РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ СЕТКАХ

Ю.Н. Карамзин, И.В. Попов, С.В. Поляков

Институт математического моделирования РАН г. Москва, Россия
125047, Москва, Миусская пл. 4а
e-mail: popov@imamod.ru

Рассматриваются проблемы решения двумерных и трехмерных задач механики сплошной среды с помощью разностных схем на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках. В рамках этой тематики приводятся методы и подходы к построению нерегулярных треугольных и тетраэдральных сеток, а также предлагаются разностные методы решения параболических уравнений на сетках такого типа.

Введение

Данная работа посвящена решению современных задач механики сплошной среды методом конечных разностей [1] на неструктурированных треугольных или тетраэдрадльных сетках [2, 3]. При рассмотрении подобных проблем необходимо решить вопросы построения дискретной математической модели и методов ее численного анализа. При формулировке дискретной модели необходимо прежде всего построить дискретизацию расчетной области. В случае произвольной геометрии расчетной области наиболее гибким и эффективным на наш взгляд способом дискретизации является построение треугольной сетки на плоскости или тетраэдральной сетки в пространстве, описывающей область с необходимой точностью. После дискретизации области проводится дискретизация математической модели, состоящей обычно из системы дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений с дополнительными начальными и граничными условиями. Одним из методов дискретизации математической модели является метод конечных разностей, позволяющий построить разностные аналоги исходных уравнений, решение которых сходится к решению соответствующей непрерывной задачи. После формулировки конечно-разностной модели необходимо определить методы ее численной реализации, то есть определить способы решения соответствующих разностных уравнений. Таким образом, решение конкретной прикладной задачи механики сплошной среды в области произвольной геометрии затрагивает три блока выше перечисленных проблем, которые в общем случае представляют трудную задачу.

В данной работе на примере параболических нестационарных краевых задач по кажому из этих блоков предлагаются новые или усовершенствованные подходы, позволяющие эффективно получать искомое решение. В частности, в работе дается описание нового подхода к дискретизации расчетных областей с помощью неструктурированных треугольных и тетраэдральных сеток. Подход предусматривает построение треугольной (тетраэдральной) сетки для произвольных невыпуклых многосвязных областей на основе принципов дискретной вычислительной геометрии с использованием свойств точек границы. При этом различаются первичная ("грубая") триангуляция, построенная лишь по точкам границы области, и ее измельчения в соответствии с заданными критериями качества итоговой сетки и ее дальнейшей адаптации к искомому решению.

В качестве метода построения разностных схем на треугольных и тетраэдральных сетках предлагается использовать известный интегро-интерполяционный подход [1, 4, 5]. В его рамках строятся схемы, имеющие второй порядок точности независимо от качества сетки. Это достигается за счет использования нестандартных контрольных объемов. Наряду с этим в работе обсуждаются методы решения полученных разностных задач.

1 Дискретизация расчетной области

В данном разделе рассматриваются проблемы, связанные с построением неструктурированной треугольной или тетраэдральной сетки. Для этого введем следующие обозначения. Пусть G_n — произвольная невыпуклая односвязная ограниченная область из пространства R^n, имеющая границу Γ_n ($n = 2, 3$ — размерность пространства). Пусть далее граница Γ_n задана с некоторой точностью с помощью замкнутой кусочно-линейной кривой (кусочно-плоской поверхности) Ψ_n. Опорные узлы кривой (поверхности) объединены в множество точек $\Omega_n = \{ P_i, \ i = 1, ..., N\}$. В двумерном случае множество Ω_n задает набор отрезков, составляющих ломаную Ψ_n. В трехмерном случае с этим множеством связана некторая поверхностная триангуляция $T_M = \{T_m = \Delta(P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m}), \ m = 1, ..., M\}$. При этом в двумерном случае узлы ломаной пронумерованы в направлении против часовой стрелки, а в трехмерном случае вершины треугольников также пронумерованы в направлении против часовой стрелки, если смотреть на треугольник изнутри области.

Используя данные обозначения и соглашения построим треугольную (тетраэдральную) сетку в G_n. Для этого введем следующую классификацию опорных точек из Ω_n.

1.1 Классификация граничных точек

Все точки множества Ω_2 принадлежат к следующим группам (см. рис. 1):

1) точки локальной выпуклости;
2) точки локальной вогнутости;
3) точки перегиба.

