АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Проблемы прикладной математики и информатики

МОСКВА «НАУКА»
1987

УДК 519.7

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ПРОЦЕДУР ОБРАБОТКИ (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ) ИНФОРМАЦИИ

Ю. И. Журавлев, К. В. Рудаков

Одной из наиболее актуальных задач теоретической информатики является задача синтеза алгоритмов (процедур) обработки (преобразования) информации. Общая постановка этой задачи такова: определены два множества $\mathcal{J}_i$ (множество возможных начальных информаций) и $\mathcal{J}_f$ (множество возможных финальных информаций) и задана система ограничений I_0, выделяющая из множества $\mathfrak{M}_0$ всех отображений из $\mathcal{J}_i$ в $\mathcal{J}_f$ подмножество $\mathfrak{M}(I_0)$ допустимых отображений; требуется построить алгоритм, реализующий произвольное допустимое отображение (корректный алгоритм).

Системы ограничений I_0 в различных случаях могут иметь самый разный вид. Так, например, множества $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{J}_f$ могут быть описаны как однотипные алгебраические системы и допустимые отображения могут быть определены как гомоморфизмы этих систем. Очень важен случай задач экстраполяции, когда ограничения, составляющие I_0, содержат набор пар $((I_i^1, I_f^1), \ldots$ $\ldots, (I_i^n, I_f^n)) \in (\mathcal{J}_i \times \mathcal{J}_f)^n$ и в качестве допустимых рассматриваются только отображения A из $\mathcal{J}_i$ в $\mathcal{J}_f$, для которых $A(I_i^r) = I_f^r$ при $r \in \{1, \ldots, n\}$ (в I_0 могут, конечно, содержаться и некоторые дополнительные ограничения).

Частный случай задач экстраполяции — задачи классификации. Особенность таких задач состоит в том, что множествами $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{J}_f$ оказываются в них пространства матриц некоторой фиксированной размерности $q \times l$. Пусть X — множество. Множество (пространство) матриц размерности $q \times l$ над X будем обозначать $\mathcal{L}(X)$, для обозначения матрицы размерности $q \times l$ будем использовать полужирные символы (так, матрица $\|X_{ij}\|_{q \times l}$ будет обозначаться $\mathbf{X}$). Итак, в задачах классификации $\mathcal{J}_i = \mathcal{L}(\mathcal{J})$ и $\mathcal{J}_f = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{J}})$ (множества $\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ называются при этом множествами допустимых начальных информаций и допустимых финальных информаций соответственно).

Вторая важная особеность задач классификации по отношению к общим задачам экстраполяции состоит в том, что в ограничениях, составляющих I_0, содержится единственная пара (I_i, I_f) из декартова произведения $\mathcal{J}_i \times \mathcal{J}_f$, т. е. единственная пара матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$ из $\mathcal{L}(\mathcal{J}) \times \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{J}})$, так что допустимые отображения должны удовлетворять единственному «экстраполяционному» условию — требованию, чтобы выполнялось равенство $A(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{I}}$. Для конкретной задачи классификации Z матрица $\mathbf{I}$ называется матрицей информации, а $\tilde{\mathbf{I}}$ — информационной матрицей. Строки рассматриваемых матриц отвечают подлежащим классификации объектам, а столбцы — классам.

При стандартном математическом подходе решение задач рассматриваемого типа начинается с построения формальной модели изучаемой реальной ситуации, после чего дело сводится к решению соответствующих чисто математических задач.

В последние десятилетия возник и бурно развивается и альтернативный подход к рассматриваемой проблеме, восходящий к идеологии распознавания образов. Этот подход имеет целью развитие «прямых методов» решения задач описанного типа: решение также начинается с построения модели, но не модели реальной ситуации, а модели процесса преобразования информации как такового; после этого дело опять-таки сводится к решению соответствующих математических задач. Достоинством этого подхода оказывается его применимость в случаях, когда отсутствует адекватная формальная модель реальной ситуации либо когда такая модель имеется, но решение соответствующих математических задач приводит к непреодолимым вычислительным трудностям.

На первом этапе развития теории распознавания для решения отдельных прикладных задач или классов таких задач создавались отдельные (эвристические) алгоритмы. Математические задачи при этом сводились к исследованию таких алгоритмов. В последующем ряд эвристических процедур распознавания был в некотором смысле теоретически обоснован (довольно полный список литературы, относящейся к обсуждаемым вопросам, можно найти в [1]).

