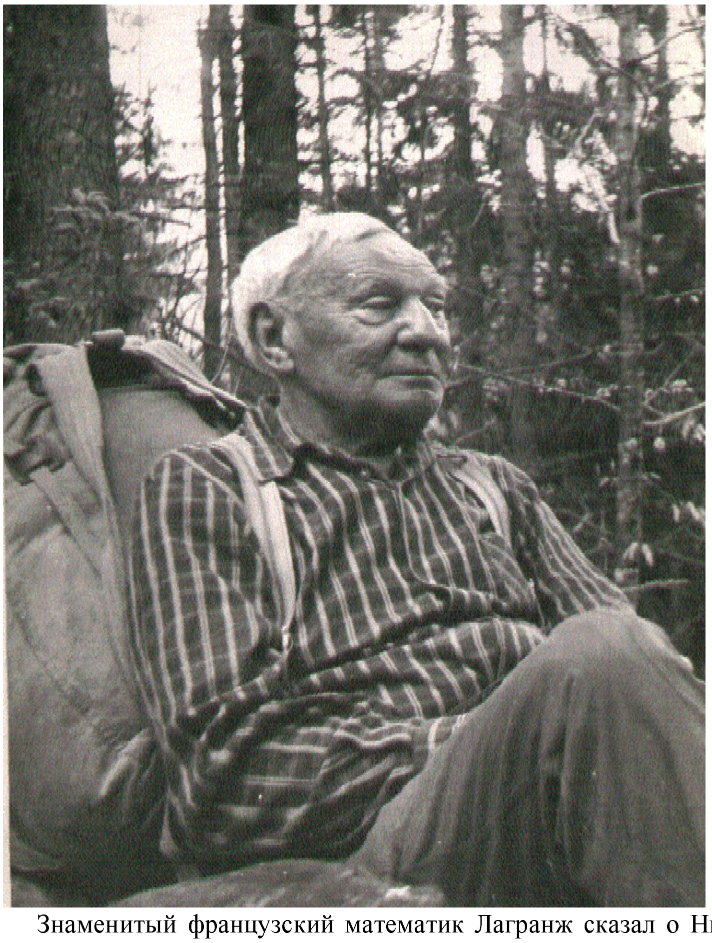
СИСТЕМЫ Б.Н. ДЕЛОНЕ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФУНДАМЕНТ ДИСКРЕТНОГО МИРА.

Р.В. Галиулин
Институт кристаллографии РАН

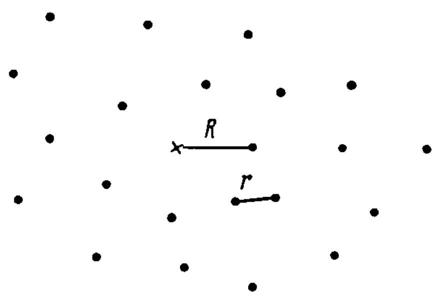


Знаменитый французский математик Лагранж сказал о Ньютоне: "Я завидую Ньютону, ибо система мира только одна, и ее объяснил Ньютон". Примерно то же сказал выдающийся геометр Б.Н.Делоне о выдающемся кристаллографе Е.С.Федорове в своей статье «Федоров как геометр» - «Общий математический закон кристаллических структур один, и его нашел Федоров" [1]. Теперь то же самое можно сказать и о самом Борисе Николаевиче: общий математический закон распределения дискретной материи в любом ее агрегатном состоянии (газ, жидкость, кристалл) один, и его нашел Делоне. Разработанные Борис Николаевичем и его учениками методы позволяют описать более широкий класс субстанций, включая и такие, которые до этого не имели математического описания, а также моделировать экстремальные состояния вещества, такие как ядра атомов, нейтронные звезды, черные дыры, упаковки галактик в глобальной структуре Вселенной.

Определение 1. Системой Делоне называется множество точек, удовлетворяющее следующим двум аксиомам:

а) дискретность - расстояние от любой точки множества до ближайшей к ней точки этого же множества больше или равно некоторому фиксированному отрезку длины r;

б) покрываемость - расстояние от любой точки пространства до ближайшей к ней точки системы меньше или равно некоторому фиксированному отрезку длины R.(рис.1).



Эти две аксиомы, противоречиво дополняя друг друга обеспечивают примерно равномерное распределение точек в пространствах постоянной кривизны (евклидовом, сферическом, гиперболическом). Центры атомов в любом атомном образовании (газе, жидкости, кристалле) образуют систему Делоне. Несмотря на простоту требований, теория систем Делоне, даже в общей ее формулировке весьма содержательна. Перечислим некоторые их свойства.

Лемма о связности. Любые две точки системы Делоне можно соединить ломанной, вершинами которой являются точки этой системы, а звенья не превосходят 2R.
Лемма о полномерности локального окружения. Внутри шара радиуса 2R содержится n-мерная система точек из системы Делоне.
Лемма об ограниченности соотношения радиусов. $r/R <= 2$.

Интересно отметить, что равенства это отношение достигает только в одномерном случае, а его максимуму при размерностях пространства меньше трех соответствуют конкретные (с точностью до гомотетии) решетки. При $n=2$ это решетка построенная на правильном треугольнике, при $n=3$ это так называемая кубическая объемноцентрированная решетка. Верно ли это для пространств более высоких измерений и если не верно, то при какой размерности прерывается эта закономерность? В случае трехмерного пространства имеет место такой экспериментальный факт: системы Делоне, соответствующие центрам атомов в наиболее устойчивых атомных структурах имеют отношение $r/R>=1$. Поэтому такие системы Делоне требуют особого изучения.