В трехмерном случае к перечисленным выше группам добавляются еще две (см. рис. 2):

4) точки нестрогой локальной выпуклости;
5) точки нестрогой локальной вогнутости.

Дадим определения для этих групп. В двумерном случае они выглядят так:

Определение 1. Точка $P_i = (x_i, y_i)$ называется точкой локальной выпуклости, локальной вогнутости, перегиба, если ориентированная площадь треугольника с вершинами в точках P_{i-1}, P_i, P_{i+1} из Ω_n, вычисленная по формуле

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix},$$

соответственно положительна, отрицательна, равна нулю. Несложно показать, что других точек в множестве Ω_2 не существует.

В трехмерном случае определения выглядят несколько иначе. Для их формулировки введем понятие телесного угла, связанного с каждой точкой P_i из Ω_3. С этой целью построим сферу малого радиуса ρ_i с центром в точке P_i. Далее найдем пересечение с этой сферой всех треугольников из T_M, имеющих одну из вершин в точке P_i. Результатом пересечения будет замкнутая ломаная на сфере, задающаяся точками O_{ik} $(k = 1, ..., M_i)$ и имеющая M_i звеньев. Рассмотрим сферический многоугольник, образованный опорными точками ломаной O_{ik} и целиком лежащий внутри области G_3. Площадь этого многоугольника, отнесенная к квадрату радиуса ρ_i, будет равна величине телесного угла Θ_i.

Заметим далее, что без ограничения общности можно считать, что точки ломаной пронумерованы в направлении по часовой стрелке, если смотреть извне области G_3. Тогда их можно разбить в следующие смежные группы: $O_{i1}O_{i2}O_{i3}$, $O_{i3}O_{i4}O_{i5}$, ..., $O_{iM_i-1}O_{iM_i}O_{i_1}$, образующие основания треугольных пирамид с вершиной в точке P_i. Очевидно, такое разбиение существует для любого $M_i > 2$. Количество таких пирамид равно $M_i - 2$. Ориентированный объем каждой такой пирамиды Δ_{ik} можно вычислить по следующей формуле

$$V_{ik} = \frac{1}{6}\left((\mathbf{a}_{ik} \times \mathbf{b}_{ik}) \cdot \mathbf{c}_{ik}\right),$$

где векторы $\mathbf{a}_{ik}$, $\mathbf{b}_{ik}$, $\mathbf{c}_{ik}$, определяются через координаты точки P_i и точек основания пирамиды O_{ik-1}, O_{ik}, O_{ik+1}:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{ik} &= (x_{ik} - x_{ik-1},\, y_{ik} - y_{ik-1},\, z_{ik} - z_{ik-1}),\\
\mathbf{b}_{ik} &= (x_{ik+1} - x_{ik-1},\, y_{ik+1} - y_{ik-1},\, z_{ik+1} - z_{ik-1}),\\
\mathbf{c}_{ik} &= (x_i - x_{ik-1},\, y_i - y_{ik-1},\, z_i - z_{ik-1}).
\end{aligned}$$

Ориентированный объем в отличие от обычного объема знакоопределен. Именно он используется для классификации граничных точек области в трехмерном случае.

Определение 2. Точка P_i называется точкой локальной выпуклости (вогнутости), если ориентированные объемы всех пирамид $\Delta_i k$ строго положительны (отрицательны). Точка P_i называется точкой нестрогой локальной выпуклости (вогнутости), если ориентированные объемы всех пирамид $\Delta_i k$ неотрицательны (неположительны) и среди них найдется хотя бы один равный нулю. Точка P_i называется точкой перегиба, если среди всех пирамид $\Delta_i k$ найдутся две такие, что их ориентированные объемы не равны нулю и имеют разные знаки. Несложно показать, что все граничные точки области G_3 относятся к одной из перечисленных пяти групп.

