АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ

Рудаков Константин Владимирович

(Автореферат)

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы и цель работы. Исследование задач продолжения (экстраполяции) функций является одним из традиционных и важнейших направлений математики, в рамках которого получены как многие теоретические результаты, так и разработаны эффективные методы решения прикладных проблем. Аналогом этого направления в современной информатике выступает область, известная как распознавание, восстановление эвристических зависимостей или обучение по прецедентам. Этот раздел науки развивается с середины 50-х годов и в настоящее время можно говорить о его установившихся особенностях по сравнению с конструкциями традиционной математики.

Важнейшим отличием, возникающим уже на уровне постановки задач, оказывается чрезвычайная сложность пространств описаний прецедентов. Обычно такие пространства представляют собой декартовы произведения 20–100 и более множеств, среди которых могут быть одновременно конечные множества, числовые интервалы, группы и т.д. При этом количество прецедентов, на основе которых строится решение, как правило, не слишком велико (их число может быть даже много меньше размерности пространства описаний). Это обстоятельство привело к использованию для решения основной задачи так называемых эвристических информационных моделей алгоритмов, т.е. параметрических семейств отображений, из которых на базе анализа имеющихся прецедентов выбирается искомое отображение и, соответственно, реализующий его алгоритм.

Долгое время такой подход был по сути дела единственным, и в его рамках как были созданы мощные эвристические модели (алгоримы вычисления оценок, комитетные алгоритмы и т.п.), так и решены многочисленные практические задачи. Однако при использовании фиксированных моделей алгоритмов типичной оказалась ситуация, когда не удавалось построить точное даже на прецедентах решение, причем при применении «бедных» моделей алгоритмов точного решения просто не существовало, а при применении «богатых» моделей его не удавалось найти из-за технических сложностей.

В середине 70-х годов работами члена-корреспондента АН СССР Ю.И.Журавлева был начат новый этап развития рассматриваемой области — им был предложен так называемый алгебраический подход к решению проблемы синтеза корректных (т.е. точных на прецедентах) алгоритмов. Суть подхода состоит в том, что из имеющихся моделей определенным образом выбираются некоторые алгоритмы и, с использованием подходящих операций над ними (корректирующих операций), строятся решения для конкретных задач.

В работах Ю.И.Журавлева и других ученых были развиты исходные концепции алгебраического подхода и получены принципиально важные результаты. Среди них можно отметить: введение и исследование понятия регулярности как свойства задач, обеспечивающего разрешимость; создание техники, позволяющей проводить автономные исследования семейств алгоритмических операторов и решаюших правил, суперпозициями которых являются эвристические алгоритмы; синтез экстремальных по качеству алгоритмов без решения сложных задач оптимизации. В настоящее время алгебраический подход может рассматриваться как общетеоретическая база для всей проблематики распознавания и, конечно, как перспективное направление в этой области науки.

В то же время в упомянутых работах остался открытым ряд важных проблем, необходимость получения ответов на которые определяет актуальность темы реферируемой диссертации. Универсальность конструкций алгебраического подхода позволяет при недостаточно точной постановке задач с легкостью получать формально правильные, но бессмысленные с содержательной точки зрения результаты, так что прежде всего было необходимо уточнение постановки задач синтеза алгоритмов путем включения в эту постановку в явном виде дополнительных по отношению к прецедентным ограничений на корректные алгоритмы и выяснение соотношения между прецедентными (локальными) и дополнительными к ним (универсальными) ограничениями.

Отметим далее, что критерии регулярности задач (т.е. описания задач, априори разрешимых с помощью соответствующих алгебраических конструкций), имели характер лишь достаточных, но не необходимых условий, формировавшихся в результате анализа конкретных моделей алгоритмов и семейств корректирующих операций. Поэтому возникала потребность в теории, позволяющей выводить необходимые и достаточные условия регулярности непосредственно из анализа реальной информации.

Возникали также вопросы о возможности изучения по-отдельности моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций и об использовании в качестве семейств корректирующих операций произвольных множеств операций над соответствующими пространствами.

Стояла проблема установления строгих критериев, определяющих экстремальные свойства используемых эвристических семейств отображений, и поиска с помощью этих критериев простейших в некотором смысле подсемейств в широко используемых семействах, полных в них, т.е. обладающих такими же экстраполяционными возможностями.

Отметим, наконец, что, хотя задачи классификации весьма универсальны по постановке, но все же ими не исчерпывается все разнообразие задач синтеза алгоритмов преобразования информации. В исходных результатах и концепциях алгебраического подхода, полученных для задач классификации, содержались основные принципы, пригодные для анализа задач в указанном более общем случае. Необходимость расширения границ применимости идей алгебраического подхода также обусловила актуальность создания теории универсальных и локальных ограничений.

Из сказанного вытекают цели работы:

1. Создание и исследование единого формального языка для описания постановок и методов решения задач синтеза алгоритмов распознавания как алгоритмов, удовлетворяющих совокупностям универсальных и локальных ограничений.

2. Формализация и исследование в рамках предложенного языка основных понятий алгебраического подхода (регулярности, полноты) и вывод соответствующих необходимых и достаточных критериев для классов задач, моделей алгоритмов и используемых при их построении семейств отображений.

3. Изучение в рамках полученных конструкций наиболее известных и широко используемых моделей алгоритмов и семейств корректирующих операций. Установление для них окончательных результатов о полноте и минимальной необходимой сложности.

4. Разработка общей методики теоретического изучения родственных задач синтеза алгоритмов и соответствующих эвристических моделей алгоритмов и корректирующих операций.

Научная новизна. Работа является первой и пока единственной попыткой создания теории оснований алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов. Все полученные в ней результаты являются новыми, за исключением некоторых следствий, полученных для конкретных классов задач и моделей алгоритмических операторов (аналоги встречались ранее в виде определений регулярных задач и достаточных условий полноты).

Практическая значимость. В целом работа имеет теоретитический характер. Практическое использование ее результатов определяется возможностью применения полученных критериев полноты и разрешимости к используемым при решении прикладных задач моделям алгоритмов и семействам корректирующих операций и возможностью регулярного синтеза и исследования новых моделей, позволяющих учитывать различные типы дополнительной информации.

Апробация работы и публикации. Результаты работы докладывались и обсуждались на Всесоюзных конференциях «Математические методы распознавания образов» (1-я — Звенигород, 1983 г., 2-я — Дилижан, 1985 г., 3-я — Львов, 1987 г., 4-я — Рига, 1989 г.), «Автоматизация обработки сложной графической информации» (Горький, 1984 г.), «Автоматизированные системы обработки изображений» (Львов, 1986 г.), «Бионика и биомедкибернетика» (Ленинград, 1986 г.), на научной конференции с участием ученых из социалистических стран «Проблемы искусственного интеллекта и распознавания образов»

(Киев, 1984 г.), на научных семинарах Вычислительного центра АН СССР, института кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, Московского физико-технического института, университета г. Росток (ГДР), института математики и механики Уральского научного центра АН СССР. Основное содержание работы отражено в 20 публикациях, из них 12 — в центральных научных журналах и книгах, выпущенных издательством «Наука».

