

СЕТОЧНЫЙ ГЕНЕРАТОР БАРЬЕРНОГО ТИПА ДЛЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

А.А. ЧАРАХЧЬЯН

119991 Москва, ГСП-1, ул. Вавилова 40, ВЦ РАН

E-mail: chara@ccas.ru

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается проблема построения регулярных сеток в областях с криволинейными границами. На плоскости (x, y) имеется некоторая область, в которой нужно построить сетку

$$G = \{(x, y)_{ij}, i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M\} \quad (1)$$

при заданных координатах граничных узлов $(x, y)_{i0}$, $(x, y)_{iM}$, $(x, y)_{0j}$, $(x, y)_{Nj}$. Имеется много работ, посвященных этой проблеме (см., например, книги [1,2] и обзор [3]).

Регулярная сетка состоит из четырехугольных ячеек, и одна из серьезных трудностей, возникающих при ее построении, заключается в возможном появлении самопересекающихся ячеек, что делает сетку непригодной для расчетов. Эта трудность была преодолена в методе [4], который на каждой итерации гарантирует выпуклость всех ячеек сетки (за естественным исключением тех ячеек, невыпуклость которых предопределена соответствующим заданием граничных узлов) практически при любом искривлении граничных линий.

В развитие метода [4] автором был предложен метод [5], являющийся компиляцией [4] и простой квазиодномерной сетки с расстановкой узлов вдоль прямых. В настоящей работе приводится последний вариант метода [5] и даются примеры расчетов ударно-волновых течений конденсированных сред.

Остановимся на недостатках метода [4]. Наиболее серьезный из них заключается в том, что узлы сеточной линии, ближайшей к границе, могут сильно от нее отходить. На фиг. 1 приведена область, возникавшая при моделировании гидродинамической неустойчивости границы раздела сред. Точками отмечены угловые узлы сетки $(0, 0)$, $(0, M)$, (N, M) и $(N, 0)$. Наиболее серьезная трудность при построении сетки связана

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00551).

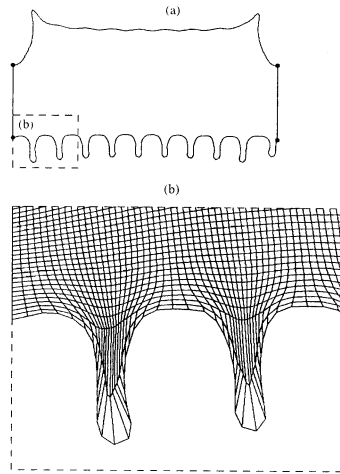


Рис. 1: Область и фрагмент сетки, полученной методом [4]

с нижней границей, на которой имеются несколько узких и длинных “языков”. Заметим, что вариант метода Winslow из [1] дает для данной области сетку с самопересекающимися ячейками. Фрагмент сетки, построенной методом [4], показан на фиг. 1. Сетка состоит только из выпуклых ячеек. Тем не менее в языке, поведение которого и представляет основной интерес в данной задаче, точность расчета невысокая из-за больших размеров ячеек.

Другим недостатком метода [4] является низкая скорость сходимости итерационного процесса. Как указывалось еще в книге [1], наиболее сильно этот недостаток проявляется при решении нестационарных задач с подвижными границами, когда сетку нужно строить на каждом шаге по времени, что требует разумного ограничения на число итераций при построении сетки. В то же время сильная “недоитерированность” сетки часто приводит к тому, что внутренние узлы перестают успевать за движением границ. Вблизи одних границ могут возникнуть очень большие ячейки, что приводит к снижению точности расчета. Вблизи других границ, наоборот, могут возникать очень маленькие ячейки, что приводит к неоправданно маленькому шагу по времени. Возникают трудности и при построении начальной сетки для метода [4] на очередном шаге по времени.

Продемонстрируем указанный недостаток на следующем простом

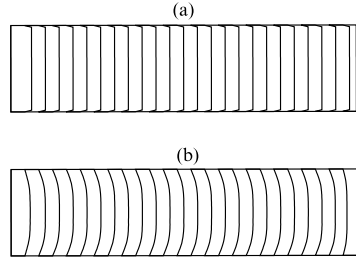


Рис. 2: Недоитерированность сетки при движении границ: а — линии одного семейства для начальной сетки, б — для сетки после 50 итераций методом [4].