1.2 Построение первичной триангуляции на плоскости

Рассмотрим задачу о построении первичной (грубой) триангуляции T в плоской области G_2. Граница этой области задана с помощью ломаной Ψ_2. Проведем классификацию опорных точек $P_i \in \Omega_2$ этой ломаной в соответствии с Определением 1. В результате получим три множества $\Omega^{(+)}$, $\Omega^{(-)}$, $\Omega^{(0)}$ точек локальной выпуклости, локальной вогнутости и перегиба. При этом множество точек локальной выпуклости будет содержать как минимум три точки, а множества точек локальной вогнутости и перегиба могут быть пустыми. Далее следуем по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Выбираем из множества $\Omega^{(+)}$ точку P_i, для которой угол $\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ имеет минимальную величину. Точки P_{i-1}, P_i, P_{i+1} образуют треугольник, целиком лежащий в G_2. Этот треугольник включаем в искомую триангуляцию T, а точку P_i исключаем из множества $\Omega^{(+)}$ и из числа опорных точек ломаной Ψ_2.

Описанную выше процедуру повторяем до тех пор, пока либо множество $\Omega^{(+)}$ не станет пустым, либо ломаная Ψ_2 не превратится в отрезок. При этом в последнем случае процедура построения триангуляции будет закончена, а в первом случае следует проверить наличие точек в множествах $\Omega^{(-)}$ и $\Omega^{(0)}$. Если таковых не более двух, то триангуляция построена. В противном случае необходимо провести заново процедуру классификации точек ломаной Ψ_2 и снова обратиться к Алгоритму 1. Нетрудно показать, что изложенный процесс конечен, и в результате получится искомая триангуляция T.

Отметим далее, что данный алгоритм можно применять и в случае многосвязной области, если использовать метод, изложенный в [6].

1.3 Построение первичной триангуляции в пространстве

Рассмотрим теперь задачу о разбиении односвязной невыпуклой пространственной области G_3. Эта область задана опорными точками поверхности Ψ_3 (то есть точками из множества Ω_3) и поверхностными треугольниками из T_M. По аналогии с двумерным случаем проведем вначале классификацию граничных точек из множества Ω_3. В результате мы получим следующие 5 множеств:

$$\Omega_3 = \Omega^{(+)} \cup \tilde{\Omega}^{(+)} \cup \Omega^{(0)} \cup \Omega^{(-)} \cup \tilde{\Omega}^{(-)}.$$

Здесь "тильдой" помечены множества точек нестрогой локальной выпуклости (вогнутости). Можно показать, что объединение множеств $\Omega^{(+)} \cup \tilde{\Omega}^{(+)}$ не является пустым. Поэтому далее можно применить следующие алгоритмы.

Алгоритм 2. Если множество $\Omega^{(+)}$ не пусто, то в нем можно выбрать такую точку P_i, для которой телесный угол Θ_i является минимальным. Рассмотрим далее все трехугольные пирамиды $\tilde{\Delta}_{ik}$, образованные точкой P_i и ее соседями P_j по поверхностной триангуляции T_M, пересекающиеся друг с другом не более, чем по граням (при этом сумма телесных углов, связанных с этими пирамидами и точкой P_i, составит угол Θ_i). Данные пирамиды включим в искомое тетраэдральное разбиение T области G_3, а точку P_i исключим из множеств $\Omega^{(+)}$ и Ω_3.

Данный алгоритм применяется ко всем точкам множества $\Omega^{(+)}$ вплоть до его исчерпания. При этом необходимо проверять, чтобы в исходном множестве Ω_3 оставалось не менее трех точек. Если же такая ситуация (в Ω_3 осталось три точки) наступила раньше, чем стало пустым множество $\Omega^{(+)}$, то искомое тетраэдральное разбиение T построено. Если множество $\Omega^{(+)}$ оказалось пустым раньше, то применяется следующий алгоритм.

Алгоритм 3. Если множество $\tilde{\Omega}^{(+)}$ непусто, то рассмотрим любую его точку P_i и связанную с ней часть поверхностной триангуляции T_M. Из определения нестрогой выпуклости этой точки следует, что часть поверхностных треугольников, примыкающих к P_i, попарно лежат в одной плоскости. Каждую смежную пару таких треугольников можно заменить по алгоритму Делоне парой других треугольников, один из которых уже не примыкает к точке P_i. Такое преобразование не нарушает описания поверхности в целом, но приводит к тому, что точка P_i становится точкой строгой выпуклости, и для нее можно применить Алгоритм 2 и тем самым исключить P_i из множеств $\tilde{\Omega}^{(+)}$ и Ω_3.

Алгоритм 3 применяется до тех пор, пока не исчерпается множество $\tilde{\Omega}^{(+)}$. При этом опять необходимо проверять общее количество точек в Ω_3.

