Вариационные методы построения адаптивных сеток

С.А.Иваненко

117967, Москва, ул.Вавилова, 40, ВЦ РАН, e-mail: sivan@ccas.ru

Введение

Первые вариационные методы построения сеток были предложены в середине 60-х годов в работах А.Ф. Сидорова [1] и С.К. Годунова, Г.П. Прокопова [2]. Методы, основанные на численном решении разностных аналогов уравнений Эйлера для различных функционалов, развивались в работах [3-15]. В других публикациях уравнения Эйлера не выписывались, а минимизировались дискретные аналоги самих функционалов [16-26]. Последний подход развивается в настоящее время для оптимизации нерегулярных сеток [27-30]. Вариационные методы подробно излагаются также в монографиях [31-39].

При численном решении задач математической физики в областях сложной формы возникает необходимость в повышении точности за счет выбора расчетной сетки. Для этого узлы сетки расставляются таким образом, чтобы сгущение узлов соответствовало областям резкого изменения решения. Это обеспечивает равномерное распределение ошибки внутри области. С другой стороны, дискретизация геометрического объекта также дает вклад в ошибку. Для уменьшения этой компоненты ошибки применяется сгущение узлов и ортогонализация (для регулярных блоков) сетки вблизи границы. Последнее требование часто возникает из априорной информации о структуре решения, например, при наличии пограничных слоев.

Цель данной работы - развитие вариационных методов, позволяющих в рамках единого подхода учитывать эти требования. Рассматриваются функционалы, зависящие от двух метрик. Одна "отвечает"за адаптацию к решению, а другая - за сгущение и ортогонализацию сетки к границе области. Приведен вывод функционалов, зависящих от ортогональных инвариантов. Гармонические отображения также описываются такого рода функционалами. Дано краткое описание современного состояния теории гармонических диффеоморфизмов. Кроме ортогональных, рассматриваются также конформные инварианты. Предлагается функционал, который инвариантен относительно конформных преобразований в n-мерном случае. Сформулирована гипотеза о существовании уравнений, описывающих все возможные гомеоморфные отображения куба в произвольную односвязную область.

1 Конформные инварианты

Рассмотрим гладкое взаимно-однозначное отображение

$$x(\xi) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n, \quad x = (x^1, \dots, x^n)^T, \;\; \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)^T. \tag{1}$$

Элементы матрицы Якоби a имеют вид

$$a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}.$$

В точке ξ отображение $x(\xi)$ порождает локальный метрический тензор g с элементами

$$g_{ij}(\xi) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} = \sum_{m=1}^{n} a^m_i a^m_j,$$

или в матричной записи

$$g = a^T a.$$

Отсюда следует, что если якобиан $\det a \neq 0$, то симметричная матрица g будет положительно определенной. Элемент длины $(dx)^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$ выражается через $d\xi = (d\xi^1, \dots, d\xi^n)^T$ следующим образом

$$(dx)^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 = g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j, \tag{2}$$

здесь принято стандартное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. При замене переменных $\xi = \xi(\eta)$ эта величина преобразуется следующим образом

$$(dx)^2 = \tilde{g}_{ij}(\eta) d\eta^i d\eta^j,$$

где

$$\tilde{g}_{ij}(\eta) = g_{km}(\xi(\eta)) \frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^m}{\partial \eta^j}.$$

Из курса линейной алгебры известно, что существует ортогональное преобразование $\xi = \xi(\eta)$, приводящее квадратичную форму (2) к каноническому виду

$$(dx)^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (d\eta^i)^2,$$

где $\lambda_i > 0$ - собственные числа матрицы g. Заметим (см. [40]), что замена координат $\xi = \xi(\eta)$ такая, что в каждой точке матрица Якоби $b = (b^i_j) = (\partial\xi^i/\partial\eta^j)$ непрерывна и ортогональна, является линейным ортогональным преобразованием $b = const$. Условие ортогональности $b^T b = I$, где I - единичная матрица.

Собственные числа матрицы g определяются из решения характеристического уравнения

$$\det(g - \lambda I) = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\lambda^n + O_1\lambda^{n-1} + \ldots + O_n = 0. \tag{3}$$

Поскольку матрица g симметричная и положительно определенная, то алгебраическое уравнение (3) имеет ровно n действительных корней $\lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$. Коэффициенты уравнения (3) называются ортогональными инвариантами метрики g или квадратичной формы (2). Инвариант O_k равен сумме детерминантов главных миноров матрицы g, получающихся вычеркиванием $n - k$ строк и столбцов, в частности

$$O_1 = tr(g) = \sum_{i=1}^{n} g_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad O_n = \det g = (\det a)^2 = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Для наших целей будем также рассматривать "нормированное" характеристическое уравнение для $\tilde{\lambda}$

$$\tilde{\lambda} = \lambda/(\det g)^{1/n} = \lambda/(\lambda_1 \ldots \lambda_n)^{1/n},$$