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы (163 наименования). Объем работы — 274 страницы машинописного текста.

Автор выражает глубокую признательность всем своим коллегам — специалистам в области теории распознавания из отдела проблем распознавания и методов комбинаторного анализа ВЦ АН СССР и других научных организаций за доброжелательное и в то же время конструктивно-критическое отношение к его результатам, что в особенности стимулировало осмысливание содержательных обоснований введенных конструкций. Чувство глубочайшей благодарности автор выражает своему Учителю со студенческих лет члену-корреспонденту АН СССР Юрию Ивановичу Журавлеву, который, заложив основы алгебраического подхода, с неизменным тактом и вниманием относился к попыткам автора ставить и решать «общетеоретические» вопросы, что и привело к написанию реферируемой диссертации.

2 Содержание работы

Во введении дается краткий обзор истории развития алгебраического подхода к проблеме синтеза алгоритмов распознавания и описываются исходные конструкции этого подхода, причем подробно обсуждаются причины создания теории универсальных и локальных ограничений. Далее приводится краткое изложение основных построений, результатов и выводов работы.

В главе 1 рассматривается вопрос о постановке задач распознавания как частного случая общих задач преобразования информации. При этом выделяются задачи классификации и задачи классификации со стандартным способом формирования информации. Далее подробно обсуждается способ решения задач синтеза алгоритмов, основанный на построении расширений заданных параметрических семейств отображений, т.е. на основной конструкции алгебраического подхода.

После описания и обсуждения постановок задач распознавания как задач синтеза алгоритмов, реализующих отображения, удовлетворяющие ограничениям, в виде которых представлена вся имеющаяся реальная информация о проблемной области, проводится на содержательном уровне обсуждение свойств таких ограничений, обеспечивающих возможность применения конструкций алгебраического подхода.

Далее рассматривается центральный для алгебраического подхода вопрос о разрешимости, причем описывается конструкция, позволяющая изучать целый спектр различных понятий разрешимости (регулярности), возникающих при формализации тех или иных дополнительных требований к процессу решения задач.

Глава 1 завершается обзором основных проблем алгебраического подхода, решаемых в рамках теории универсальных и локальных ограничений.

В главе 2 вводится и изучается главное для настоящей работы понятие — система универсальных ограничений. Это понятие описывается сначала на содержательном уровне, потом проводится соответствующая формализация.

Рассматривается задача синтеза алгоритмов A, реализующих отображения из пространства возможных начальных информаций $\mathfrak{I}_i$ в пространство возможных финальных информаций $\mathfrak{I}_f$. Множество всех отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$ обозначается символом $\mathfrak{M}_*$. Задачи определяются структурными информациями I_s, выделяющими из $\mathfrak{M}_*$ подмножества допустимых отображений, обозначаемые $\mathfrak{M}\,[\,I_s\,]$. Любой алгоритм A, реализующий произвольное из допустимых отображений, называется корректным для задачи, определяемой структурной информацией I_s, и является ее решением.

Конструкции алгебраического подхода к рассматриваемой проблеме синтеза корректных алгоритмов основаны на использовании «промежуточного» по отношению к $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ пространства возможных оценок $\mathfrak{I}_e$. При этом корректные алгоритмы синтезируются на базе эвристических информационных моделей, т.е. параметрических семейств $\mathfrak{M}$ отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, представляющих собой суперпозиции алгоритмических операторов (отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$) и решающих правил (отображений из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_f$, p — арность решающего правила). Модели $\mathfrak{M}$ определяются моделями алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и решающих правил $\mathfrak{M}^1$ (отметим, что $\mathfrak{M}^0 \subseteq \{\, B \mid B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$ и $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=1}^{\infty}\{\, C \mid C : \mathfrak{I}_e^p \to$ $\to \mathfrak{I}_f \,\})$ следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{\, C \circ (B_1 \times \ldots \times B_p)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p \,\} \tag{2.1}$$

(для произвольного отображения u из $\mathfrak{U}^p$ в $\mathfrak{V}$ при $p \geqslant 1$ диагонализацией u_Δ называется отображение из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ такое, что для любого $U \in \mathfrak{U}$ выполнено $u_\Delta(U) = u(U, \ldots, U)$).

Для синтеза корректных алгоритмов используются корректирующие операции F, определенные над множеством отображений $\mathfrak{M}_*^0 = \{\, B \mid B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$. Применение семейства таких операций эквивалентно тому, что поиск решения ведется в рамках $\mathfrak{F}$-расширения модели $\mathfrak{M}$, обозначаемого $\mathfrak{F}\,[\,\mathfrak{M}\,]$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\,[\,\mathfrak{M}\,] = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \ & \{\, C \circ (F_1(B_1^1 \times \ldots \times B_{r_1}^1) \times \ldots \times F_p(B_1^p \times \ldots \times B_{r_p}^p))_\Delta \mid \\ & \mid C \in \mathfrak{M}^1,\ (F_1, \ldots, F_p) \in \mathfrak{F}^p,\ B_1^1 \in \mathfrak{M}^0,\ \ldots,\ B_{r_p}^p \in \mathfrak{M}^0 \,\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Корректирующие операции, рассматриваемые в настоящей работе, вводятся с помощью операций над $\mathfrak{I}_e$:

$$F(B_1, \ldots, B_p)(I) = F(B_1(I), \ldots, B_p(I)), \tag{2.3}$$

где $I \in \mathfrak{I}_i, B_1, \ldots, B_p$ — алгоритмические операторы, F в левой части равенства — корректирующая операция, в правой части — операция над $\mathfrak{I}_e$.

Системы ограничений $\mathfrak{I}_s$ рассматриваются как совокупности пар подсистем — системы универсальных ограничений I_s^u и системы локальных ограничений I_s^l. Система I_s^u

выделяет из $\mathfrak{M}_*$ подмножество $\mathfrak{M}\,[\,I_s^u\,]$, система I_s^l — подмножество $\mathfrak{M}\,[\,I_s^l\,]$, и считается, что $\mathfrak{M}\,[\,I_s\,] = \mathfrak{M}\,[\,I_s^u\,] \cap \mathfrak{M}\,[\,I_s^l\,]$. Система универсальных ограничений I_s^u выделяет подмножества удовлетворяющих ей отображений не только из множества $\mathfrak{M}_*$ всех отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, но и из множеств отображений $\{\, B \mid B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e \,\}$, $\bigcup_{p=1}^{\infty}\{\, F \mid F : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_e \,\}$ и $\bigcup_{p=1}^{\infty}\{\, C \mid C : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_f \,\}$.