Если в итоге проведения описанных выше процедур в множестве Ω_3 осталось более трех точек, то необходимо снова повторить процедуру классификации. Далее опять применяется цепочка алгоритмов 2, 3, и т.д.. В результате получается искомое разбиение области G_3 на первичные неправильные тетраэдры.

2 Построение сеток с заданными свойствами

Рассмотрим теперь один из алгоритмов построения в произвольной области G_n с границей Γ_n неструктурированной треугольной (тетраэдральной) сетки с заданными свойствами. Как и выше, предположим, что граница Γ_n задана с помощью замкнутой кусочно-линейной кривой (кусочно-плоской поверхности) Ψ_n, задающейся с помощью N опорных точек, объединенных в множество Ω_n, и M отрезков (поверхностных треугольников), объединенных в множество T_M. Дополнительно в области G_n задается весовая функция $\omega(P)$ (P — зависимость от пространственных координат (x, y) или (x, y, z)), определяющая свойства искомой сетки.

Общая схема алгоритма при такой постановке задачи состоит в следующем. Сначала, как изложено выше, по информации о кривой (поверхности) Ψ_n строится первичная сетка T, содержащая только точки множества Ω_n. Затем с помощью весовой функции и некоторого критерия адаптации K строится измельчение $\tilde{T}$ первичной сетки T, которое и является искомым.

Эта схема определяет множество алгоритмов, каждый из которых отличается от других специфическим выбором весовой функции, критерия адаптации и самой методики измельчения. В данной работе не фиксируется вид весовой функции, но задается критерий адаптации K и формулируется общий метод поиска измельчения $\tilde{T}$, при заданных ω и K.

Начнем изложение с критерия адаптации. Для этого будем считать, что искомое измельчение $\tilde{T}$ удовлетворяет критерию Делоне и в каждой его точке существует объем Вороного. Тогда в каждой точке $P_i \in \tilde{T}$ определена функция

$$f(P_i) = \sum_{j=1}^{N_i} d_{ij}^2 V_{ij}^2.$$

Здесь N_i — число соседей точки P_i по объему Вороного, j — номер соседней точки P_j, $d_{ij} = \rho(P_i, P_j)$ — расстояние между точками P_i и P_j между точками P_i и P_j с учетом веса ($\omega_i = \omega(P_i)$, $\omega_j = \omega(P_j)$), $V_i j$ — часть объема Вороного, представляющая собой треугольник (тетраэдр), имеющий высотой отрезок (P_i, P_j).

Заметим далее, что объемы Вороного из $\tilde{T}$ полностью покрывают каждый первичный треугольник (тетраэдр) T_m из T. Предположим, что эти покрытия не пересекаются. В этом случае имеет место равентво

$$\sum_{i=1}^{k_m} V_i = \int\limits_{T_m} dP,$$

где k_m — количество объемов Вороного, составляющих T_m, и соответственно количество точек $P_i \in \tilde{T}$, попавших внутрь T_m и являющихся центрами объемов Вороного. Ввиду неединственности измельчения $\tilde{T}$ наряду с этим соотношением может выполняться следующее приближенное равенство

$$\sum_{i=1}^{k_m} \omega_i V_i \approx I_m = \int\limits_{T_m} \omega(P)\, dP.$$

Оно фактически и является основой критерия адаптации K. Дадим его формулировку.

Критерий адаптации. Для фиксированного числа $\varepsilon > 0$ найти измельчение $\tilde{T}$ первичной сетки T такое, что для любого $T_m \in T$ количество объемов Вороного составляющих T_m удовлетворяет условию

$$I_m / k_m \leq \varepsilon,$$

а сами эти объемы минимизируют функционал

$$J = \sum_{m=1}^{M} \left(I_m - \sum_{i=1}^{k_m} \omega(P_i)\, V_i(P_i) \right)^2 .$$

Конкретный вид объемов Вороного (то есть пространственное расположение их центральных точек P_i) можно найти при минимизации функционала J. Однако эта задача является в общем случае достаточно сложной из-за нелокальности критерия. Поэтому, предлагается по критерию K определять лишь количества точек k_m, а центры объемов Вороного искать из следующего итерационного процесса

$$P_i^{s+1} = P_i^s - \tau \frac{\partial f}{\partial P}(P_i^s), \quad s = 0,\, 1,\, \dots .$$

В итоге получен алгоритм построения измельчения $\tilde{T}$. Проведенные по данному алгоритму построения сеток показали его быструю сходимость и гладкость получаемой треугольной (тетраэдральной) дискретизации исходной области для случаев $\omega(P) \equiv 1$ и когда $\omega(P)$ является линейной функцией координат.

