О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток [1]

Н.А. Бобылев*, С.А. Иваненко**, А.В. Казунин*

* Москва, ул.Профсоюзная 65, Институт проблем управления им.Трапезникова РАН, e-mail: bobylev@ipu.rssi.ru
** 117967, Москва, ул.Вавилова 40, ВЦ РАН

Ведение

Ряд прикладных задач, связанных с построением сеток в областях сложной конфигурации, приводит к задаче о построении гомеоморфных отображений областей в пространстве. При этом часто требуется установить, что исследуемое отображение является глобальным гомеоморфизмом, используя лишь информацию локального характера об исследуемом отображении и о его свойствах на границах образа и прообраза.

В настоящей работе приведены достаточные условия гомеоморфности отображений при различных предположениях об их гладкости. Эти условия применяются для обоснования алгоритмов построения адаптивных сеток в областях сложной формы. В качестве примера рассматривается задача построения сетки и расчета течений в заливе Чайво, представляющем собой сложную многосвязную область.

1 Условия гомеоморфности C^1-гладкого отображения области на себя

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная связная область и $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ отображение класса C^1. Дифференцируемость f в точках границы $\partial\Omega$ область Ω понимается в обычном смысле: существует область $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ и отображение $\widetilde{f} : \widetilde{\Omega} \to \widetilde{\Omega}$ класса C^1, сужение которого на $\overline{\Omega}$ совпадает с f. Через $f'(x)$ обозначается производная отображения f в точке x, которую мы будем отождествлять с матрицей

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00480).

Якоби, т.е. если

$$f(x) = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\},$$

то

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial f_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

В работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1 *Пусть отображение f гомеоморфно отображает границу $\partial\Omega$ области Ω на себя и*

$$\det f'(x) > 0 \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{1}$$

Тогда f — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}$.

Условие (1), участвующее в предположениях теоремы 1, может быть ослаблено. Верна

Теорема 2 *Пусть f гомеоморфно отображает $\partial\Omega$ на $\partial\Omega$,*

$$\det f'(x) \neq 0 \qquad (x \in \Omega) \tag{2}$$

и найдется хотя бы одна точка $y \in \partial\Omega$, для которой

$$\det f'(y) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда f — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}$.

Если известна дополнительная информация о структуре границы $\partial\Omega$, то можно опустить и условие (3). А именно, справедлива

Теорема 3 *Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω является гладким $(n-1)$-мерным многообразием класса C^1, а сужение $f\big|_{\partial\Omega}$ отображения f на $\partial\Omega$ является диффеоморфизмом $\partial\Omega$ на $\partial\Omega$ класса C^1. Пусть выполнено неравенство (2). Тогда f — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}$.*

Изложим схему доказательства теоремы 3.

Доказательство сюръективности отображения $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ производится по схеме, изложенной при доказательстве теоремы 1 в [1]. Установим инъективность $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$. Для этого достаточно показать, что у какой-либо точки $x \in \Omega$ есть лишь один прообраз.

Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in \partial\Omega$ и рассмотрим такую заданную параметрически простую дугу $\gamma : [0, 1] \to \overline{\Omega}$, что $\gamma(t) \in \Omega \quad (0 \leq t < < 1)$, $\gamma(1) = x_0$ и γ трансверсальна $\partial\Omega$ в точке x_0. Пусть $y_0 = f^{-1}(x_0) \in \in \partial\Omega$ и

$$f^1(\gamma(t)) = \{\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t)\} \qquad (0 \leq t < 1).$$

Очевидно $\mu_i : [0, 1) \to \Omega \;\; (i = 1, \ldots, k)$ - это гладкие непересекающиеся кривые и точка y_0 является предельной точкой каждой кривой $\mu_i \;\; (i = = 1, \ldots, k)$.

Пусть $U = \partial\Omega \cap B(\rho, y_0)$, где $B(\rho, y_0)$ - замкнутый шар радиуса $\rho \ll 1$ с центром в точке y_0. U - это гладкое $(n-1)$-мерное многообразие с краем, C^1 - диффеоморфное $(n-1)$-мерному единичному шару B^{n-1}.