которое имеет вид

$$\det\left(\frac{g}{(\det g)^{1/n}} - \tilde{\lambda} I\right) = 0.$$

Эквивалентная форма записи

$$\tilde{\lambda}^n + C_1\tilde{\lambda}^{n-1} + C_2\tilde{\lambda}^{n-2} + \ldots + 1 = 0.$$

Величины $C_k = O_k/O_n^{k/n}$ будем называть конформными инвариантами метрики g, поскольку они не меняются при обратимых конформных преобразованиях $\xi = \xi(\eta)$, представляющих собой в каждой точке суперпозицию ортогонального преобразования и подобного растяжения системы координат в α раз. А поскольку для обратного отображения $\xi = \xi(x)$ собственные числа $\lambda_i(g^{-1}) = 1/\lambda_i(g)$, то C_k будут инвариантны и относительно обратимых конформных преобразований $y = y(x)$. Очевидно, что любые гладкие функции от конформных инвариантов также будут конформными инвариантами. То же самое верно и для ортогональных инвариантов.

Справедливы следующие соотношения, представляющие собой связь между инвариантами для прямого и обратного отображений

$$O_{n-k}(g^{-1}) = \frac{O_k(g)}{O_n(g)}, \qquad C_{n-k}(g^{-1}) = \frac{O_{n-k}(g^{-1})}{O_n(g^{-1})^{(n-k)/n}} =$$

$$\frac{O_k(g)}{O_n(g)O_n(g)^{(k-n)/n}} = C_k(g). \tag{4}$$

Отсюда следует, что все инварианты обратного отображения могут быть явно выражены через инварианты прямого отображения, и тем самым через элементы матрицы g. Поэтому в дальнейшем используются только инварианты $O_k(g)$ и $C_k(g)$.

Количество независимых конформных инвариантов равно $n-1$. Следовательно, в двумерном случае конформный инвариант один, а в трехмерном случае их уже два. В одномерном случае любое преобразование конформно, поэтому понятие конформного инварианта смысла не имеет.

Конформный инвариант C_k равен n, умноженному на отношение среднего арифметического всех возможных произведений k различных λ_i к их среднему геометрическому, следовательно

$$C_k/n \geq 1, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда следует, что если отображение $x = x(\xi)$ -конформное, т.е. если все λ_i равны, то C_k принимает наименьшее возможное значение, равное n.

Величины O_k и C_k для $n = 2, 3$ применяются в настоящее время для оценки качества сетки. Кроме того, строятся функционалы, зависящие от этих величин, которые используются для деформации сетки.

2 Функционалы типа Дирихле

Задача построения регулярной сетки рассматривается как дискретный аналог задачи о нахождении гомеоморфного отображения на счетную область некоторой канонической области, например, единичного куба, при заданном отображении между границами. Вариационные методы основаны на минимизации функционалов, зависящих от искомого отображения.

Ортогональные инварианты и функционалы, от них зависящие, изучались и применялись для построения сеток в ряде работ (см., например, [12, 17, 38]). В общем случае эти функционалы могут быть записаны как для прямого $x(\xi)$, так и для обратного $\xi(x)$ отображений

$$F_o(x(\xi)) = \int f_1(O_1, \ldots, O_n) d\xi^1 \ldots d\xi^n,$$

$$F_o(\xi(x)) = \int f_2(O_1, \ldots, O_n)(\det g)^{1/2} d\xi^1 \ldots d\xi^n =$$

$$\int f_2(O_1, \ldots, O_n) dx^1 \ldots dx^n.$$

Здесь f_1 и f_2 - некоторые заданные функции от инвариантов. Заметим, что эти функционалы не меняются при ортогональных преобразованиях как координат ξ, так и координат x. Это связано с тем, что якобиан преобразования сам является ортогональным инвариантом.

Функционалы, зависящие от конформных инвариантов, в данном контексте по-видимому не рассматривались. Общий вид таких функционалов для прямого $x(\xi)$ и обратного $\xi(x)$ отображений следующий

$$F_c(x(\xi)) = \int f_1(C_1, \ldots, C_n) d\xi^1 \ldots d\xi^n, \tag{5}$$

$$F_c(\xi(x)) = \int f_2(C_1, \ldots, C_n)(\det g)^{1/2} d\xi^1 \ldots d\xi^n =$$

$$\int f_2(C_1, \ldots, C_n) dx^1 \ldots dx^n. \tag{6}$$

Легко видеть, что функционал (5) инвариантен относительно конформных преобразований координат x, а функционал (6) - относительно конформных преобразований координат ξ. Подынтегральные выражения в этих функционалах отличаются на множитель $(\det g)^{1/2}$ - якобиан преобразования $x(\xi)$, который не является конформным инвариантом. Отсюда следует, что функционалов, инвариантных относительно конформных преобразований координат x и ξ одновременно, не существует.