Системы Делоне были введены Б.Н.Делоне в 1924 году и подобно исследованы им 1937 году в его знаменитой статье «Геометрия положительных квадратичных форм» [2]. Однако использованы они были в этой статье для весьма частного случая - решеток (полной совокупности точек с целыми координатами в некотором фиксированном репере) и поэтому общность этой теории была не сразу замечена. Это привело к тому, что теория неоднократно переоткрывалась другими авторами (Кокстер, Фейеш-Тот, Арнольд). Сам Б.Н. рассказывал такой анекдотичный случай. Как-то за рубежом он слушал выступление молодого канадца и заметил, что речь идет о пустом шаре - его теории [3], которая и привела к r/R-системами (так он называл системы Делоне).
- Помилуйте, - обратился он к докладчику - об этом уже было доложено в Торонто в 1924 году.
- Да, я родом из Торонто, ответил докладчик, - Но мне тогда было всего 2 года. Теперь же я поставлю вам памятник.

И памятник действительно был поставлен. Кокстер назвал свою теорию «Триангуляция Делоне». Суть триангуляции Делоне состоит в следующем. С каждой системой Делоне однозначно связывается граф, вершинами которого служат все точки системы Делоне, а ребра строятся по следующему правилу. Среди точек системы Делоне раздувается пустой шар, центр которого не в точке системы, до тех пор, пока этот шар не коснется точки системы. Затем этот шар так раздувают, чтобы коснувшаяся его точка оставалась на поверхности шара и до тех пор, пока шар не коснется второй точки системы. Процесс этот может продолжаться до тех пор, пока на поверхности шара окажется не менее n+1 точек. На точки, оказавшиеся на поверхности шара, натягивается выпуклая оболочка. Ее ребра и являются ребрами триангуляции Делоне. Затем шар «проталкивается» через грань выпуклой оболочки и процесс повторяется до тех пор, пока все пространство не окажется разбитым такими выпуклыми оболочками (многогранниками Делоне, сам автор их называл многогранниками L). Если полученное таким способом разбиение (разбиение Делоне) составлено из одних симплексов, то соответствующая система Делоне называется общей. Общие системы допускают «шевеления» всех точек в сфере радиуса r-епсилон, которые не приводят к изменению комбинаторики триангуляции.

Общие системы Делоне нашли широкое применение в вычислительной математике и физике как экстраполяционные «решетки» при вычислении сложных многомерных функций, например, при построении инстантонов в ядерной физике [4]. Затем они стали применяться при разведке нефтяных месторождений для поиска оптимального расположения буровых скважин [4]. Удобным свойством систем Делоне при таких применениях является то, что при добавлении новой точки или при уничтожении точки, триангуляция изменяется только в ближайшей окрестности этой точки. Двумерная триангуляция Делоне вошла в пакте программ «Математика» Вольфрама Рисоча.

Общую систему Делоне можно рассматривать как модель идеального газа (газ Делоне). Однако классические параметры идеального газа до сих пор не связаны с параметрами систем Делоне (имеется ввиду с r и R). Нахождение этих связей может принципиально изменить теорию роста кристаллов из газовой фазы. Очевидно, жидкостями являются такие системы Делоне, которые меняют триангуляцию Делоне при бесконечно малых сдвигах их точек.

Но как перейти к кристаллам ? (Только кристаллы могут быть абсолютно твердыми телами, что между прочим отмечается в некоторых учебниках по физике твердого тела). Для этого систему Делоне надо упорядочить каким-либо естественным способом.

Определение 2. Систему Делоне назовем локально правильной, если все ее точки имеют одинаковое окружение в сфере радиуса 2R.

Теорема Порядок осей симметрии, которыми могут обладать точки в локально-

правильных системах Делоне 3-х мерного евклидова пространства

в окрестности радиуса 2R не превосходит 6.

Т.е. подобные локальные ограничения сильно сближают системы Делоне с кристаллическими структурами. Но как из всех систем Делоне выделить те, которые соответствуют центрам атомов в кристаллических структурах. Главная особенность кристаллических структур состоит в том, что они состоят из одинаковых частиц (отдельных атомов или конечных их совокупностей), которые одинаково окружены всеми другими такими же частицами. Если все эти частицы заменить точками, то получим так называемую правильную систему Делоне, в которой каждая точка равно окружена всеми другими ее точками. Из равенства окружения точек следует, что какие бы две точки системы Делоне ни взять, существует преобразование симметрии (точечное взаимно-однозначное отображение пространства на себя при котором не меняется расстояние между точками), переводящее эти точки друг в друга и всю систему Делоне в себя. Полная совокупность таких преобразований образует группу. Эта группа и называется пространственной кристаллографической группой. В России ее называют Федоровской группой в честь упомянутого в самом начале статьи Е.С.Федорова, выдающегося геометра, кристаллографа и философа, предоставившего в 1890 году полный список этих групп (230). Интересно отметить, что Федоров делал эту работу [5] одновременно с немецким математиком Артуром Шенфлисом (1853 -1928) [6], и они несколько раз сверяли свои результаты, поправляя друг друга.

Шенфлис употреблял в работе методы теории групп. Федоров же делал работу чисто геометрически. Позднее он представил группы алгебраическими уравнениями. Но уравнения эти не оказали существенного влияния на развитие кристаллографии, не смотря даже на то, что позже этот вывод был повторен С.А.Богомоловым [7]. Современная наука руководствуется алгебраическим выводом Цассенхауза [8] и его геометрической интерпретацией [9]. Однако, весьма возможно, что элементы этого вывода уже содержатся в работах Федорова. Чисто математические работы Федорова, напечатанные в период с 1908 по 1918 гг. в «Записках Горного института», к стыду математиков, пока остаются даже не просмотренными. Делоне, самый крупный во всем мире знаток Федорова, и даже он отмечает, что переложение даже первой книги Федорова «Начала учения о фигурах», работу над которой Федоров начал в 16-летнем возрасте, будучи кадетом Инженерного училища в Михайловском замке, составило бы честь каждому математику [1].