примере. Пусть имеется прямоугольная область с равномерной расстановкой узлов вдоль всех границ, показанная на фиг. 2. Наиболее подходящей сеткой для такой области как правило является прямоугольная сетка из прямых, параллельных границам. Эта сетка является и решением алгебраических уравнений метода [4]. Пусть теперь все граничные узлы сетки сместились влево на некоторый шаг, а внутренние узлы сетки остались неподвижными. Вертикальные линии сетки при этом не изменились, а горизонтальные сместились вправо, и на них появились изломы вблизи боковых границ, как это показано на фиг. 2а. Эта сетка берется в качестве начальной для метода [4]. Горизонтальные линии сетки, полученной после 50 итераций, показаны на фиг. 2б. Видно, что движение границ по-прежнему оставляет на сетке существенный след, что может приводить к заметному падению точности по сравнению с расчетом на сетке из прямых линий.

1. КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ СЕТКИ

Здесь и далее для сокращения записи вводится обозначение $\vec{r}_{ij} = (x, y)_{ij}$ и формулы приводятся в векторном виде.

Простейший способ построения сетки (1) заключается в следующем (см. [1]). Линии одного семейства, отвечающие, для определенности, постоянному значению индекса j , полагаются прямыми, узлы вдоль которых расставляются некоторым разумным образом. Для граничной линии $j = 0$ вначале вычисляются величины s_i^0 :

$$s_0^0 = 0, \quad s_{i+1}^0 = s_i^0 + |\vec{r}_{i+1,0} - \vec{r}_{i0}|^2, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Моноotonно возрастающая последовательность

$$t_i^0 = s_i^0/s_N^0, \quad i = 0, \dots, N, \quad t_0^0 = 0, \quad t_N^0 = 1$$

называется законом расстановки. Аналогично определяется закон расстановки t_i^M вдоль граничной линии $j = M$. Закон расстановки вдоль других линий семейства определяется, например, линейной интерполяцией $t_i^j = [t_i^0(M-j) + t_i^M j]/M$. Возможны, разумеется, и другие способы задания закона расстановки для внутренних линий. Внутренние узлы сетки определяются по формулам

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{0j} + t_i^j(\vec{r}_{Nj} - \vec{r}_{0j}), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1. \quad (2)$$

Такие сетки будем называть квазиодномерными. Возможность их использования при создании эллиптических сеточных генераторов базируется на следующей задаче минимизации, эквивалентной уравнениям (2). Вычитая уравнения (2) друг из друга при ближайших значениях индекса i , можно получить уравнения

$$\vec{u}_{ij} = q_{ij}(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i+1,j}) + q_{i-1,j}(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i-1,j}) = 0, \quad (3)$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1,$$

где $q_{ij} = 1/[N(t_{i+1}^j - t_i^j)]$. Здесь при выводе было учтено, что уравнения (2) формально справедливы и на границе при $i = 0$ и $i = N$. Коэффициенты q_{ij} определяются с точностью до постоянного множителя, который в данном случае выбран так, чтобы $q_{ij} = 1$ для равномерного закона расстановки $t_i^j = i/N$.

Рассмотрим теперь функцию

$$Q(G) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} q_{ij} |\vec{r}_{i+1,j} - \vec{r}_{i,j}|^2/2, \quad (4)$$

которая зависит от всех координат внутренних узлов сетки. Вычисляя первые и вторые производные этой функции можно показать, что уравнения (3), и следовательно формулы (2), при $q_{ij} > 0$ являются решением задачи $Q(G) = \min$.

2. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА [4]

Метод [4] построен на минимизации функции

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \left[\frac{\varphi_{412} + \varphi_{123} + \varphi_{234} + \varphi_{341}}{4} \right]_{i+1/2, j+1/2}, \quad (5a)$$

$$\varphi_{lmn} = \frac{\Delta x_{lm}^2 + \Delta y_{lm}^2 + \Delta x_{nm}^2 + \Delta y_{nm}^2}{\Delta x_{lm} \Delta y_{nm} - \Delta y_{lm} \Delta x_{nm}}, \quad (5b)$$

$$\Delta x_{lm} = x_l - x_m, \quad \Delta y_{lm} = y_l - y_m, \quad (5c)$$

где суммирование ведется по ячейкам сетки $i + 1/2, j + 1/2$ с узлами $(x, y)_{i,j}, (x, y)_{i,j+1}, (x, y)_{i+1,j+1}, (x, y)_{i+1,j}$, которые для краткости записи занумерованы от 1 до 4.

