Работы Вороного и Александрова о разбиении пространства

Н.П.Долбилин[1]
Математический институт им. Стеклова РАН

Женератрисса Вороного ([3])

Пусть $X \subset \mathbf{R}^d$ - множество Делоне (или (r, R)-система) и $\mathcal{V}(X)$ и $\mathcal{D}(X)$ – разбиения Делоне (триангуляция Делоне) и Вороного (диаграмма Вороного), соответственно. Обозначим через

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{y} = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^{d+1} | x_0 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2\}$$

круговой параболоид в $\mathbf{R}^{d+1}$. Пусть $Y \subset \mathcal{P}$ – дискретное множество, $Conv(Y)$ – его выпуклая оболочка, а $Tan(Y)$ – выпуклый многогранник, являющийся пересечением полупространств, лежащих от гиперплоскостей, касающихся параболоида в точках из Y, по ту же сторону, что и гиперболоид.

Рассмотрим проекцию $\pi : \mathbf{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbf{R}^d$, где $\pi(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Многогранники $Conv(Y)$ и $Tan(Y)$ проектируются в разбиения Делоне и Вороного, соответственно, для множества $X = \pi(Y)$:

$$\pi(Conv(Y)) = \mathcal{D}(X), \ \pi(Tan(Y)) = \mathcal{V}(X).$$

Таким образом, задача вычисления разбиения Делоне для множества X эквивалентна задаче вычисления выпуклой оболочки поднятого на параболоид множества Y. Этот хорошо известный в вычислительной геометрии факт был открыт и использован Вороным в его исследованиях по теории параллелоэдров (женератрисса).

Теорема Александрова о разбиениях пространства ([1]).

Определение. *Разбиением* T пространства $\mathbf{X}^d$ на ограниченные, замкнутые многогранники называется совокупность многогранников $\{P_1, P_2, \ldots\}$ такая, что

[1] Работа поддержана РФФИ, грант 02-01-00803, и Фондом поддержки научных школ, грант 00-15-960011

(i) многогранники P_i, P_j, $i \neq j$ попарно не имеют общих внутренних точек:

$$\mathrm{Int}(P_i) \cap \mathrm{Int}(P_j) = \emptyset;$$

(ii) совокупность многогранников $\{P_i,\, i = 1, 2, \ldots\}$ является покрытием пространства:

$$\bigcup_i P_i = X^d.$$

Теорема Александрова (точная формулировка технически громоздка) состоит в том, что для того, чтобы совокупность многогранников в пространстве образовывала разбиение достаточно, чтобы
(1) к данному многограннику по каждой его гиперграни (грани коразмерности 1) прилегал многогранник и
(2) многогранники, сходящиеся вокруг данного "гиперребра"(т.е. грани коразмерности 2), взаимно не перекрывались.

Заметим, что требование (2) неперекрывания лишь многогранников вокруг гиперребер гораздо слабее, чем требование неперекрывания вообще любых двух многогранников. Тем не менее последнее следует из (2). Доказательство опирается на то, что накрытие односвязного пространства совпадает с самим пространством.

Теорема Александрова чрезвычайно полезна в приложениях. Она используется при доказательстве сложной теоремы о продолжении ([5]), которая отвечает на один из центральных вопросов теории правильных разбиений пространства: дан многогранник, описать условия, при которых существует правильное разбиение пространства на многогранники, конгруэнтные данному.

Напомним, что разбиение пространства на многогранники называется *правильным*, если группа симметрий разбиения действует на множестве многогранников разбиения транзитивно.

Теорема о продолжении (точная формулировка будет приведена и прокомментирована в лекции), которая тесно связана с локальной теоремой ([4]) о правильных структурах, полностью описывает в терминах так называемой обобщенной $(d-2)$-короны условия, при которых данный многогранник допускает правильное разбиение пространства. Из этой теоремы, легко следуют известные теоремы о фундаментальных многогранниках для дискретных групп, в частности, классическая теорема Венкова о параллелоэдрах.

Заметим, что общая задача о существовании произвольного разбиения пространства на многогранники, конгруэнтные многогранникам из данного набора, как показали Wang и Berger ([7], [8]), алгоритмически неразрешима.

Теорема Александрова о существовании выпуклого многогранника с данной разверткой [2]).

Теорема. *Из всякой развертки, гомеоморфной сфере и имеющей суммы углов в вершинах $\leq 2\pi$, можно склеить замкнутый выпуклый (трехмерный) многогранник.*

Для доказательства единственности выпуклого многогранника с данной разверткой. А.Д.Александров применяет метод Коши. Доказательство достаточности опирается на очень глубокую идею и основано на одной топологической лемме Александрова.

Литература.

[1] Александров А.Д., *О заполнении пространства многогранниками* , Вестник Ленинградского Университета, сер. матем, физ., хим., (1954), **9**, 33–43.

[2] Александров А.Д., *Выпуклые многогранники*, Москва (1950).

[3] Вороной Г.Ф., *Исследование о примитивных параллелоэдрах*, Собрание сочинений, **2**, Киев (1952).

[4] Делоне Б.Н., Долбилин Н.П., Штогрин М.И., Галиулин Р.В., *Локальный критерий правильности системы точек* , ДАН СССР, матем., **227**, N 1 (1976), 319–322.

[5] Dolbilin N.P., *The Extension Theorem.* Discrete Mathematics, **221**, N 1-3, (2000) 43-60.

[6] Dolbilin N.P., Lagarias J.C., Senechal M., *Multiregular point systems*, Discr. and Comput. Geometry, **20**:477–498 (1998).

[7] Wang, H., *Proving theorems by pattern recognition*, II. Bell System Tech. J. 40 (1961), 1–42.

[8] Berger, R.,*The undecidability of the domino problem*, Memoirs Amer. Math. Soc. No 66 (1966), 72 pp.