Федоровская группа - главный критерий, отличающий кристаллические структуры от всех других атомных образований. Если работа не затрагивает федоровских групп, она не может считаться кристаллографической, т.к. рассматривает более общие состояния вещества. Но приведенное выше определение федоровских групп практически ничего не дает для понимания процесса роста кристалла. Как, например, 501-ый атом находит свою позицию в кристалле? Он же не изучал теории групп. Ответ на этот вопрос вытекает из локального критерия правильности федоровских групп [10].

Определение 3. Систему Делоне назовем правильной, если ее группа симметрии транзитивна на всех точках этой системы.

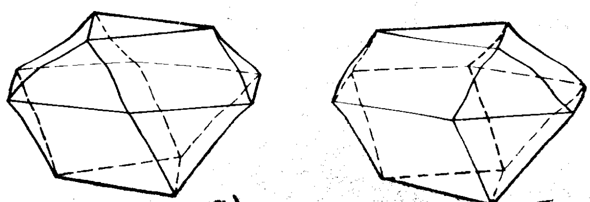
Теорема. Штогрина [11]. Двумерная система Делоне правильная, если каждая ее точка равно окружена в сфере радиуса 4R.

Как было показано Швейцарским кристаллографом П.Энгелом на конкретном примере [12], в случае трехмерного пространства равного окружения в сфере радиуса 4R уже недостаточно. Он предполагает, что граница эта равна 6R.

Но строгой границы для трехмерного пространства до сих пор не найдено, хотя она и имеет принципиальнейшее значение в теории роста кристаллов. Из этой теоремы следует, что кристалл растет дополнением окружений атомов, присоединившихся к затравке (конечному куску атомной структуры) и каждому из этих атомов совсем не обязательно знать как располагаются другие атомы, за исключением тех, которые находятся от него на расстоянии, не превышающем 4R.

Одинаковое окружение всех точек системы Делоне в сфере радиуса 4R однозначно предопределяет всю систему в целом. Это будет только правильная система. При уменьшении этого окружения на любое епсилон появляются не правильные системы Делоне, которые можно назвать дефектными кристаллами. Продемонстрируем это на структуре алмаза [13]. Всем хорошо известно, что в структуре алмаза каждый атом углерода окружен другими атомами углерода по правильному тетраэдру. Поставим теперь обратный вопрос. Пусть каждый атом углерода имеет возможность окружиться по правильному тетраэдру. Получится ли алмаз? Оказывается нет. Получится полисинтетический двойник по октаэдру поскольку имеется другая модификация углерода - лонсдейлит, в которой каждый атом углерода тоже окружен по правильному тетраэдру. Кристалл получится только в том случае, если и во второй сфере окружение будет одинаковым.

В алмазе вторая координационная сфера представляет из себя кубооктаэдр, а в лонсдейлите - гексагональный кубооктаэдр (рис. 2).



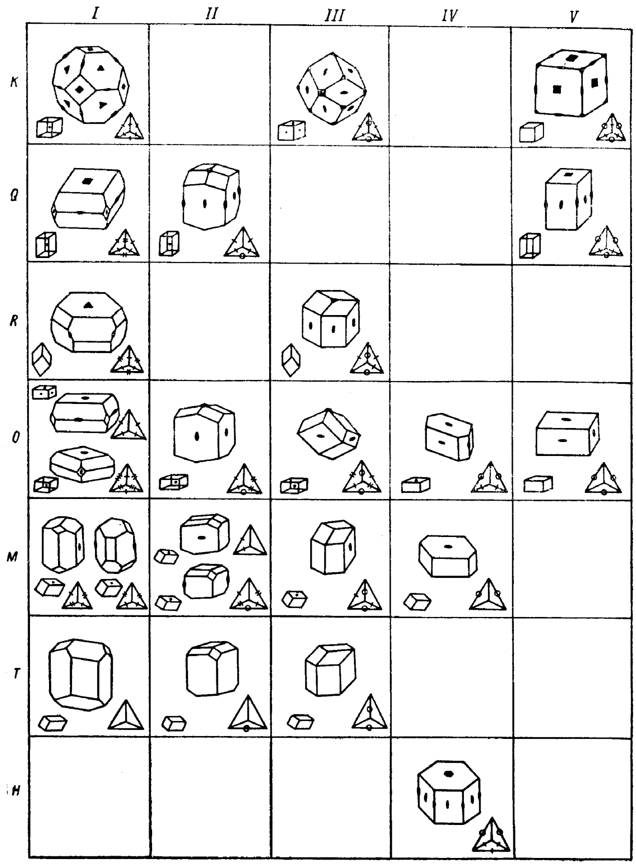
а) б)

Итак в каждой кристаллической структуре можно выделить конечное число связей, ответственных за ее образование. Вопрос о возникновении кристалла можно решать только на основе химических связей. Не по этой ли причине химики глубже чувствуют кристаллографию, чем физики, например. Если же одинаковое окружение сделать меньше 2R, то при этом можно потерять размерность (лемма о размерности локального окружения) и появится хаос.

Устойчивое состояние (минимум энергии) может быть достигнуть только на системах, состоящих из одинаковых частиц, одинаково окружающих друг друга.

Следовательно, все заключено между двумя предельными устойчивыми состояниями материи - хаосом (идеальным газом) и идеальным кристаллом. Все процессы, которые происходят в мироздании - это либо разрушение кристалла, либо его созидание [14].

