I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

Ю. И. ЖУРАВЛЕВ

(НОВОСИБИРСК)

ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач алгебры логики является получение алгоритма для построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.). Эта задача находит применение в различных вопросах теории управляющих систем. Возможно тривиальное решение задачи. Пусть $\{\mathfrak{N}_n^i\}$ — множество всех д. н. ф., составленных из букв $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ и состоящих ровно из i букв; $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция алгебры логики.

Упорядочиваем все д. н. ф., составленные из букв $x_1, \ldots, x_n$, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, так, чтобы при $k < l$ все элементы множества $\{\mathfrak{N}_n^k\}$ предшествовали элементам множества $\{\mathfrak{N}_n^l\}$. Проверяем по порядку соотношение

$$\mathfrak{N}_n^i = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Первая д. н. ф., для которой оно выполнено, есть, очевидно, минимальная д. н. ф. функции f.

Уже при сравнительно небольших n этот метод приводит к перебору большого числа вариантов и поэтому практически неприменим.

Исследования многих авторов [6, 9, 10, 11] сводились к получению менее громоздких алгоритмов для получения минимальных д. н. ф. Эти алгоритмы, обычно рассчитанные на определенный способ задания функции f, различны по форме и методике выполнения, но однотипны по существу. С. В. Яблонским было замечено [1], что все они подразделяются на два этапа: 1) однозначная часть процесса — построение сокращенной д. н. ф., 2) неоднозначная (ветвящаяся) часть процесса — применяется явно или неявно критерий поглощения [1, 2], и с его помощью из сокращенной д. н. ф. удаляются элементарные конъюнкции. Процесс заканчивается построением тупиковой д. н. ф. (д. н. ф., в которой нельзя зачеркнуть никакую элементарную конъюнкцию).

Недостатком таких методов является то, что при последовательном удалении конъюнкций не производится анализ, входят или не входят удаляемые конъюнкции в некоторые (или, может быть, во все) минимальные д. н. ф. данной функции.

Поэтому после получения тупиковой д. н. ф. невозможно выяснить, является ли она минимальной. Приходится снова проводить процесс упрощения сокращенной д. н. ф., удаляя другие конъюнкции до тех пор, пока не будут получены все тупиковые д. н. ф. Среди них выбираются минимальные. Очевидно, такие алгоритмы также связаны с просмотром большого числа вариантов.

Естественно поставить вопрос о таком упрощении сокращенной д. н. ф., при котором производится анализ конъюнкций из д. н. ф. и удаляются только те конъюнкции, относительно которых известно (установлено в данном анализе), что они не содержатся ни в какой минимальной д. н. ф.

Мы будем рассматривать специальные алгоритмы упрощения д. н. ф. В этих алгоритмах удаляются только те конъюнкции, про которые некоторыми средствами (точно определенными для данного класса алгоритмов) удается установить, что они не содержатся ни в одной минимальной д. н. ф. Последний факт обычно устанавливается посредством анализа конъюнкций, близких к испытуемой конъюнкции. Чем дальше удается продвинуть процесс таких упрощений, тем больше отодвигается начало ветвящегося процесса и понижается степень перебора.

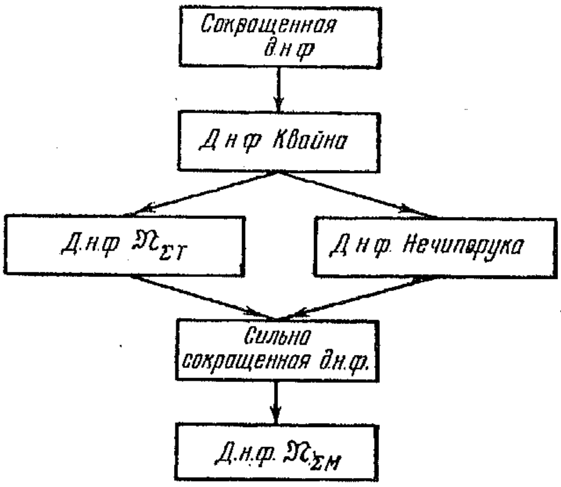

Рис. 1.

Первый результат в построении таких специальных алгоритмов был получен Квайном [11, 12, 13]. Он выделил некоторый класс конъюнкций из сокращенной д. н. ф., которые не входят ни в какую тупиковую и, следовательно, минимальную д. н. ф. Вместе с тем Квайну не удалось построить эффективные алгоритмы поиска в д. н. ф. всех конъюнкций, не содержащихся ни в какой тупиковой д. н. ф.

Э. И. Нечипорук *) обобщил принцип Квайна и построил алгоритм, приводящий к более сильным упрощениям сокращенной д. н. ф.

Одновременно и независимо автором был разработан метод, приводящий к еще более сильным упрощениям. Частный случай нашего принципа позволяет из сокращенной д. н. ф. выбросить все элементарные конъюнкции, не входящие ни в какую тупиковую д. н. ф. Применение общего алгоритма приводит к д. н. ф., которую мы называем сильно сокращенной.

Связь между различными д. н. ф., свойства которых изучаются в настоящей работе, видна из схемы, изображенной на рис. 1 (о символах $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ и $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$ см. [3], а также ниже, стр. 13—14).

В дальнейшем оказалось, что, основываясь на изучении конъюнкций, «близких» к испытуемой конъюнкции $\mathfrak{A}$, нельзя установить необходимого и достаточного условия вхождения в минимальные д. н. ф. Поэтому универсального алгоритма, в котором на каждом шаге изучается лишь группа конъюнкций, «близких» к некоторой конъюнкции, и устанавливается, какие конъюнкции входят и какие не входят в минимальные д. н. ф., построить нельзя. Вместе с тем во многих случаях предложенные методы приводят к хорошим упрощениям.

Настоящая работа состоит из пяти глав.

В главе I основные понятия теории д. н. ф. вводятся в терминах геометрии n-мерного единичного куба. Все параграфы главы I, за исключением § 4, написаны по материалам работы С. В. Яблонского [1].

§ 4 посвящен описанию «аналитической» интерпретации методов, изложенных в §§ 1—3 главы I.

*) Доложено в 1958 г. на семинаре по дискретному анализу на механико-математическом факультете МГУ.

Основной результат § 4 изложен в работе автора [2].

В главе II рассматривается д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ (логическая сумма всех тупиковых д. н. ф. функции f), вводится понятие «регулярная относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ точка», изучаются свойства точек, регулярных относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, и доказывается необходимое и достаточное условие невхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$. Алгоритм перехода от сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ к д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ является существенным усилением алгоритма Квайна.

В главе III описывается алгоритм A упрощения д. н. ф., основанный на выделении конъюнкций $\mathfrak{A}$, для которых выполнено соотношение

$$N_{\mathfrak{A}} = M_1 \cup M_2,$$

где M_1 и M_2 — множества некоторого специального вида. Доказывается, что выделенные конъюнкции не входят ни в какую минимальную д. н. ф. Формулируется теорема о независимости окончательного результата применения алгоритма A от элементарных актов, устанавливающих порядок среди конъюнкций упрощенных д. н. ф.

Вводится понятие алгоритма A' более простого, чем алгоритм A. Доказывается, что доля функций, у которых сокращенные д. н. ф. упрощаются алгоритмом A сильнее, чем алгоритмом A', стремится к нулю при $n \to \infty$.

Результат применения к сокращенной д. н. ф. алгоритма A приводит к д. н. ф., которая, вообще говоря, проще сокращенной и обладает всеми ее главными свойствами. Такую д. н. ф. мы называем *сильно сокращенной*.

В главе IV алгоритмы упрощения д. н. ф. рассматриваются как алгоритмы, накапливающие информацию об элементарных конъюнкциях, входящих в д. н. ф.

Запоминание информации осуществляется при помощи расстановки отметок над конъюнкциями.