Рассмотрим гладкое $(n-1)$-мерное многообразие с краем V, Лежащее в Ω и C^1 - близкое к U. Обозначим через $\xi_i \quad (i = 1, \ldots, k)$ точки пересечения кривых μ_i с V (такие точки найдутся в силу того, что y_0 - предельная точка μ_i). Отображение f диффеоморфно отображает U на окрестность $f(U)$ точки x_0 в $\partial\Omega$, а V - на $(n-1)$-мерное многообразие $f(V) \subset \Omega$, C^1 - близкое к $f(U)$. Но тогда $f(V)$ имеет с дугой γ лишь одну общую точку η и трансверсально γ в этой точке. Но

$$f(\xi_i) = \eta \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

и, так как $f : V \to f(V)$ — диффеоморфизм, то $k = 1$. Таким образом, мы нашли точку $\eta \in \Omega$, имеющую единственный прообраз, что и требовалось доказать.

2 Гомеоморфные отображения области на область

В приложениях чаще встречается ситуация, когда необходимо установить гомеоморфность отображения, действующего из одной области в другую.

Пусть Ω_0 и Ω — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, замыкания которых $\overline{\Omega}_0$ и $\overline{\Omega}$ диффеоморфны. Пусть $f : \overline{\Omega}_0 \to \overline{\Omega}$ отображение класса C^1. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 *Пусть f гомеоморфно отображает $\partial\Omega_0$ на $\partial\Omega$ и*

$$\det f'(x) \neq 0 \qquad (x \in \overline{\Omega}_0).$$

Тогда f — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Пусть $\tau : \overline{\Omega}_0 \to \overline{\Omega}$ — диффеоморфизм $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}$. Рассмотрим отображение

$$g = \tau^{-1} \circ f.$$

Отображение $g : \overline{\Omega}_0 \to \overline{\Omega}_0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому g — это гомеоморфизм из $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}_0$. Но тогда $f = \tau \circ g$ — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}$. Теорема доказана.

По этой же схеме доказываются аналоги теорем 2 и 3 в ситуации, когда f действует из $\overline{\Omega}_0$ в $\overline{\Omega}$.

3 Непрерывные отображения

Перейдем к важной в прикладном отношении ситуации, когда отображение f лишь непрерывно. Рассмотрим вначале случай, когда отображение f определено на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и принимает значения в $\overline{\Omega}$.

Отображение $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ называется локальным гомеоморфизмом, если для каждой точки $x \in \overline{\Omega}$ существует окрестность $U(x)$ этой точки в Ω такая, что f является гомоморфизмом из $U(x)$ на $f(U(x))$.

Теорема 5 *Пусть f гомеоморфно отображает $\partial\Omega$ на $\partial\Omega$ и является локальным гомеоморфизмом из $\overline{\Omega}$ в $\overline{\Omega}$. Тогда f — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Покажем вначале, что отображение $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ сюръективно. Зафиксируем некоторую точку $y_0 \in \Omega$ и рассмотрим векторное поле

$$\Phi_0(x) = f(x) - y_0.$$

Это поле невырождено на $\partial\Omega$ и, следовательно (см. например, [1]), определено его вращение $\gamma(\Phi_0; \partial\Omega)$. Покажем, что

$$\gamma(\Phi_0; \partial\Omega) \neq 0.$$

Для этого рассмотрим некоторую точку $x_1 \in \Omega$ и построим векторное поле

$$\Phi_1(x) = f(x) - y_1, \tag{4}$$

где $y_1 = f(x_1)$.

Поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на $\partial\Omega$. Действительно, в силу линейной связности Ω можно указать непрерывную кривую $y(\lambda) \in \Omega \quad (0 \le \lambda \le 1)$, для которой

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1.$$

Тогда семейство векторных полей

$$\Phi(x;\lambda) = f(x) - y(\lambda) \qquad (x \in \partial\Omega,\ 0 \le \lambda \le 1)$$