На втором этапе началось изучение общих принципов формирования эвристических процедур, хорошо решающих реальные задачи. Объектами исследования стали множества (модели) эвристических алгоритмов. Таким образом, появились модели, основанные на принципе разделения, модели типа потенциалов, модели вычисления оценок и т. п.

Путь возникновения моделей на базе отдельных алгоритмов можно проследить на примере формирования модели вычисления оценок. Исходным пунктом здесь был хорошо зарекомендовавший себя на практике тестовый алгоритм. Вначале как прямое расширение возникла параметрическая модель алгоритмов, в которой каждому набору значений параметров отвечает свой алгоритм типа тестового. Затем произошел отказ от использования в качестве «существенных» частей описаний объектов только лишь тестов (т. е. таких частей, которые сохраняли возможность проведения классификации для объектов с известной принадлежностью классам). И наконец, с помощью так называемых пороговых функций близости область применимости алгоритмов из модели была расширена на случай произвольных, по сути дела признаковых, пространств.

Исследование каждой модели алгоритмов имеет свои особенности, «внутреннюю» проблематику и проблематику, связанную с решением «внешних» задач. Наиболее важными оказались здесь проблемы поиска в рамках модели оптимальных по точности алгоритмов для отдельных конкретных задач распознавания. Построение (поиск) таких оптимальных алгоритмов обычно сводится к исследованию, решению и созданию вычислительных схем для нестандартных экстремальных проблем.

Следует отметить, что проведение оптимизации в большинстве используемых на практике моделей алгоритмов распознавания требует решения чрезвычайно трудных экстремальных задач. Так, например, оптимизация в модели алгоритмов, основанных на принципе разделения описаний объектов гиперплоскостью, сводится к поиску максимальной совместной подсистемы системы линейных неравенств — «канонически трудной» задаче.

Итак, переход от отдельных эвристических алгоритмов к семействам алгоритмов породил следующую ситуацию: с одной стороны, расширения используемых семейств алгоритмов были необходимы для получения лучших результатов при решении конкретных задач (ясно, что при расширении используемого семейства алгоритмов качество лучшего алгоритма возрастает), с другой же стороны, оказалось, что использование «богатых» моделей порождает неразрешимые с практической точки зрения оптимизационные задачи. Кажущийся разумным выход из положения, состоящий в замене поиска оптимального алгоритма поиском алгоритма, обеспечивающего локальный экстремум функционалу качества распознавания, оказался во многих случаях несостоятельным. А именно выяснилось, что проведение локальной оптимизации в рамках «богатой» модели часто дает худший результат, чем использование «бедной» модели, в которой реально можно найти оптимальный алгоритм.

Исходным пунктом дальнейшего развития (современного этапа) теории распознавания послужила идея о том, что, помимо прямого использования моделей алгоритмов, имеется альтернативный путь: можно пытаться из имеющихся семейств выбирать определенным образом некоторые алгоритмы и, используя подходящие операции над алгоритмами (корректирующие операции), непосредственно строить оптимальный алгоритм. Совокупность результатов в этом направлении получила название «алгебраический подход к проблеме распознавания» [1—4].

Одной из главных особенностей алгебраического подхода является введение так называемого пространства оценок, «промежуточного» по отношению к пространствам исходных описаний (возможных начальных информаций) и возможных ответов (финальных информаций). При этом алгоритмы распознавания рассматриваются как суперпозиции специальных операторов. Первый из этих операторов (алгоритмический оператор) в качестве ответов формирует элементы, называемые оценками, а второй (решающее правило) по оценкам определяет окончательные ответы. В результате вместо необходимости работать с «неудобными» пространствами исходных описаний и допустимых ответов появляется возможность решать задачу коррекции на уровне «удобного» (специально выбранного с этой целью) пространства оценок.

Центральным понятием, лежащим в основе большинства построений в рамках алгебраического подхода, является понятие полноты (его определение будет дано ниже), связывающее отдельные задачи, модели алгоритмов и корректирующие операции. Последовательное применение этого понятия позволило практически избавиться от рассмотрения решающих правил. А именно оказалось, что в качестве решающих правил достаточно применять любые сюръективные отображения. Таким образом, являющаяся на первый взгляд усложнением замена алгоритма распознавания на суперпозицию алгоритмического оператора и решающего правила на самом деле усложнением не является: проблема легко сводится к рассмотрению только алгоритмических операторов.

Кроме того, из полноты некоторой задачи относительно данной модели алгоритмов (или относительно полученного с помощью корректирующих операций расширения этой модели) немедленно вытекает существование в этой модели (в ее расширении) алгоритма, обеспечивающего абсолютную точность на материале обучения. Очень важно, что при этом построение экстремального алгоритма оказывается в большинстве случаев задачей, сравнительно легко решаемой стандартными математическими методами.