3 Разностные схемы решения параболических краевых задач

В данном пункте кратко рассмотрим решение краевых задач для параболических уравнений на неструктурированных треугольных (тетраэдральных) сетках. Для простоты изложения возьмем следующую задачу о распространении тепла в замкнутой области G_n, записанную в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\mathbf{W} - qu + f, \quad \mathbf{W} = \mathbf{K}\nabla u, \quad P \in G_n, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$(\mathbf{W}, \mathbf{n}) = -\eta u, \quad P \in \Gamma_n, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad P \in G_n. \tag{3}$$

Здесь $u = u\,(P, t)$ — изменение температуры относительно температуры окружающей среды u_0, P — точка пространста E_n, лежащая в области G_n или на ее границе Γ_n, t — время, $\mathbf{W}$ — вектор антипотока тепла, $\mathbf{K}$ — диагональный тензор температуропроводности с компонентами $k_{ii}(P, t) \geq c_0$ ($c_0 = \mathrm{const}$), $q = q(P, t) \geq 0$ — плотность остывания/нагрева среды за счет излучательных процессов, $f = f(P, t)$ — плотность других источников/стоков тепла, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Γ_n, $\eta \geq 0$ — коэффициент тепловой проницаемости поверхности Γ_n.

В дальнейшем предполагается, что область G_n может иметь произвольно сложную форму, в том числе может быть невыпуклой и многосвязной. Граница области Γ_n является кривой (поверхностью) Ляпунова. Тогда при при соответствующих ограничениях на функции $k_{ii}(P,t)$, $q(P,t)$ и $f(P,t)$ задача (1)–(3) имеет классическое решение.

Будем предполагать, что граница области G_n аппроксимирована с помощью полилинейной замкнутой кривой (поверхности) Ψ_n. По информации о Ψ_n построена неструктурированная треугольная (тетраэдральная) сетка с узлами, объединенными в множество $\omega_P = \{P_i,\ i = 1, \ldots, N\}$, и треугольниками (тераэдрами), объединенными в множество $T = \{T_m = \Delta(P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m}),\ P_{i_m}, P_{j_m}, P_{k_m} \in \omega_P,\ m = 1, \ldots, M\}$. Будем также считать, что построенная сетка однозначно определяет объемы Вороного с центрами в точках $P_i \in \omega_P$.

Предположим далее, что задача (1)–(3) решается на временном отрезке $[0, t_{max}]$, на котором введена равномерная сетка $\omega_t = \{t = t_n = n \cdot \tau,\ n = 0, \ldots, N_t,\ \tau = t_{max}/N_t\}$.

На сетке $\Omega = \omega_P \times \omega_t$ с помощью интегро-интерполяционного метода [1] можно построить целое семейство разностных схем. Рассмотрим самую простую из них, а именно, явную схему. Она получается при интегрировании уравнения (1) по пространству в объеме Вороного V_i, связанного с точкой P_i, и по времени на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$. При этом все функции за исключением производной по времени аппроксимируются значениями в точке t_n, а временные интегралы вычисляются точно или приближаются по формуле прямоугольников. Пространственные интегралы также заменяются по формуле прямоугольников, за исключением потокового слагаемого, для которого сначала используется формула Остроградского–Гаусса, а затем получившиеся контурные (поверхностные) интегралы аппроксимируются по формуле трапеций. В результате получаем следующую разностную задачу

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \Lambda_i^n y_i^n - q_i^n y_i^n + f_i^n, \quad i = 1, \ldots, N, \quad n = 1, \ldots, N_t, \tag{4}$$

$$y_i^0 = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Здесь y_i^n и q_i^n f_i^n — разностные аналоги искомой функции $u(P,t)$ и функций $q(P,t)$, $f(P,t)$, определенные в узлах сетки Ω, Λ_i^n — разностный оператор теплопроводности.