гомотопно соединяют поля Φ_0 и Φ_1. Следовательно, вращения $\gamma(\Phi_0;\partial\Omega)$ и $\gamma(\Phi_1;\partial\Omega)$ этих полей на $\partial\Omega$ одинаковы:

$$\gamma(\Phi_0;\partial\Omega) = \gamma(\Phi_1;\partial\Omega). \tag{5}$$

Множество нулей поля Φ_1 непусто (например, x_1 — это нуль поля Φ_1). В силу локальной гомеоморфности отображения f нули поля Φ_1 изолированы. Но тогда, в силу компактности $\overline{\Omega}$, их конечное число. Обозначим их через $x_1, \ldots, x_k$. Поскольку f — локальный гомеоморфизм, то (см. [1]) топологический индекс $\operatorname{ind}\,(x_i;\Phi_1) \quad (i = 1, \ldots, k)$ каждого нуля x_i поля Φ_1 по абсолютной величине равен 1, а в силу линейной связности Ω эти индексы равны между собой. Пусть, для определенности

$$\operatorname{ind}\,(x_i;\Phi_1) = 1 \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что $\gamma(\Phi_0;\partial\Omega) = k \ne 0$, и поэтому поле Φ_0 имеет в Ω по крайней мере один нуль x_0, т.е. $\Phi(x_0) = 0$. Но тогда $f(x_0) = y_0$. Таким образом, отображение f сюръективно.

Для доказательства инъективности f нужно показать, что для любого $y \in \Omega$ уравнение

$$f(x) = y \tag{7}$$

имеет единственное решение. Но поскольку при всех $y \in \Omega$ уравнение (7) имеет одно и то же количество решений, то достаточно найти такое $y_0 \in \Omega$, для которого уравнение $f(x) = y_0$ имеет единственное решение.

Зафиксируем точку $y_* \in \partial\Omega$ и рассмотрим последовательность $y_n \in \in \Omega$, сходящуюся к y_*. Пусть $x_* = f^{-1}(y_*)$ и U такая окрестность точки x_* в $\overline{\Omega}$, которую f гомеоморфно отображает на $V = f(U)$. Пусть, далее, $x_1^n, \ldots, x_k^n$ — прообразы точки y_n. Поскольку $y_* \in \partial\Omega$, то предельные точки последовательностей прообразов лежат на $\partial\Omega$. Но f — гомеоморфизм $\partial\Omega$ на $\partial\Omega$. Поэтому единственной предельной точкой последовательностей прообразов является точка x_* и, следовательно, при больших n

$$x_i^n \in U \qquad (i = 1, \ldots k).$$

Но отображение $f : U \to V$ — гомеоморфизм. Следовательно, $k = 1$. Теорема доказана.

По схеме доказательства теоремы 4 можно доказать аналог теоремы 5 для случая, когда отображение f определено на замыкании области $\overline{\Omega}_0$, а принимает значения в замыкании области $\overline{\Omega}$. А именно, пусть Ω_0 и Ω — ограниченные связные гомеоморфные области и $f : \overline{\Omega}_0 \to \overline{\Omega}$ — непрерывное отображение. Справедлива

Теорема 6 *Пусть f гомеоморфно отображает $\partial\Omega_0$ на $\partial\Omega$ и является локальным гомеоморфизмом из $\overline{\Omega}_0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда f — гомеоморфизм из $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}$.*

4 Кусочно-гладкие отображения

Применим теорему 6 к анализу важных в прикладном аспекте кусочно гладких отображений. Ограничимся для простоты случаем одной области Ω.

Как и выше предполагается, что Ω — ограниченная связная область. Будем считать, что Ω разбита на непересекающиеся выпуклые подобласти $\Omega_i \quad (i = 1, \ldots, m)$ так, что

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega}_i.$$

Пусть $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ — непрерывное отображение, являющееся гладким класса C^1 на замыканиях $\overline{\Omega}_i$ подобластей $\Omega_i \quad (i = 1, \ldots, m)$. Сужение отображения f на $\overline{\Omega}_i$ обозначим через f_i. Обозначим через $i(x) \quad (x \in \overline{\Omega})$ множество всех таких индексов i, что $x \in \overline{\Omega}_i$. Для каждой точки $x \in \overline{\Omega}$ определим следующую величину

$$\alpha(x) = \min_{\substack{\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_{i(x)} \geq 0 \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i(x)} = 1}} \sum_{i \in i(x)} \det(\alpha_i f_i'(x)). \tag{8}$$

Теорема 7 *Пусть f гомеоморфно отображает границу $\partial\Omega$ области Ω на себя и*

$$\alpha(x) > 0 \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{9}$$

Тогда f — гомеморфизм из $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}$.

Доказательство. . В силу теоремы 5 достаточно показать, что f — локальный гомеоморфизм.