Итак, базой, позволившей избавиться от необходимости решения трудных экстремальных задач, является перенос центра тяжести проблемы на «удобное» пространство оценок. В частности, корректирующие операции над алгоритмами индуцируются операциями над этим пространством.

И для моделей алгоритмов, и для множеств корректирующих операций возникает естественный вопрос: насколько «богатыми» должны быть эти множества? Существует ли граница такая, что расширение рассматриваемых семейств за ее пределы уж не может дать реального эффекта? Полный ответ на этот вопрос [3] был получен на базе следующего соображения: при постановке задач необходимо фиксировать допустимый способ использования информации для рассматриваемых алгоритмов (легко показать, что если никаких ограничений такого рода не вводить, то, скажем, задача распознавания в стандартной постановке становится тривиальной).

Формализация и последующее исследование содержательного представления о допустимом способе использования информации (см. ниже — универсальные ограничения) позволили получить ряд окончательных результатов для моделей алгоритмов и множеств корректирующих операций. Так, в частности, найдена универсальная верхняя граница степени для множеств корректирующих операций полиномиального типа, установлены границы необходимой сложности для моделей алгоритмических операторов вычисления оценок и для моделей, основанных на принципе разделения.

В рамках алгебраического подхода проведен и ряд исследований, посвященных обоснованию развитых методов. В частности, показано [4], что возникающие при применении алгебраического подхода семейства алгоритмов имеют ограниченную емкость, а это обеспечивает корректность применения таких семейств в случае, когда выполнены некоторые достаточно общие гипотезы статистического характера.

Кроме того, для многих случаев показано, что формируемые при алгебраическом подходе экстремальные алгоритмы имеют ненулевой радиус устойчивости [2]. Это означает, что при малом в некотором смысле изменении исходной информации ответы, порождаемые экстремальным алгоритмом, не изменяются. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что в случае выполнения некоторых общих предположений о компактности почти всюду имеет место сходимость классификаций, порождаемых экстремальными алгоритмами, к истинной (сходимость при возрастании набора объектов с известными принадлежностями классам). Представлены некоторые общие результаты, полученные в последнее время в рамках алгебраического подхода.

1. Универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов (классификации)

Рассматривается задача синтеза алгоритма, реализующего отображение из $\mathscr{I}_i$ в $\mathscr{I}_f$. При этом считается, что вся известная информация об искомом отображении формализована в виде системы ограничений I_0, выделяющей из множества $\mathfrak{M}_0$ подмножество $\mathfrak{M}(I_0)$. Отображения из $\mathfrak{M}(I_0)$ называются допустимыми, любой алгоритм, реализующий произвольное допустимое отображение, называется корректным и является решением задачи.

Будем считать, что на базе общих содержательных гипотез о природе изучаемой реальной ситуации сформировано в явном виде (параметрическое) семейство эвристических алгоритмов (отображений) $\mathfrak{M}$ (где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}_0$). Задача синтеза допустимого отображения (корректного алгоритма) решается на базе отображений из $\mathfrak{M}$ с использованием корректирующих операций.

Вообще говоря, под корректирующей операцией можно понимать произвольную операцию над $\mathfrak{M}_0$, однако реально используются только корректирующие операции некоторого специального вида.

Пусть X и Y — множества, n — натуральное число, $u: X^n \to Y$. Диагонализацией u назовем отображение $u_\Delta: X \to Y$ такое, что для всех x из X выполнено равенство $u(x, x, \ldots, x) = u_\Delta(x)$.

Для определения рассматриваемых корректирующих операций вводится множество $\mathscr{I}_e$ (множество возможных оценок). На место эвристического семейства $\mathfrak{M}$ ставятся эвристические же семейства $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, где $\mathfrak{M}^0\subseteq\mathfrak{M}_0{}^0=\{B \mid B: \mathscr{I}_i\to\mathscr{I}_e\}$ и $\mathfrak{M}^1\subseteq\mathfrak{M}_0{}^1= \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{C \mid C: \mathscr{I}_e{}^n\to\mathscr{I}_f\}$, называемые семействами алгоритмических операторов и решающих правил соответственно. Семейство $\mathfrak{M}$ определяется при этом следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{C \circ (B_1 \times \ldots \times B_n)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1, (B_1, \ldots, B_n) \in (\mathfrak{M}^0)^n\}.$$

В качестве основы для определения корректирующих операций используются операции над $\mathcal{I}_e$.

