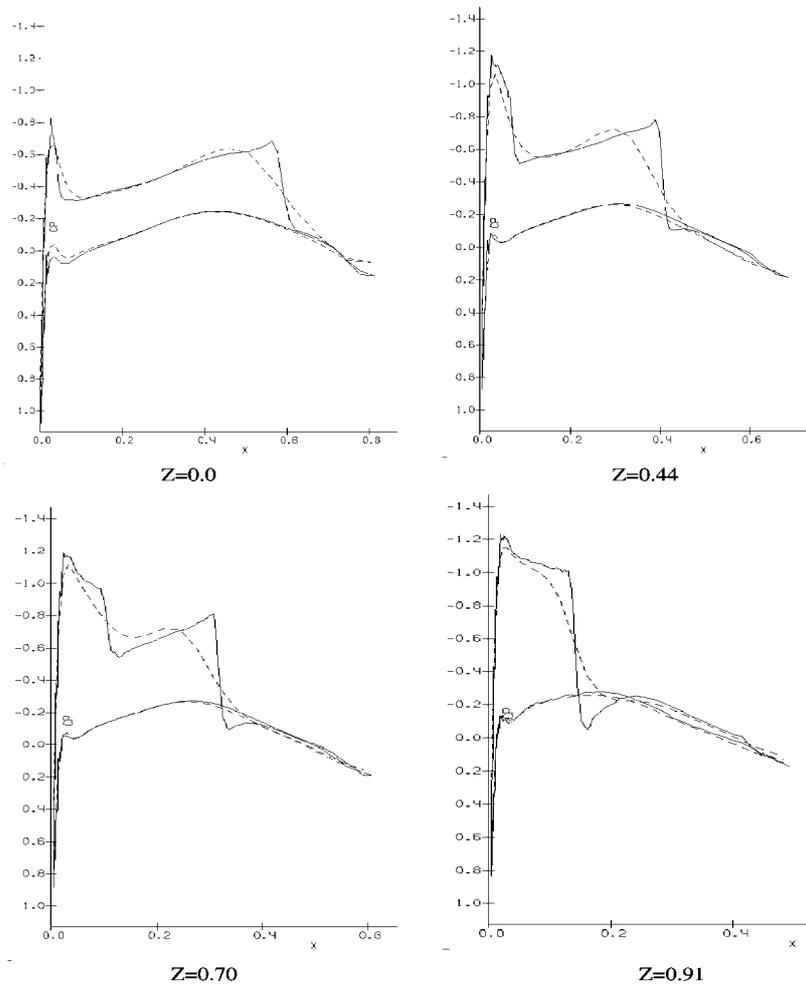
----- начальная сетка,  $N_p=18448$ \_\_\_\_\_ адаптивная сетка,  $N_p=41330$ 

Рис. 9. Распределение давления в сечениях крыла ONERA M6. Решение уравнений Эйлера,  $M=0.84$ ,  $\alpha=3.06^\circ$ .