Уточним вид Λ_i^n в двумерном случае, опуская индекс n:

$$\Lambda_i y_i = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{N_i} \left(S_{ij}^{(+)} + S_{ij}^{(-)} + s_{ij}^{(+)} + s_{ij}^{(-)} \right). \tag{6}$$

Здесь подразумевается, что контрольный объем V_i состоит из $2N_i$ частей, построенных по N_i треугольникам $T_{m_j} = \Delta(P_i, P_{m_j}^{(-)}, P_{m_j}^{(+)})$, имеющим в качестве одной из вершин точку P_i. При этом каждая часть V_i представляет собой либо треугольник $T_{m_j}^{(+)} = \Delta(P_i, M_{m_j}, Q_{m_j}^{(+)})$, либо треугольник $T_{m_j}^{(-)} = \Delta(P_i, Q_{m_j}^{(-)}, M_{m_j})$. Точка M_{m_j} является центром описаной вокруг треугольника T_{m_j} окружности, а точки $Q_{m_j}^{(\pm)}$ являются серединами отрезков $[P_i, P_{m_j}^{(\pm)}]$. В этих обозначениях величины $S_{ij}^{(\pm)}$ являются некоторыми аппроксимациями следующих интегралов

$$I_{ij}^{(+)} = \int\limits_{M_{m_j}}^{Q_{m_j}^{(+)}} (\mathbf{W}, \mathbf{n})\, dl \approx S_{ij}^{(+)}, \quad I_{ij}^{(-)} = \int\limits_{Q_{m_j}^{(+)}}^{M_{m_j}} (\mathbf{W}, \mathbf{n})\, dl \approx S_{ij}^{(-)}.$$

Величины $s_{ij}^{(\pm)}$ равны нулю, если точка P_i является внутренней точкой области G_n. В противном случае, если отрезки $[P_i, P_{m_j}^{(\pm)}]$ являются частью границы Ψ_n, $s_{ij}^{(\pm)}$ аппроксимируют интегралы

$$J_{ij}^{(\pm)} = \int\limits_{P_i}^{Q_{m_j}^{(\pm)}} (\mathbf{W}, \mathbf{n})\, dl = - \int\limits_{P_i}^{Q_{m_j}^{(\pm)}} \eta u\, dl \approx s_{ij}^{(\pm)},$$

записанные с учетом граничного условия (3).

Конкретный вид слагаемых $S_{ij}^{(\pm)}$, $s_{ij}^{(\pm)}$, а также q_i и f_i зависит от гладкости коэффициентов задачи и требуемого порядка аппроксимации схемы по пространству. Нетрудно показать, что для кусочно-непрерывных функций k_{ii}, q и f можно подобрать такие аппроксимации $S_{ij}^{(\pm)}$, $s_{ij}^{(\pm)}$, q_i и f_i, что схема (4) будет иметь второй порядок по пространству. При этом аппроксимации $S_{ij}^{(\pm)}$, $s_{ij}^{(\pm)}$ будут содержать значения y в вершинах треугольников T_{m_j}, которые составят шаблон в точке P_i. При большей гладкости коэффициентов путем расширения шаблона в точке P_i можно построить схему 4-го порядка по пространству. Аналогичный подход применяется и в трехмерном случае. Отличием является лишь состав трехмерного объема Вороного и размерность интегралов.

4 Заключение

Нами рассмотрен общий подход к решению практических задач механики сплошной среды на неструктурированных треугольных и тераэдральных сетках. В его рамках предложены методы и алгоритмы построения сеток, а также способ построения разностных схем, использующих такие сетки. В качестве примера использовалась краевая задача для линейного уравнения теплопроводности в ограниченной области произвольной формы с краевым условием Ньютона. Предложенная методика обобщается на случай граничных условий других типов. На ее основе возможно решение уравнений других типов, а также уравнений, содержащих нелинейность. Возможно также построение неявных схем по времени, в том числе с повышенным порядком точности и по времени, и по пространству.

Литература

[1] А.А. Самарский. Теория разностных схем. М., Наука, 1983.

[2] В.В. Шайдуров. Многосеточные методы конечных элементов. М., Наука, 1989.

[3] Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М., Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.

[4] О.М. Белоцерковский. Численное моделирование в механике сплошных сред. М., Физматлит, 1994.

[5] Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980.

[6] И.В. Попов, С.В. Поляков. Построение адаптивных нерегулярных треугольных сеток для двумерных многосвязных невыпуклых областей. Математическое моделирование. 2002, 14(6), 25-35.