Пусть F' — n-арная операция над $\mathcal{I}_e$. Сопоставим ей операцию F над $\mathfrak{M}_0^0$, положив

$$F(B_1, \ldots, B_n)(I) = F'(B_1(I), \ldots, B_n(I))$$

для произвольных $B_1, \ldots, B_n$ из $\mathfrak{M}_0^0$ и I из $\mathcal{I}_i$.

Пусть $\mathcal{F}'$ — множество операций над $\mathcal{I}_e$ и $\mathcal{F}$ — множество операций над $\mathfrak{M}_0^0$, сопоставленных операциям из $\mathcal{F}'$. Применяя операции из $\mathcal{F}$ к отображениям из $\mathfrak{M}^0$, получаем, вообще говоря, более широкое семейство отображений

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}^0) = \{F(B_1, \ldots, B_n) \mid F \in \mathcal{F}, (B_1, \ldots, B_n) \in (\mathfrak{M}^0)^n\}$$

($\mathcal{F}$-расширение семейства $\mathfrak{M}^0$) и, наконец, $\mathcal{F}$-расширение исходного семейства $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$ — семейство $\mathfrak{M}^1 \circ \mathcal{F}(\mathfrak{M}^0)$, обозначаемое $\mathcal{F}[\mathfrak{M}]$.

Решение задач, определяемых системами I_0, проводится поэтапно: от формирования семейств $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{F}$ и до выбора конкретного отображения из $\mathcal{F}[\mathfrak{M}]$. Отражением этого является предположение о том, что множество рассматриваемых задач (систем I_0) разбито по некоторому отношению эквивалентности на классы. При этом считается, что на определенном этапе решения используется не сразу вся информация, имеющаяся в системе I_0, но лишь информация, выражаемая включением $I_0 \in K$, где K — подходящий класс эквивалентности.

Отметим, что разрешимость задачи, определяемой системой ограничений I_0, в рамках некоторого семейства отображений $\mathfrak{M}$ выражается соотношением $\mathfrak{M}(I_0) \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$, в рамках $\mathcal{F}$-расширения семейства $\mathfrak{M}$ — соотношением $\mathfrak{M}(I_0) \cap \mathcal{F}[\mathfrak{M}] \neq \varnothing$. При наличии разбиения множества задач на классы обобщением понятия разрешимости оказывается понятие полноты.

Определение 1. Пусть система ограничений I_0, определяющая задачу Z, принадлежит классу K. Задача Z называется полной относительно семейства отображений $\mathfrak{M}$, если для всех I_0' из K выполнено соотношение $\mathfrak{M}(I_0') \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$. Задача Z называется $\mathcal{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}$, если она полна относительно $\mathcal{F}[\mathfrak{M}]$.

При алгебраическом подходе корректные алгоритмы строятся на базе алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил. Поэтому будем рассматривать системы ограничений I_0, определяющие конкретные задачи, как совокупности из двух систем: $I_0 = (I_0^u, I_0^l)$, где I_0^u — система ограничений «общего характера», применимых ко всем изучаемым отображениям (алгоритмам, алгоритмическим операторам и т. д.), а I_0^l — система ограничений, применимых только к отображениям из $\mathcal{I}_i$

в $\mathcal{I}_f$. При этом, конечно, $\mathfrak{M}(I_0)=\mathfrak{M}(I_0^u)\cap\mathfrak{M}(I_0^l)$. Ограничения из I_0^u называются универсальными, а из I_0^l — локальными.

Чтобы формализовать понятие универсальных ограничений, положим, что определен класс $\mathcal{K}$, объектами которого являются множества, используемые как $\mathcal{I}_i$, $\mathcal{I}_e$ и $\mathcal{I}_f$, и все конечные декартовы степени таких множеств. Пусть Ψ_0 — категория с классом объектов $\mathcal{K}$, являющаяся полной подкатегорией категории множеств. Ясно, что все рассматриваемые отображения соответствуют морфизмам категории Ψ_0.

Универсальные ограничения должны выделять в каждом множестве морфизмов категории Ψ_0 соответствующие подмножества допустимых морфизмов. При этом суперпозиции допустимых морфизмов также должны быть допустимыми. Итак, универсальные ограничения должны быть замкнутой относительно суперпозиций системой ограничений на множества морфизмов категории Ψ_0, т. е. понятию универсальных ограничений соответствует понятие подкатегории категории Ψ_0, имеющей тот же класс объектов $\mathcal{K}$.