Непосредственно из определения $i(x)$ следует, что эта многозначная функция, принимающая значения в подмножествах множества $\{1, \ldots, m\}$, полунепрерывна снизу. Поэтому для каждой точки $x \in \overline{\Omega}$ существует такая окрестность $U(x)$ в множестве $\overline{\Omega}$, что для каждой точки $y \in U(x)$ выполнено включение

$$i(y) \subset i(x). \tag{10}$$

Отсюда следует полунепрерывность снизу функции $\alpha(x)$, определенной равенством (8). Но тогда

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x) = \alpha > 0. \tag{11}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что существует постоянная $\beta > 0$, для которой при всех $x \in \overline{\Omega}$, $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_k \geq 0 \quad i_1, \ldots, i_k$ таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ и $i_j \in i(x) \quad (j = 1, \ldots, k)$ выполнено неравенство

$$\|(\alpha_1 f'_{i_1}(x) + \ldots + \alpha_k f'_{i_k}(x))h\| \geq \beta\|h\| \quad (h \in I\!R^n). \tag{12}$$

Зафиксируем некоторую точку $x \in \overline{\Omega}$ и выберем такой шар $B(\rho, x)$, чтобы для каждой точки $y \in B(\rho, x)$ выполнялось включение (10) и при каждом $i \in i(x)$

$$\|f'_i(y) - f'_i(x)\| \leq \frac{\beta}{2}. \tag{13}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любых x_1, $x_0 \in B(\rho, x)$ выполнено неравенство

$$\|f(x_1) - f(x_0)\| \geq \frac{\beta}{2}\|x_1 - x_0\|. \tag{14}$$

Рассмотрим отрезок

$$I = \{y \in I\!R^n : y = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1,\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset B(\rho, x)$$

и обозначим через $\tau_1, \ldots, \tau_k$ такие точки отрезка $[0,1]$, что $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_k = 1$ и

$$I_j = \{y \in I\!R^n : y = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_2,\ \tau_j \leq \lambda \leq \tau_{j+1}\} \in \Omega_{i_j}$$
$$(j = 0, \ldots, k;\ i_j \in i(x)).$$

Тогда

$$f(x_1) - f(x_0) = \int\limits_0^1 f'((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1)(x_1 - x_0)\, d\lambda =$$
$$= \int\limits_0^{\tau_1} f'_{i_0}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1)(x_1 - x_0)\, d\lambda + \ldots +$$
$$+ \int\limits_{\tau_{k-1}}^1 f'_{i_{k-1}}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1)(x_1 - x_0)\, d\lambda =$$
$$= \int\limits_0^{\tau_1} f'_{i_0}(x)(x_1 - x_0)\, d\lambda + \ldots + \int\limits_{\tau_{k-1}}^1 f'_{i_{k-1}}(x)(x_1 - x_0)\, d\lambda +$$
$$+ \int\limits_0^{\tau_1} (f'_{i_0}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - f'_{i_0}(x))(x_1 - x_0)\, d\lambda + \ldots + \tag{15}$$
$$+ \int\limits_{\tau_{k-1}}^1 (f'_{i_{k-1}}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - f'_{i_{k-1}}(x))(x_1 - x_0)\, d\lambda =$$
$$= (\tau_1 f'_{i_0}(x) + (\tau_2 - \tau_1) f'_{i_1}(x) + \ldots + (1 - \tau_{k-1}) f'_{i_{k-1}}(x))(x_1 - x_0) +$$
$$+ \int\limits_0^{\tau_1} (f'_{i_0}(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - f'_{i_0}(x))(x_1 - x_0)\, d\lambda +$$
$$+ \ldots + \int\limits_{\tau_{k-1}}^1 (f'_{i_{k-1}}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - f'_{i_{k-1}}(x))(x_1 - x_0)\, d\lambda.$$

Так как в силу (12) и (13)

$$\begin{gathered}\|(\tau_1 f'_{i_0}(x)+(\tau_2-\tau_1)f'_{i_1}(x)+\ldots+\\ +(1-\tau_{k-1})f'_{i_{k-1}}(x))(x_1-x_0)\|\geq\beta\|x_1-x_0\|,\end{gathered}\tag{16}$$

$$\begin{gathered}\left\|\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(f'_{i_j}((1-\lambda)x_0+\lambda x_1)-f'_{i_j}(x))(x_1-x_0)\,d\lambda\right\|\leq\\ \leq\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\|f'_{i_j}((1-\lambda)x_0+\lambda x_1)-f'_{i_j}(x)\|\;\|x_1-x_0\|d\lambda\leq\\ \leq\frac{\beta}{2}(\tau_{j+1}-\tau_j)\|x_1-x_0\|\quad(j=0,\ldots,k),\end{gathered}\tag{17}$$

то из (15), (16) и (17) вытекает оценка (14). Теорема доказана.