Если функционал инвариантен относительно какого-либо класса преобразований координат ξ, то, очевидно, уравнения Эйлера данного функционала также будут инвариантны относительно данного класса преобразований. Следовательно, если $x(\xi)$ - экстремаль функционала, а $y(\eta)$ - экстремаль этого же функционала, записанного в новых координатах в случае преобразования $\xi = \xi(\eta)$ из данного класса, то новое решение получается простой заменой переменных $y(\eta) = x(\xi(\eta))$. Аналогично для функционалов, инвариантных относительно некоторого класса преобразований координат x. Если $x(\xi)$ - экстремаль функционала, а $y(\xi)$ - экстремаль функционала того же вида в случае преобразования координат $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, относительно которого функционал инвариантен, то новое решение получается заменой переменных $y(\xi) = \tilde{y}(x(\xi))$.

Примеры.

1.Функционалы Дирихле в случае $n = 2$.

Функционал Дирихле для двумерных отображений $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$ записывается в виде

$$F(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = \int (x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2) d\xi d\eta, \qquad (7)$$

где $x_\xi = \partial x/\partial \xi$ и т.д.

Конформный инвариант равен подынтегральному выражению в (7), деленному на якобиан

$$C = \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi y_\eta - x_\xi y_\eta}.$$

Следовательно, интеграл (7) представляет собой функционал типа (6), и поэтому он инваринтен относительно конформных преобразований плоскости ξ, η.

Функционал Дирихле для обратного отображения $\xi(x,y), \eta(x,y)$ записывается в виде

$$F(\xi(x,y), \eta(x,y)) = \int (\xi_x^2 + \eta_x^2 + \xi_y^2 + \eta_y^2) dx dy =$$

$$\int \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2}{x_\xi y_\eta - x_\xi y_\eta} d\xi d\eta, \qquad (8)$$

Подынтегральное выражение в (8) представляет собой конформный инвариант, поэтому функционал Дирихле для обратного отображения - это функционал типа (5), инвариантный относительно конформных преобразований плоскости x, y.

2.Функционалы Дирихле в случае $n > 2$.

Функционал Дирихле для n-мерных отображений $x = x(\xi)$ выражается через первый ортогональный инвариант

$$F(x(\xi)) = \int O_1 d\xi^1 \dots d\xi^n = \int \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)^2 d\xi^1 \dots d\xi^n. \tag{9}$$

Легко видеть, что этот функционал не представим ни в виде (5), ни в виде (6), поэтому он не инвариантен относительно конформных преобразований как координат x, так и и координат ξ. Чтобы получить функционал, инвариантный относитально конформных преобразований координат ξ, воспользуемся соотношением $O_1^{n/2} = C_1^{n/2} O_n^{1/2}$. Функционал вида (6), обладающий требуемым свойством, имеет вид

$$F(x(\xi)) = \int O_1^{n/2} d\xi^1 \dots d\xi^n = \int C_1^{n/2} dx^1 \dots dx^n =$$

$$\int \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)^2 \right)^{n/2} d\xi^1 \dots d\xi^n. \tag{10}$$

Интеграл от $C_1^{n/2}$ имеет вид (5) и поэтому инвариантен относительно конформных преобразований координат x

$$F(x(\xi)) = \int C_1^{n/2} d\xi^1 \dots d\xi^n =$$

$$\int \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right)^2 \right)^{n/2} (\det g)^{-1} dx^1 \dots dx^n. \tag{11}$$

Функционал Дирихле для обратного отображения $\xi(x)$ с использованием соотношений (4) записывается в виде

$$F(\xi(x)) = \int O_{n-1} O_n^{-1} dx^1 \dots dx^n = \int O_{n-1} O_n^{-1/2} d\xi^1 \dots d\xi^n,$$

Этот функционал также не представим ни в виде (5), ни в виде (6), поэтому он не инвариантен относительно конформных преобразований как координат x, так и координат ξ. Функционал вида

$$F(\xi(x)) = \int C_{n-1}^{p} dx^1 \dots dx^n = \int O_{n-1}^{p} d\xi^1 \dots d\xi^n, \qquad (12)$$

где

$$p = \frac{n}{2(n-1)},$$

инвариантен относительно конформных преобразований координат ξ.

Функционал

$$F(\xi(x)) = \int C_{n-1}^{p} d\xi^1 \dots d\xi^n \qquad (13)$$

инвариантен относительно конформных преобразований координат x. Заметим, что подынтегральные выражения в функционалах (12) и (13) очень сложно выражаются через элементы матрицы g, поэтому данные функционалы трудно применять на практике.

3.Уравнения Эйлера функционалов (9), (10) при $n = 3$.

Из предыдущего примера следует, что уже в трехмерном случае уравнения Эйлера функционала (9)

$$\triangle x = 0, \quad \triangle y = 0, \quad \triangle z = 0, \qquad (14)$$

где

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2},$$

не инвариантны относительно конформных преобразований координат ξ, η, μ.