Отметим, что не всякая подкатегория категории Ψ_0 может считаться формальным выражением некоторой системы универсальных ограничений. Подкатегории, обладающие нужными для этого свойствами, называются допустимыми.

Определение 2. Подкатегория Ψ категории Ψ_0 называется допустимой, если для любых двух морфизмов u и v категории Ψ, где $u: X^p\to Y^q$ и $v: X^r\to Y^s$, произведение $u\times v$ является морфизмом категории Ψ и диагонализация u_Δ также является морфизмом категории Ψ.

Перейдем теперь к рассмотрению проблемы коррекции эвристических алгоритмов классификации.

Отметим прежде всего, что пара матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$ вместе с требованием $A(\mathbf{I})=\tilde{\mathbf{I}}$ является локальным ограничением. Мы будем считать, что все остальные ограничения в задачах классификации имеют универсальный характер. В данном случае они играют особенно важную роль: при их отсутствии любая задача допускает тривиальное решение в рамках семейства констант.

Для задач классификации эквивалентность, определяющая понятие полноты, задается следующим образом: $I_0^1=(I_0^{u1}, (\mathbf{I}^1, \tilde{\mathbf{I}}^1))\approx I_0^2=(I_0^{u2}, (\mathbf{I}^2, \tilde{\mathbf{I}}^2))$ тогда и только тогда, когда I_0^{u1} совпадает с I_0^{u2} и $\mathbf{I}^1=\mathbf{I}^2$. Отсюда вытекает

Определение 3. Задача классификации Z с матрицей информации $\mathbf{I}$ называется полной относительно семейства отображений $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{M}(\mathrm{I}_0^u)$, если выполнено равенство $\mathfrak{M}(\mathbf{I})=\{A(\mathbf{I})\,|\,A\in\mathfrak{M}\}=\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{I}})$, и называется $\mathcal{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{F}[\mathfrak{M}](\mathbf{I})=\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{I}})$.

Изучение универсальных ограничений для задач классификации сводится к изучению допустимых подкатегорий полной подкатегории $\Psi^{q,l}$ категории множеств, объектами которой являются все конечные декартовы степени пространств матриц размерности $q\times l$ над произвольными множествами.

Пусть X и Y — произвольные множества, Ψ — подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Множество $\mathrm{Hom}_{\Psi}(\mathscr{L}(X), \mathscr{L}(Y))$ будем обозначать $H_{\Psi}(X, Y)$, множество $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi}(\mathscr{L}^n(X), \mathscr{L}(Y))$ — $\mathscr{H}_{\Psi}(X, Y)$. Для любого $L\subseteq\mathscr{L}(X)$ положим $H_{\Psi}(X, Y)(L)=\{u(U)\mid u\in H_{\Psi}(X, Y), U\in L\}$ и $\mathscr{H}_{\Psi}(X, Y)(L)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{u(U^1, \ldots, U^n)\mid u\in \mathrm{Hom}_{\Psi}(\mathscr{L}^n(X), \mathscr{L}(Y)), (U^1, \ldots, U^n)\in L^n\}$.

Определение 4. Пусть Ψ — подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Категория Ψ называется полной, если для любых множеств X и Y при $|X|>1$ выполнено равенство $\mathscr{H}_{\Psi}(X, Y)(\mathscr{L}(X))=\mathscr{L}(Y)$.

Замечание. Полные категории не являются, вообще говоря, полными подкатегориями категории $\Psi^{q,l}$.

Ниже рассматриваются только подкатегории категории $\Psi^{q,l}$, являющиеся полными и допустимыми. Важнейшим при изучении полноты задач классификации оказывается понятие базы.

Определение 5. Пусть X и Y — множества, $|X|>1$ и $L\subseteq\mathscr{L}(X)$. Множество L называется базой категории Ψ в $\mathscr{L}(X)$, если $\mathscr{H}_{\Psi}(X, X)(L)=\mathscr{L}(X)$, и базой категории Ψ в $\mathscr{L}(X)$ для $\mathscr{L}(Y)$, если $\mathscr{H}_{\Psi}(X, Y)(L)=\mathscr{L}(Y)$.

Лемма 1. Для произвольных неодноэлементных множеств X и Y и любого подмножества L пространства $\mathscr{L}(X)$ высказывания «L — база категории Ψ в $\mathscr{L}(X)$» и «L — база категории Ψ в $\mathscr{L}(X)$ для $\mathscr{L}(Y)$» эквивалентны.