Вводятся отметки:

(0) — о конъюнкции ничего не известно;

(1) — конъюнкция входит в минимальные д. н. ф., но не известно — во все или нет;

(2) — конъюнкция не входит ни в какую минимальную д. н. ф.;

(3) — конъюнкция входит в некоторые минимальные д. н. ф., но не во все;

(4) — конъюнкция входит во все минимальные д. н. ф.

Алгоритм рассматривается как процесс вычисления отметок. Тип отметки на каждом шаге определяется значением функции отметки φ, которая в свою очередь зависит только от строения д. н. ф. «вблизи» конъюнкции, для которой вычисляется отметка. На каждом шаге конъюнкции, имеющие «неокончательные» отметки (0), (1), упорядочиваются элементарным алгоритмом A_π, затем отыскивается первая по порядку конъюнкция, для которой отметка может быть изменена, и производится это изменение.

Далее выясняются условия, при которых окончательный результат применения алгоритма не зависит от оператора порядка A_π (теорема единственности). В качестве следствия получается теорема единственности для алгоритма A.

В главе V вводится понятие алгоритма конечного порядка. Доказывается, что в классе таких алгоритмов задача перехода от сокращенной д. н. ф. к д. н. ф., состоящей из тех и только тех конъюнкций, которые входят хотя бы в одну минимальную д. н. ф., неразрешима.

ГЛАВА I
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

§ 1. Постановка задачи

Известно, что всякая функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличная от 0, может быть представлена совершенной дизъюнктивной нормальной формой *)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n}, \quad \text{где} \quad x^\alpha = \begin{cases} \bar{x} & \text{при } \alpha = 0, \\ x & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Однако, как показывают примеры, совершенная нормальная форма часто допускает упрощения, при которых получаются д. н. ф., также реализующие функцию f, но содержащие меньшее число букв. В последующем мы будем интересоваться возможностями простейших представлений в классе так называемых дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.). Для уточнения вопроса дадим ряд определений.

Определение. *Элементарной конъюнкцией* называется логическое произведение $\mathfrak{A}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$, где все x_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$, различны. Число k называется рангом конъюнкции. Единица считается конъюнкцией нулевого ранга.

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.) называется дизъюнкция $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_k$ элементарных конъюнкций $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$.

Очевидно, всякая совершенная д. н. ф. есть частный случай д. н. ф.

Определение. *Минимальной д. н. ф.* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется д. н. ф., реализующая $f(x_1, \ldots, x_n)$ и содержащая наименьшее число букв по сравнению со всеми другими д. н. ф., реализующими $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Нашей задачей является обсуждение вопроса о построении эффективного алгоритма, который для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ строит минимальную д. н. ф., реализующую $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Аналогичная задача может быть поставлена и в более общем случае. Вместо функций алгебры логики можно рассматривать функции $F(x_1, \ldots, x_n)$, определенные на некотором подмножестве вершин n-мерного единичного куба и принимающие значения 0 или 1, и реализацию их минимальными д. н. ф. Некоторые результаты в этом направлении были получены автором [2].

Для дальнейшего нам удобно использовать геометрическую модель. Пусть каждой функции алгебры логики поставлено в соответствие подмножество N_f всех таких вершин $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n-мерного единичного куба, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Определение. Подмножество $N_{\mathfrak{A}} \subseteq E_n$**) называется *интервалом k-го ранга*, если оно соответствует конъюнкции $\mathfrak{A}$ k-го ранга.

Очевидно, что каждая вершина куба является интервалом n-го ранга, а множество всех вершин куба — интервалом нулевого ранга. Легко видеть, что интервал k-го ранга геометрически представляет собой подмножество вершин куба, заполняющих его $(n-k)$-мерную грань.

Заметим, что конъюнкция $\mathfrak{A}_1$, соответствующая интервалу $N_{\mathfrak{A}_1}$, содержащему интервал $N_{\mathfrak{A}_2}$, получается из конъюнкции $\mathfrak{A}_2$ путем опускания в $\mathfrak{A}_2$ некоторых букв.

---

*) В дальнейшем знак конъюнкции мы иногда будем опускать.
**) E_n — множество всех вершин единичного n-мерного куба.

Легко видеть, что с каждой д. н. ф. $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ связано покрытие подмножества N_f интервалами $N_{\mathfrak{A}_j}$, причем $N_{\mathfrak{A}_j} \subseteq N_f$. Мы имеем

$$N_f = \bigcup_{j=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_j}.$$

Справедливо и обратное положение: каждому покрытию подмножества N_f интервалами, лежащими в N_f, соответствует некоторая д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим через r_j ранг интервала $N_{\mathfrak{A}_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $r = \sum_{j=1}^{m} r_j$ совпадает с числом букв в исходной д. н. ф. Поставленная задача, очевидно, сводится к отысканию такой д. н. ф. или такого покрытия подмножества N_f интервалами $N_{\mathfrak{A}_j}$, $N_{\mathfrak{A}_j} \subseteq N_f$, чтобы выражение $r = \sum_{j=1}^{m} r_j$ было минимальным.

§ 2. Сокращенная д. н. ф.

Определение. Интервал $N_{\mathfrak{B}}$, $N_{\mathfrak{B}} \subseteq N_f$, называется *максимальным*, если не существует интервала $N_{\mathfrak{A}}$, $N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_f$, имеющего меньший ранг, чем ранг $N_{\mathfrak{B}}$, и такого, что

$$N_{\mathfrak{B}} \subset N_{\mathfrak{A}}.$$

Очевидно, что совокупность $\{N_{\mathfrak{B}_i}\}$ всех максимальных интервалов, лежащих в N_f, определяет покрытие подмножества N_f:

$$N_f = \bigcup_{j=1}^{s} N_{\mathfrak{B}_j}.$$

Определение. Д. н. ф. $\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{B}_j$, реализующая функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и соответствующая покрытию подмножества N_f всеми лежащими в нем максимальными интервалами, называется *сокращенной д. н. ф.* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что сокращенная д. н. ф. определяется по функции f однозначным образом.

Легко видеть, что покрытие множества N_f суммой всех максимальных интервалов $N_{\mathfrak{B}_j}$, $N_{\mathfrak{B}_j} \subseteq N_f$, вообще говоря, не отвечает минимальной д. н. ф.

Пример 1.1 $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$.
Сокращенной д.н.ф. этой функции является

$$\mathfrak{N}_c = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xz \vee xy \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z},$$

а минимальными д. н. ф.

$$\mathfrak{A}_1 = \bar{x}\bar{y} \vee xz \vee y\bar{z}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \bar{y}z \vee xy \vee \bar{x}\bar{z}.$$

Связь между сокращенной и минимальной д. н. ф. вытекает из следующего утверждения:

Теорема 1. *Минимальная д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ получается из сокращенной д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ путем удаления некоторых элементарных конъюнкций.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если мы установим, что покрытие множества N_f, отвечающее минимальной д. н. ф., состоит только из максимальных интервалов. Последнее почти очевидно, так как, если бы покрытие содержало немаксимальный интервал, то его можно было бы заменить объемлющим максимальным интервалом. В результате этой операции сумма рангов интервалов данного покрытия уменьшилась бы, что противоречит предположению минимальности д. н. ф.

§ 3. Переход от сокращенной д. н. ф. к тупиковым д. н. ф.

