Надежный Способ Построения Сеток с Вытянутыми Ячейками

А.А.Мартынов, С.Ю.Медведев
Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша РАН, 125047 Москва, Миусская пл., д.4

e-mail: martynov@a5.kiam.ru, medvedev@a5.kiam.ru

Предлагается способ построения адаптивных неструктурных сеток для решения широкого круга задач с анизотропным поведением неизвестных функций. Метод основан на одновременном применении хорошо известного и надежного иерархического изотропного разбиения ячеек двумерных и трехмерных сеток и разбиении ребер этих ячеек с последующей локальной адаптивной триангуляцией. Приводятся примеры решения задач конвекции-диффузии с малыми коэффициентами диффузии в двумерных и трехмерных областях на последовательностях адаптивных сеток.

1. Введение Адаптация расчетных сеток к особенностям решения является привлекательным способом повышения точности расчетов. Существующие ограничения на вычислительные ресурсы делают автоматические методы построения адаптивных сеток единственным средством, позволяющим получить гарантированную точность для трехмерных задач математической физики с сильно анизотропным поведением решения в сложных областях (пограничные и сдвиговые слои в аэродинамике, резкие фронты в задачах конвекции-диффузии и физики плазмы и т.д.). В этом случае оптимальные сетки (т.е. дающие наилучшую точность при фиксированном числе узлов сетки) должны иметь вытянутые ячейки.

Задача оптимальной интерполяции известной функции на двумерной неструктурной сетке была рассмотрена в [1]. В пространстве с метрикой, основанной на гессиане функции, ячейки оптимальной сетки изотропны: в зависимости от типа функции они либо правильные треугольники, либо равнобедренные прямоугольные треугольники. При заданной метрике поиск близких к оптимальным анизотропных сеток в реальном пространстве сводится к построению регулярных сеток в соответствующем метрическом пространстве. Однако такой подход требует перегенерации всей сетки при изменении решения или добавлении новых узлов [2]. Это предполагает многократное вычисление и интерполяцию метрики в каждую точку пространства.

Гораздо более удобны и экономичны методы, основанные на локальном адаптивном измельчении сетки (h-refinement). При этом в качестве критерия адаптации может использоваться длина ребер исходной сетки в той же метрике [3]. Заметим, что последовательность локально оптимальных действий (добавление точки, изъятие точки, изменение связей) не обязательно приближает сетку к глобально-оптимальной. Кроме того, в общем случае задача нахождения оптимальной сетки имеет неединственеое решение, а с учетом неустойчивости вычисления вторых производных сеточной функции для построения метрики является некорректной и требует регуляризации.

Сеточная функция, к которой происходит адаптация, является решением разностной схемы с коэффициентами нелинейно зависящими от координат узлов сетки. Точность же решения разностной схемы определяется не только локальной ошибкой интерполяции, а также другими существенными факторами, включая качество сетки в реальном пространстве. Все это делает задачу построения оптимальной сетки для реальной задачи чрезмерно сложной и вряд ли разрешимой. Поэтому ограничение класса сеток представляется разумным.

2. Способ построения анизотропных сеток Для построения сеток близких к оптимальным предлагается использовать класс сеток, которые не накладывают ограничений на вытянутость ячеек. Сделать сетку анизотропной позволяет разбиение ребер изотропной сетки с последующей локальной адаптивной триангуляцией макроячеек - ячеек изотропной сетки с висячими узлами. Квазилокальные операции над такими сетками основаны на иерархическом измельчении ячеек изотропной сетки, что является известным и надежным способом адаптации [4, 5]. Большую гибкость такому походу придает возможность использования различных типов макроячеек: треугольники и четырехугольники в двумерном случае, тетраэдры, призмы и гексаэдры - в трехмерном. При этом расчетная сетка составлена только из симплексов. Если в качестве критерия разбиения ребер использовать их длину в метрике, связанной с гессианом, а изотропное разбиение макроячеек связать с оценкой диаметра ячейки (в той же метрике) из ее будущей триангуляции, то результатом адаптации будет сетка, в которой большинство ячеек регулярно в соответствующем метрическом пространстве, то есть сетка близка к оптимальной. При этом построение сетки внутри макроячеек может быть распараллелено, обеспечивая эффективность метода.