Уравнения Эйлера функционала (10)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(D\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(D\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) = 0, \qquad (15) \\
\frac{\partial}{\partial \xi}\left(D\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(D\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(D\frac{\partial z}{\partial \mu}\right) = 0,
\end{gathered}$$

где

$$D = (x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2 + x_\mu^2 + y_\mu^2 + z_\mu^2)^{1/2},$$

инвариантны относительно конформных преобразований координат ξ, η, μ. Однако, это уже нелинейные уравнения.

В двумерном случае любое конформное преобразование является гармоническим, т.е. удовлетворяет уравнениям Лапласа. В трехмерном случае это уже не так. Рассмотрим преобразование инверсии

$$x^i(\xi) = \frac{\xi^i - \xi_0^i}{\sum_{i=1}^n (\xi^i - \xi_0^i)^2}. \tag{16}$$

Легко видеть, что это преобразование конформно. В то же время при $n = 3$ преобразование инверсии (16) не удовлетворяет уравнениям Лапласа (14). В отличие от (9), функционал (10) принимает наименьшее возможное значение на конформном отображении, поэтому преобразование инверсии (16) удовлетворяет уравнениям (15).

Примеры, приведенные в данном разделе, показывают, что в общем случае функционал Дирихле - это ортогональный инвариант. В двумерном случае это также и конформный инвариант относительно конформных преобразований координат ξ для прямого отображения $x(\xi)$, и относительно конформных преобразований координат x для обратного. Если же $n > 2$, то функционал Дирихле уже не будет конформным инвариантом. Уравнения Эйлера этого функционала, представляющие собой уравнения Лапласа, также не инвариантны относительно конформных преобразований координат ξ. Конформным инвариантом в этом случае будет функционал (10), приводящий к нелинейным уравнениям Эйлера (уравнения (15) при $n = 3$). Напомним, что (11) инвариантен относительно конформных преобразований координат x. Поэтому функционалы (10) и (11) будем называть функционалами типа Дирихле.

3 Обобщение на случай многоообразий

Рассмотрим вспомогательное гладкое обратимое отображение

$$X(\xi) : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n, \quad X = (X^1, \dots, X^n)^T, \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)^T.$$

Элементы матриц Якоби отображений $x(\xi)$, $x(X)$ и $X(\xi)$ имеют вид

$$a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}, \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^j}, \quad B_j^i = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^j}.$$

Им соответствуют метрические тензоры

$$g = a^T a, \quad \tilde{g} = A^T A, \quad G = B^T B.$$

Поскольку $a = AB$, то $A = aB^{-1}$. Следовательно

$$\tilde{g} = A^T A = (B^{-1})^T a^T a B^{-1}.$$

Характеристическое уравнение для метрики $\tilde{g}$

$$\det(\tilde{g} - \lambda I) = (\det B)^2 \det(a^T a - \lambda B^T B) = (\det B)^2 \det(g - \lambda G) = 0. \quad (17)$$

Отображение $X(\xi)$ обратимо, поэтому $\det B \neq 0$. Следовательно, решения характеристического уравнения (17) совпадают с решениями характеристического уравнения пары квадратичных форм с матрицами g и G

$$\det(g - \lambda G) = \det G \det(gG^{-1} - \lambda I) = 0.$$

Конформный инвариант C_1 метрики $\tilde{g} = A^T A$ в этом случае можно записать в виде

$$C_1 = tr(gG^{-1}) \det G^{1/n} \det g^{-1/n},$$

и тогда функционал (11) примет вид

$$F(x(\xi)) = \int C_1^{n/2} d\xi^1 \dots d\xi^n =$$

$$\int \left(g_{ij} G^{ji}\right)^{n/2} (\det G)^{1/2} (\det g)^{-1/2} d\xi^1 \dots d\xi^n. \quad (18)$$

Здесь G^{ji} - элементы матрицы, обратной матрице G. Функционал (18) будем называть функционалом плотности энергии отображения $x(X)$. Заметим, что этот функционал инвариантен относительно коформных пребразований коодинат x и X одновременно.

Рассмотрим отображение многообразий $(M, G) \to (N, \bar{g})$ с локальными координатами ξ и x соответственно. Если g_{ij} в (18) заменить на выражение

$$\bar{g}_{km} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j},$$

то мы получим обобщение функционала (18) на случай многообразий. И тогда функционал плотности энергии отображения $(M, G) \to (N, \bar{g})$ можно записать в виде

$$F(x(\xi)) = \int \left(\bar{g}_{km} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} G^{ij}\right)^{n/2} (\det \bar{g})^{-1/2} (\det g)^{-1/2} dM, \quad (19)$$

где $dM = (\det G)^{1/2} d\xi^1 \dots d\xi^n$ - элемент объема многообразия M. Заметим в скобках, что функционал (19) рассматривался также в работе [26]. Функционал (19) инвариантен относительно конформных преобразований многообразий M и N одновременно. Напомним, что конформное преобразование можно определить как такое преобразование, когда новая метрика пропорциональна исходной [40].