По схеме доказательства теоремы 4 можно доказать аналог теоремы 7 для случая, когда отображение f определено на замыкании области $\overline{\Omega}_0$, а принимает значения в замыкании области $\overline{\Omega}$. А именно, пусть Ω_0 и Ω — ограниченные связные гомеоморфные области и $f:\overline{\Omega}_0\to\overline{\Omega}$ — непрерывное отображение. Пусть область Ω_0 разбита на непересекающиеся подобласти Ω_i $(i=1,\ldots,m)$ так, что

$$\overline{\Omega}_0=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{\Omega}_i.$$

Пусть $f:\overline{\Omega}_0\to\overline{\Omega}$ - непрерывное отображение, являющееся C^1 - гладким на $\overline{\Omega}_i$. Сужение отображения f на $\overline{\Omega}_i$ обозначим через f_i $(i=1,\ldots,m)$. Для каждой точки $x\in\overline{\Omega}_0$ положим

$$\alpha(x)=\min_{\substack{\alpha_1\geq 0,\ldots,\alpha_{i(x)}\geq 0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_{i(x)}=1}}\det\left(\sum_{i\in i(x)}\alpha_i f'_i(x)\right),$$

где $i(x)$ - множество всех таких индексов i, что $x\in\overline{\Omega}_i$. Справедлива

Теорема 8 *Пусть f гомеоморфно отображает $\partial\Omega_0$ на $\partial\Omega$ и*

$$\alpha(x)>0\qquad(x\in\overline{\Omega}_0).\tag{18}$$

Тогда f является гомеоморфизмом из $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}$.

В ряде приложений условия теоремы 4 выполняются для отображений $\overline{\Omega}_i \to f_i(\overline{\Omega}_i)$, $i = 1, \ldots, m$. В таких случаях может оказаться полезным следующее утверждение, которое вытекает из теорем 4 и 6

Теорема 9 *Пусть f гомеоморфно отображает $\partial\Omega_0$ на $\partial\Omega$ и для любого $i = 1, \ldots, m$, её сужение f_i гомеоморфно отображает $\partial\Omega_i$ на $f_i(\partial\Omega_i)$ и, кроме того,*

$$\det f_i'(x) > 0 \qquad (x \in \overline{\Omega}_i), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{19}$$

Тогда f является гомеоморфизмом из $\overline{\Omega}_0$ на $\overline{\Omega}$.

5 Допустимые деформации сеток

Теорему 9 можно применять для получения условий допустимости деформаций конечноэлементной сетки. Например, если рассматриваются сетки, у которых все ячейки - симплексы, то условия теоремы 9 эквивалентны условиям положительности алгебраических объемов всех ячееек как исходной, так и деформированной сеток. В случае, когда рассматриваются более сложные ячейки - четырехугольные, гексаэдральные или полиномиальные, необходимо иметь условия гомеоморфности отображения канонической ячейки на каждую из ячеек сетки.

Итак, пусть область Ω_0 разбита на непересекающиеся подобласти Ω_i $(i = 1, \ldots, m)$ и пусть каждой подобласти Ω_i поставлена в соответствие выпуклая область D_i, граница которой состоит из гиперплоскостей в n-мерном евклидово пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Рассмотрим отображения $h_i : \overline{D}_i \to \overline{\Omega}_i$ и $\varphi_i : \overline{D}_i \to f_i(\overline{\Omega}_i)$. Поскольку $f_i = \varphi_i \circ h_i^{-1}$, то $\det f_i' = \det \varphi_i' (\det h_i')^{-1}$. Следовательно, если $\det \varphi_i' > 0$ и $\det h_i' > 0$, то $\det f_i' > 0$. Поэтому выполнение условий теоремы 9 следует из положительности якобианов отображений φ_i и h_i, а также из гомеоморфности отображений $\partial\overline{D}_i \to \partial\overline{\Omega}_i$ и $\partial\overline{D}_i \to f_i(\partial\overline{\Omega}_i)$. Обычно D_i имеет простую форму, в трехмерном пространстве это может быть тетраэдр, куб, пирамида или призма. Функции h_i и φ_i однозначно определяются по заданному отображению конечного числа точек, называемых узлами сетки. Кроме того, отображения φ_i и h_i строятся таким образом, чтобы глобальное отображение $f = \varphi \circ h^{-1}$ было непрерывным.