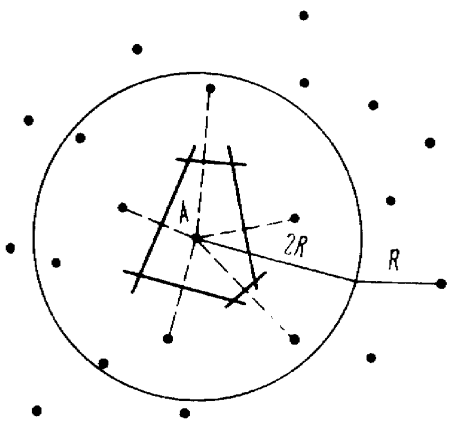
Простейшими системами Делоне в евклидовом пространстве являются решетки. Их классификация была разработана французским естествоиспытателем (другом знаменитого математика Огюста Коши) Огюстом Браве в 1850 году (14 типов Браве решеток. [15]). Делоне построил свою классификацию на основе областей Дирихле - совокупностей точек, каждая из которых ближе к данному узлу решетки, чем к любому другому ее узлу [16, 17] (рис.3).



Геометрическая красота и физическая глубина этой классификации до сих пор поражают исследователей. Одна и та же таблица решает сразу несколько фундаментальнейших задач: явно представляет все идеальные габитусы кристаллов, дает классификацию как ячеек Вигнера-Зейца, так и первых зон Бриллюэна и т.д. Например, из этой таблицы видно, что могут быть фазовые переходы, при которых первая зона Бриллюэна меняет свою комбинаторику без изменения симметрии решетки. Уже недалеко то время, когда в каждой физике будут приводить таблицу 24-х сортов Делоне решеток и очень простой алгоритм их определения с помощью приведения Делоне [18]. Это приведение на некоторое время было забыто. Но оказалось, что оно наиболее подходящее при постановке задач на

ЭВМ. Сам Борис Николаевич этого не предполагал, хотя и написал «краткий курс» по вычислительным машинам [19]. Следует отметить, что изложения Делоне - это готовые алгоритмы для ЭВМ.

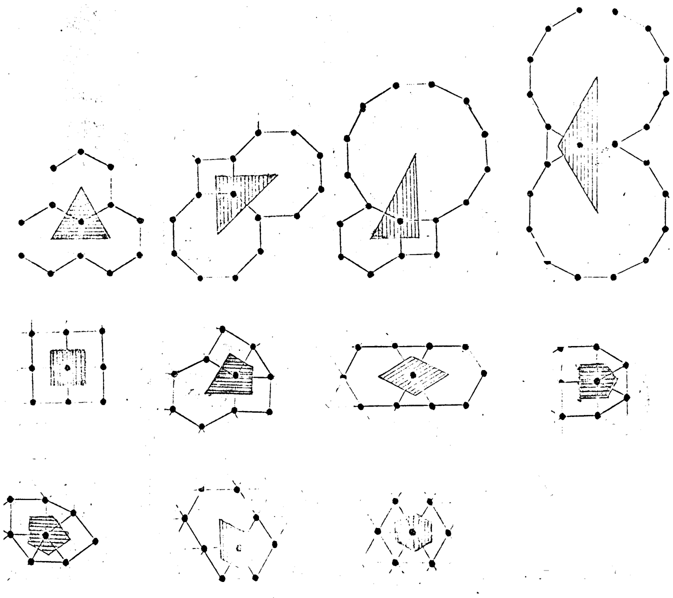
С каждой правильной системой Делоне однозначно связывается многогранник (стереоэдр Дирихле), который строится следующим образом. Вокруг любой точки системы Делоне описывается шар радиуса 2R . попавшие в этот шар точки системы Делоне соединяют с точкой системы, совпадающей с центром шара и полученные таким способом отрезки делят пополам перпендикулярными к ним плоскостями.(рис.4) Совместно



с Н.Н.Сандаковой Б.Н.Делоне была доказана теорема [20], что число комбинаторно различных стереоэдров (их реберные сетки не натягиваются друг на друга) конечно. И Борис Николаевич много лет надеялся, что ему удастся создать полный атлас стереоэдров Дирихле для трехмерного евклидова пространства. Однако кандидатская диссертация одного из авторов этой работы существенно охладила этот пыл [21]. Только для одной федоровской группы (триклинной с центром инверсии) было выведено 165 комбинаторно различных таких стереоэдров! Число граней у некоторых достигало 22-х, хотя Делоне когда-то полагал, что их не больше 16-ти, хотя строгое рассмотрение этого вопроса привело его к цифре 384. А когда Петер Энгел нашел стереоэдр с 38-ю гранями [22], то об этой задаче совсем забыли. Интересно отметить, что буквально накануне выхода статьи Энгела, известный кристаллограф Лавес опубликовал статью о том, что число граней стереоэдра не должно превышать 26-и. Результат Энгела произвел примерно такое же впечатление на знатоков этой проблемы, какое вратарь Мышкин произвел на болельщиков хоккея, впервые встав в ворота сборной страны не пропустил ни одной шайбы в тяжелейшем матче с командой звезд НХЛ. Задача о максимальном числе граней у стереоэдра до сих пор остается открытой. Не составлен также и полный список стереоэдров, хотя современные компьютерные программы значительно облегчают выполнение этой задачи.