Пусть заданная область является прямоугольником, а закон расстановки узлов на противоположных границах один и тот же. Тогда существует прямоугольная сетка G_{\perp} , которая, как правило, и является наиболее желательной для такой области. Однако $I(G_{\perp}) = \min$ только для равномерного закона расстановки вдоль границ.

Модифицируем функцию (5) следующим образом. Для каждой грани $\vec{r}_{i,j}, \vec{r}_{i+1,j}$ или $\vec{r}_{i,j}, \vec{r}_{i,j+1}$ определим ее условную длину s , используя интерполяцию соответствующих длин на граничных линиях. Рассмотрим функцию (5), где вместо (5b) положим

$$\Delta x_{lm} = (x_l - x_m)/s_{lm}, \quad \Delta y_{lm} = (y_l - y_m)/s_{lm}, \quad (6)$$

s_{lm} — условная длина грани (l, m) . Для такой функции всегда $I(G_{\perp}) = \min$. Это следует из того, что выражение (5b), как было замечено в свое время С.А.Иваненко (см. [4], стр. 388 статьи в *J. Comput. Phys.*), для выпуклых ячеек ограничено снизу $\varphi_{lmn} \geq 2$. Нетрудно убедиться также, $\varphi_{lmn} = 2$ для G_{\perp} .

Функция (5a,b), (6) является, по-видимому, частным случаем функций, рассмотренных в [6]. Отметим также, что близкая к (5a,b), (6) функция предлагалась в свое время В.М.Уськовым (1996, неопубликованное сообщение).

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Рассмотрим теперь функцию

$$J(G) = Q(G) + \varepsilon \sigma I(G), \quad (7)$$

где ε — параметр, σ — средняя площадь ячейки сетки, равная площади области деленной на число ячеек. Введение в (7) постоянного множителя σ связано с желанием иметь безразмерный параметр ε , поскольку $Q(G)$ имеет размерность квадрата длины, а $I(G)$ — безразмерна.

Напомним, что функция $I(G)$ имеет бесконечный барьер на границе множества D сеток из выпуклых четырехугольников. Ясно, что функция $J(G)$ при любом $\varepsilon > 0$ так же имеет бесконечный барьер на границе множества D , что позволяет построить столь же надежный сеточный генератор, что и при минимизации функции $I(G)$. По аналогии с известным подходом к решению некорректных задач математической физики, формулу (7) естественно назвать регуляризацией функции $Q(G)$, а ε - параметром этой регуляризации.

4. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Локальный минимум функции (7) достигается на решении системы алгебраических уравнений

$$\vec{R}_{ij} = \vec{u}_{ij} + \varepsilon \sigma \begin{pmatrix} \partial I / \partial x_{ij} \\ \partial I / \partial y_{ij} \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

где \vec{u}_{ij} определено в (3).

При решении задач с подвижными границами получение начальной сетки $G_0 \in D$ не является трудной проблемой, поскольку в распоряжении вычислителя имеется заведомо выпуклая сетка с предыдущего временного слоя. В случае необходимости используется специальный прием, описанный в [4], а также интерполяция смещений внутренних узлов по смещениям граничных узлов.

Введем в рассмотрение вектор $\Delta \vec{r}_{ij} = (\vec{r}_{ij}^{(n+1)} - \vec{r}_{ij}^{(n)}) / \tau_{ij}$, где n - номер итерации, τ_{ij} - итерационный параметр. Вектор $\Delta \vec{r}_{ij}$ определяется из решения следующей системы линейных уравнений, получаемых путем огрубления метода Ньютона.

$$\vec{R}_{ij}^{(n)} + A_{ij} \Delta \vec{r}_{ij} - q_{ij} \Delta \vec{r}_{i+1,j} - q_{i-1,j} \Delta \vec{r}_{i-1,j} = 0, \quad (9)$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} q_{ij} + q_{i-1,j} + \varepsilon \sigma \partial^2 I / \partial x_{ij}^2 & \varepsilon \sigma \partial^2 I / \partial x_{ij} \partial y_{ij} \\ \varepsilon \sigma \partial^2 I / \partial x_{ij} \partial y_{ij} & q_{ij} + q_{i-1,j} + \varepsilon \sigma \partial^2 I / \partial y_{ij}^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь учтены все вторые производные функции $Q(G)$ и те вторые производные функции $I(G)$, которые учитывались в квазиньютоновской итерационной процедуре метода [4]. Уравнения (9) решаются одномерными прогонками для векторов размерности 2 вдоль линий с $j = \text{const}$.