Построение минимальной д. н. ф. связано с умением надлежащим образом производить опускание элементарных конъюнкций в сокращенной д. н. ф. Последнее можно осуществить путем перебора всех под-

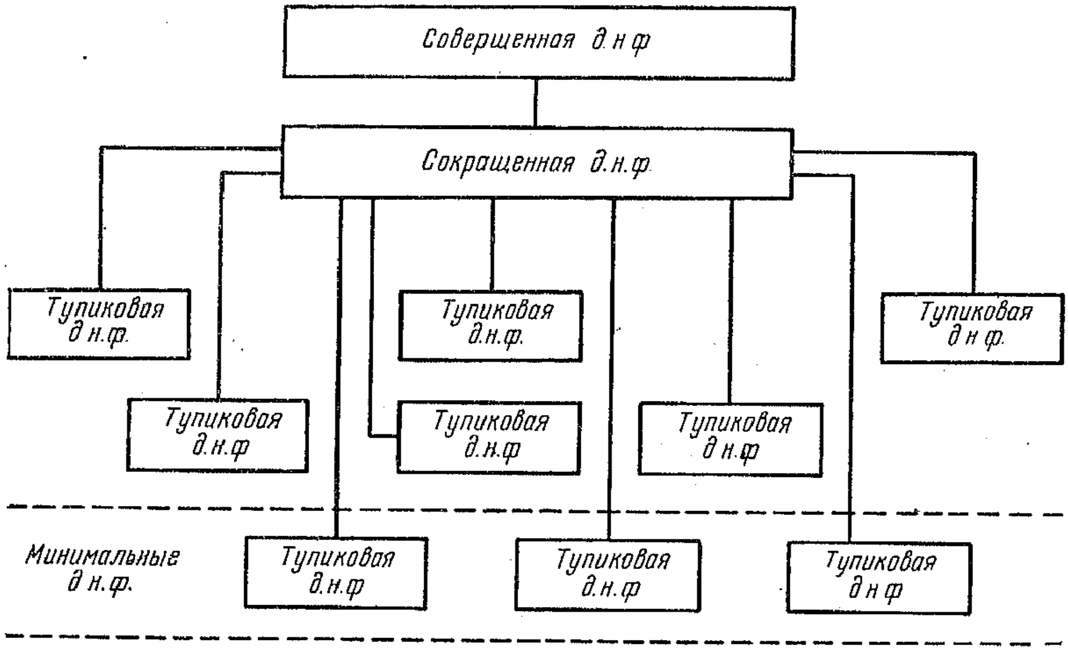

Рис. 2.

множеств дизъюнктивных членов данной сокращенной д. н. ф. и выяснения — какое из подмножеств следует удалить, чтобы получить минимальную д. н. ф. Этот перебор можно сделать аккуратнее, но, по-видимому, в общем случае он неустраним. Элементарные конъюнкции можно также удалять из сокращенной д. н. ф. по одной.

Определение. Покрытие множества N_f максимальными интервалами называется *неприводимым*, если после удаления любого из входящих в него интервалов оно перестает быть покрытием.

Определение. Д. н. ф., реализующая функцию f, называется *тупиковой*, если ей соответствует неприводимое покрытие множества N_f.

Описанный нами процесс упрощения д. н. ф. переводит сокращенную д. н. ф. в тупиковую. Результат упрощения зависит, вообще говоря, от порядка, в котором производится удаление дизъюнктивных членов. При одном порядке выбрасываний получается минимальная д. н. ф., при другом — тупиковая неминимальная д. н. ф. Поэтому для получения минимальной д. н. ф. следует построить все тупиковые д. н. ф. и среди них выбрать минимальные. При этом приходится проделывать большой перебор.

Процесс построения минимальной д. н. ф., исходя из совершенной д. н. ф., можно описать более подробно (рис. 2).

1°. Выделяются максимальные интервалы и строится сокращенная д. н. ф.

2°. Строятся все тупиковые д. н. ф. (ветвящийся процесс).

3°. Выделяются минимальные д. н. ф.

§ 4. Критерий поглощения

Процесс перехода от сокращенной д. н. ф. к тупиковой можно разбить на элементарные шаги, каждый из которых представляет собой удаление из д. н. ф. $\mathfrak{N}$, полученной на предыдущем шаге, одной элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$. Удаляемая конъюнкция такова, что $N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_i}$ (здесь конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ входят в д. н. ф. $\mathfrak{N}$).

Мы установим аналитический критерий покрытия интервала суммой других интервалов. Этот критерий будет нами применяться при доказательстве некоторых теорем.

Пусть E_n — множество всех вершин n-мерного единичного куба. Заметим, что соотношение $N_{f'} \subseteq N_{f''}$, где $N_{f'} \subseteq E_n$ и $N_{f''} \subseteq E_n$, эквивалентно тождеству $(f' \to f'') \equiv 1$. Пусть $N_{\mathfrak{A}}, N_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{A}_m}$ — интервалы. Выясним, при каких условиях $N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_i}$ или $(\mathfrak{A} \to \bigvee\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i) \equiv 1$.

Определение. Элементарные конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ называются *ортогональными*, если $\mathfrak{A}_i \mathbin{\&} \mathfrak{A}_j \equiv 0$.

Определение. Дизъюнкция $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m$ элементарных конъюнкций $\mathfrak{A}_i$ *поглощает элементарную конъюнкцию* $\mathfrak{A}$, если $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{N}) \equiv 1$.

При исследовании случаев поглощения дизъюнкцией $\mathfrak{N}$ элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$ можно считать, что каждая элементарная конъюнкция из $\mathfrak{N}$ не ортогональна $\mathfrak{A}$. В самом деле, если бы дизъюнкция $\mathfrak{N}$ содержала ортогональные к $\mathfrak{A}$ элементарные конъюнкции, то мы построили бы путем удаления из $\mathfrak{N}$ всех таких конъюнкций дизъюнкцию $\mathfrak{N}'$. Ясно, что $\mathfrak{N}'$ поглощает $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}$ поглощает $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Для того чтобы дизъюнкция* $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_m$ *поглощала элементарную конъюнкцию* $\mathfrak{A}$, *не ортогональную ни одной из элементарных конъюнкций из* $\mathfrak{N}$, *необходимо и достаточно, чтобы каждую конъюнкцию* $\mathfrak{A}_i$ *можно было бы представить в форме* $\mathfrak{A}_i = C_i \mathbin{\&} D_i$ *(конъюнкции* C_i *и* D_i *могут вырождаться в* 1) *с соблюдением следующих условий*:

1. $\bigvee\limits_{i=1}^{m} D_i \equiv 1$,

2. $(\mathfrak{A} \to \mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} C_i) \equiv 1$.

Необходимость. Положим, что $\mathfrak{N}$ поглощает $\mathfrak{A}$. Рассмотрим конъюнкцию $\mathfrak{A}_i$. Пусть C_i обозначает конъюнкцию всех переменных x_i^{σ}, общих как для $\mathfrak{A}_i$, так и для $\mathfrak{A}$. Если таких членов нет, полагаем $C_i \equiv 1$. Обозначим через D_i конъюнкцию оставшихся членов из $\mathfrak{A}_i$. В случае, если все члены из $\mathfrak{A}_i$ содержатся в $\mathfrak{A}$ (имеем тривиальное поглощение), полагаем $D_i \equiv 1$. Поскольку конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}$ не ортогональны, то D_i не содержит переменных, входящих в $\mathfrak{A}$. Из построения очевидно, что $\mathfrak{A}_i = C_i \mathbin{\&} D_i$.

Докажем условие 1. Предположим противное, т. е. что $\bigvee_{i=1}^{m} D_i \not\equiv 1$. Тогда найдется такой набор $\tilde{\gamma}$ значений переменных, входящих в элементарные конъюнкции $D_1, \ldots, D_m$, что выражение $\bigvee_{i=1}^{m} D_i$ на этом наборе примет значение 0. Значение функции f на наборе $\tilde{\gamma}$ будем обозначать через $[f]_{\tilde{\gamma}}$. Тогда только что отмеченный факт запишется так:

$$[\bigvee_{i=1}^{m} D_i]_{\tilde{\gamma}} \equiv 0.$$

Отсюда получим, что $[D_i]_{\tilde{\gamma}} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно, что $[\mathfrak{A}_i]_{\tilde{\gamma}} = [C_i \& D_i]_{\tilde{\gamma}} = C_i \& [D_i]_{\tilde{\gamma}} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots m$. Поэтому $[\mathfrak{N}]_{\tilde{\gamma}} = 0$.