2. Понятия полноты и общие результаты о полноте

Будем считать, что зафиксирована некоторая полная допустимая категория Ψ, что $\mathscr{I}$, $\tilde{\mathscr{I}}$ и $\mathfrak{R}$ — произвольные неодноэлементные множества и что $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^0$, $\mathscr{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — подмножества множеств $H_{\Psi}(\mathscr{I}, \tilde{\mathscr{I}})$, $H_{\Psi}(\mathscr{I}, \mathscr{R})$, $\mathscr{H}_{\Psi}(\mathscr{R}, \mathscr{R})$ и $\mathscr{H}_{\Psi}(\mathscr{R}, \tilde{\mathscr{I}})$ соответственно.

При изучении проблемы полноты задач классификации с самого начала возникает вопрос о свойствах матрицы информации, необходимых и достаточных для возможности достижения полноты. Общий необходимый для решения этого вопроса результат выглядит следующим образом.

Лемма 2. Пусть L — одноэлементное подмножество пространства $\mathscr{L}(\mathscr{I})$. Для того чтобы было выполнено любое из равенств

$$H_{\Psi}(\mathscr{I}, \tilde{\mathscr{I}})(L)=\mathscr{L}(\tilde{\mathscr{I}})$$

или

$$\mathscr{H}_{\Psi}(\mathscr{R}, \tilde{\mathscr{I}})(\mathscr{H}_{\Psi}(\mathscr{R}, \mathscr{R})(H_{\Psi}(\mathscr{I}, \mathscr{R})(L)))=\mathscr{L}(\tilde{\mathscr{I}}),$$

необходимо и достаточно, чтобы L было базой категории Ψ в $\mathscr{L}(\mathscr{I})$.

Примем теперь во внимание, что при решении задач реально используются не «целые» множества морфизмов соответствующих категорий, но лишь подмножества таких множеств ($\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^0$, $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{M}^1$). Ниже вводятся понятия Г-полноты, позволяющие проводить соответствующие исследования для конкретных систем универсальных ограничений (категорий), семейств алгоритмических операторов, корректирующих операций, решающих правил и алгоритмов в целом.

Выше было установлено, что для выполнения равенства $H_\Psi(\mathcal{I}, \widetilde{\mathcal{I}})(L) = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{I}})$, где L—одноэлементное подмножество пространства $\mathcal{L}(\mathcal{I})$, необходимо и достаточно, чтобы L было базой категории Ψ. Поскольку для любой задачи классификации Z исходное множество $\{\mathbf{I}\}$ (где $\mathbf{I}$ — матрица информации задачи Z) одноэлементное, то в качестве основного требования к семейству $\mathfrak{M}$ должно предъявляться требование, состоящее в том, чтобы $\mathfrak{M}$ было 1-Г-полным в категории Ψ.

Определение 6. *Множество* $\mathfrak{M}$ *называется* 1-Г-полным в категории Ψ, если для каждой одноэлементной базы $L = \{\mathbf{I}\}$ категории Ψ в $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ выполнено равенство $\mathfrak{M}(L) = \{A(\mathbf{I}) \mid A \in \mathfrak{M}\} = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{I}})$.

Рассмотрим теперь множества $\mathfrak{M}^0$, $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{M}^1$. Из того, что $\mathfrak{M}$ формируется в виде $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, вытекает, что основное условие, которому должны удовлетворять $\mathfrak{M}^0$, $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{M}^1$,— это условие 1-Г-полноты для семейства $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$. Нашей первой целью будет установление необходимых и достаточных условий, обеспечивающих возможность построения на базе $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ семейства $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$, обладающего свойством 1-Г-полноты.

Определение 7. Множество $\mathfrak{M}^0$ называется слабо 1-Г-полным в категории Ψ, если для каждой одноэлементной базы L категории Ψ в $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ множество $\mathfrak{M}^0(L) = \{B(\mathbf{I}) \mid B \in \mathfrak{M}^0, \mathbf{I} \in L\}$ является базой категории Ψ в $\mathcal{L}(\mathfrak{R})$.

Лемма 3. Для того чтобы существовали семейства $\mathfrak{M}^1$ и $\mathcal{F}$ такие, что $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ является 1-Г-полным в категории Ψ семейством, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ семейством.

Определение 8. *Множество* $\mathfrak{M}^1$ называется корректным в категории Ψ, если

$$\mathfrak{M}^1(\mathcal{L}(\mathcal{R})) = \{C(\mathbf{R}^1, \ldots, \mathbf{R}^n) \mid C \in \mathfrak{M}^1, (\mathbf{R}^1, \ldots, \mathbf{R}^n) \in \mathcal{L}^n(\mathcal{R})\} = \mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{I}}).$$

Замечание. Для корректности множества $\mathfrak{M}^1$ достаточно, чтобы в нем содержалось хотя бы одно сюръективное отображение $\mathcal{L}(\mathfrak{R})$ на $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{I}})$.