Более простой вид имеет функционал, который используется в теории гармонических отображений

$$F_e(x(\xi)) = \int \left(\bar{g}_{km} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} G^{ij} \right) (\det G)^{1/2} d\xi^1 \dots d\xi^n. \tag{20}$$

Функционал (20) называется энергией отображения, а его экстремаль - гармоническим отображением. В настоящее время развита теория гармонических отображений, которая нашла применение в различных областях [41]. В следующем разделе дано краткое описание современного состояния теории гармонических диффеоморфизмов.

4 Гармонические отображения

Современное состояние теории гармонических отображений представлено в обзоре Eells and Lemaire [41].

Пусть M и N - два компактных Римановых многообразия, $\dim M = m$, $\dim N = n$, с метриками G и $\bar{g}$ соответственно, заданными в локальных координатах ξ^α и x^i, $\alpha = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$,

Определение. Гладкое отображение $x(\xi)$: $(M, G) \to (N, \bar{g})$ называется гармоническим, если оно является экстремалью функционала $F_e(x)(\xi)$ (20).

Уравнения Эйлера функционала (20) представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных второго порядка

$$\frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{\det(G)} G^{ij} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^j} + G^{ij} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^j} = 0, \tag{21}$$

где $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ - символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \bar{g}^{\gamma\phi} \left[\frac{\partial \bar{g}_{\phi\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \bar{g}_{\phi\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^\phi} \right].$$

Дифференциальные уравнения (21) представляют интерес и для таких областей математики, как анализ и топология. Заметим, что в данном контексте не существует линейных уравнений, поскольку N не имеет аддитивной структуры.

Гармонические отображения были введены в работе [42]. Позже в фундаментальной работе Eells and Sampson [43] были рассмотрены вопросы существования решений уравнений (21) в случае замкнутых многообразий (без границ), которые предполагались класса C^5. Было доказано, что если кривизна N неположительна, то каждое гладкое отображение из M в N гомотопно гармоническому отображению.

В работе Eells and Sampson [43] система (21) заменялась системой параболических уравнений. Доказывалась устойчивость решения, откуда следует, что решение параболической системы представляет собой однопараметрическое семейство отображений из M в N. Фундаментальные решения уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности на компактном многообразии применялись для получения априорных оценок производных и для построения решения параболической системы, которая представлялась в виде интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра.

Классические примеры гармонических отображений:

(а) гармонические отображения $M \to R$ являются гармоническими функциями,

(б) гармонические отображения $R \to M$ - геодезические,

(в) любая изометрия - гармоническое отображение,

(г) в двумерном случае любое конформное отображение является гармоническим,

(д) если N - Риманово многообразие, а M - подмногообразие наименьшего объема, то вложение $i : M \to N$ является гармоническим относительно метрики, индуцированной на M.

Теория функционалов энергии и их гармонических экстремалей является теорией первого порядка относительно общей теории функционалов энергии p-го порядка и их полигармонических экстремалей (см.[43]).

Результат Eels and Sampson [43] был обобщен в работе Hamilton [44] на случай отображений многообразий с непустыми границами.

Теорема (Hamilton, 1975 [44]). Пусть M и N - компактные Римановы многообразия, $\dim M = m$, $\dim N = n$, соответственно. Предположим, что N имеет неположительную кривизну и его граница ∂N является пустой или выпуклой. Тогда существует гармоническое отображение $\varphi : M \to N$ в каждом гомотопическом классе.

Условие выпуклости ∂N представляет собой локальное условие и может быть выражено в терминах символов Кристоффеля. Выберем карту $(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n)$ около ∂N такую, что $N = \{x^n \geq 0\}$. Условие выпуклости ∂N на данной карте представляет собой условие положительной определенности матрицы $\Gamma^n_{\alpha\beta}(1 \leq \alpha, \beta \leq n-1)$. Рассмотрим геометрический смысл данного уловия на примере геодезической $\phi = \phi^\alpha(t)$, проходящей через точку на границе ∂N. Уравнение геодезической имеет вид

$$\frac{d^2\phi^n}{dt^2} + \Gamma^n_{\alpha\beta}\frac{d\phi^\alpha}{dt}\frac{d\phi^\beta}{dt} = 0.$$

Если ϕ касательна к ∂N, то $d\phi^n/dt = 0$, и тогда ненулевыми будут только члены $\Gamma^n_{\alpha\beta}$, $1 \leq \alpha, \beta \leq n-1$. Если $\Gamma^n_{\alpha\beta}(1 \leq \alpha, \beta \leq n-1)$ положительно определенная, то $d^2\phi^n/dt^2 \leq 0$. Таким образом, условие выпуклости ∂N означает, что геодезическая, касающаяся ∂N, не входит внутрь N. Если $M = R$ то гармоническое отображение представляет собой геодезическую, и в этом случае необходимость условия выпуклости ∂N очевидна.