Как следует из вывода уравнений (9), при $\varepsilon = 0$ и $\tau_{ij} = 1$ итерационный процесс заканчивается на первой итерации и дает квазиодномерную сетку, определяемую формулами (2). Ясно, что и в случае

$0 < \varepsilon \ll 1$ итерационный процесс уже на первой итерации будет давать сетку, близкую к квазиодномерной в тех подобластях, где линиям выбранного семейства не нужно сильно изгибаться, чтобы нарушать условие выпуклости ячеек.

Для уменьшения вычислительных затрат используется предложенные в [7] итерации на подмножестве узлов, меняющимся от итерации к итерации. Выделение подмножества базируется на анализе локальной относительной невязки уравнений (8)

$$\delta_{ij} = |\vec{R}_{ij}| / (q_{ij} |\vec{r}_{i+1,j} - \vec{r}_{ij}| + q_{i-1,j} |\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i-1,j}| + \varepsilon \sigma g_{ij}),$$

где g_{ij} имеет тот же порядок величины, что и слагаемые, входящие в $\partial I / \partial x_{ij}$ и $\partial I / \partial y_{ij}$. Сделанный в [7] выбор величины g_{ij} оказался не совсем удачным из-за отсутствия инвариантности относительно поворота системы координат в плоскости (x, y) . В настоящей реализации g_{ij} является таким инвариантом.

Перейдем к описанию выбора итерационного параметра τ_{ij} . В отличие от метода [4], где итерационный параметр один и тот же для всех узлов, здесь допускаются разные значения τ_{ij} для разных узлов. Это сделано для того, чтобы иметь возможность выполнять расчет первых нескольких итераций с $\tau_{ij} = 1$ в тех подобластях, где функция квазиодномерных сеток $Q(G)$ много больше регуляризирующей добавки, и одновременно иметь возможность уменьшать τ_{ij} в тех узлах, где использование $\tau_{ij} = 1$ может приводить к выходу за границу множества D .

В настоящей реализации итерационный параметр имеет вид $\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 \tau$. Параметр τ_{ij}^0 выбирается так, чтобы не допустить выхода за границу множества D . Ясно, что такой выход является фатальным для итерационного процесса из-за наличия того же бесконечного барьера минимизируемой функции на границе D . Дополнительный скалярный параметр τ на нескольких первых итерациях полагается равным 1, чтобы обеспечить быструю сходимость в тех подобластях, где $Q(G) \gg \varepsilon \sigma I(G)$. В результате, как правило, алгоритм [7] значительно уменьшает число узлов в подмножестве, на котором выполняются итерации. Далее параметр τ начинает выбираться так же, как и в [4], по возможности уменьшая суммарную квадратичную невязку уравнений (8) на очередном подмножестве узлов с помощью метода парабол.

Применяется следующий алгоритм выбора параметра τ_{ij}^0 . Вначале полагается $\tau_{ij}^0 = 1$ для всех узлов. Затем выполняется проверка ячеек

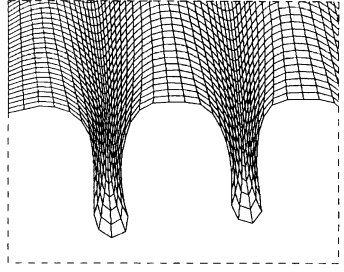


Рис. 3: Фрагмент сетки, полученной настоящим методом, $\varepsilon = 10^{-2}$

на выпуклость, и если площадь какого-либо треугольника ячейки отрицательна, параметр τ_{ij}^0 в трех соответствующих узлах уменьшается в два раза. Процесс уменьшения параметров заканчивается, если очередная проверка всех ячеек на выпуклость дает положительный результат. На практике уменьшение параметра τ_{ij}^0 наблюдается только на первых итерациях в случае близости начальной сетки G_0 к границе множества D .

5. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Предлагаемый сеточный генератор применялся в расчетах гидродинамических течений с подвижными границами раздела сред, которые выделялись явно в виде некоторых линий сетки. Первоначально границы раздела были почти прямыми, а затем на одной из границ в процессе ее движения возникали один или несколько "языков". Ранее при решении таких задач применялся метод [4]. Предлагаемый метод практически снял проблему недоитерированности сетки при движении границ, проиллюстрированную во введении на фиг. 2.

Помимо сеточного генератора внутренних узлов используется пакет процедур для расчета движения выделенных линий сетки, которыми как правило являются границы раздела сред, включающий в себя собственно движение линий, расстановку узлов вдоль нее и расчет точек пересечения выделенных линий. Эти процедуры взяты в основном из [1] и дополнены с учетом имеющегося опыта решения таких задач.

В качестве первого примера на фиг. 3 показан фрагмент сетки для области из фиг.1. Видно что, по сравнению с методом [4] предлагаемый метод "втянул"сетку внутрь языков, сохранив при этом выпуклость всех ячеек.

Следующий пример взят из расчетов неустойчивости границы раз-

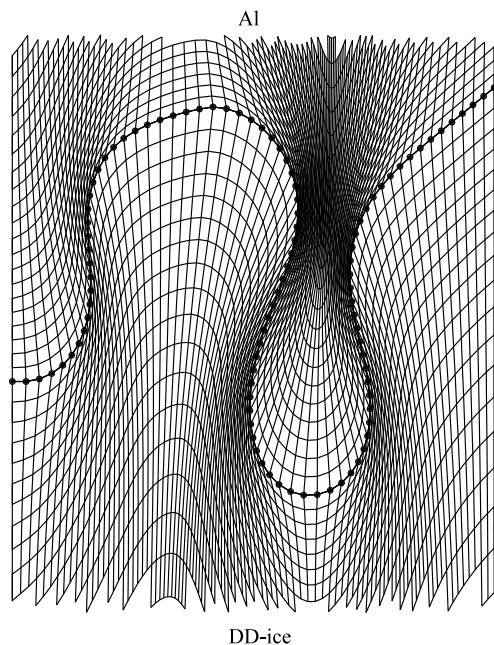


Рис. 4: Сетка вблизи границы раздела (точки)

дела сред при прохождении ударных волн [8]. Задача ставится в прямоугольнике, примерно посередине которого находится первоначально слабо возмущенная граница раздела. Из-за необходимости расчета коротковолновых возмущений отношение большой стороны прямоугольника к малой около 100, в то время как вблизи границы раздела отношение сторон ячеек сетки должно быть порядка 1. Поэтому используется существенно неравномерная по одному направлению сетка, сгущающаяся к границе раздела. Вдали от границы раздела, где течение почти одномерное, сильное отклонение сетки от одномерной приводит к заметной вычислительной погрешности. Оказалось, что функция (5), даже будучи домноженной на разумно выбранный малый параметр, вносит заметный вклад в функцию (7) вдали от границы раздела, что делает сетку существенно неодномерной. Переход к (6) вместо (5b) устранил этот недостаток: регуляризирующая функция перестала “вмешиваться” в построение сетки вдали от границы раздела. Пример фрагмента сетки вблизи границы раздела приведен на фиг. 4.

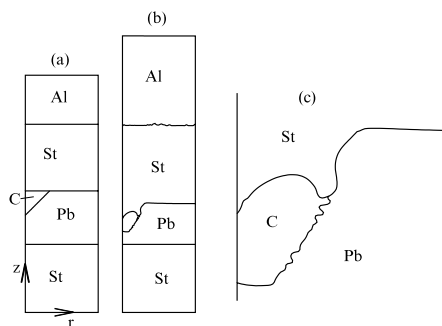


Рис. 5: Сборка для сжатия графита; Al — алюминиевый ударник, St — стальная оболочка, Pb — свинцовая мишень, C — углеродный объем; а — $t = 0$; б, с (окрестность углеродного объема) — $t = 5$ мкс

Проблемы другого характера возникали в расчетах экспериментальных сборок ударного сжатия графита в конических мишенях, выполненных в развитие работы [9]. Конфигурация границ раздела в цилиндрических координатах показана на фиг. 5. Имеется несколько сред, каждая из которых представлена своим сеточным блоком. Основная трудность связана с расчетом точки пересечения границ раздела между углеродом, сталью и свинцом. Сеточный генератор без труда справлялся с нелинейной стадией развития неустойчивости границы между углеродом и свинцом, которая видна на рис. 5с. Варианты расчетов с более ярко выраженной неустойчивостью можно найти в [9].