С другой стороны, не изменяя критерия разбиения макроячеек, можно учесть дополнительные требования на качество сетки на этапе адаптивной триангуляции. Это может быть, например, ограничения на величину углов в ячейках сетки, на степень узлов сетки и т.п., которые учитываются при построении и улучшении триангуляции путем переброски связей. В свою очередь, при разбиении макроячеек можно обеспечить выполнение обычных требований на равномерность при иерархическом измельчении сеток (уровни разбиения соседних ячеек различаются не больше, чем на единицу).

3. Примеры расчетов В расчетах удобно использовать следующий индикатор ошибки

$$E_t = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{e}^2}\right|^{1/2} + w_1 \left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}\right| = |\mathbf{e}^T H \mathbf{e}|^{1/2} + w_1 |\mathbf{e}\nabla u|,$$

в котором к длине ребра в метрическом пространстве, связанном с гессианом скалярной функции добавлено слагаемое с первой производной. Это слагаемое обеспечивает дополнительную регуляризацию при вычислении индикатора, которая особенно важна на сетках с малым числом узлов.

В качестве модели вязкого течения газа используем стационарную задачу конвекции-диффузии:

$$\mathbf{v}\nabla u = \mu \nabla \cdot \nabla u,$$

для решений которой характерны пограничные слои. В первом примере граничное условие $u = 0$ задается на отрезке прямой [0,1] – модель течения около плоской пластины с конвективной скоростью $\mathbf{v} = (1, 0)$. Рис.1 демонстрирует адаптивную сетку и линии уровня решения во всей области и около точки (0,0), где изотропная сетка переходит в анизотропную. Отметим, что построенные адаптивные сетки автоматически передают изменение масштаба решения (рис.1б) при уменьшении коэффициента диффузии. В качестве макроячеек использованы четырехугольники вблизи границы и треугольники в остальной области.