Предполагается, что определен класс $\mathfrak{K}$, объектами которого являются множества, используемые как $\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_f$ и $\mathfrak{I}_e$ и все конечные декартовы степени таких множеств; Ψ — категория с классом объектов $\mathfrak{K}$, морфизмами которой являются все отображения объектов друг в друга, причем композиции морфизмов есть суперпозиции отображений. Все используемые при алгебраическом подходе отображения оказываются при этом морфизмами категории Ψ или им соответствуют.

Категория Ψ не определена вышесказанным однозначно (неоднозначен выбор класса объектов $\mathfrak{K}$). Уточнение определения категории Ψ, т.е. конкретный выбор класса объектов, приводит к отдельным теориям для разных типов задач и соответствующих алгоритмов.

На основе анализа интуитивно ясных требований делается вывод: формальным эквивалентом понятия «система универсальных ограничений» являются соответствующие подкатегории Ψ_0 категории Ψ, т.е. $\mathfrak{M}\,[\,I_s^u\,] = \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_f)$.

При наличии системы универсальных ограничений I_s^u, которой соответствует подкатегория Ψ_0 категории Ψ, всегда предполагаются выполненными включения $\mathfrak{M}^0 \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_e)$, $\mathfrak{F} \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_e^p, \mathfrak{I}_e)$ и $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_e^p, \mathfrak{I}_f)$.

Всякая система универсальных ограничений I_s^u описывается соответствующей подкатегорией категории Ψ. Однако, вообще говоря, не произвольные подкатегории имеет смысл рассматривать в качестве описаний систем универсальных ограничений. Действительно, при построении алгоритмов из алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил используются суперпозиции достаточно специального вида (2.2), которые не являются непосредственно суперпозициями морфизмов категории Ψ. Это обстоятельство заставляет требовать для подкатегорий, претендующих на роль универсальных ограничений, выполнения условия допустимости:

Определение 2.1. Подкатегория Ψ_0 категории Ψ называется *допустимой*, если для любой пары объектов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и любых двух морфизмов u и v из $\mathfrak{U}^{p_1}$ в $\mathfrak{V}^{r_1}$ и из $\mathfrak{U}^{p_2}$ в $\mathfrak{V}^{r_2}$ соответственно при произвольных натуральных p_1, r_1, p_2 и r_2, произведение $u \times v$ и диагонализация u_Δ являются морфизмами категории Ψ_0.

Изучение универсальных ограничений для алгоритмов классификации проводится в рамках основной категории $\Psi_{q,l}$, где q — число одновременно рассматриваемых объектов и l — число классов. Объектами этой категории являются пространства $q \times l$-матриц над произвольными множествами и все конечные декартовы степени таких постранств.

Системы универсальных ограничений для задач классификации описываются допустимыми подкатегориями категорий $\Psi_{q,l}$. Таким образом, если имеется задача, в которой универсальные ограничения выражены допустимой подкатегорией Ψ_0 категории $\Psi_{q,l}$, а локальные — парой матриц $(\widehat{I}_0, \widehat{\widehat{I}}_0)$, то задача сводится к построению морфизма A категории

Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$ такого, что $A(\widehat{I}_0) = \widehat{\widetilde{I}}_0$.

Одним из главных вопросов алгебраического подхода является проблема разрешимости (регулярности) изучаемых задач. Для рассмотрения этой проблемы требуется, чтобы универсальные ограничения удовлетворяли дополнительному условию:

Определение 2.2. Подкатегория Ψ_0 категории $\Psi_{q,l}$ называется *полной категорией*, если для любых множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ при $|\mathfrak{U}| > 1$ выполнено равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}\left(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})\right)\left(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})\right) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}). \tag{2.4}$$

Система универсальных ограничений I^u_s называется *полной*, если она выражается полной категорией.

Далее в главе 2 доказывается независимость свойств допустимости и полноты и приводятся примеры систем универсальных ограничений — рассматриваются задачи классификации с однородными классами, задачи классификации с однородными объектами, задачи классификации с независимыми классами, задачи классификации с однородными и независимыми классами и объектами, задачи распознавания с монотонными признаками и задачи прогнозирования.

Третья глава посвящена подробному рассмотрению конструкций и результатов, относящихся к анализу постановок задач классификации и семейств алгоритмов (отображений), используемых для их решения. В этой главе получены основные общие результаты работы — критерии регулярности задач и полноты моделей алгоритмов, алгоритмических операторов и корректирующих операций. При этом рассмотрение проведено сначала на абстрактном уровне путем изучения свойств определенных семейств отображений, а потом установлена связь полученных результатов с процессом решения задач классификации.

Пусть зафиксирована некоторая полная допустимая категория Ψ_0 — подкатегория категории $\Psi_{q,l}$. При произвольных $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и $X \subseteq \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ используются обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) &= \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}));\\
\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) &= \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}));\\
\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) &= \{\, u(\widehat{U}) \mid u \in \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}),\ \widehat{U} \in X \,\};\\
\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) &= \bigcup_{p=0}^{\infty} \{\, u(\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_p) \mid u \in \mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V}),\ (\widehat{U}_1, \ldots, \widehat{U}_p) \in X^p \,\}.
\end{aligned}$$

Понятие полной категории введено определением 2.2 при использовании «целых» пространств матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Поскольку при решении задач классификации реально возникают собственные подмножества таких пространств, то требуется и соответствующее общее понятие, связывающее подмножества пространств матриц и системы универсальных ограничений. Этим понятием, центральным при изучении проблемы регулярности и полноты, оказывается понятие базы:

Определение 2.3. Пусть $\mathfrak{U}$ — множество и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Множество X называется *базой категории* Ψ_0 *в* $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ или просто базой категории Ψ_0, если выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{U})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Определение 2.4. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — некоторые произвольные множества, $|\mathfrak{U}| > 1$ и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Множество X называется *базой категории* Ψ_0 *в* $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ *для* $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$, если выполнено равенство $\mathcal{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Лемма 2.1. . Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ при $|\mathfrak{U}| > 1$ и $|\mathfrak{V}| > 1$ и любого подмножества X пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ высказывания «X — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$» и «$X$ — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$» эквивалентны.