Последняя из представляемых задач моделирует некоторый эксперимент по сжатию пластины на клине. Результат одного расчета в виде конфигурации границ пластины и клина в разные моменты времени показан на фиг. 6. В пластине, которая первоначально лежит на клине (фиг. 6а), инициируется ударная волна. Нижняя свободная граница пластины начинает двигаться внутрь клина. В точке контакта А, двигающейся вместе с границей пластины (см. фиг. 6б), возникает присоединенная ударная волна, препятствующая образованию кумулятивной струи (см., например, [10]). Бесструйный режим сжатия реализуется до момента выхода свободной границы пластины на торец клина, после чего ударная волна в пластине отходит от границы с клином. В результате возникает тонкая струя (см. рис. 6с,д).

Тактика расчета следующая. В пластине и клине имеются два независимых сеточных блока. На границе между пластиной и клином сетки

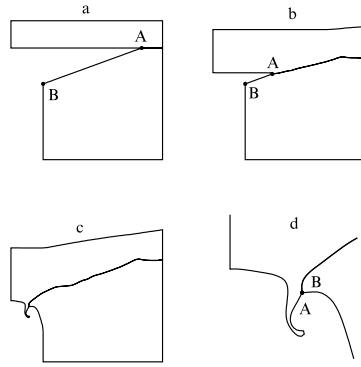


Рис. 6: Сжатие плиты на клине; а — $t=0$, б — $t=2$ мкс, с, д — $t=4$ мкс; А — узел сетки в плите; В — узел сетки в клине

скользящие. Используются процедуры переинтерполяции данных вдоль границы. Точка контакта А является фиксированным узлом сетки в пластине. Как только узел А доходит до торцевого узла В в клине, расчет движения узла А прекращается, и он полагается совпадающим с узлом В. Отметим, что сеточный генератор справлялся с тонкой струей на фиг. 6d без каких-либо дополнительных усилий со стороны вычислителя.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отметим то очевидное обстоятельство, что данный метод не претендует на универсальность. В самом деле, квазиодномерная сетка (2) почти не чувствительна к деформациям граничных линий $j=0$ и $j=M$, в отличие от деформаций двух других граничных линий $i=0$ и $i=N$. Поэтому данный метод имеет смысл применять в задачах, где существенной деформации подвергаются либо одна граница, либо две противоположные, причем линии $j=\text{const}$ должны исходить из деформируемых границ.

В качестве перспективы для создания универсального сеточного генератора укажем на возможность добавления в функцию (7) минимизируемой функции квазиодномерных сеток вдоль линий другого семейства $i=\text{const}$. В результате, при $\varepsilon=0$ получится простой эллиптический сеточный генератор с небольшой областью применимости. Следует, однако, отметить, что для задач типа показанной на фиг. 1 такой универсальный генератор не сможет конкурировать с представленным

в настоящей работе из-за неизбежного увеличения объема вычислений без заметного улучшения качества сеток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука, 1976.
2. Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Mastin C.W. Numerical grid generation. N.Y. etc: North-Holland, 1985.
3. Иваненко С.А., Прокопов Г.П. // ЖВМ и МФ, 1997, т. 37, №6, 643—662.
4. Иваненко С.А., Чарахчьян А.А. // ДАН, 1987, т. 295, №2, 280—283; ЖВМ и МФ, 1988, т. 28, №4, 503—514; J. Comput. Phys., 1997, v. 136, no. 2, 385—398.
5. Чарахчьян А.А. // ЖВМ и МФ, 1999, т. 39, №5, 832—837.
6. Иваненко С.А. // ЖВМ и МФ, 2000, т. 40, №11, 1662—1684.
7. Чарахчьян А.А. // ЖВМ и МФ, 1998, т. 38, №2, 344—350.
8. Charakhch'yan A.A. // Plasma Phys. Control. Fusion, 2001, v. 43, no. 9, 1169—1179.
9. Ломоносов И.В., Фортвов В.Е., Фролова А.А., Хищенко К.В., Чарахчьян А.А., Шуршалов Л.В. // Препринт №1-454. М.: ОИВТ РАН.
10. Чарахчьян А.А. // Прикл. механ. и тех. физика, 2001, т. 42, №1, 17—24.