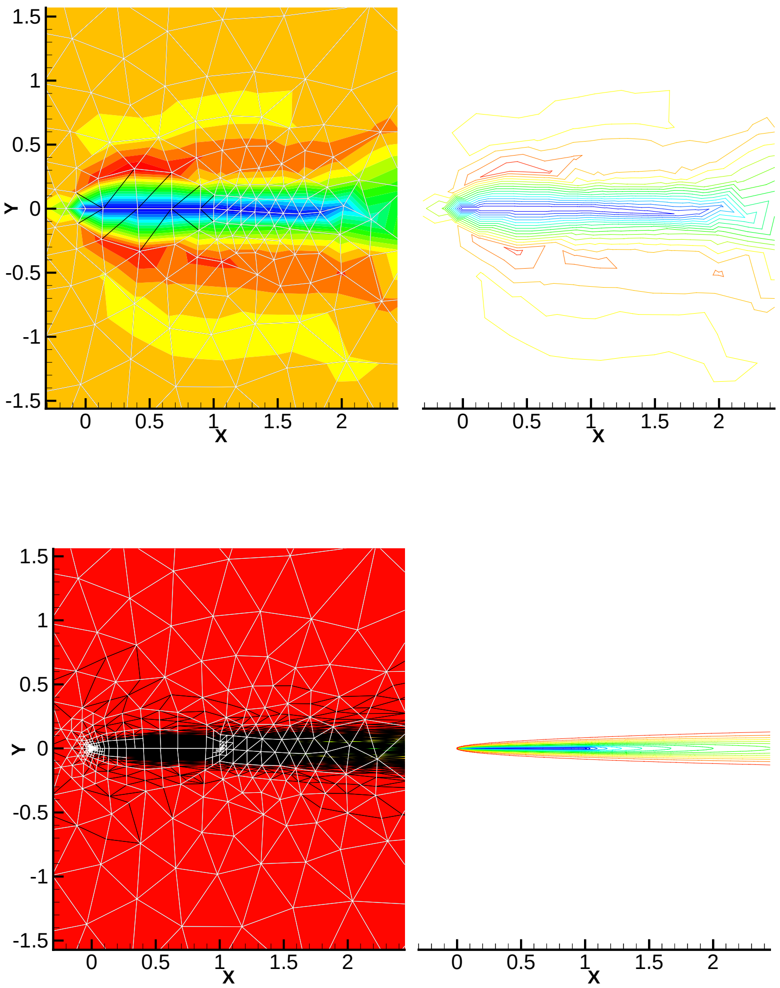

Рис.1а Начальная и адаптивная сетки и линии уровня решения для задачи конвекции-диффузии с коэффициетом $\mu = 10^{-3}$. *Ребра макроячеек показаны белым цветом.*

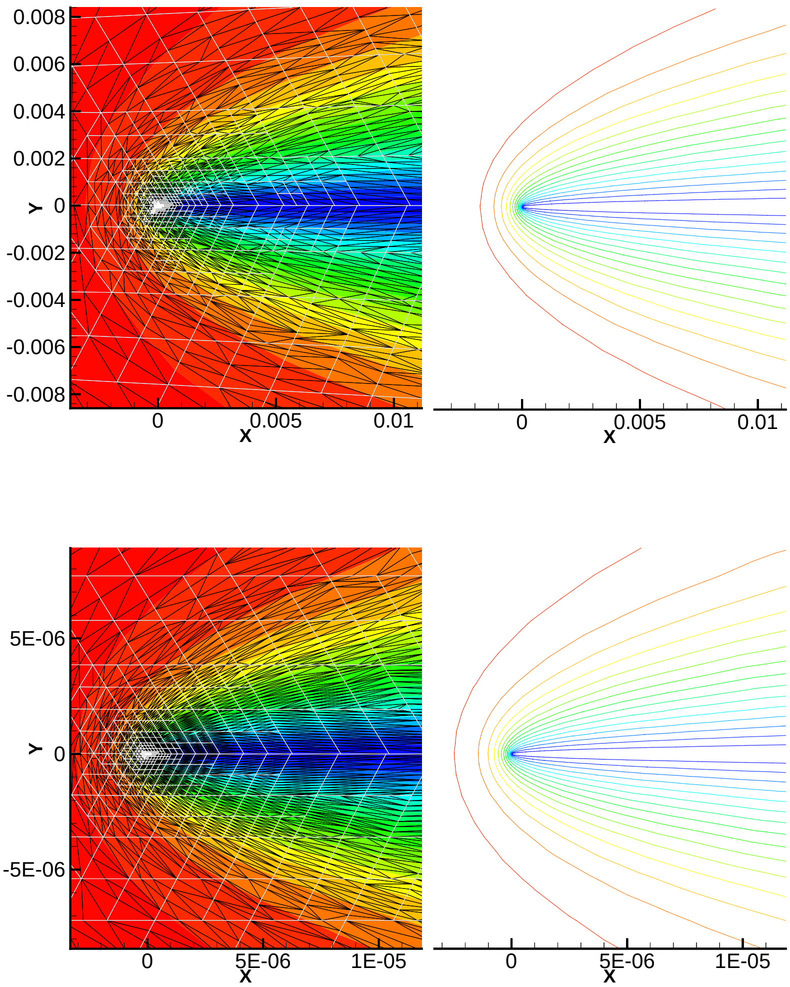

Рис.1б Фрагменты адаптивных сеток и линии уровня решения для задачи конвекции-диффузии с коэффициетами $\mu = 10^{-3}$ *и* $\mu = 10^{-6}$. *Общее число узлов: 6760 и 14335 соответственно.*