При использовании конструкций алгебраического подхода основная схема перехода между пространствами матриц такова:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I}) & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}}) \\ \Big\downarrow \mathfrak{M}^0 & & \Big\uparrow \mathfrak{M}^1 \\ \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R}) \end{array} \tag{2.5}$$

где $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов, $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций, $\mathfrak{M}^1$ — семейство решающих правил и $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов. Чтобы получить условия, которым должны удовлетворять задачи (общий критерий регулярности), приходится рассматривать схему

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \\ \Big\downarrow \mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W}) & & \Big\uparrow \mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V}) \\ \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) & \xrightarrow{\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) \end{array} \tag{2.6}$$

для допустимых полных категорий Ψ_0 и для произвольных неодноэлементных множеств $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные неодноэлементные множества, X и Y — подмножества пространств матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ соответственно. Тогда:

— для того, чтобы было выполнено любое из равенств

$$\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \tag{2.7}$$

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})\Big(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(\mathrm{H}(\mathfrak{U},\mathfrak{W})(X))\Big) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}), \tag{2.8}$$

необходимо, чтобы множество X было базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$;

— для того, чтобы было выполнено любое из равенств

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(Y) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \tag{2.9}$$

$$\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{V})(\mathcal{H}(\mathfrak{W},\mathfrak{W})(Y)) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}), \tag{2.10}$$

необходимо и достаточно, чтобы множество Y было базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Замечание. Утверждение леммы для множества X не может быть усилено, т.е. неверно, что для выполнения равенств (2.7) или (2.8) достаточно, чтобы X было базой категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Лемма 2.3. Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные неодноэлементные множества и X — одноэлементное подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Для выполнения любого из равенств (2.7) или (2.8) необходимо и достаточно, чтобы множество X было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Из данных лемм вытекает

Теорема 2.4. (Общий критерий регулярности задач классификации). Для того, чтобы задача классификации Z с матрицей информации $\widehat{I}$ и системой универсальных ограничений, выраженной полной допустимой категорией Ψ_0, была регулярна, необходимо и достаточно, чтобы одноэлементное множество $\{\widehat{I}\}$ было базой категории Ψ_0 в постранстве матриц информации $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$.

Далее рассматриваются проблемы, возникающие при использовании в схемах типа (2.6) вместо «целых» множеств морфизмов их подмножеств, т.е. рассматривается схема

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{M}^0} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathfrak{M}^1} \\ \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}) \end{array} \tag{2.11}$$

где $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные неодноэлементные множества, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — подмножества множеств морфизмов некоторой полной допустимой категории Ψ_0, т.е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$, $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})$, $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathcal{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$. Эти включения предполагаются выполненными в нижеследующих определениях и утверждениях.

Определение 2.5. Множество $\mathfrak{M}$ называется 1-Г-*полным в категории* Ψ_0, или просто 1-Г-полным, если для каждой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено

$$\mathfrak{M}(X) = \{ A(\widehat{U}) \mid A \in \mathfrak{M},\ \widehat{U} \in X \} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V}).$$

Легко видеть, что если некоторое семейство отображений $\mathfrak{M}$ (при $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$) не является 1-Г-полным в категории Ψ_0, то само применение такого семейства оказывается ограничением. Итак, при наличии универсальных ограничений для моделей алгоритмов оказывается однозначно определенным требование экстремального качества — требование 1-Г-полноты.

Определение 2.6. Множество $\mathfrak{M}^0$ *слабо 1-Г-полно в категории* Ψ_0 или просто слабо 1-Г-полно, если для каждой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ множество $\mathfrak{M}^0(X)$ является базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Лемма 2.5. Для того, чтобы существовали семейства отображений $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$, такие, что имеет место 1-Г-полнота семейства суперпозиций $\mathfrak{F}\,[\,\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\,]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полно в категории Ψ_0.

Определение 2.7. Множество $\mathfrak{M}^1$ называется *корректным* в категории Ψ_0, если $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Замечание. Для корректности множества $\mathfrak{M}^1$ достаточно, чтобы в нем содержалось хотя бы одно сюръективное отображение $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ на $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$.

Лемма 2.6. Для того, чтобы существовали семейства отображений $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{F}$ такие, что имеет место 1-Г-полнота семейства суперпозиий $\mathfrak{F}[\,\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\,]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^1$ было корректно в категории Ψ_0.

Итак, получены условия, необходимые для того, чтобы на базе семейств $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ можно было с помощью подходящего семейства $\mathfrak{F}$ построить 1-Г-полное семейство суперпозиций $\mathfrak{F}[\,\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\,]$. Условия слабой 1-Г-полноты для $\mathfrak{M}^0$ и корректности для $\mathfrak{M}^1$ оказываются и достаточными:

Лемма 2.7. Для того, чтобы существовало семейство отображений $\mathfrak{F}$ такое, что имеет место 1-Г-полнота семейства суперпозиий $\mathfrak{F}[\,\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\,]$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0 семейством и $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ_0.

Из проведенного рассмотрения легко заключить, что семейство $\mathfrak{F}$ гарантированно «получает на вход» базу категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$, а «на выходе» должно при этом порождать все пространство $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$.

Определение 2.8. Множество $\mathfrak{F}$ называется Г-полным в категории Ψ_0, если для любой базы Y категории Ψ_0 в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W})$ выполнено равенство

$$\mathfrak{F}(Y) = \{\, F(\widehat{W}_1, \ldots, \widehat{W}_p) \mid F \in \mathfrak{F},\ (\widehat{W}_1, \ldots, \widehat{W}_p) \in Y^p \,\} = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{W}).$$

Все вышесказанное суммируется следующим утверждением:

Лемма 2.8. Для того, чтобы имела место 1-Г-полнота семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\,\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\,]$, необходимо, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0 семейством и $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ_0. При выполнении этого необходимого условия, для полноты семейства суперпозиций $\mathfrak{F}[\,\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\,]$ достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{F}$ было Г-полным в Ψ_0.

Требование Г-полноты семейства $\mathfrak{F}$ не является, вообще говоря, необходимым.

Подкатегории в целом также могут обладать свойством полноты:

Определение 2.9. Подкатегория Ψ_1 категории Ψ_2, где Ψ_1 и Ψ_2 — полные допустимые подкатегории категории $\Psi_{q,l}$, называется 1-Г-*полной в* Ψ_2, если всякая одноэлементная база категории Ψ_2 является одновременно и базой категории Ψ_1.

Определение 2.10. Подкатегория Ψ_1 категории Ψ_2, где Ψ_1 и Ψ_2 — полные допустимые подкатегории категории $\Psi_{q,l}$, называется Г-*полной в* Ψ_2, если всякая база категории Ψ_2 является одновременно и базой категории Ψ_1.

Ввиду принципиальной важности для приложений результатов, относящихся непосредственно к моделям алгоритмов и алгоритмических операторов и к семействам корректирующих операций (а не просто к абстрактным семействам отображений), формулируются соответствующие критерии.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — семейство задач классификации размера $q \times l$ с пространствами допустимых начальных информаций $\mathfrak{I}$ и финальных информаций $\widetilde{\mathfrak{I}}$, и пусть зафиксирована полная допустимая категория Ψ_0 (подкатегория категории $\Psi_{q,l}$), выражающая некоторую систему универсальных ограничений для задач из семейства $\mathfrak{Z}$. В этом случае определено множество регулярных задач $\mathfrak{Z}_{[R]}$, т.е. подмножество семейства $\mathfrak{Z}$, состоящее из задач, полнота которых достижима при использовании отображений — морфизмов категории Ψ_0.

Рассматривая как основную цель решение регулярных задач, естественно к моделям алгоритмов предъявлять требование полноты:

Определение 2.11. Модель алгоритмов $\mathfrak{M}$ категории Ψ_0 называется *полной*, если любая регулярная задача Z из множества $\mathfrak{Z}_{[R]}$ полна относительно $\mathfrak{M}$.