Определим значения остальных переменных, входящих в $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} \not\equiv 0$ в силу неортогональности $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$), так, чтобы $\mathfrak{A}$ обратилось в 1. Объединение этих двух наборов определяет значения всех переменных таким образом, что $\mathfrak{N}$ принимает значение 0, а конъюнкция $\mathfrak{A}$ значение 1. Это противоречит тому факту, что $\mathfrak{A} \to \mathfrak{N} \equiv 1$. Следовательно, предположение, что $\bigvee_{i=1}^{m} D_i \not\equiv 1$, является ложным, и условие 1 доказано. Условие 2 выполнено тривиально.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что $\mathfrak{A} \to \mathfrak{N} \equiv 1$.

Если набор $\tilde{\delta}$ значений переменных обращает $\mathfrak{A}$ в нуль, т. е. $[\mathfrak{A}]_{\tilde{\delta}} = 0$, то $[\mathfrak{A} \to \mathfrak{N}]_{\tilde{\delta}} = 1$.

Пусть теперь $[\mathfrak{A}]_{\tilde{\delta}} = 1$. Покажем, что тогда и $[\mathfrak{N}]_{\tilde{\delta}} = 1$ и, следовательно,

$$[\mathfrak{A} \to \mathfrak{N}]_{\tilde{\delta}} = 1.$$

В самом деле, так как $[\mathfrak{A}]_{\tilde{\delta}} = 1$ и условие 2 выполнено, то $[C_i]_{\tilde{\delta}} = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $[\mathfrak{N}]_{\tilde{\delta}} = [\bigvee_{i=1}^{m} C_i \& D_i]_{\tilde{\delta}} = \bigvee_{i=1}^{m} ([C_i]_{\tilde{\delta}} \& [D_i]_{\tilde{\delta}}) = \bigvee_{i=1}^{m} [D_i]_{\tilde{\delta}} = [\bigvee_{i=1}^{m} D_i]_{\tilde{\delta}} = 1$ (последнее в силу условия 1). Итак, при любом $\tilde{\delta}$ имеем $[\mathfrak{A} \to \mathfrak{N}]_{\tilde{\delta}} = 1$. Этим теорема полностью доказана.

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ — *не равные (попарно) между собой элементарные конъюнкции рангов* $r, r_1, \ldots, r_k$ *соответственно, входящие в сокращенную д. н. ф. функции* f, *и такие, что* $\mathfrak{A}_i \& \mathfrak{A} \not\equiv 0$. *Тогда, если* $N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} N_{\mathfrak{A}_i}$, *то* $r < \sum_{i=1}^{k} r_i$.

Доказательство. Применим к системе $N_{\mathfrak{A}}, N_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{A}_k}$ критерий поглощения. Имеем $\mathfrak{A}_i = C_i \& D_i$, где $\bigvee_{i=1}^{k} D_i \equiv 1$, $(\mathfrak{A} \to \bigvee_{i=1}^{k} C_i) \equiv 1$.

Преобразуем $\underset{i=1}{\overset{k}{\&}} C_i$ в элементарную конъюнкцию $\mathfrak{B}$, выполнив упрощения вида $x^\sigma x^\sigma = x^\sigma$. Очевидно, что $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \equiv 1$, и поэтому $N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_{\mathfrak{B}}$. Мы покажем, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ и $N_{\mathfrak{A}} = N_{\mathfrak{B}}$. Пусть $N_{\mathfrak{A}} \subset N_{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$. Тогда существует буква x_i^σ, входящая в конъюнкцию $\mathfrak{A}$ и не входящая в $\mathfrak{B}$.

Очевидно, x_i^σ не входит ни в одну из конъюнкций C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Покажем, что

$$N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} N_{\mathfrak{A}_i}. \tag{1.1}$$

Действительно, $\mathfrak{A}_i = C_i \& D_i$, $\bigvee_{i=1}^{k} D_i \equiv 1$, $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathop{\&}_{i=1}^{k} C_i) \equiv 1$ (последнее соотношение имеет место в силу того, что $\mathfrak{B} \equiv \mathop{\&}_{i=1}^{k} C_i$); поэтому в силу теоремы 2 соотношение (1.1) имеет место.

Имеем $N_{\mathfrak{A}} \subset N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} N_{\mathfrak{A}_i}$. Мы получили противоречие с условием максимальности интервала $N_{\mathfrak{A}}$. Поэтому $N_{\mathfrak{A}} = N_{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Так как число букв в $\mathfrak{B}$ не больше числа букв в $\mathop{\&}_{i=1}^{k} C_i$, то ранг $\mathfrak{A}$ не больше числа букв в формуле $\bigvee_{i=1}^{k} C_i$, т. е.

$$r \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

Остается исключить равенство.

Покажем, что каждое из D_i состоит не менее чем из одной буквы. Пусть $D_{i_0} \equiv 1$. Тогда $\mathfrak{A}_{i_0} = C_{i_0}$. Из соотношений $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathop{\&}_{i=1}^{k} C_i) \equiv 1$, $(\mathop{\&}_{i=1}^{k} C_i \rightarrow C_{i_0}) \equiv 1$ следует $(\mathfrak{A} \rightarrow C_{i_0}) \equiv 1$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_{i_0}) \equiv 1$ и $N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_{\mathfrak{A}_{i_0}}$. Но по условию теоремы $N_{\mathfrak{A}} \neq N_{\mathfrak{A}_i}$ ни при каком i. Поэтому $N_{\mathfrak{A}} \subset N_{\mathfrak{A}_i}$, и предположение $D_i \equiv 1$ противоречиво.

Теорема доказана.

Оставаясь в предположениях теоремы, можно без труда установить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} r_i - r \geqslant k.$$

ГЛАВА II

Д. Н. Ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$

§ 1. Вводные понятия

Определим некоторые операции над д. н. ф.

Будем говорить, что д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ *содержится* в д. н. ф. $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{N}_2$, если всякая элементарная конъюнкция, входящая в $\mathfrak{N}_1$, входит и в $\mathfrak{N}_2$. Д. н. ф. $\mathfrak{N}$ называется *суммой* д. н. ф. $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$, если она составлена из тех и только тех элементарных конъюнкций, которые содержатся хотя бы в одной из д. н. ф. $\mathfrak{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Д. н. ф. $\mathfrak{N}$ называется *разностью* д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, если она состоит из тех и только тех элементарных конъюнкций, которые содержатся в $\mathfrak{N}$ и не содержатся в $\mathfrak{N}_2$; разность д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ обозначается через $\mathfrak{N}_1 \setminus \mathfrak{N}_2$. Д. н. ф. $\mathfrak{N}$ называется *пересечением* д. н. ф. $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$, если она составлена из тех и только тех элементарных конъюнкций, которые входят во все д. н. ф. $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_k$.

Определение. Сумму всех минимальных д. н. ф. функции f назовем д. н. ф. *типа* ΣM и обозначим через $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Пересечение всех минимальных д. н. ф. функции f назовем д. н. ф. *типа* $\bigcap M$ и обозначим через $\mathfrak{N}_{\bigcap M}$.

Определение. Сумму всех тупиковых д. н. ф. функции f назовем д. н. ф. *типа* ΣT и обозначим через $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$. Пересечение всех тупиковых д. н. ф. функции f назовем д. н. ф. *типа* $\bigcap T$ и обозначим через $\mathfrak{N}_{\bigcap T}$.

Пример 2.1. Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \vee x_1 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$ (здесь $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ задана своей сокращенной д. н. ф $\mathfrak{N}$). Д. н. ф. $\mathfrak{N}$ соответствует покрытие, схематически изображенное на рис. 3.