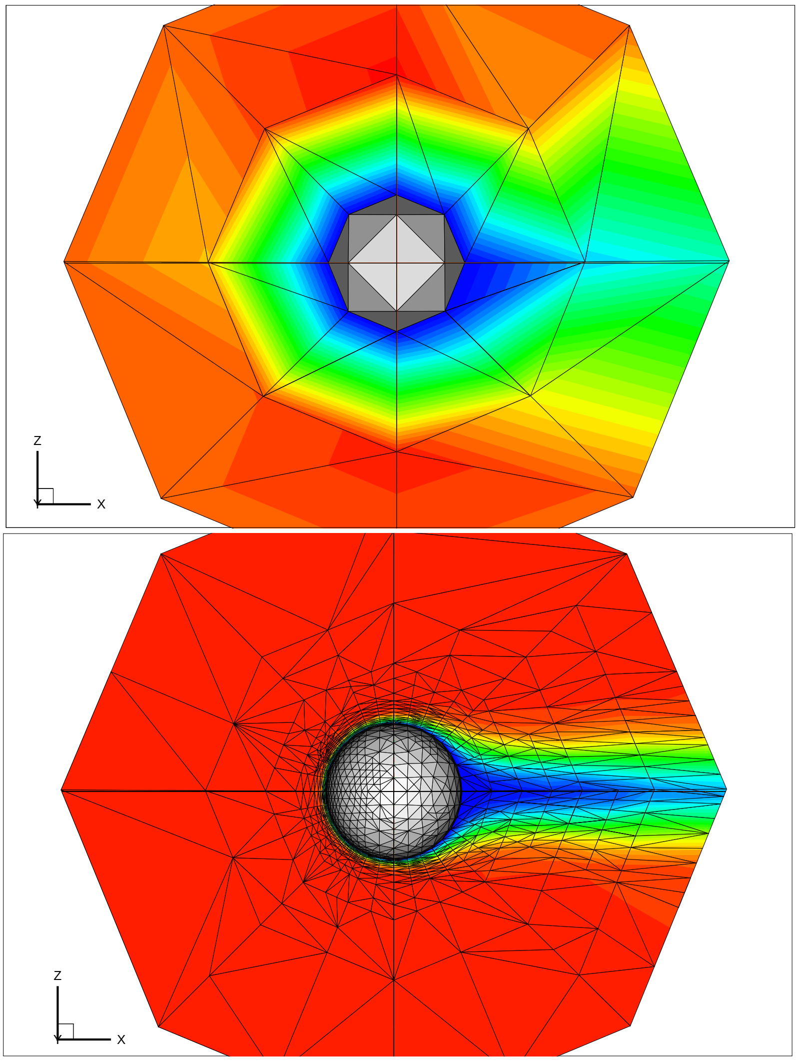

Рис.2а Начальная и адаптивная сетка и линии уровня решения для задачи конвекции-диффузии с коэффициентом $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ *в сечении* $y = 0$ *и на поверхности сферы.*