Отметим, что в силу сохранения свойства регулярности при изменении информационной матрицы в определении 2.11 можно вместо полноты относительно модели $\mathfrak{M}$ говорить о разрешимости в ее рамках.

Рассмотрим модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ с множеством допустимых оценок $\mathfrak{R}$, считая, что операторы из модели $\mathfrak{M}^0$ суть морфизмы категории Ψ_0 из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

Определение 2.12. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ называется *полной в категории* Ψ_0 или просто полной, если для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}_{[R]}$ существуют такие множества $\mathfrak{F}$ корректирующих операций и $\mathfrak{M}^1$ решающих правил, являющихся морфизмами категории Ψ_0, что задача Z оказывается $\mathfrak{F}$-полной относительно семейства $\mathfrak{M}^1 \circ \circ \mathfrak{M}^0$.

Теорема 2.9. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ категории Ψ_0 полна в этой категории тогда и только тогда, когда семейство отображений $\mathfrak{M}^0$ является слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0.

Определение 2.13. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ категории Ψ_0 называется полным, если при любой полной модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и при любом корректном семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ семейство суперпозиций $\mathfrak{F}\left[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0\right]$ является полной моделью алгоритмов.

Теорема 2.10. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ категории Ψ_0 полно в этой категории, если семейство отображений $\mathfrak{F}$ является Г-полным в категории Ψ_0.

В главе 4 описаны и изучены два важных конкретных класса универсальных ограничений для задач и алгоритмов классификации — системы симметрических и функциональных ограничений. При этом их изучение доведено до уровня, обеспечивающего возможность непосредственного использования полученных критериев при исследовании реально используемых для решения прикладных задач моделей алгоритмов.

Символом σ_0 будет обозначаться симметрическая группа подстановок, действующих на множестве $\mathbb{S} = \{(1,1), \ldots, (q,l)\}$.

Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество, $\widehat{U}$ — произвольная матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ и s — подстановка из σ_0. Определим действие подстановки s на матрице $\widehat{U}$ равенством

$$s(\widehat{U}) = s\left(\|U_{ij}\|_{q\times l}\right) = \|U'_{ij}\|_{q\times l}, \tag{2.12}$$

где $U'_{ij} = U_{s(i,j)}$ при $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$. Равенство (2.12) в силу произвольности матрицы $\widehat{U}$ определяет действие подстановок из группы σ_0 на $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

Определим также действие подстановки s на $\mathfrak{C}^p_{q,l}(\mathfrak{U})$, где p — произвольное натуральное число:

$$s(\widehat{U}^1,\ldots,\widehat{U}^p) = (s(\widehat{U}^1),\ldots,s(\widehat{U}^p)). \tag{2.13}$$

Пусть теперь σ — некоторая подгруппа группы σ_0. Сопоставим ей подкатегорию Σ категории $\Psi_{q,l}$, полагая $\operatorname{Ob}\Sigma = \operatorname{Ob}\Psi_{q,l}$ и определяя для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов $\operatorname{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ как множество всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками из группы σ. Категорию, сопоставляемую группе σ_α, где α — индекс, будем обозначать символом Σ_α.

Лемма 2.11. Пусть δ — подмножество группы σ_0, σ — подгруппа группы σ_0, для которой δ является множеством образующих. Тогда для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 выполнено равенство

$$\Delta\Big(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})\Big) = \operatorname{Hom}_\Sigma\Big(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})\Big), \tag{2.14}$$

где $\Delta\Big(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})\Big)$ — множество всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками из множества δ.

Далее доказывается, что категории Σ допустимы.

Лемма 2.12. Для любой подгруппы σ группы σ_0 категория Σ полна.

Лемма 2.13. Пусть σ — подгруппа симметрической группы σ_0 и X — подмножество пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — произвольное множество. Множество X является базой категории Σ в пространстве $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ тогда и только тогда, когда для любой нетождественной подстановки s из группы σ в множестве X найдется матрица $\widehat{U}$ такая, что для нее будет выполнено соотношение $s(\widehat{U}) \neq \widehat{U}$.

Определение 2.14. *Функциональной сигнатурой* φ называется совокупность $(\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)})$ линейно упорядоченных подмножеств множества $\mathbb{S} = \{(1,1),\ldots,(q,l)\}$ вместе с функцией λ из $\mathbb{S}$ в множество $\{1,\ldots,t\}$, где t — число, не превосходящее ql. При этом для любых (i_1,j_1) и (i_2,j_2) из $\mathbb{S}$ должно быть выполнено условие

$$(\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)) \to (|\mathbb{S}_{(i_1,j_1)}| = |\mathbb{S}_{(i_2,j_2)}|). \tag{2.15}$$

Функциональные сигнатуры записываются в виде

$$\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)},\ldots,\mathbb{S}_{(q,l)},\lambda). \tag{2.16}$$

Мощности множеств $\mathbb{S}_{(i,j)}$ обозначаются символом $z(i,j)$, т.е. по определению $z(i,j) = |\mathbb{S}_{(i,j)}|$ при $(i,j)\in\mathbb{S}$.

Пусть $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)},\ldots,\mathbb{S}_{(q,l)},\lambda)$ — функциональная сигнатура, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — множества, p_1 и p_2 — натуральные числа. Задание сигнатуры φ позволяет из множества всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ выделить подмножество $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$, состоящее из всех отображений u таких, что для некоторого набора функций $f^1_1,\ldots,f^1_t$, $f^2_t,\ldots,f^{p_2}_t$ (своего для каждого отображения из $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})))$, где $f^k_r : \mathfrak{U}^{p_1 z(r)} \to \mathfrak{V}$, и для произвольного набора матриц $(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1})$ из $\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} u(\widehat{U}^1, \ldots, \widehat{U}^{p_1}) = u\Big(\left\| U^1_{ij} \right\|_{q\times l}, \ldots, \left\| U^{p_1}_{ij} \right\|_{q\times l} \Big) = \\ = \Big(\left\| f^1_{\lambda(i,j)}(U^1_{\xi(i,j,1)}, \ldots, U^1_{\xi(i,j,z(i,j))}, \ldots, U^{p_1}_{\xi(i,j,z(i,j))}) \right\|_{q\times l}, \ldots, \\ \left\| f^{p_2}_{\lambda(i,j)}(U^1_{\xi(i,j,1)}, \ldots, U^1_{\xi(i,j,z(i,j))}, \ldots, U^{p_1}_{\xi(i,j,z(i,j))}) \right\|_{q\times l} \Big). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Отображения, входящие для данной функциональной сигнатуры φ в $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$, называются φ-отображениями.