Штогрин [23] доказал конечность числа типов стереоэдров Дирихле-Вороного для любой фиксированной дискретной группы с конечной фундаментальной областью. Для федоровских групп евклидова пространства – это теорема Делоне-Сандаковой, для пространства Лобачевского – это новая теорема. Стереоэдры, построенные для всех точек правильной системы Делоне, образуют правильное разбиение пространства, которое называют разбиением Дирихле-Вороного. Но было обнаружено [24], что в некоторых правильных разбиениях евклидовой плоскости на планигоны Дирихле-Вороного их центры действия могут образовывать системы Делоне, которая не являются правильными. Для плоскости все такие системы Делоне найдены [24]. Весьма важно найти их и для трехмерного пространства. Важно потому, что если, например, кристаллическая структура будет расти путем агрегации многогранников Дирихле-Вороного для атомов, расположенных по такой системе Делоне, то идеального кристалла заведомо не получится. Изучение таких систем Делоне весьма актуальная задача.

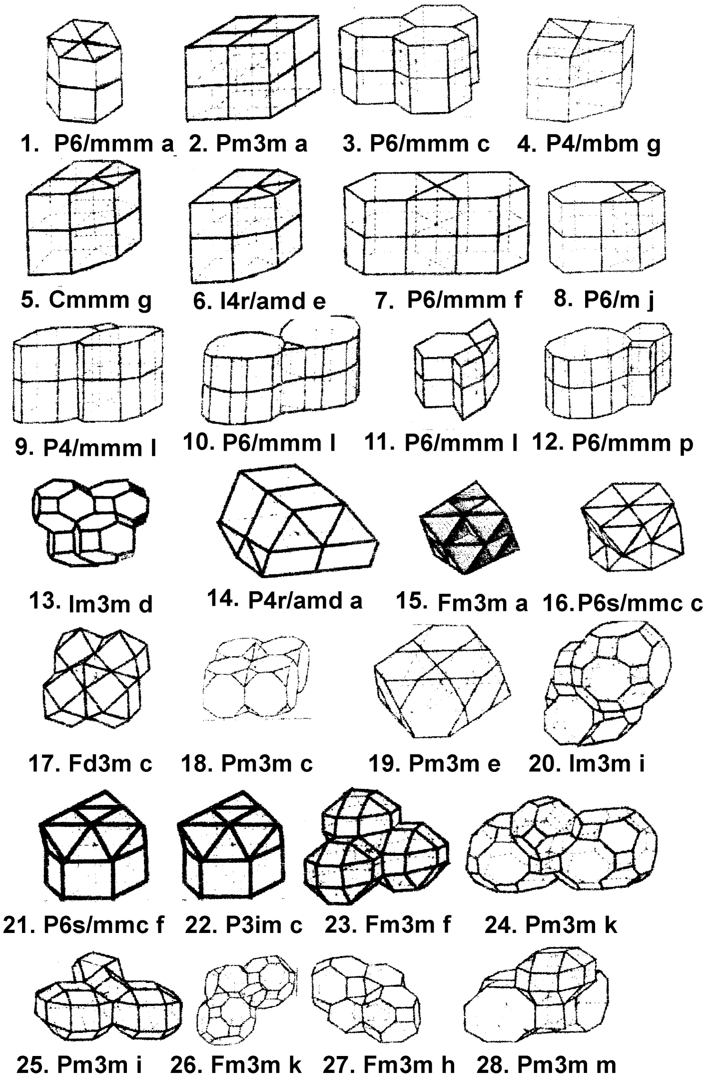
В 1916 году известный кристаллограф А.В.Шубников поставил следующую задачу [25]: пусть каждый атом на плоскости имеет одинаковое число связей с другими атомами. Сколько разных сеток они могут дать? Шубников с изъянами в доказательстве нашел 11 разных таких сеток. На языке систем Делоне эта задача формулируется следующим образом: сколько имеется комбинаторно-различных триангуляций Делоне на двумерных правильных системах Делоне. Эта чисто топологическая задача показывает, что двумерная теория правильных систем Делоне (двумерная кристаллография) имеет чисто топологическое обоснование. Поэтому при росте двумерного кристалла совсем не обязательно, чтобы атомы скрупулезно заботились о длине связей и углами между ними. Чтобы образовался кристаллический зародыш, достаточно, чтобы внутренние атомы этого зародыша имели одинаковое число связей! Это условие очень сильно ослабляет требования на кристаллообразование. Делоне также показал, что 11 сеток Шубникова можно представлять узорами, составленными только из правильных многоугольников [26](рис.5), со-



единив тем самым эту задачу с паркетами Кеплера [27].

В случае трехмерного пространства аналогичное решение вряд ли может быть получено. Если же учитывать только кеплеровскую линию, то она вошла в так называемые разбиения Андреини [28] - разбиения евклидова трехмерного пространства на правильные и полуправильные изогоны, вершины которых образуют правильную систему Делоне. Андреини нашел не все такие разбиения. В настоящее время известно 28 таких разбиений (рис.6). Однако полнота этого списка до сих пор не доказана.