Развитая теория гомеоморфных отображений ограниченных областей позволяет также обосновать вариационные методы построения адаптивных сеток. Рассмотрим функционал плотности энергии отображения, представляющий собой обобщение функционала из [2]

$$F = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} F_i \tag{20}$$

где

$$F_i = \frac{1}{n^{n/2}}\int_{D_i}(g_{kl}G_i^{lk})^{n/2}(\det G_i)^{1/2}(\det g)^{-1/2}d\xi^1\ldots d\xi^n, \tag{21}$$

$$g_{kl}(\xi) = \sum_{p=1}^{n}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^k}\frac{\partial x^p}{\partial \xi^l}.$$

Сформулируем гипотезу, представляющую собой вариационный принцип, позволяющий из всех возможных кусочно-гладких отображений области Ω на себя выделить класс гомеоморфных отображений.

Принцип оптимальности. *Отображение $f : \Omega \to \Omega$, тождественное на границе: $f(\partial\Omega) = \partial\Omega$, является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно минимизирует функционал F при некотором наборе симметричных и положительно определенных матриц $G_i(\xi)$.*

Данный принцип оптимальности может быть строго обоснован в случае нерегулярных двумерных сеток с четырехугольными ячейками.

6 Сетки из выпуклых четырехугольников

Для нерегулярных сеток следует задавать соответствие между локальной и глобальной нумерацией узлов

$$i = i(N,k),\ i = 1,\ldots,N_n,\ N = 1,\ldots,N_e,\ k = 1,2,3,4,$$

где i - глобальный номер узла, N_n - общее число узлов, N - номер элемента, N_e - общее число элементов, k - локальный номер узла в элементе.

Пусть в области Ω на плоскости x, y построена нерегулярная сетка $(x,y)_i,\ i = 1,\ldots,N_n$. Рассмотрим ячейку сетки с номером N. Пронумеруем вершины этой ячейки от 0 до 3 против часовой стрелки. Каждой вершине поставим в соответствие треугольник: $\triangle_{301}$ - вершине 0, $\triangle_{012}$ - вершине 1 и т.д. Введем в рассмотрение удвоенную алгебраическую площадь этих треугольников $J_k,\ k = 0,1,2,3$, например

$$J_0 = (x_1 - x_0)(y_3 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_3 - x_0).$$

Условие положительности якобиана билинейного отображения $x^h(\xi,\eta)$, $y^h(\xi,\eta)$ единичного квадрата на плоскости ξ,η в четырехугольную ячейку на плоскости x,y можно записать как систему неравенств

$$[J_k]_N > 0, \quad k = 0,1,2,3; \; N = 1,\ldots,N_e, \tag{22}$$

где $J_k = (x_{k+1} - x_k)(y_{k-1} - y_k) - (y_{k+1} - y_k)(x_{k-1} - x_k)$, причем в выражениях для J_k следует положить $k-1 = 3$ при $k = 0$, и $k+1 = 0$ при $k = 3$. При выполнении условий (22) все ячейки сетки будут выпуклыми четырехугольниками.

Множество сеток одной и той же структуры и с одинаковыми значениями координат граничных точек, удовлетворяющих неравенствам (22), будем обозначать через W_D. Из теоремы 9 следует, что любые две сетки из W_D гомеоморфны друг другу в классе изопараметрических четырехугольных конечноэлементных отображений, поскольку все строго выпуклые замкнутые четырехугольники гомеоморфны в этом классе.

Множество W_D можно считать принадлежащим евклидову пространству $I\!R^{N_{in}}$, где полное число степеней свободы сетки N_{in} равно удвоенному количеству ее внутренних узлов. В этом пространстве W_D является открытым ограниченным множеством. Его граница ∂W_D - множество сеток, для которых хотя бы одно из неравенств обращается в равенство. Далее везде будем предполагать, что множество W_D не пусто.