Подмножества $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ множеств морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi_{q,l}}(\mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V}))$ категории $\Psi_{q,l}$ не всегда можно рассматривать как множества морфизмов соответствующей сигнатуре φ категории. Такая возможность существует лишь для сигнатур, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Определение 2.15. Функциональная сигнатура φ, где $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$, называется *допустимой*, если для нее выполнены следующие условия:

$$(i,j) \in \mathbb{S}_{(i,j)} \tag{2.18}$$

— для всех $(i,j) \in \mathbb{S}$;

$$(\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2))\,\&((i_1,j_1) = \xi(i_1,j_1,k)) \to ((i_2,j_2) = \xi(i_2,j_2,k)) \tag{2.19}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S}$ и $k \in \{1, \ldots, z(i_1,j_1)\}$;

$$(\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)) \to (\lambda(\xi(i_1,j_1,k)) = \lambda(\xi(i_2,j_2,k))) \tag{2.20}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S}$ и $k \in \{1, \ldots, z(i_1,j_1)\}$;

$$((i_1,j_1) \in \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}) \to (\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subseteq \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}) \tag{2.21}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S}$;

$$\begin{aligned} (\lambda(i_1,j_1) = \lambda(i_2,j_2)) \to (\ (\xi(\xi(i_1,j_1,k),k_1) = \xi(i_1,j_1,k_2)) \equiv \\ (\xi(\xi(i_2,j_2,k),k_1) = \xi(i_2,j_2,k_2))\ ) \end{aligned} \tag{2.22}$$

— для всех $(i_1,j_1), (i_2,j_2) \in \mathbb{S},\ k, k_2 \in \{1, \ldots, z(i_1,j_1)\}$
и $k_1 \in \{1, \ldots, z(\xi(i_1,j_1,k))\}$ (при выполнении условий (2.20) и (2.21)).

Лемма 2.14. Функциональная сигнатура φ определяет подкатегорию категории $\Psi_{q,l}$ тогда и только тогда, когда φ — допустимая функциональная сигнатура.

Далее понятие допустимой функциональной сигнатуры иллюстрируется рядом примеров, совокупность которых является доказательством независимости условий (2.18)–(2.22).

Из равенства (2.17), определяющего состав множеств морфизмов функциональных категорий, непосредственно вытекает, что при любой функциональной сигнатуре φ произведение двух φ-отображений u и v, где $u : \mathfrak{C}^{p_1}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}^{p_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$ и $v : \mathfrak{C}^{r_1}_{q,l}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}^{r_2}_{q,l}(\mathfrak{V})$, также является φ-отображением и что диагонализация любого φ-отображения — φ-отображение.

Отсюда следует, что при любой допустимой функциональной сигнатуре φ категория Φ допустима.

Лемма 2.15. Для любой допустимой функциональной сигнатуры φ категория Φ полна.

Лемма 2.16. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура и X — подмножество множества $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — некоторое произвольное множество. Множество X является базой категории Φ тогда и только тогда, когда для любых различных (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из множества $\mathbb{S}$ таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в множестве X существует матрица $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что для некоторого k из множества $\{1, \ldots, z(i_1, j_1)\}$ имеет место соотношение $U_{\xi(i_1,j_1,k)} \neq U_{\xi(i_2,j_2,k)}$.

Далее решается важный для приложений вопрос о том, как соотносятся симметрческие и функциональные ограничения и категории и когда в процессе решения их можно менять друг на друга.

Определение 2.16. Для допустимой функциональной сигнатуры $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$ группой σ_φ называется подгруппа симметрической группы σ_0, состоящая из всех подстановок s, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(s(i,j)) = \lambda(i,j) \text{ — для всех } (i,j) \in \mathbb{S}; \tag{2.23}$$

$$s(\xi(i,j,k)) = \xi(s(i,j),k) \text{ — для всех } (i,j) \in \mathbb{S} \text{ и } k \in \{1,\ldots,z(i,j)\}. \tag{2.24}$$

Лемма 2.17. Для любой допустимой функциональной сигнатуры φ категория Φ является подкатегорией симметрической категории Σ_φ.

Лемма 2.18. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура и σ — подгруппа симметрической группы σ_0. Если функциональная категория Φ является подкатегорией симметрической категории Σ, то группа σ является подгруппой группы σ_φ.

Итак, любая функциональная категория оказывается подкатегорией однозначно соответствующей ей симметрической категории. Для функциональной категории, определяемой сигнатурой φ, симметрическая категория, определяема группой σ_φ, оказывается при этом минимальной в том смысле, что Φ является подкатегорией тех и только тех симметрических категорий, для которых и Σ_φ является подкатегорией.

Вопрос о полноте функциональных категорий в симметрических решается следующей леммой:

Лемма 2.19. Пусть $\varphi = (\mathbb{S}_{(1,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(q,l)}, \lambda)$ — допустимая функциональная сигнатура. Категория Φ является Γ-полной подкатегорией соответствующей симметрической категории Σ_φ тогда и только тогда, когда сигнатура φ удовлетворяет условию

$$\underset{\mathbb{S}}{\forall}(i_1, j_1)\Big(\underset{\mathbb{S}}{\exists}(i_2, j_2)(\mathbb{S}_{(i_1,j_1)} \subset \mathbb{S}_{(i_2,j_2)}) \to \big(|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))| = 1\big)\Big), \tag{2.25}$$

где $\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))$ — класс ядерной эквивалентности для отображения λ, содержащий (i_1, j_1), и $|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))|$ — число элементов этого класса.

Глава 5 демонстрирует методику применения результатов теории универсальных и локальных ограничений на примерах изучения наиболее известных моделей алгоритмических операторов и семейств корректирующих операций. При этом возникают как новые доказательства ранее известных фактов об этих семействах, так и новые результаты, причем имеющие окончательный характер.

Пусть

$$\widehat{T} = \begin{Vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,l) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,l) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (q,1) & (q,2) & \dots & (q,l) \end{Vmatrix}_{q\times l}.$$

Рассматриваются две подгруппы группы σ_0 — σ_i и σ_j (σ_i и σ_j рассматриваются как единые символы) и три функциональные сигнатуры — φ_0, φ_i и φ_j.

Группа σ_i состоит из всех подстановок множества $\mathbb{S}$, соответствующих подстановкам строк матрицы $\widehat{T}$, а группа σ_j — из подстановок, соответствующих подстановкам столбцов.

Сигнатура φ_0 определяется одноэлементными множествами $\mathbb{S}_{(i,j)} = ((i,j))$ — для всех пар $(i,j) \in \mathbb{S}$ и функцией λ, принимающей при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ значение 1.

Сигнатура φ_i определяется множествами $\mathbb{S}_{(i,j)}$ такими, что при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ множество $\mathbb{S}_{(i,j)}$ есть i-я строка матрицы $\widehat{T}$. Функция λ в данном случае определяется равенством $\lambda(i,j) = j$.

Сигнатура φ_j определяется множествами $\mathbb{S}_{(i,j)}$ такими, что при всех (i,j) из $\mathbb{S}$ множество $\mathbb{S}_{(i,j)}$ есть j-й столбец матрицы $\widehat{T}$. Функция λ в данном случае определяется равенством $\lambda(i,j) = i$.