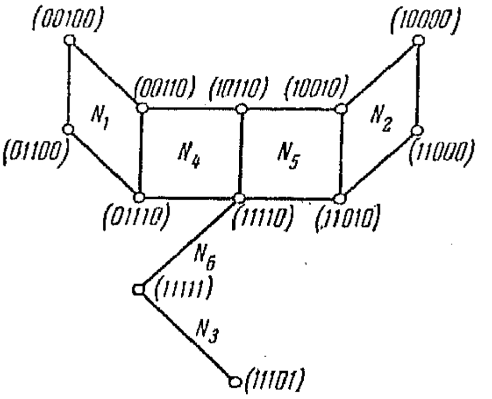

Рис. 3.

$N_1 = N_{\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5}$, $N_2 = N_{x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5}$,

$N_3 = N_{x_1 x_2 x_3 x_5}$, $N_4 = N_{x_3 x_4 \bar{x}_5}$,

$N_5 = N_{x_1 x_4 \bar{x}_5}$, $N_6 = N_{x_1 x_2 x_3 x_4}$.

Функция имеет две тупиковые д. н. ф. (они же являются и минимальными): первой д. н. ф. соответствует покрытие $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$, второй д. н. ф.—покрытие $N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_5$. В нашем примере:

1. $\mathfrak{N}_{\Sigma M} = \mathfrak{N}_{\Sigma T} =$
$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_5 \vee x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_4 \bar{x}_5$,
2. $\mathfrak{N}_{\bigcap M} = \mathfrak{N}_{\bigcap T} = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_5$.

Понятия тупиковой и минимальной д. н. ф. могут быть обобщены. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольная д. н. ф., реализующая функцию f. Д. н. ф. $\mathfrak{N}_M$ называется *минимальной относительно* $\mathfrak{N}$, если она содержит наименьшее число букв по сравнению с другими д. н. ф., содержащимися в $\mathfrak{N}$ и реализующими f; д. н. ф. $\mathfrak{N}_T$ называется *тупиковой относительно* $\mathfrak{N}$, если ей соответствует неприводимое покрытие множества N_f и $\mathfrak{N}_T$ содержится в $\mathfrak{N}$. Сумму всех д. н. ф., минимальных относительно $\mathfrak{N}$, назовем д. н. ф. *типа* ΣM *относительно* $\mathfrak{N}$ (обозначение $\mathfrak{N}_{\Sigma M'}$). Аналогично вводится д. н. ф. *типа* ΣT *относительно* $\mathfrak{N}$ (обозначение $\mathfrak{N}_{\Sigma T'}$). Пересечение всех д. н. ф., минимальных (соответственно тупиковых) относительно $\mathfrak{N}$, назовем д. н. ф. *типа* $\bigcap M$ (соответственно д. н. ф. *типа* $\bigcap T$) *относительно* $\mathfrak{N}$ и обозначим через $\mathfrak{N}_{\bigcap M'}$ (соответственно через $\mathfrak{N}_{\bigcap T'}$).

Элементарным алгоритмом порядка A_π назовем алгоритм, который нумерует конъюнкции в каждой д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и в каждом конечном множестве S, состоящем из элементарных конъюнкций, и перерабатывает соответственно д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в д. н. ф. $A_\pi(\mathfrak{N})$, множество S — в множество $A_\pi(S)$, в которых конъюнкции стоят в порядке, приписанном им этим алгоритмом.

Алгоритмы A_{π_1} и A_{π_2} назовем *равными* ($A_{\pi_1} = A_{\pi_2}$), если (для любой д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и любого конечного множества конъюнкций S) в д. н. ф. $A_{\pi_1}(\mathfrak{N})$ и $A_{\pi_2}(\mathfrak{N})$ и множествах $A_{\pi_1}(S)$ и $A_{\pi_2}(S)$ одинаковые конъюнкции имеют одинаковые номера. В противном случае алгоритмы A_{π_1} и A_{π_2} назовем различными.

§ 2. Алгоритм Квайна [11, 12, 13]

Пусть $\mathfrak{N}_f = \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{A}_i$ есть сокращенная д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $N_f = \bigcup_{i=1}^{s} N_{\mathfrak{A}_i}$. Для каждой конъюнкции $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}_f$ выделим в $\mathfrak{N}_f$ все конъюнкции $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_l}$, неортогональные $\mathfrak{A}$. Очевидно,

$$N_{\mathfrak{A}} \cap N_{\mathfrak{A}_j} \neq 0, \quad j = i_1, \ldots, i_l.$$

Совокупность $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_l})$ назовем *главной окрестностью первого порядка* конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ и обозначим ее через $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_f)$.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}_j$, $j = i_1, i_2, \ldots, i_l$, — суть все конъюнкции из главной окрестности первого порядка конъюнкции $\mathfrak{A}$, отличные от $\mathfrak{A}$; будем говорить, что конъюнкция $\mathfrak{A}$ *входит в ядро д. н. ф.* $\mathfrak{N}_f$, если $N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{l} N_{\mathfrak{A}_j}$.

Другими словами, конъюнкция входит в ядро, если она не поглощается совокупностью всех других конъюнкций (это определяется конъюнкциями главной окрестности первого ранга).

В примере 2.1 конъюнкции $\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5$, $x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5$, $x_1 x_2 x_3 x_5$ входят в ядро, остальные нет.

Теорема 4 (Квайн [13]). *Конъюнкция $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$ входит в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\cap T}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$.*

Необходимость. Допустим, что $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\cap T}$ и $\mathfrak{A}$ не входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$. Тогда $N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{l} N_{\mathfrak{A}_j}$ и $(\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{A}) \sim \mathfrak{N}$. Начнем процесс построения тупиковой д. н. ф. с удаления из $\mathfrak{N}$ конъюнкции $\mathfrak{A}$. В конце процесса получим тупиковую д. н. ф., не содержащую $\mathfrak{A}$. Из полученного противоречия следует, что $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$.

Достаточность. Следует из замечания: если $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$, то $(\mathfrak{N} \setminus \mathfrak{A}) \not\equiv \mathfrak{N}$.

Следствие. *Пусть ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$ составлено из конъюнкций $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_m}$. Конъюнкция $\mathfrak{A}$ такая, что*

$$N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} N_{\mathfrak{A}_{j_i}},$$

не входит ни в одну тупиковую д. н. ф. (т. е. не входит в $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$).

Алгоритм Квайна, основанный на теореме 4 и следствии из нее, состоит в следующем.

1. Конъюнкции в $\mathfrak{N}$ упорядочиваются определенным образом. Для каждой конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ по порядку производится проверка, входит она в ядро или нет. Для этого выделяется главная окрестность первого порядка $(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{h_i})$ конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и проверяется включение

$$N_{\mathfrak{A}_i} \subseteq \bigcup_{j=1}^{h_i} N_{\mathfrak{B}_j} \tag{2.1}$$

или эквивалентное ему соотношение

$$\left(\mathfrak{A}_i \to \bigvee_{j=1}^{h_i} \mathfrak{B}_j\right) \equiv 1. \tag{2.2}$$

Если оно имеет место, то конъюнкция $\mathfrak{A}_i$ некоторым способом отмечается как не входящая в ядро.

2. Пусть ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$ состоит из конъюнкций $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{i_p}$. Конъюнкции из $\mathfrak{N}$, не входящие в ядро, некоторым способом упорядочиваются. Для каждой такой конъюнкции $\mathfrak{A}_j$ по порядку проверяется включение

$$N_{\mathfrak{A}_j} \subset \bigcup_{k=1}^{i_p} N_{\mathfrak{B}_k} \tag{2.3}$$

или эквивалентное ему соотношение

$$(\mathfrak{A}_j \to \bigvee_{k=1}^{i_p} \mathfrak{B}_k) \equiv 1. \tag{2.4}$$

Вместо всех конъюнкций ядра при каждой проверке достаточно брать конъюнкции из ядра, входящие в главную окрестность первого порядка конъюнкции $\mathfrak{A}_j$. Конъюнкции, для которых (2.4) выполнено, удаляются из $\mathfrak{N}$.

