СИСТЕМЫ ДЕЛОНЕ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФУНДАМЕНТ ДИСКРЕТНОГО МИРА.

Р.В.Галиулин. Кристаллографический клуб,
e-mail: galiulin@ns.crys.ras.ru

Рассмотрим систему точек (систему Делоне [1]), удовлетворяющую двум требованиям:

1) r-дискретность - имеется кратчайшее расстояние между точками системы Делоне;
2) R-однородность - пространство покрывается шарами радиуса R, описанными вокруг всех точек системы Делоне.

В общем виде системы Делоне могут быть приняты за модель идеального газа – газа Делоне.Несмотря на общность требований, системы Делоне весьма содержательны с математической точки зрения и весьма естественны с точки зрения физики. Приведем некоторые общие свойства систем Делоне.

Лемма 1. Если r-const для всех точек системы (т.е. у всех точек кратчайшее расстояние одно и то же), то такие системы Делоне представляют все расположения центров жестких шаров в шаровых упаковках.

Системы, у которых R-const, до сих пор не табулированы.

Лемма 2. $r \le 2R$.

Лемма 3. Для построения многогранника Дирихле-Вороного любой точки системы Делоне, достаточно точек этой системы,
попавших в шар радиуса 2R, описанный вокруг этой точки, а диаметр многогранника не превосходит величины R.

Лемма 4. Система Делоне 2R-связна, т.е. любые две точки системы можно соединить ломаной, вершинами которой являются точки системы, а звенья не превосходят по длине 2R.

Рассмотрим теперь шар, не содержащий в себе точек системы Делоне. Будем раздувать его до тех пор, пока он не коснется какой-либо точки системы Делоне. Увеличивая радиус пустого шара так, чтобы на его поверхности оставались точки, которых он коснулся, получим, наконец, трехмерный комплекс точек этой системы. Выпуклая оболочка, натянутая на эти точки, называется многогранником Делоне.

Теорема Делоне. Все многогранники Делоне образуют разбиение пространства.

Это разбиение называют триангуляцией Делоне.

Триангуляция Делоне в последнее время становится одним из главных методов вычислительных геометрии и физики.

Лемма 5. Для любой системы Делоне, расположенной на сфере, триангуляция Делоне есть реберная сетка многогранника, вписанного в сферу.
Лемма 6. Если триангуляция Делоне на двумерной сфере комбинаторно правильная (т.е. какие бы две точки ни взять существует комбинаторно топологическое преобразование, переводящее эти точки друг в друга и всю систему в себя), то она комбинаторно эквивалентна какому-либо из тел Платона, тел Архимеда и двух бесконечных последовательностей призм и антипризм.
Лемма 7. Триангуляция Делоне любой орбиты точек на евклидовой плоскости комбинаторно эквивалентна какой-либо из сеток Кеплера, т.е. изогонально правильных сеток, составленных из правильных ногоугольников.
Лемма 8 Триангуляция Делоне однозначна, а ее ребра не превосходят по длине 2R.

При добавлении новой точки в систему Делоне или при удалении точки из системы реберная сетка триангуляции меняется только в небольшой окрестности этой точки (флип). По этим причинам триангуляция Делоне становится мощным методом изучения дискретного состояния материи. Она однозначно характеризует топологию его связей.

Возьмем точку в произвольной системе Делоне и соединим ее со всеми остальными точками этой системы. Такая конструкция называется глобальной звездой данной точки в данной системе Делоне. В общем случае глобальные звезды для разных точек в данной системе Делоне разные. Система Делоне называется правильной (идеальным кристаллом), если глобальные звезды Делоне всех ее точек конгруэнтны. Иными словами, каждая точка системы равно окружена всеми другими ее точками. Заснули вы на одной точке, а вас во время сна перенесут на другую, проснувшись, вы этого и не заметите.

Из вышеприведенного определения следует, что точка – это нульмерный идеальный кристалл, две точки – одномерный идеальный кристалл, три точки, образующие правильный треугольник – одномерный сферический кристалл, все целые точки числовой прямой – одномерный евклидов кристалл, вершины тел Платона и Архимеда – двумерные сферические кристаллы.

Из равенства окружения точек в правильной системе следует, что какие бы две из них ни взять, существует преобразование, переводящее первую точку во вторую и всю систему в себя. Полная совокупность таких преобразований образует группу, которая и называется федоровской или пространственной кристаллографической группой. Геометрически Федоровская группа определяется как дискретная группа с конечной фундаментальной областью. (Фундаментальной областью группы называется часть пространства, внутри которого нет точек, эквивалентных по преобразованиям группы, но любая точка пространства эквивалентна точке из этой совокупности).

Такое определение федоровских групп позволяет относить к идеальным кристаллам любые совокупности объектов, равно окруженных такими же объектами, например, километровые столбы на бесконечной дороге.

Теорема М.И.Штогрина. Если каждая точка системы Делоне на евклидовой плоскости равно окружена другими ее точками в круге радиуса $4R$, то такая система Делоне правильная.

[1]. Р.В.Галиулин. Кристаллографическая картина мира. УФН, 2002, т.172, №2, с.229-233