Для замкнутых многообразий Hartman [45] доказал, что если кривизна N строго отрицательна, что гармоническое отображение единственно в каждом гомотопическом классе.

Все эти результаты были получены без ограничений на размерности многообразий.

В случае, когда M и N являются двумерными многообразиями с границами, фундаментальный результат о существовании и единственности гармонического гомеоморфизма был доказан независимо в работах Sampson [46] и Shoen and Yau [47].

Теорема (Sampson 1978 [46], Shoen and Yau 1978 [47]) Пусть отображение $\phi : M \to N$ между двумерными Римановыми многообразиями M и N диффеоморфно и осуществляет диффеоморфизм между границами ∂M и ∂N. Предположим что кривизна многообразия N неположительна, а граница ∂N выпукла. Тогда существует единственное гармоническое отображение, $\varphi : M \to N$, которое является диффеоморфизмом, такое, что φ гомотопически эквивалентно ϕ и $\varphi(\partial M) = \phi(\partial M)$.

Заметим, что если M и N - ограниченные связные области на плоскости, то данная теорема сводится к хорошо известному результату, полученному Rado и Choquet (см. ссылки в работе [47]). В этом случае гармонические отображения задаются просто парой гармонических функций. Следует упомянуть также результат Levy [48], который доказал, что якобиан такого гармонического отображения не меняет знак.

В работе Joest and Shoen [49] было доказано, что в двумерном случае любой диффеоморфизм из M в N гомотопен гармоническому диффеоморфизму при условии, что граница N выпуклая без ограничений на кривизну N. Однако, было доказано только существование некоторого гармонического диффеоморфизма, гомотопного заданному. Возможно, что существуют другие гармонические отображения в том же гомотопическом классе, которые не являются диффеоморфизмами.

Прежде чем рассматривать примеры негомеоморфных гармонических отображений рассмотрим гипотезу Бореля о существовании гомеоморфизмов между многообразиями.

Гипотеза Бореля. Пусть M и N - компактные Римановы многообразия (возможно с непустыми границами), причем кривизна N неположительна, а граница выпуклая. Пусть $f : M \to N$ - гомотопическая эквивалентность такая, что $f(\partial M) \in \partial N$ и сужение $f|_{\partial M} : \partial M \to \partial N$ - гомеоморфизм. Тогда f гомотопна гомеоморфизму в классе гомотопий, фиксированных на ∂M.

Результаты Eells, Sampson [43] и Hamilton [44] подтверждают гипотезу Бореля в двумерном случае, поскольку если кривизна N неположительна, а граница пустая или выпуклая, то гармоническое отображение $\varphi : M \to N$ всегда будет гомеоморфизмом. Можно было бы ожидать, что аналогичная теорема верна и в случае больших размерностей. Однако, примеры, построенные в работе Farrell and Jones [50] показывают, что если $\dim N > 2$, то это не так.

Теорема (Farrell and Jones 1996 [50]).

Для каждого целого $m > 11$, существует пара компактных Римановых m-мерных многообразий (M, G) and $(N, \bar{g})$ границы которых выпуклые, и гармоническое отображение $\varphi : (M, G) \to (N, \bar{g})$ со следующими свойствами

1. Все секционные кривизны (M, G) равны -1, а все кривизны $(N, \bar{g})$ неположительны. Кроме того ∂M строго выруклая.

2. Отображение φ гомотопно некоторому диффеоморфизму в классе гомотопий, фиксированных на ∂M. В частности, φ являетя гомотопической эквивалентностью и его сужение $\varphi|_{\partial M} : \partial M \to \partial N$ - диффеоморфизм.

3. Отображение φ не является диффеоморфизмом, т.е. существуют точки $x \neq y$ в M такие, что $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Заметим, что до сих пор не известно, всегда ли будет гомеоморфизмом гармоническое отображение односвязной области $\Omega \subset R^3$ в выпуклую, например в единичный куб.

Следовательно, теория гармонических отображений неполна в трехмерном случае, наиболее важном для приложений. Это явилось причиной дополнительных исследований, направленных на развитие новых вариационных подходов к построению отображений.

5 Построение криволинейных координат на многообразии

Как следует из предыдущего раздела, применение теории гармонических отображений для построения сеток вызывает определенные трудности в трехмерном случае, поскольку нет достаточной теоретичекой базы для разработки вычислительных алгоритмов. Это подтверждается результатами расчетов, приведенными в [37]. В то же время двумерные адаптивно-гармонические сетки с успехом применялись для решения ряда прикладных задач [37].