Д. н. ф. $\mathfrak{N}_k$, построенная по методу Квайна, в силу следствия из теоремы 4 обладает свойством

$$\mathfrak{N}_{\Sigma T} \subseteq \mathfrak{N}_k,$$

причем возможны случаи, когда $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{N}_{\Sigma T}$. Так, в примере 2.1

$$\mathfrak{A} = x_1 x_2 x_3 x_4 \in \mathfrak{N}_k,$$

$$\mathfrak{A} = x_1 x_2 x_3 x_4 \notin \mathfrak{N}_{\Sigma T}.$$

Это вызвано тем, что критерий Квайна невхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ не является необходимым.

В следующем параграфе мы сформулируем необходимое и достаточное условие невхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$. Основываясь на этом условии, мы построим алгоритм перехода от сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ к д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$, приводящий к более сильным упрощениям, чем алгоритм Квайна.

Заметим, что метод Квайна применим к упрощению произвольной д. н. ф. $\mathfrak{N}$. Все изложение настоящего параграфа полностью сохраняет силу, если вместо понятий: минимальная д. н. ф., тупиковая д. н. ф., $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$, $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$ употреблять понятия: д. н. ф., минимальная относительно $\mathfrak{N}$; д. н. ф., тупиковая относительно $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{\Sigma M'}$, $\mathfrak{N}_{\Sigma T'}$.

Это замечание применимо и ко всем следующим параграфам настоящей главы.

§ 3. Необходимое и достаточное условие вхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$

Пусть $\mathfrak{N}$ есть сокращенная д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и точка x принадлежит множеству N_f.

Множество $M(x, \mathfrak{N})$ всех интервалов $N_{\mathfrak{A}_i}$ таких, что

1) $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{N}$,
2) $x \in N_{\mathfrak{A}_i}$,

назовем *x-пучком в* $\mathfrak{N}$.

Введем специальное обозначение $M(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ для множества $M(x, \mathfrak{N}) \setminus N_{\mathfrak{A}}$ (здесь $N_{\mathfrak{A}} \in M(x, \mathfrak{N})$).

Аналогичное понятие можно сформулировать и для конъюнкций. Множество $m(x, \mathfrak{N})$ всех конъюнкций $\mathfrak{A}_i$ таких, что

1) $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{N}$,
2) $[\mathfrak{A}_i]_x = 1$,

назовем *x-семейством в* $\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{A} \in m(x, \mathfrak{N})$. Введем обозначение $m(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = (m(x, \mathfrak{N}) \setminus \mathfrak{A})$.

Очевидно, интервал $N_{\mathfrak{A}_i}$ содержится в x-пучке в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда конъюнкция $\mathfrak{A}_i$ содержится в x-семействе в $\mathfrak{N}$.

Определение. Точка x, $x \in N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_f$, называется *регулярной относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если существует точка x' такая, что

$$1)\ x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}), \tag{2.5}$$

$$2)\ M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N}).$$

Как видно из определения, в примере 2.1 точка $x = (11110)$ является регулярной относительно $(x_1x_2x_3x_4, \mathfrak{N})$.

Действительно, x'-пучок точки $x' = (10110)$ состоит из интервалов N_4 и N_5, а x-пучок состоит из интервалов N_4, N_5, N_6. Имеем

$$M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N}) \text{ и } x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}).$$

Заметим, что интервал $N_{\mathfrak{A}}$ (см. (2.5)) не входит в x'-пучок в $\mathfrak{N}$, так как $x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})$. Поэтому в определении регулярности условие 2 можно заменить на

$$2')\ M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}).$$

Докажем несколько критериев регулярности точки относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Пусть $M(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{N_{\mathfrak{B}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{B}_k}\}$.

Теорема 5. *Точка x является регулярной относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N} \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i) \not\equiv \mathfrak{N}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x регулярна относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Тогда существует точка x', $x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})$, такая, что $M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и, следовательно, $m(x', \mathfrak{N}) \subseteq$ $\subseteq m(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. После удаления из $\mathfrak{N}$ всех конъюнкций из $m(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и, следовательно, всех конъюнкций из $m(x', \mathfrak{N})$ мы получим д. н. ф. $\mathfrak{N}'$, в которой нет конъюнкций $\mathfrak{A}_i$ таких, что $[\mathfrak{A}_i]_{x'} = 1$. Следовательно, $[\mathfrak{N}']_{x'} = 0$, $[\mathfrak{N}]_{x'} = 1$ и $\mathfrak{N}' = (\mathfrak{N} \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i) \not\equiv \mathfrak{N}$.

Достаточность. Пусть выполнено (2.6). Тогда существует точка x', $x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})$, такая, что $[\mathfrak{N}']_{x'} = 0$, $[\mathfrak{N}]_{x'} = 1$. Через точку x' не проходит ни один из интервалов $N_{\mathfrak{B}}$, где $\mathfrak{B} \in \mathfrak{N}'$. Следовательно, все интервалы, входящие в $M(x', \mathfrak{N})$, содержатся среди интервалов $\{N_{\mathfrak{B}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{B}_k}\}$. Поэтому $M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N})$. Мы доказали, что точка x регулярна относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Теорема 6. *Точка x, $[\mathfrak{A}_x] = 1$, является регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ тогда и только тогда, когда имеет место включение*

$$x \in \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcup_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N})} N_{\mathfrak{B}} \Big). \tag{2.7}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено (2.7). Тогда найдется точка x' из множества $N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}$ такая, что

$$x \in \bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N})} N_{\mathfrak{B}}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что все интервалы, проходящие через точку x', проходят и через точку x. Поэтому

$$M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N}).$$

Необходимость. Пусть в $N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}$ существует точка x' такая, что $M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N})$. Тогда каждый интервал, проходящий через точку x', проходит и через точку x. Поэтому

$$x \in \bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N})} N_{\mathfrak{B}} \quad \text{и} \quad x \in \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{A})} N_{\mathfrak{B}} \Big).$$

Теорема доказана.

Множество $M \subseteq N_{\mathfrak{A}}$ назовем *регулярным относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если все его точки регулярны относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Теорема 7. *Элементарная конъюнкция $\mathfrak{A}$ сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ функции f не содержится в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ (т. е. не входит ни в какую тупиковую д. н. ф.) тогда и только тогда, когда интервал $N_{\mathfrak{A}}$ есть множество, регулярное относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть в $N_{\mathfrak{A}}$ существует точка x, не регулярная относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Пусть, далее, $M(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{N_{\mathfrak{B}_1}, \ldots, N_{\mathfrak{B}_k}\}$. Рассмотрим д. н. ф. $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i$. Очевидно, $\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{N}$ (в силу теоремы 5). Заметим, что $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}'$. Упростив $\mathfrak{N}'$ до тупиковой д. н. ф., мы получим тупиковую д. н. ф., в которую входит элементарная коньюнкция $\mathfrak{A}$. Поэтому $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\Sigma T}$. Необходимость теоремы доказана.

Достаточность. Пусть $N_{\mathfrak{A}}$ — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Покажем, что никакая д. н. ф. $\overline{\mathfrak{N}}$ такая, что $\mathfrak{A} \in \overline{\mathfrak{N}} \subseteq \mathfrak{N}$, не является тупиковой. Из этого будет следовать, что $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{N}_{\Sigma T}$.