Лемма 2.20. Категории Φ_0, Φ_i и Φ_j являются Γ-полными подкатегориями категорий Σ_0, Σ_i и Σ_j соответственно.

Лемма 2.21. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и X — подмножества пространства матриц $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$.

— Множество X является базой категорий Φ_0 и Σ_0 тогда и только тогда, когда для любых $(i_1,j_1) \neq (i_2,j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ в X содержится матрица $\|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что $U_{i_1j_1} \neq$ $\neq U_{i_2j_2}$.

— Множество X является базой категорий Φ_i и Σ_i тогда и только тогда, когда для произвольных $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1,\dots,q\}$ в X содержится матрица $\|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что при некотором j из $\{1,\dots,l\}$ выполнено $U_{i_1j} \neq U_{i_2j}$.

— Множество X является базой категорий Φ_j и Σ_j тогда и только тогда, когда для произвольных $j_1 \neq j_2$ из множества $\{1,\dots,l\}$ в X содержится матрица $\|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что при некотором i из $\{1,\dots,q\}$ выполнено $U_{ij_1} \neq U_{ij_2}$.

Теорема 2.22. Пусть Z — задача классификации с матрицей информации $\widehat{I}$.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда элементы матрицы $\widehat{I}$ попарно различны.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_i или Σ_i, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда строки матрицы $\widehat{I}$ попарно различны.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_j или Σ_j, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $\widehat{I}$ попарно различны.

Следствие 2.23. Пусть Z — задача классификации со стандартной информацией и с матрицей информации $\widehat{I}$, где

$$\widehat{I} = \left\| (D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_i),\ D''(S^1),\ldots,D''(S^m),\ P_j(S^1),\ldots,P_j(S^m)) \right\|_{q\times l}.$$

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_0 или Σ_0, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда при всех $i_1 \neq i_2$ из $\{1,\ldots,q\}$ выполнено $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_1}) \neq D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_2})$ и для любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1,\ldots,l\}$ существует k в $\{1,\ldots,m\}$ такое, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_i или Σ_i, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда при всех $i_1 \neq i_2$ из $\{1,\ldots,q\}$ выполнено $D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_1}) \neq D'_{(S^1,\ldots,S^m)}(S_{i_2})$.

— Если универсальным ограничениям задачи Z соответствует категория Φ_j или Σ_j, то задача Z регулярна тогда и только тогда, когда при всех $j_1 \neq j_2$ из $\{1,\ldots,l\}$ существует k в $\{1,\ldots,m\}$ такое, что $P_{j_1}(S^k) \neq P_{j_2}(S^k)$.

Описания баз рассматриваемых категорий позволяют сформулировать конкретные критерии полноты.

Теорема 2.24. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов категории Φ_0 или Σ_0. Модель $\mathfrak{M}$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными элементами выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

— Если $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов категории Φ_i или Σ_i, то модель $\mathfrak{M}$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными строками выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

— Если $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмов категории Φ_j или Σ_j, то модель $\mathfrak{M}$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными столбцами выполнено равенство $\mathfrak{M}(\widehat{I}) = \mathfrak{C}_{q,l}(\widetilde{\mathfrak{I}})$.

Теорема 2.25. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов категории Φ_0 или Σ_0. Модель $\mathfrak{M}^0$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными элементами в множестве $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ найдется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$.

— Если $\mathfrak{M}^0$ — модель категории Φ_i или Σ_i, то модель $\mathfrak{M}^0$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными строками в множестве $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ для любых $i_1 \neq i_2$ из $\{1,\ldots,q\}$ найдется матрица $\widehat{R}$, в которой будут различны i_1-я и i_2-я строки.

— Если $\mathfrak{M}^0$ — модель категории Φ_j или Σ_j, то модель $\mathfrak{M}^0$ полна тогда и только тогда, когда для любой матрицы $\widehat{I}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{I})$ с попарно различными столбцами в множестве $\mathfrak{M}^0(\widehat{I})$ для любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1,\ldots,l\}$ найдется матрица $\widehat{R}$, в которой будут различны j_1-й и j_2-й столбцы.

Теорема 2.26. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_0 или Σ_0. Семейство $\mathfrak{F}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества матриц X такого, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\mathbb{S}$ в X имеется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

— Если $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_i или Σ_i, то семейство $\mathfrak{F}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества матриц X такого, что при любых $i_1 \neq i_2$ из $\{1, \dots, q\}$ в X имеется матрица $\widehat{R}$ с различными i_1-й и i_2-й строками, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

— Если $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_j или Σ_j, то семейство $\mathfrak{F}$ полно тогда и только тогда, когда для любого множества матриц X такого, что при любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1, \dots, l\}$ в X имеется матрица $\widehat{R}$ с различными j_1-м и j_2-м столбцами, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{R})$.

Из общих критериев для известных моделей и семейств корректирующих операций получены следующие результаты:

Теорема 2.27. Модели $\mathfrak{M}(L, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R)$ полны.

Следствие 2.28. Модель $\mathfrak{M}(R, \bar{\gamma}^m)$ полна.

Теорема 2.29. Модели $\mathfrak{M}(L_j, \bar{\gamma}^m)$ и $\mathfrak{M}(R_j)$ полны.

Показано также, что модели $\mathfrak{M}(L_j)$ и $\mathfrak{M}(L)$ не полны.

Теорема 2.30. Модель $\mathfrak{M}_\Pi$ полна.

Теорема 2.31. Модель $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$ полна, а $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{p}, \bar{x})$ и $\mathfrak{M}(\bar{p}, \bar{\varepsilon}, \bar{x})$ не полны.

Теорема 2.32. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-1}$ полно. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-2}$ не полно.

Теорема 2.33. Семейство корректирующих операций LM^n полно при $n \geqslant \,](ql-1)/2[$ и неполно при $n < \,](ql-1)/2[$.

В главе 6 приведены дополнительные результаты о рассмотренных в предыдущих главах системах универсальных ограничений, уточняющие связь между понятиями разрешимости и регулярности, продемонстрирована возможность изучения и использования неполных семейств корректирующих операций (что позволяет установить пониженную границу необходимой степени для операторов полиномиального типа) и рассмотрены в рамках основных конструкций два важных семейства задач и алгоритмов, не входящих в подробно изученные в предыдущих главах классы.

Определение 2.17. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов категории Φ_0 или Σ_0. Модель $\mathfrak{M}^0$ называется $0,1$-полной, если для любой регулярной задачи Z с матрицей информации $\widehat{I}$ при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества $\mathbb{S}$ в пересечении $\mathfrak{M}^0(\widehat{I}) \cap \cap \mathfrak{C}_{q,l}(\{0, 1\})$ имеется хотя бы одна матрица $\|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$.