ЗВЕЗДЫ РАЗБИЕНИЙ АНДРЕИНИ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПОЗИЦИИ УАЙКОВА



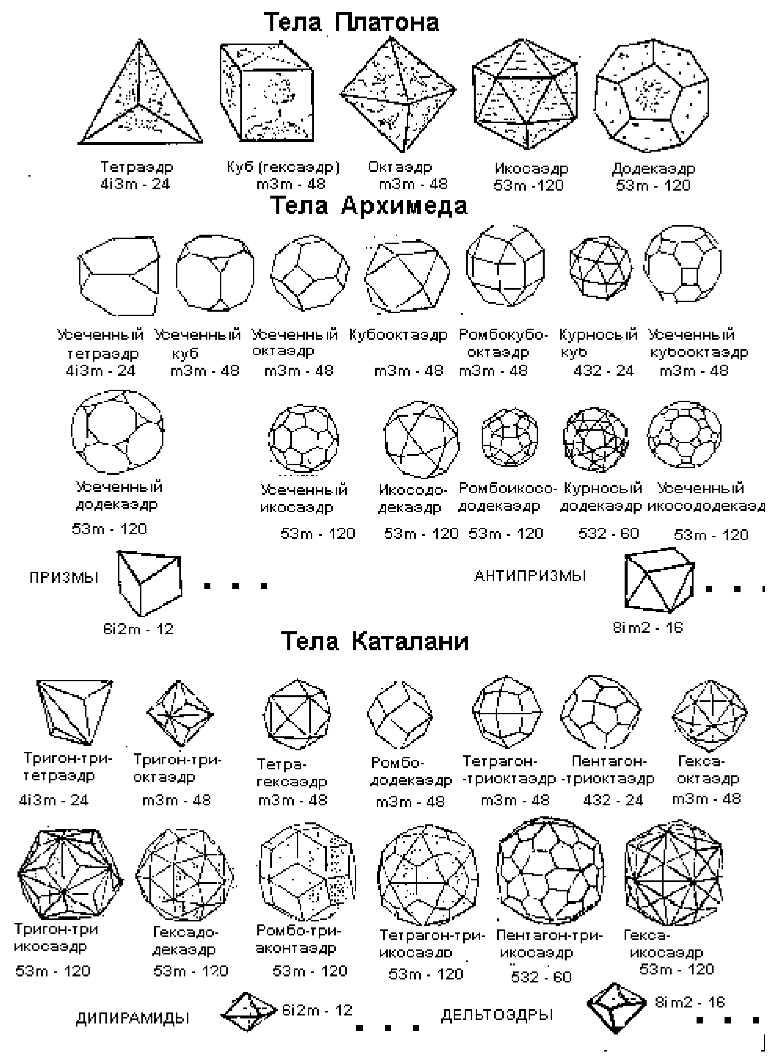
Разбиения Андреини выводят исследования кристаллических структур на новый геометрический уровень. Это есть обобщение теории плотнейших шаровых упаковок, в которой подавляющее большинство кристаллических структур притягивались либо к кубической плотнейшей упаковке (15-й случай0, либо к гексагональной (16-й случай).

Очевидно, что каждому разбиению Андреини взаимно-однозначно соответствует разбиение Дирихле-Вороного, стереоэдры которого (стереоэдры Андреини), могут иметь не более 12-ти граней. Возможно, что проблема полноты списка разбиений Андреини будет решена путем нахождения стереоэдров Андреини.

Заметим теперь, что федоровские группы имеют и чисто теоретико-групповое определение не связанное с конкретной метрикой: дискретные группы с конечной независимой областью. Неоднократно делались попытки найти другие группы симметрии атомных структур, которые содержали бы федоровские группы, как свои подгруппы. Однако для этого надо отказаться либо от дискретности атомных структур, либо от конечности фундаментальной области. Например, было замечено, что в некоторых кристаллах, состоящих из молекул (молекулярных кристаллах), например, в кристаллах толана , одинаковые молекулы распадаются на две совокупности, не связанные преобразованиями симметрии федоровской группы. Было опубликовано около десятка статей, как химиками, так и физиками, в которых конструировались так называемые суперфедоровские группы, объединяющие такие молекулы между собой. Но искомая группа должна быть дискретной, а ее независимая область должна быть по крайней мере в 2 раза меньше независимой области федоровской группы, соответствующей кристаллической структуре толана. Следовательно, она и подавно будет конечной, т.е. кроме федоровской группы ничего другого в принципе не может появиться.

В самом конце1984 году весь мир облетела весть. Законы кристаллографии низвергнуты! Получен сплав с дальним порядком, обладающий осями симметрии 5-го порядка, запрещенными в кристаллах! Все бросились изучать этот сплав, который был назван квазикристаллом. затопил буквально все научные журнал[29]. Еще бы, открывается возможность выращивать абсолютно упорядоченные атомные структуры, обладающие любой симметрией. А по словам выдающегося физика, лауреата Нобелевской премии Л.Д.Ландау (1908-1968), симметрия является фундаментальным свойством вещества [30,31]. Например переход вещества из нормального состояния в сверхтекучее или сверхпроводящее обязательно сопровождается изменением симметрии. Кристаллография сильно ограничивает возможность таких изменений. Она не допускает так называемой икосаэдрической симметрии, симметрии, которой обладают два самых красивых из тел Платона - додекаэдр и икосаэдр (рис.7). Квазикристаллы снимали эти ограничения без нарушения, как тогда казалось, дальнего (абсолютного) порядка в расположении атомов.

Правильные и полуправильные выпуклые многогранники



К чести тонких знатоков кристаллографии надо сказать, что ни один из них не поддержал этого открытия, вернее его интерпретации, как нового типа дальнего порядка, отличного от кристаллографического. По мнению Федорова , кристаллография - основа всех естественных наук [32]. Поэтому научные результаты не должны противоречить ее законам. Дважды лауреат Нобелевской премии Лайнус Полинг (1901-1994) сразу же предложил две модели, объясняющие физический эксперимент по получению квазикристаллов, не противоречащих законам кристаллографии [29]. По первой модели квазикристаллы являются обычными закономерными сростками кристаллов, двойниками, весьма распространенном явлении .Для второй модели Полинг ввел понятие аппрокси-

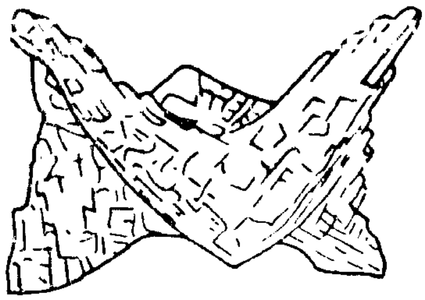
мантов, т.е. кристаллов, которые, с точностью до ошибок эксперимента, обладают икосаэдрической симметрией. Подобного типа кристаллы образует, например, пирит (рис. 8).