В силу регулярности $N_{\mathfrak{A}}$ относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ имеем (по теореме 6)

$$N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcup_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N})} N_{\mathfrak{B}} \Big).$$

При переходе от $\mathfrak{N}$ к $\overline{\mathfrak{N}}$ число интервалов, участвующих в покрытии, не возрастает. Поэтому

$$\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N})} N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \overline{\mathfrak{N}})} N_{\mathfrak{B}} \quad \text{и} \quad N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N})} N_{\mathfrak{B}} \Big).$$

Для каждой точки x'_i из $N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}$ выберем интервал N_{C_i} (где $C_i \in \overline{\mathfrak{N}}$) такой, что $N_{C_i} \supseteq \bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x'_i, \overline{\mathfrak{N}})} N_{\mathfrak{B}}$ и

$$N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{x'_i \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} N_{C_i}. \tag{2.9}$$

В силу (2.9) д. н. ф. $\overline{\mathfrak{N}}$ не является тупиковой.

Пример 2.2. В примере (2.1) интервал $N_{x_1 x_2 x_3 x_4}$ есть множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и, следовательно,

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \notin \mathfrak{N}_{\Sigma T}.$$

§ 4. Локальный характер понятия «регулярная точка»

Определение регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ точки может быть сделано более эффективным. Заметим, что свойство конъюнкции $\mathfrak{A}$ входить или не входить в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\cap T}$ однозначно определяется главной окрестностью первого порядка $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, т. е. если $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_1) = S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_2)$, то $\mathfrak{A}$ или одновременно входит в д. н.ф. $(\mathfrak{N}_1)_{\cap T}$ и $(\mathfrak{N}_2)_{\cap T}$, или одновременно не входит в эти д. н. ф. Это легко следует из теоремы 4.

Свойство конъюнкции входить или не входить в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$, как показывает пример 2.3, не определяется однозначно главной окрестностью первого порядка.

Пример 2.3. Пусть $\mathfrak{N}_1 = \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 x_6 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 x_6 \vee x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 \vee x_3 x_4 \bar{x}_5 x_6 \vee x_1 x_4 \bar{x}_5 x_6 \vee$ $\vee\, x_1 x_2 x_3 x_4 x_6$;

$$\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}^5.$$

Геометрические образы д.н.ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ изображены соответственно на рис. 4, *а* и 4, *б*. Пусть $\mathfrak{A} = x_1 x_2 x_3 x_4 x_6$, т. е. $N_{\mathfrak{A}} = N_6$; тогда

$$S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_1) = S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_2).$$

Но $\mathfrak{A} \notin (\mathfrak{N}_1)_{\Sigma T}$ и $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{N}_2)_{\Sigma T}$, что легко проверяется по рис. 4, *а* и 4, *б*.

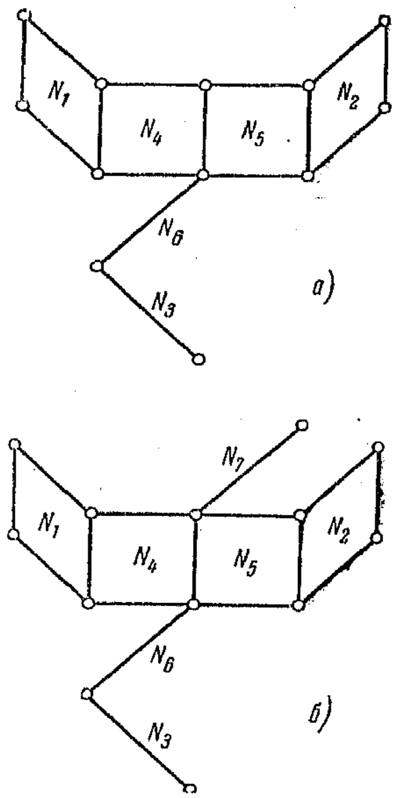

Рис. 4.
$N_1 = N_{\bar{x}_1 x_3 \bar{x}_5 x_6}$,
$N_2 = N_{x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 x_6}$,
$N_3 = N_{x_1 x_2 x_3 x_5 x_6}$,
$N_4 = N_{x_3 x_4 \bar{x}_5 x_6}$,
$N_5 = N_{x_1 x_4 \bar{x}_5 x_6}$,
$N_6 = N_{x_1 x_2 x_3 x_4 x_6}$,
$N_7 = N_{x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5}$.

Введем понятие главной окрестности второго порядка.

Главной окрестностью $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ *второго порядка* конъюнкции $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{N}$ (где $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$) назовем совокупность всех конъюнкций $\mathfrak{A}_i$ из $\mathfrak{N}$, для которых выполнено одно из следующих условий:

1. интервал, соответствующий конъюнкции $\mathfrak{A}_i$, имеет непустое пересечение с интервалом, соответствующим некоторой конъюнкции из $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$;

2. интервал, соответствующий конъюнкции $\mathfrak{A}_i$, содержится в сумме интервалов, каждому из которых соответствует конъюнкция из $\mathfrak{N}$, удовлетворяющая условию 1.

Очевидно, $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) \subseteq S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Мы покажем, что свойство конъюнкции $\mathfrak{A}$ входить или не входить в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ однозначно определяется ее главной окрестностью второго порядка $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Дадим сначала более эффективное определение точки, регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Пусть $S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{h_1}\}$.

Рассмотрим множество

$$Q(S_1) = \bigcup_{i=1}^{h} N_{\mathfrak{A}_i}.$$

Теорема 8. *Точка* x, $x \in N_{\mathfrak{A}} \subseteq N_f$, *является регулярной относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ *тогда и только тогда, когда существует точка* x' *такая, что*

$$x' \in Q(S_1),\ M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N}).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть точка x регулярна относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Тогда существует точка x' такая, что

$$x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}),$$
$$M(x', \mathfrak{N}) \subseteq M(x, \mathfrak{N}).$$

Все интервалы, содержащие точку x', содержат точку x. Следовательно, все они не ортогональны к $N_{\mathfrak{A}}$ и входят в окрестность первого порядка. Поэтому

$$x' \in Q(S_1).$$

Достаточность очевидна (см. определение регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ точки).

Таким образом, свойство конъюнкции входить или не входить в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ однозначно определяется, если заданы x-пучки всех точек x из $Q(S_1)$.

Легко видеть, что если $x \in Q(S_1)$, то все конъюнкции, которым соответствуют интервалы из x-пучка в $\mathfrak{N}$, входят в $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Поэтому свойство конъюнкции $\mathfrak{A}$ входить или не входить в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$ однозначно определяется заданием окрестности $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Нами доказана

Теорема 9. *Если N_{f_1} и N_{f_2} — сокращенные д. н. ф. функций f_1 и f_2 и $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_{f_1}) = S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_{f_2})$, то $\mathfrak{A}$ одновременно содержится или не содержится в д. н. ф. $(\mathfrak{N}_{f_1})_{\Sigma T}$ и $(\mathfrak{N}_{f_2})_{\Sigma T}$.*

ГЛАВА III

A-АЛГОРИТМЫ

В третьей главе мы рассмотрим некоторые алгоритмы упрощения сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$. Каждому алгоритму соответствует достаточный критерий невхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Каждый шаг алгоритма сводится к расстановке некоторых конъюнкций из $\mathfrak{N}$ в определенном порядке (т. е. к применению элементарного алгоритма A_π) и проверке критерия для каждой из них. При выполнении более поздних во времени шагов алгоритма частично учитывается информация, полученная при выполнении предшествующих шагов алгоритма. Характерной особенностью изучаемых алгоритмов является следующее обстоятельство: при проверке критерия невхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$ используется информация только в «близких» к $\mathfrak{A}$ конъюнкциях в $\mathfrak{N}$ (конъюнкциях, входящих в главную окрестность второго порядка).

При рассмотрении таких алгоритмов появляется задача о выяснении зависимости результата алгоритма от способа упорядочения при помощи элементарного алгоритма A_π. Нас будут особенно интересовать алгоритмы, окончательный результат применения которых к д. н. ф. не зависит от A_π (однозначные алгоритмы).