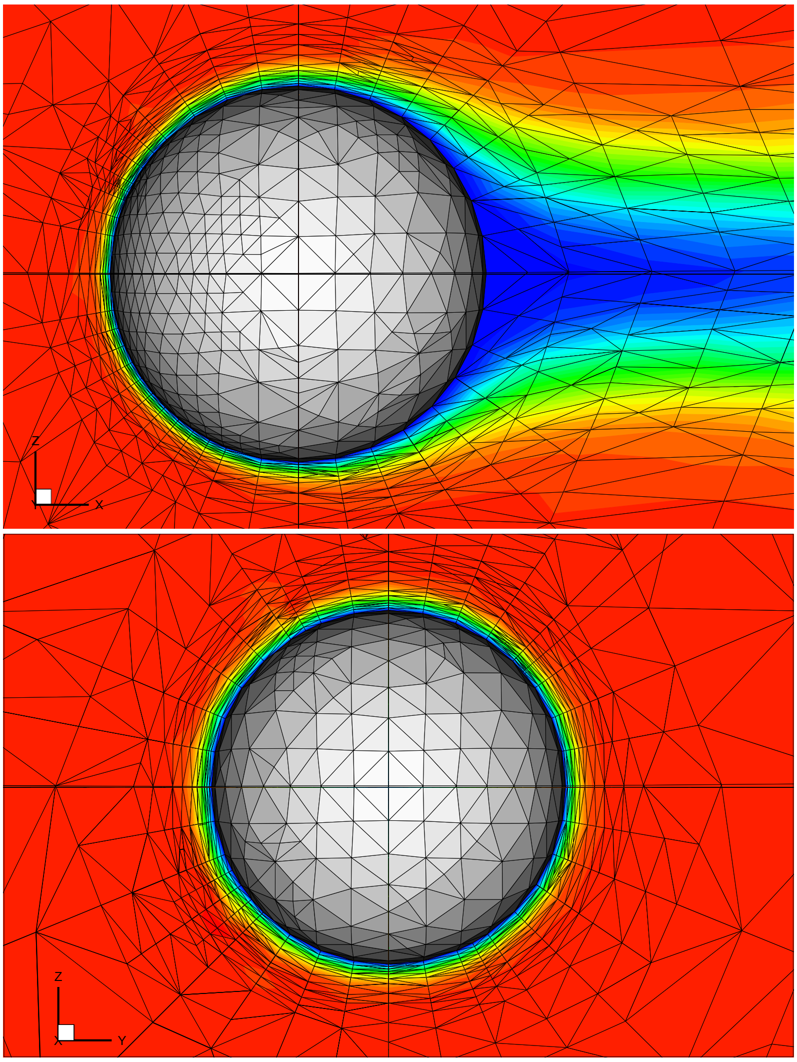

Рис.2б Фрагменты адаптивной сетки в сечениях $y = 0$ (вверху) и $x = 0$ (внизу) и на поверхности сферы. Общее число узлов 9116.

Во втором примере граничная поверхность трехмерной области представляет собой сферу единичного радиуса, а конвективная скорость задается решением задачи о безвихревом обтекании сферы с предписанным значением на бесконечности $\mathbf{v}_\infty = (1, 0, 0)$. На Рис.2 показана адаптивная сетка и линии уровня решения на сечениях трехмерной расчетной области. Отметим, что разрешение граничной поверхности происходит одновременно с построением высокоаспектной сетки в пограничных слоях. В качестве макроячеек использованы призмы.

4. Заключение Предложенный способ построения адаптивных сеток дает основу для разработки методов решения широкого круга задач с анизотропным поведением неизвестных функций. К его преимуществам относятся:

- распараллеливание построения квазиоптимальных сеток;
- простое сочетание критериев адаптации и контроля качества;
- возможность прямого перехода от анизотропной к изотропной адаптации.

Как и в любом подходе относящемся к h-refinement, для начала работы необходимо построение изотропной сетки. Это может быть осуществлено при помощи хорошо известных методов типа advancing front, которые реализованы в многочисленных программных комплексах для двумерного и трехмерного случаев. При этом требования к начальной сетке минимальны – допустимо грубое изотропное разрешение геометрии области.

Построения оптимальной триангуляции в пределах трехмерных макроячеек представляет собой гораздо более сложную задачу, чем в двумерном случае: многогранник (в отличие от многоугольника) не всегда можно триангулировать при помощи диагоналей. Однако распараллеливание процедуры триангуляции по макроячейкам позволяет надеяться на эффективное осуществление более сложных алгоритмов.

Разработка специальных разностных схем и методов решения разностных задач (в том числе параллельных), использующих особенности предложенного класса адаптивных сеток, может привести к созданию эффективных компьютерных кодов для решения сложных трехмерных задач с разномасштабным поведением неизвестных функций.

Литература

[1] E.F.D'Azevedo, R.B.Simpson, On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error. Numer. Math. **59**(1991)321

[2] J.Peraire, J.Peiro, K.Morgan, Adaptive remeshing for three-dimensional compressible flow computations. J. of Comput. Physics **103**(1992)269

[3] W.G.Habashi, J.Dompierre, Y.Bourgault et al. Cerfifiable computational fluid dynamics through mesh optimization. AIAA Journal. **36**(1998)703

[4] R.Lohner, J.D.Baum, Adaptive h-refinement on 3D unstructured grids for transient problems. Int. J. Numer. Methods Fluids, **14**(1992)1407

[5] D.J.Mavriplis, Unstructured grid techniques. Annu. Rev. Fluid Mech. **29**(1997)473