Лемма 4. Для того чтобы существовали семейства $\mathfrak{M}^0$ и $\mathcal{F}$ такие, что $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0]$ является 1-Г-полным в категории Ψ семейством, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ семейством.

Итак, установлены требования, необходимые для того, чтобы на базе множеств $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ можно было построить с помощью подходящего семейства $\mathfrak{f}$ семейство $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$, обладающее свойством 1-Г-полноты в категории Ψ. Введенные для $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$ условия являются на самом деле и достаточными.

Лемма 5. Для того чтобы существовало множество $\mathcal{F}$ такое, что $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$ является 1-Г-полным в категории Ψ, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным в категории Ψ и $\mathfrak{M}^1$ — корректным в этой категории.

Свойство множества $\mathfrak{f}$, гарантирующее 1-Г-полноту семейства $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$ при слабо 1-Г-полном $\mathfrak{M}^0$ и корректном $\mathfrak{M}^1$, есть свойство Г-полноты.

Определение 9. Множество $\mathcal{F}$ называется Г-полным в категории Ψ, если для любой базы L этой категории в $\mathcal{L}(\mathfrak{R})$ выполнено равенство

$$\mathcal{F}(L)=\{F(\mathbf{R}^1, \ldots, \mathbf{R}^n)\,|\,F\in\mathcal{F},\ (\mathbf{R}^1, \ldots, \mathbf{R}^n)\in L^n\}=\mathcal{L}(\mathbf{R}).$$

Сформулируем теперь теорему, суммирующую все вышесказанное.

Теорема 1. Для того чтобы множество $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$ было 1-Г-полным в категории Ψ, необходимо, чтобы $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Г-полным и $\mathfrak{M}^1$ — корректным в категории Ψ. При выполнении этого необходимого условия для 1-Г-полноты семейства $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$ в категории Ψ достаточно, чтобы $\mathcal{F}$ было Г-полным в категории Ψ.

Отметим, что условие Г-полноты семейства $\mathcal{F}$ не является необходимым. Действительно, если, скажем, $\mathfrak{M}^0=H_\Psi(\mathcal{L},\mathfrak{R})$, то от $\mathcal{F}$ достаточно потребовать лишь корректности для того, чтобы при корректном же $\mathfrak{M}^1$ можно было гарантировать 1-Г-полноту семейства $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$. В то же время, желая обеспечить 1-Г-полноту семейства $\mathcal{F}[\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0]$ при минимальных требованиях к $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, нельзя ограничиваться по отношению к $\mathcal{F}$ требованием более слабым, чем требование Г-полноты.

3. Определение регулярных задач и дальнейшие результаты о полноте

Ниже будут рассматриваться классы $\mathfrak{Z}$ задач распознавания, т. е. множества задач, возникающие при фиксации q, l, $\mathcal{J}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}$ (каждая задача Z выделяется из $\mathfrak{Z}$ заданием категории Ψ и пары матриц $(\mathbf{I}, \widetilde{\mathbf{I}})$).

Пусть зафиксированы некоторый класс задач $\mathfrak{Z}$ и полная допустимая категория Ψ. Тем самым определен подкласс $\mathfrak{Z}(\Psi)$ задач, различающихся только парами матриц $(\mathbf{I}, \widetilde{\mathbf{I}})$.

Определение 10. Задача Z из подкласса $\mathfrak{Z}(\Psi)$ называется регулярной, если в рамках категории Ψ (т. е. среди подмножеств множества морфизмов $H_\Psi(\mathcal{J}, \widetilde{\mathcal{J}})$ существует такое множество $\mathfrak{M}$, что Z полна относительно $\mathfrak{M}$.

Из леммы 2 вытекает

Теорема 2. Задача Z с матрицей информации $\mathbf{I}$, принадлежащая подклассу $\mathfrak{Z}(\Psi)$, регулярна тогда и только тогда, когда одноэлементное множество $\{\mathbf{I}\}$ является базой категории Ψ в $\mathscr{L}(\mathscr{I})$.

Отметим, что описания в явном виде баз практически всех используемых в настоящее время категорий получены в [3].

Теорема 2 дает общее условие, выделяющее из произвольного класса задач $\mathfrak{Z}$ при произвольной полной допустимой категории Ψ подмножество $\mathfrak{Z}[\Psi]$ регулярных задач. Эта теорема позволяет при решении конкретных задач классификации делать вывод о совместности определяющих задачу универсальных и локальных ограничений, т. е. делать вывод о корректности постановки задачи.