Таким образом, каждый допустимый набор координат граничных узлов определяет класс невырожденных сеток W_D, удовлетворяющих неравенствам (22). Для характеризации каждого такого класса естественно воспользоваться дискретным аналогом вариационного принципа, сформулированного в предыдущем разделе.

Дискретный аналог функционала (21) в двумерном случае записывается в виде

$$F^h = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{4} \left[F_k \right]_N , \tag{23}$$

$$F_k = \frac{(r_{k+1} - r_k)^2 (G_{22})_k - 2(r_{k+1} - r_k)(r_{k-1} - r_k)(G_{12})_k + (r_{k-1} - r_k)^2 (G_{11})_k}{2J_k \sqrt{(G_{11})_k (G_{22})_k - (G_{12})_k^2}}, \tag{24}$$

где

$$r_k = (x_k, y_k)^T,$$

$$(r_{k+1} - r_k)^2 = (x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2,$$

$$(r_{k+1}-r_k)(r_{k-1}-r_k)=(x_{k+1}-x_k)(x_{k-1}-x_k)+(y_{k+1}-y_k)(y_{k-1}-y_k),$$

$$(r_{k-1}-r_k)^2=(x_{k-1}-x_k)^2+(y_{k-1}-y_k)^2,$$

$(G_{lm})_k$ - элементы симметричной и положительно определенной матрицы $G_k(N)$, отнесенной к треугольнику с локальным номером k ячейки N.

Введем в рассмотрение набор симметричных и положительно определенных матриц g_k с элементами

$$(g_{11})_k=(r_{k+1}-r_k)^2,\quad (g_{12})_k=(g_{21})_k=(r_{k+1}-r_k)(r_{k-1}-r_k),$$

$$(g_{22})_k=(r_{k-1}-r_k)^2. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24) получаем

$$F_k=\frac{tr(G_k^{-1}g_k)}{2\sqrt{det(G_k^{-1}g_k)}}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\geq 1, \tag{26}$$

где λ_1 и λ_2 - собственные числа матрицы $G_k^{-1}g_k$. Равенство в (26) достигается тогда и только тогда, когда $\lambda_1=\lambda_2$. Отсюда следует, что $F_k\geq 1$, причем $F_k=1$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы G_k пропорциональны элементам матрицы g_k

$$(G_{lm})_k=a_k(g_{lm})_k,\quad a_k>0. \tag{27}$$

Функция F^h обладает так называемым барьерным свойством, т.е. справедлива

Лемма. *При любом наборе симметричных и положительно определенных матриц* $\{G_k(N),\ k=0,1,2,3;\ N=1,\dots,N_e\}$ *функция* F^h *имеет бесконечный барьер на границе класса невырожденных сеток* W_D, *т.е. если хотя бы для одной ячейки сетки площадь одного из треугольников стремится к нулю, оставаясь при этом положительной, то* $F^h\to+\infty$.

Доказательство. Предположим, что $J_k\to 0$ для какой-либо ячейки, а F^h не стремится к $+\infty$, тогда числитель в (24) также должен стремиться к нулю. Отсюда и из неравенства

$$\frac{(r_{k+1}-r_k)^2(G_{22})_k-2(r_{k+1}-r_k)(r_{k-1}-r_k)(G_{12})_k+(r_{k-1}-r_k)^2(G_{11})_k}{\sqrt{(G_{11})_k(G_{22})_k-(G_{12})_k^2}}\geq$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{min}(G_k)}{\lambda_{max}(G_k)}}\left((r_{k+1}-r_k)^2+(r_{k-1}-r_k)^2\right)$$

следует, что длины двух соответствующих сторон ячейки стремятся к нулю, а значит и площади всех треугольников, опирающихся на эти стороны, также стремятся к нулю. Повторяя эти аргументы необходимое число раз получаем, что длины сторон всех ячеек сетки должны стремиться к нулю, т.е. сетка должна сжиматься в точку, а это невозможно из-за необходимости выполнения граничных условий - принадлежности граничных точек контуру области. Лемма полностью доказана.