Возможно, преодолеть этот "кризис размерности"позволит функционал плотности энергии отображения (19). Рассмотрим задачу построения криволинейных координат на многообразии $(N, \bar{g})$. Пусть $x(\xi)$: $(M, G) \to (N, \bar{g})$ отображение многообразий с локальными координатами ξ и x соответственно, причем многообразие M представляет собой единичных куб $0 < \xi^i < 1$, на котором задана метрика G, а $x \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ - односвязная область. Пусть задано гомеоморфное отображение между границами $\partial M \to \partial N$. Надо построить гомеоморфное отображение $x(\xi) : (M, G) \to (N, \bar{g})$ по заданному отображению между границами, причем последнее записывается как граничное условие типа Дирихле. Построенное таким образом отображение порождает криволинейные координаты на многообразии $(N, \bar{g})$. Вместе с тем $x(\xi)$ - это система криволинейных координат в области Ω.

Сформулируем гипотезу, которая представляет собой вариационный принцип, позволяющий из всех возможных гладких отображений единичного куба на многообразие $(N, \bar{g})$ выделить класс гомеоморфных отображений (см. также [51]).

Отображение $x(\xi) : (M, G) \to (N, \bar{g})$ является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно доставляет минимум функционалу плотности энергии F (19) с некоторой "управляющей"метрикой G.

В двумерном случае дискретный аналог данного вариационного принципа был доказан в работе [52].

Функционал (19) зависит от двух метрик. Метрику $\bar{g}$ можно задавать в зависимости от численного решения уравнений, описывающих физический процесс, например, как метрику поверхности графика вектор-функции, аналогично тому, как это делается при построении адаптивно-гармонических сеток [37]. Метрику G можно задавать таким образом, чтобы обеспечить сгущение и ортогонализацию сетки вблизи границы. Двумерная реализация данного подхода подробно изложена в работе [53]. Результаты расчетов, приведенные в [53], продемонстрировали перспективность применения функционала плотности энергии, зависящего от двух метрик.

Литература

1. Сидоров А.Ф. Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток// Тр. матем. ин-та АН СССР. 1966, Т.74, С.147-151.

2. Годунов С.Л., Прокопов Г.П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т 7. N 5. С. 1031-1059.

3. Белинский П.П., Годунов С.К., Иванов Ю.Б., Яненко И.К. Применение одного класса квазиконформных отображений для построения разностных сеток в областях с криволинейными границами// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т.15. N 6. С.1499-1511.

4. Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток// Числен. методы механ.сплошной среды. 1977 Т.8, N 4, С.157-163.

5. Russel R.D., Christiansen J. Adaptive mesh selection strategies for solving boundary value problems// SIAM J. Numer.Anal. 1978. Vol.15. No.1. P.59-80.

6. Winslow A.M. Adaptive mesh zoning by the equipotential method// UCID-19062, Lawrence Livermore National Laboratories, University of California. 1981.

7. Сидоров А.Ф., Шабашова Т.И. Об одном методе расчета оптимальных разностных сеток для многомерных областей// Числен. методы механ. сплошной среды. Новосибирск, 1981. Т.12, N 5, С.106-124.

8. Сидоров А.Ф., Ушакова О.В. Об одном алгоритме построения оптимальных адаптирующихся сеток и его приложениях// Числен. методы механики сплошн. среды. Новосибирск, 1985. Т.16, N 5, С.101-115.

9. Brackbill J.U., Saltzman J.S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions// J. Comput. Phys., 1982. Vol.46, No 3, P.342-368.

10. Brackbill J.U. An adaptive grid with directional control// J. Comp. Phys. 1993. Vol. 108, No. 1, P.38-50.

11. Dvinsky A.S. Adaptive grid generation from harmonic maps on Riemannian manifolds// J. Comput. Phys. 1991. V.95. N 3. P.450-476.

12. Лисейкин В.Д. О конструировании регулярных сеток на n-мерных поверхностях// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т 31. N 11. С.1670-1683

13. Warsi Z.U., Thompson J.F. Application of variational methods in the fixed and adaptive grid generation// Computers Math. Applic. 1990. Vol.19. No.8/9. P.31-41.

14. Лисейкин В.Д. Обзор методов построения структурных адаптивных сеток// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. N 1. С. 3-41.

15. Liao G. Variational approach to grid generation// Num. PDE's. 1992. Vol.8, P.143-147.

16. Kennon S.R., Dulikravich G.S. Generation of computational grids using optimization. AIAA J. 1986. Vol.24, No.7, P. 1069-1073.

17. Jaquotte O.-P. A mechanical model for a new grid generation method in computational fluid dynamics // Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng. 1988. V.66, pp. 323-338.

18. Иваненко С.А., Чарахчьян А.А. Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. N 4. С. 503-514.

19. Сахабутдинов Ж.М., Петров Г.А., Майгурова С.В. Построение и оптимизация трехмерных криволинейных сеток// Вопр. атомной науки и техн. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1989. Вып.1, С.9-18.