Но эти два весьма красивых примера не смогли противостоять наплыву статей о квазикристаллах, который не иссякает и по сей день, даже не смотря на то, что вспомнились и появились новые, чисто математические результаты, показывающие исключительность кристаллографической симметрии [33] . Оказывается, что дальний порядок при росте вещества из затравки может быть только в кристаллических структурах. Все остальные вещества содержат элементы неупорядоченности, хаоса. Вот почему строгое изучение структуры вещества, даже не атомного, даже жидкости должно начинаться с кристаллографического порядка смысл которого состоит в следующем.

Если исключить из рассмотрения электроны и кварки, о структуре которых пока ничего неизвестно, то все известные в настоящее время вещества дискретны и обладают небольшим (строго говоря, конечным) числом различающихся между собой частиц. А одинаково устроенные частицы стараются иметь одинаковое окружение, чтобы ничем не отличаться друг от друга [33]. Только при этих условиях вещество становится устойчивым, достигается минимум его внутренней энергии. На двумерной сфере все комбинатоно-различные триангуляции Делоне тоже представляются правильными многоугольниками (рис.7, первые 4 ряда). Эти многогранники соответствуют всем устойчивым состояниям взаимодействующих между собой одинаковых частиц на поверхности шара.

Устойчивость достигается только на кристаллах. По этой причине теории кристаллического строения как нейтронных звездах, так и супергалактик выглядят достаточно обоснованно. В природе нет других возможностей упорядочивать материю, кроме как упаковывать ее в кристаллы.

Все вышеизложенное касалось в основном кристаллических структур в евклидовом пространстве. Однако дискретные группы с конечной независимой областью имеют место еще в двух пространствах - сферическом (в котором сумма углов треугольника больше 180) и пространстве Лобачевского (в котором сумма углов любого треугольника меньше 180). Примером сферического кристалла является фуллерен C60 . Он обладает группой икосаэдра. Фуллерен по своей химической сути является двумерным сферическим алмазом, ровно как и графит - двумерный евклидов алмаз. Поэтому естественно рассмотреть и двумерный алмаз Лобачевского, который вероятней всего будет выглядеть как упаковка чешуек, имеющих форму обезяньего седла (рис. 8). Такую форму имеют кристаллы доломита [34].



В рамках неевклидовой геометрии проблема квазикристаллов решается самым классическим образом.

Определение 3. Квазикристалл есть идеальный кристалл пространства Лобачевского [35].

В пространстве Лобачевского имеется бесконечная серия дискретных групп с конечной фундаментальной областью (федоровских групп) с икосаэдрической точечной группой симметрии. Заметим, что правильные системы Делоне, соответствующие этим группам, могут быть настолько сложными, что без предварительного знакомства с ними, они могут быть восприняты как хаотические системы. Если, например, супергалактики образуют такую правильную систему, то вряд ли рядовой астроном увидит в ней порядок. Для этого надо хотя бы чуть-чуть знать геометрию Лобачевского.

Главное отличие неевклидовых кристаллических структур от евклидовых состоит в том, что первые не обладают параллельными переносами - это апериодические кристаллические структуры. Поэтому уже в названии докторской диссертации [36], в которой сделана попытка спасти пенрозоподобную модель квазикристалла с помощью систем Делоне, содержится ошибка. Параллельные переносы могут существовать только в евклидовых федоровских группах (теорема Шенфлиса [37]).

Заметим теперь, что пространство наше не чисто евклидово. Оно искривлено гравитацией. Поэтому больших идеальных атомных евклидовых кристаллов на поверхности Земли в принципе не должно быть. Если и то все они сдвойникованны. Все они распадаются на блоки, все они находятся в напряженном состоянии и чтобы снять эти напряжения кристаллы при росте захватываю чужеродные атомы (примеси), либо свои сажают в случайные позиции Уайкова (межузельные дефекты), либо пропускают очередные позиции (вакансии), либо при скручивании обрывают рост моноатомной плоскости (краевые дислокации, , либо разрывают атомную плоскость и ее рост продолжается по винтовой поверхности (винтовые дислокации. Но кристаллы, выращенные в космосе обладают меньшим числом таких дефектов, что можно объяснить тем, что кривизна пространства на орбите спутника меньше кривизны на поверхности Земли. И конечно же кристаллическая структура нейтронной звезды - неевклидова. А кристаллическая структура, которую, возможно, образуют супергалактики, скорее всего обладает гиперболической федоровской группой [38] евклидова Но, возможно, правы те 13 астрономов, напечатавших в 1997 году статью в журнале Nature [39] о том, что центры тяжестей обнаруженных на сей день 420 супергалактик образуют примитивную кубическую решетку, ребро параллелепипеда Браве которой равно 120 мегапарсек!

Таким образом, системы Делоне в настоящее время становятся глобальной геометрической моделью современного Мироздания. Оно имеет два устойчивых и практически недостижимых предела - хаос, абсолютно не детерминированная состояние вещества (газ, общая система Делоне) и идеальный кристалл, полностью детерминированное состояние вещества (правильная система Делоне, идеальный кристалл). Все остальное - частные случаи этих двух систем.

Если вещество получает энергию извне, то оно тратит ее на упорядочение. А идеальный порядок достигается только на кристаллических структурах.

Теорема [40]. Минимума энергии вещество достигает кристаллизуясь.

Поэтому системы Делоне - актуальнейшая проблема современного Мироздания.