7 Дискретный вариационный принцип

В этом разделе доказывается дискретный аналог вариационного принципа, сформулированного в разд.5.

Теорема 10 *Нерегулярноя сетка* $\{(x,y)_i,\ i=1,\ldots,N_n\}$*, построенная в области* Ω*, принадлежит классу невырожденных сеток* W_D *тогда и только тогда, когда она доставляет минимум функционалу* F^h *при некотором наборе симметричных и положительно определенных матриц* $\{G_k(N),\ k=0,1,2,3;\ N=1,\ldots,N_e\}$

Доказательство необходимости. Пусть задана некоторая сетка, удовлетворяющая неравенствам (22). В каждой ячейке зададим четыре матрицы $G_k = g_k, \quad k=0,1,2,3$, где элементы матрицы g_k вычисляются по формулам (25). Вместо матриц G_k удобно ввести матрицы $\tilde{G}_k$ с элементами $(\tilde{G}_{lm})_k=(g_{lm})_k/\sqrt{det(g_k)}$, причем $det(\tilde{G}_k)=1$. Легко проверить, что в этом случае каждое слагаемое в (24) равно единице

$$F_k=\frac{tr(\tilde{G}_k^{-1}g_k)}{2\sqrt{det(g_k)}}=\frac{tr(G_k^{-1}g_k)}{2\sqrt{det(G_k^{-1}g_k)}}=\frac{tr(g_k^{-1}g_k)}{2\sqrt{det(g_k^{-1}g_k)}}=1.$$

Следовательно, для любой сетки существует такой набор матриц $\tilde{G}_k(N)$, что F^h принимает наименьшее возможное значение, равное единице. Осталось доказать, что сетка, на которой достигается минимум $F^h=1$ для данного набора матриц $\tilde{G}_k(ij)$, единственна.

Действительно, если $F^h=1$, то каждое слагаемое в (24) также принимает наименьшее возможное значение, равное $F_k=1$. Рассматривая сумму четырех слагаемых для какой-нибудь одной ячейки, замечаем, что если задать координаты любых двух соседних вершин, то остальные две определяются однозначно из условия $F_k = 1, k = 0, 1, 2, 3$. Таким образом, если $F^h = 1$, то сетку можно строить последовательно, начиная от границы. Вначале по координатам двух граничных вершин какой-нибудь приграничной ячейки определяются координаты двух оставшихся, затем процедура повторяется для соседней ячейки, и т.д. В результате будет построена искомая сетка. По построению она единственная.

Доказательство достаточности. Пусть задан набор симметричных и положительно определенных матриц

$$\{G_k(N),\ k = 0, 1, 2, 3;\ N = 1, \ldots, N_e\}.$$

Функция F^h имеет бесконечный барьер на границе класса невырожденных сеток W_D по лемме о барьерном свойстве. Из (26) следует, что F^h ограничена снизу единицей. А поскольку F^h как функция от координат внутренних узлов сетки непрерывна на W_D, то существует хотя бы одна сетка из W_D, на которой достигается ее минимум. Более того, F^h непрерывно дифференцируема на W_D, и, следовательно, система алгебраических уравнений, представляющих собой необходимые условия минимума F^h, имеет по крайней мере одно решение, принадлежащее классу невырожденных сеток W_D. Теорема полностью доказана.

8 Моделирования течений в водоемах

Проиллюстрируем применение функционала (23) на примере моделирования ветровых течений в заливе Чайво, представляющем собой сложную многосвязную область. На рис.1а показана структура сеточной области. На рис.1б показана сетка, построенная с использованием функционала (23) для обеспечения ортогонализации и сгущения сетки вблизи границы. На рис.1в показаны средние по глубине скорости течения при южном ветре с компонентами $W_x = -0.9$ м/с, $W_y = 8.0$ м/с. Видна сложная структура течений, особенно в районе островов.

Таким образом, применение теории гомеоморфных отображений ограниченных областей позволяет обосновывать конструирование надежных алгоритмов построения сеток в областях сложной формы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Исмаилов И.Г. Несколько замечаний о гомеоморфных отображениях// Матем. заметки. 1996. Т. 60, N. 4. С.593-596.

[2] Иваненко С.А. Управление формой ячеек в процессе построения сетки// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. N. 11. С.1662-1684.

Рис.1 Результаты моделирования ветровых течений в заливе Чайво