20. Уськов В.М. Построение сеток из невырожденных четырехугольников с использованием критерия Делоне// Вопр. атомной науки и техн. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 1994. Вып. 2. С. 12-16.

21. Steinberg S., Roache P. Variational curve and surface grid generation // J. Comput. Phys. 1992. Vol. 100, No. 1, P. 163-178.

22. Castillo J.E. An adaptive direct variational grid generation method// Computers Math. Applic. 1990. Vol.4. No.1. P.1-9.

23. Godunov S.K., Zhukov V.T. and Feodoritova O.V. An Algorithm for Construction of Quasi–isometric Grids in Curvilinear Quadrangular Regions. In: Proceedings of the 16th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Arcachon, France, July 6-10. 1998. P.49-54.

24. Tiniko-Ruiz, J.G. and Barrera-Sanchez, P. Area Functionals in Plane Grid Generation. In: Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation, University of Greenwich, July 6-9, pp. 293-302, 1998.

25. Прокопов Г.П. Методология вариационного подхода к построению квазиортогональных сеток// Вопр. атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физических процессов. Вып.1. 1998. С.37-46.

26. Гаранжа В.А. Барьерный метод построения квазиизометрических сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т 40, N 11. С.1685-1705.

27. Liu A. and Joe B., Relationship Between Tetrahedron Shape Measures // Bit. 1994. Vol. 34, P.268-287.

28. Dompierre J., Labbe P., Guibault F. and Camarero R. Proposals of Banchmarks for 3D Unstructured Tetrahedral Mesh Optimization// In Proceedings of the 7th International Meshing RoundTable'98, 1998. P.459-478.

29. Knupp P.M. Matrix Norms and the Condition Number. A General Framework to Improve Mesh Quality via Node-Movement. In: Proceedings of 8th International Meshing Roundtable, South Lake Tahoe, CA, USA. 1999. P. 13-22, 1999.

30. Knupp P.M. Algebraic mesh quality metrics// SIAM J. Sci. Comput. 2001. Vol.23. No.1. P.193-218.

31. Thompson J.F., Warsi Z.U.A. , Mastin C.W. Numerical grid generation. North-Holland, N.Y. etc. 1985.

32. Mathematical aspects of numerical grid generation/ Ed. Castillo J.E. Philadelphia. SIAM. 1991.

33. George P.L. Automatic mesh generation. Application to finite element methods/ Chichester, John Wiley & Sons Ltd. 1991. 333 p.

34. George P.L., Borouchaki H. Delaunay triangulation and meshing. Application to finite elements/ Paris. Hermes. 1998. 413 p.

35. Knupp P., Steinberg S. Fundamentals of grid generation/ Boca Raton. CRC Press. 1993. 286 p.

36. Carey G.F. Computational grids: generation, adaptation, and solution strategies// Taylor & Francis. 1997.

37. Иваненко С.А. Адаптивно-гармонические сетки/ М. ВЦ РАН. 1997.

38. Liseikin V.D. Grid Generation Methods/ New York. Springer-Verlag. 1999.

39. Handbook of Grid Generation/ Eds. J.F.Thompson, B.K.Soni and N.P.Weatherill, Boca Raton, Fl. CRC Press. 1999.

40. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия/ М.: Наука. 1986.

41. Eells J.E. and L.Lemair L. Another report on harmonic maps. Bulletin of the London Mathematical Society. 20(86): 387-524, 1988.

42. Fuller F.B. Harmonic mappings. Proc.Nat.Acad.Sci., USA, Vol.40, 987-991, 1954.

43. Eells J.E. and Sampson J.H. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer. J. Math. 86, 1, 109-160, 1964.

44. Hamilton R. Harmonic maps of manifolds with boundary. Lecture Notes in Math. Vol.471, 165 p., 1975.

45. Hartman P. On homotopic harmonic maps. Canad. J. Math. Vol.19, 673-687, 1967.

46. Sampson J.T. Some properties and applications of harmonic mappings. Ann.Ecole Norm.Suo. 11, pp. 211-228, 1978.

47. Shoen R. and Yau S.T. On univalent harmonic maps between surfaces. Invent.Math. 44, f.3, 265-278, 1978.

48. Levi H. On the non-vanishing of the Jacobian in cirtain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 689-692, 1936.

49. Joest J. and Shoen R. On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces. Invent. Math., 66, 353-359, 1982.

50. Farrell F.T. and Jones L.E. Some non-homeomorphic harmonic homotopy equivalences. Bull. London Math. Soc. Vol. 28, pp.177-182, 1996.

51. Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Казунин А.В. О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток// (статья в настоящем сборнике).

52. Иваненко С.А. О существовании уравнений для описания классов невырожденных криволинейных координат в произвольной области// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т.42. N 1. С.47-52.

53. Иваненко С.А. Управление формой ячеек в процессе построения сетки// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. N 11. С.1662-1684.