Теорема 2.34. Модель алгоритмических операторов вычисления оценок $\mathfrak{M}(\bar{\gamma}, \bar{\varepsilon})$, у всех операторов которой используется единственное опорное множество $\Omega_0 = \{1, \dots, n\}$, является $0,1$-полной в категории Φ_0.

Определение 2.18. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство корректирующих операций категории Φ_0 или Σ_0. Семейство $\mathfrak{F}$ называется $0,1$-*полным*, если для любого множества $0,1$-матриц X такого, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества пар $\mathbb{S}$ в X имеется матрица $\widehat{R} = \|R_{ij}\|_{q\times l}$ с $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}_{q,l}(\mathbb{R})$.

Теорема 2.35. Семейство $\mathfrak{A}^{[log_2 ql]}$ является $0,1$-полным семейством корректирующих операций. Граница степени $[log_2 ql]$ точна.

Теорема 2.36. Семейство LM^1 является $0,1$-полным семейством корректирующих операций в категории Σ_0.

По отношению к семействам отображений (алгоритмов) на базе требования разрешимости всех регулярных задач определяется свойство полноты. Рассматривая требование разрешимости в рамках семейства всех разрешимых задач, можно аналогичным образом определить свойство, назывваемое суперполнотой. Ясно, что каждое суперполное семейство является полным.

Теорема 2.37. Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство морфизмов (модель алгоритмов) категории Φ_0. Семейство $\mathfrak{M}$ полно тогда и только тогда, когда оно суперполно.

Теорема 2.38. Существуют полные, но не суперполные семейства морфизмов (модели алгоритмов) категории Σ_0.

Для задач с непересекающимися классами проблема сводится к рассмотрению категории, морфизмы которой суть отображения, являющиеся одновременно морфизмами категорий Φ_i и Σ_j. Эта категория обозначается символом $\Phi_i \cap \Sigma_j$.

Лемма 2.39. Отображение u из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{V})$ является морфизмом категории $\Phi_i \cap \cap \Sigma_j$ тогда и только тогда, когда для u существует функция f из $\mathfrak{U}^l$ в $\mathfrak{V}$ такая, что

1. для любой матрицы $\widehat{U} = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ из $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$ из равенства $u(\widehat{U}) = \widehat{V} = \|V_{ij}\|_{q\times l}$ следует, что при всех (i,j) из множества $\mathbb{S}$ выполнено равенство
$$f(U_{ij}, U_{i1}, U_{i2}, \ldots, U_{ij-1}, U_{ij+1}, \ldots, U_{il});$$
2. для любого набора $(U_1, \ldots, U_l)$ из $\mathfrak{U}^l$ и любой подстановки s множества $\{2, 3, \ldots, l\}$ выполнено равенство
$$f(U_1, \ldots, U_l) = f(U_1, U_{s(2)}, \ldots, U_{s(l)}).$$

Теорема 2.40. Пусть $\widehat{U}^0 = \left\|U^0_{ij}\right\|_{q\times l}$ — матрица из пространства $\mathfrak{C}_{q,l}(\mathfrak{U})$. Множество $\{\widehat{U}^0\}$ является базой категории $\Phi_i \cap \Sigma_j$ тогда и только тогда, когда элементы каждой строки матрицы $\widehat{U}^0$ попарно различны и когда строки попарно различны как множества, т.е. для любых $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1, \ldots, q\}$ выполнено соотношение
$$\{U^0_{i_1 1}, \ldots, U^0_{i_1 l}\} \neq \{U^0_{i_2 1}, \ldots, U^0_{i_2 l}\}.$$

Для задач распознавания с универсальными ограничениями монотонности введено и исследовано адекватное определение регулярности и в рамках общей схемы получены критерии, задающие экстремальные свойства семейств отображений, пригодных для решения таких задач.

Основные результаты работы отражены в следующих публикациях:

1. Ашуров А.Р., Рудаков К.В. О задачах распознавания образов с континуальной начальной информацией. М.: ВЦ АН СССР, 1983. 21 с.

2. Ашуров А.Р., Рудаков К.В. Алгоритмы вычисления оценок для задач с континуальной начальной информацией // ЖВМ и МФ. 1984. Т. 24, №12. С. 1871-1880.

3. Журавлев Ю.И., Рудаков К.В. Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации // Проблемы прикладной математики и информатики. М.: Наука, 1987. С. 187-198.

4. Рудаков К.В. О числе гиперплоскостей, разделяющих конечные множества в эвклидовом пространстве //ДАН СССР. 1976. Т. 231, №6. С. 1296-1299.

5. Рудаков К.В. О корректности алгоритмов распознавания типа потенциальных функций // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20, №3. С. 737-744.

6. Рудаков К.В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты). М.: ВЦ АН СССР, 1980. 66 с.

7. Рудаков К.В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели). М.: ВЦ АН СССР, 1981. 48 с.

8. Рудаков К.В. О классах алгоритмов распознавания изображений //Автоматизация обработки сложной гарфической информации. Горький: Горьковский гос. университет им. Н.И.Лобачевского, 1984. С. 22-33.

9. Рудаков К.В. О корректирующих операциях для задач распознавания // Проблемы искусственного интеллекта и распознавания образов: Тез. докл. и сообщ. научн. конф. с участием ученых из социалистических стран (Киев, 13-18 мая 1984 г.). Секция II: Распознавание образов. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1984. С. 119-121.

10. Рудаков К.В. О полиномиальных расширениях некоторых семейств алгоритмов распознавания //Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Дилижан, 1621 мая 1985 г.). Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985. С. 164166.

11. Рудаков К.В. О некоторых универсальных ограничениях для алгоритмов классификации // ЖВМ и МФ. 1986. Т. 26, №11. С. 1719-1729.

12. Рудаков К.В. Об основных понятиях алгебраического подхода к решению задач классификации (соотношение разрешимости и полноты) //Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Львов, 10-12 ноября 1987 г.). Львов: ФМИ им. Г.В.Карпенко АН УССР, 1987. С. 17-18.

13. Рудаков К.В. О симметрических и функциональных ограничениях для алгоритмов классификации //ДАН СССР. 1987.Т. 297, №1. С. 43-46.

14. Рудаков К.В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика. 1987. №2. С. 30-35.

15. Рудаков К.В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. №3. С. 106-109.

16. Рудаков К.В. Симметрические и функциональные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. №4. С. 73-77.

17. Рудаков К.В. О применении универсальных ограничений при исследовании алгоритмов классификации // Кибернетика. 1988. №1. С. 1-5.

18. Рудаков К.В., Трофимов С.В. Алгоритм синтеза корректных процедур распознавания для задач с непересекающимися классами //ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28, №9. С. 1431-1434.

19. Рудаков К.В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации //Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 176-201.

20. Рудаков К.В. Об особенностях универсальных ограничений для задач прогнозирования //Математические методы распознавания образов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. (Рига, 24-26 октября 1989 г.).Рига:МИПКРРиС при СМ ЛатвССР, 1989. С.73-75.