Цитированная литература

1. Б.Н.Делоне. Федоров как геометр. Труды института Истории естествознания и техники, 1956, т.10, с.5-12
2. Делоне Б.Н. Геометрия положительных квадратичных форм. УФН. 1937. N 3. с.3.
3. B.N.Delaunay. Sur la sphere vide. Proceedings of the international mathematical congress, 1928 , p.695-700
4. М.Э.Агиштейн, А.А.Мигдал. Как увидеть невидимое. Эксперимент на дисплее. первые шаги вычислительной физики. Москва, Наука, 1989, Серия "Кибернетика" с.141-170
5. Е.С.Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Записки Импер.С.Петерб. Минер. О-ва, (2), 28, 1891, 148 с.
6. A.Schonflies. Kristallsystem und Kristallstructure. Leipzig, 1891, 638s.
7. С.А.Богомолов. Вывод правильных систем по методу Федорова. Ч.1, Л., 1932, 100 стр., ч.2, Л, 1934, 191 с.
8. H.Zassenhaus. Uber einen algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. Commentaria Mathematica helvetici, 21 (1948), 117-141.
9. Р.В.Галиулин. Матрично-векторный способ вывода федоровских групп. ВИНИТИ, деп. 1969, 100 с.
10. Б.Н.Делоне, Н.П.Долбилин, М.И.Штогрин, Р.В.Галиулин. Локальный критерий правильности системы точек. Доклады АН СССР, сер. Математическая, 1976 г., т. 227, N 1, с. 19-21.
11. М.И.Штогрин. Правильные разбиения пространств постоянной кривизны и их приложения. Автореферат на соискания ученой степени доктора физико-математических наук. Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 2000.
12. Peter Engel. Geometric Crystallography. Dordrecht, 1986, 266 p.
13. Р.В.Галиулин. Как устроены кристаллы. Квант. 1983. N11. С.10
14. Р.В.Галиулин. Геометрическая теория кристаллообразования. Кристаллография, 1998, т.43, №2, с.366-374.
15. Огюст Браве. Кристаллографические этюды. Изд-во «Классики науки», 1974, 420 с.

16. B.N.Delaunay. Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie. Zs.f.Kristallogr., 1933 Bd. 84 S.109-149.
17. Б.Делоне, Н.Падуров, А.Александров. Математические основы структурного анализа кристаллов. Гостехиздат, 1934, 328 с.
18. International Tables for X-Ray Crystallography. Birmingem, 1952.
19. Б.Делоне. Краткий курс математических машин. М.-Л., ГИТТЛ, 1952, 135с.
20. Б.Н.Делоне, Н.Н.Сандакова. Теория стереоэдров. Тр.Мат.ин-та, 1961 т.64 с. 28-51.
21. М.И.Штогрин. Правильные разбиения Дирихле-Вороного для второй триклинной группы. Труды Мат. Ин-та , 1973, т.123.
22. Peter Engel. Uber wirkungsberaeichsteilungen von kubischer Symmetrie. Zs.f.kristallogr., 1981, b.157, s.259-275
23. Штогрин М.И. О центрах действия планигонов. Математические заметки, 1988, т.44, - 2, с.262-278.
24. М.И.Штогрин. О конечности числа типов стереоэдров Дирихле-Вороного. Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. Изд.во МГУ, М., 1989, с.115-116.
25. А.В.Шубников. К вопросу о строении кристаллов. Известия Имп. Акад. Наук. 1916, Сер.6 Т.10. N 9, с. 755-779.
26. Б.Н.Делоне. Теория планигонов. Изв.АН СССР, 1959 Сер. Матем., т.23,№3, с.365-386
27. Johannes Kepler. Harmonice Mundi. 1619.
28. Angelo Andreini, Sulle reti di poliedri regolari e semiregolari e sulle corrispondentireti correlative. Mem.Societa Italiana delle Scienze, Ser.3, vol.14(1905), pp.75-129
29. Дени Гратиа. Квазикристаллы. УФН, 1988, т. 156, в. 2, с.347-364.
30. А.Ф.Андреев. Сверхтекучесть, сверхпроводимость и магнетизм в мезоскопике. УФН, 1998, т.168, № 6, с.655-663.
31. А.Ф.Андреев. Мезоскопика и фундаментальные св-ва пространства. Природа (1998) 12 стр. 3-10.
32. Е.С.Федоров. Перфекционизм. Изв. С.-Петерб. биол. лаб. 1906. Т.8. вып.1. С.25; вып. 2. С. 9.
33. Галиулин Р.В. Федоровские группы - универсальный закон приро ды. Природа. 1991. N 12. С.20
34. R.V.Galiulin. Noneuclidean crystallography. Science spectra, 1998, 14, p.54-60
35. П.Н.Антонюк, Р.В.Галиулин, В.С.Макаров. Квазикристалл - идеальный кристалл пространства Лобачевского. Природа, 1993, 7, с.28.

36. Н.П.Долбилин. Правильные и апериодические структуры в пространствах постоянной кривизны. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Математический институт им. В.А.Стеклова, М., 2000
37. Делоне Б.Н., Штогрин М.И., Упрощенное доказательство теоремы Шенфлиса. Докл. АН СССР. 1974. Т.219. С.95.
38. Ivanenko D.D. R.V.Galiulin. Quasicrystal model of the Universe. Тр. 17-го Междунар. семинара по физике высоких энергий и теории поля. Протвино, 1995. С. 80.
39. Einasto J. Et al «A 120-Mpc Periodicity in the three-Dimensional distribution of Galaxy superstructures. Nature, 385, 139-141, 1997
40. Р.В.Галиулин. Кристаллографическая картина мира. УФН, 2002, т.172, №2, с.229-233