Перейдем теперь к рассмотрению моделей (семейств) алгоритмических операторов. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — модель с множеством допустимых оценок $\mathscr{R}$ и пусть операторы модели $\mathfrak{M}^0$ суть морфизмы категории Ψ, т. е. пусть $\mathfrak{M}^0 \subseteq H_\Psi(\mathscr{I}, \mathscr{R})$.

Определение 11. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ называется полной в категории Ψ или просто полной, если для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ существуют такие множества $\mathscr{F}$ корректирующих операций и $\mathfrak{M}^1$ решающих правил, состоящие из морфизмов категории Ψ, что Z оказывается $\mathscr{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Теорема 3. *Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ полна в категории Ψ тогда и только тогда, когда семейство отображений $\mathfrak{M}^0$ слабо 1-Г-полно в категории Ψ.*

Содержащийся в теореме 3 критерий оказывается основным при исследовании конкретных параметрических моделей алгоритмических операторов. Опишем общую схему такого исследования.

Пусть определены $\mathfrak{M}^0$ — некоторая модель алгоритмических операторов и Ψ — полная допустимая категория, морфизмами которой являются все отображения из $\mathfrak{M}^0$. Доказательство полноты модели $\mathfrak{M}^0$ выглядит при этом следующим образом: пусть Z — некоторая регулярная задача с матрицей информации $\mathbf{I}$, т. е. пусть $\{\mathbf{I}\}$ — база категории Ψ в $\mathscr{L}(\mathscr{I})$; покажем, что множество $\mathfrak{M}^0(\mathbf{I}) = \{B(\mathbf{I}) \mid B \in \mathfrak{M}^0\}$ является базой категории Ψ в $\mathscr{L}(\mathscr{R})$; и доказательство завершается проверкой того, что $\mathfrak{M}^0(\mathbf{I})$ — действительно база категории Ψ.

Рассмотрим наконец семейства корректирующих операций.

Пусть зафиксированы класс задач $\mathfrak{Z}$ с множеством допустимых начальных информаций $\mathscr{I}$ и допустимых финальных информаций $\tilde{\mathscr{I}}$, полная допустимая категория Ψ, модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$, полная в Ψ, и корректное множество решающих правил $\mathfrak{M}^1$ категории Ψ. В силу полученных выше результатов в этом и только в этом случае (т. е. когда модель $\mathfrak{M}^0$ полна и семейство $\mathfrak{M}^1$ корректно) для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ существует такое множество корректирующих операций $\mathscr{F}$ категории Ψ, что Z оказывается $\mathscr{F}$-полной относительно семейства суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Определение 12. *Множество $\mathscr{F}$ корректирующих операций,* являющихся морфизмами категории Ψ, называется полным, если при любой полной в категории Ψ модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и любом корректном в Ψ семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ каждая регулярная задача Z из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ оказывается $\mathcal{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Основным критерием полноты семейств корректирующих операций является

Теорема 4. Для того чтобы множество $\mathcal{F}$ корректирующих операций категории Ψ было полным, достаточно, чтобы семейство отображений $\mathcal{F}$ было Г-полным в категории Ψ.

Отметим, что использование для расширения моделей алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ полных множеств корректирующих операций $\mathcal{F}$ является заведомо достаточным, но может не быть необходимым в частных случаях. Таким образом, если для данного пространства допустимых оценок $\mathcal{R}$ в рассматриваемой категории Ψ (полной и допустимой) найдено полное множество корректирующих операций $\mathcal{F}$, то применение любых более обширных семейств $\mathcal{F}'$ (т. е. таких семейств, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$) оказывается избыточным. В то же время остается открытым вопрос о возможности достижения полноты для всех регулярных задач при использовании неполных семейств корректирующих операций (этот вопрос может решаться только при наложении дополнительных ограничений на рассматриваемые модели алгоритмических операторов; в настоящее время известны только некоторые частные случаи его решения).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации//Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 33. С. 5—68.
2. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II, III//Кибернетика. 1977. № 4. С. 5—17; № 6. С. 21—27; 1978. № 2. С. 35—43.
3. *Рудаков К. В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания (Общие результаты. Параметрические модели). М.: ВЦ АН СССР, 1980. 66 с.; 1981. 48 с.
4. *Матросов В. Л.* Емкость алгебраических расширений модели алгоритмов вычисления оценок//Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 11. С. 1719—1730.