Основные результаты третьей главы изложены в заметке [3].

§ 1. Множество первого типа

Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ имеет ранг r.

Определение. Множество M, $M \subseteq N_{\mathfrak{A}}$, называется множеством *первого типа относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если в $\mathfrak{N}$ существуют элементарные конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ рангов $r_1, \ldots, r_k$ соответственно такие, что

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} N_{\mathfrak{A}_i}, \quad r > \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

Пример 3.1. Множество $M = \{(1011111), (0111111)\}$ является множеством первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, где

$$\mathfrak{N} = x_3x_4x_5x_6x_7 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2,$$

$$\mathfrak{A} = x_3x_4x_5x_6x_7.$$

Здесь $M \subseteq N_{\mathfrak{A}_1} \cup N_{\mathfrak{A}_2}$, где $\mathfrak{A}_1 = x_1\bar{x}_2$, $\mathfrak{A}_2 = \bar{x}_1x$. В этом случае $r = 5$, $r_1 = r_2 = 2$ и $r > r_1 + r_2$.

Определение. Множество M, $M \subseteq N_{\mathfrak{A}}$, называется *специальным множеством первого типа относительно* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$, если в $\mathfrak{N}$ существует элементарная конъюнкция $\mathfrak{A}_1$ ранга r_1 такая, что $M \subseteq N_{\mathfrak{A}_1}$ и $r_1 < r$ (где r — ранг $\mathfrak{A}$).

Пример 3.2. Пусть $\mathfrak{N} = x_1 \vee x_2x_3$, $\mathfrak{A} = x_2x_3$, $r=2$, $\mathfrak{A}_1 = x_1$, $r_1 = 1$, $M = (111)$. Очевидно, M есть специальное множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Всякое специальное множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ есть множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

§ 2. A-алгоритмы и A'-алгоритмы

Пусть $\mathfrak{N}$ — сокращенная д. н. ф. функции f; $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ — конъюнкции из $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}_i \notin \mathfrak{N}_{\Sigma M}$, $f_i = 1, 2, \ldots, k$. Положим $\widetilde{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i$.

Теорема 10. 1. *Соотношения*

а) $N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{B} \in [S_1(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{N}}) \setminus \mathfrak{A}]} N_{\mathfrak{B}}$

и

б) $N_{\mathfrak{A}} = M_1 \cup M_2$,

где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{N}})$, M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, не могут выполняться одновременно для одной и той же конъюнкции $\mathfrak{A}$.

2. *Если для $N_{\mathfrak{A}}$ выполнено условие* (а), *то* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\cap M}$.

3. *Если для $N_{\mathfrak{A}}$ выполнено условие* (б), *то* $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{N}_{\Sigma M}$.

Доказательство. Пусть для конъюнкции $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$ выполнено (а). Из теоремы Квайна (теорема 4) следует, что $\mathfrak{A}$ входит во все д. н. ф., тупиковые относительно $\widetilde{\mathfrak{N}}$. Так как $\mathfrak{A}_i \notin \mathfrak{N}_{\Sigma M}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$, то все минимальные д. н. ф. суть тупиковые д. н. ф. относительно $\widetilde{\mathfrak{N}}$. Поэтому $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\cap M}$.

Предположим, что для $\mathfrak{A}$ выполнено (б) и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\Sigma M}$, т. е. существует минимальная д. н. ф. $\mathfrak{N}_M$, содержащая $\mathfrak{A}$.

Докажем, что для множества M_1, фигурирующего в условии (б), имеет место включение

$$M_1 \subseteq \bigcup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}_M \setminus \mathfrak{A})} N_{\mathfrak{B}}. \tag{3.1}$$

Вспомним, что точка x является регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{N}})$ тогда и только тогда, когда имеет место включение (теорема 6)

$$x \in \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \widetilde{\mathfrak{N}})} N_{\mathfrak{B}} \Big). \tag{3.2}$$

Д. н. ф. $\mathfrak{N}_M$ получается из д. н. ф. $\widetilde{\mathfrak{N}}$ удалением некоторых конъюнкций. Поэтому для каждой точки $x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})$ выполнено включение

$$M(x', \widetilde{\mathfrak{N}}) \supseteq M(x', \mathfrak{N}_M).$$

Поэтому

$$\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \widetilde{\mathfrak{N}})} N_{\mathfrak{B}} \subseteq \bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N}_M)} N_{\mathfrak{B}} \subseteq N_{\mathfrak{B}_{x'}}. \tag{3.3}$$

при любом интервале $N_{\mathfrak{B}_{x'}}$ из пучка $M(x', \mathfrak{N}_M)$. Из (3.2) и (3.3) легко следует

$$M_1 \subseteq \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \widetilde{\mathfrak{N}})} N_{\mathfrak{B}} \Big) \subseteq \bigcup_{x' \in (N_f \setminus N_{\mathfrak{A}})} \Big(\bigcap_{N_{\mathfrak{B}} \in M(x', \mathfrak{N}_M)} N_{\mathfrak{B}} \Big) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{x' \in [N_f \setminus N_{\mathfrak{A}}]} N_{\mathfrak{B}_{x'}} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{B} \in [\mathfrak{N}_M \setminus \mathfrak{A}]} N_{\mathfrak{B}}. \tag{3.4}$$

Множество M_2 есть множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Следовательно, в $\mathfrak{N}$ найдутся конъюнкции $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s$ рангов $r_1, \ldots, r_s$ такие, что

$$M_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} N_{\mathfrak{B}_i}, \qquad \sum_{i=1}^{s} r_i < r, \tag{3.5}$$

где r — ранг конъюнкции $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим д. н. ф.

$$\mathfrak{N}'_M = (\mathfrak{N}_M \setminus \mathfrak{A}) \vee \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{B}_i = (\mathfrak{N}_M \vee \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{B}_i) \setminus \mathfrak{A}.$$

В силу соотношения $\sum_{i=1}^{s} r_i < r$ д. н. ф. $\mathfrak{N}'_M$ имеет букв меньше, чем д. н. ф. $\mathfrak{N}_M$. Но из (3.4) и (3.5) следует, что

$$N_{\mathfrak{A}} = M_1 \cup M_2 \subseteq \Big(\bigcup_{\mathfrak{B} \in (\mathfrak{N}_M \setminus \mathfrak{A})} N_{\mathfrak{B}} \cup \bigcup_{i=1}^{s} N_{\mathfrak{B}_i} \Big).$$

Поэтому

$$\mathfrak{N}'_M = (\mathfrak{N}_M \setminus \mathfrak{A}) \vee \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{B}_i) \sim (\mathfrak{N}_M \vee \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{B}_i) \sim \mathfrak{N}_M.$$

Отсюда следует, что д. н. ф. $\mathfrak{N}_M$ не является минимальной. Полученное противоречие доказывает, что $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{N}_{\Sigma M}$.

Из доказанных пунктов 2 и 3 легко следует 1. Теорема доказана.

Теорема сохраняет силу, если множество $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k\}$ пусто, и $\widetilde{\mathfrak{N}}$ состоит из тех же конъюнкций, что и $\mathfrak{N}$.

Переходим к описанию A-алгоритма.

A-алгоритмы расставляют отметки над конъюнкциями из д. н. ф. $\mathfrak{N}$. Конъюнкции, относительно которых удалось установить, что они содержатся в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\cap M}$, отмечаются знаком (α), т. е. вместо $\mathfrak{A}$ пишем $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. Конъюнкции, относительно которых удалось установить, что они не содержатся в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$, отмечаются знаком (β), т. е. вместо $\mathfrak{A}$ пишем $\mathfrak{A}^{(\beta)}$. В заключение все конъюнкции со знаком (β) удаляются из $\mathfrak{N}$.

Алгоритм состоит из ряда последовательных шагов.

1-й шаг. Элементарный алгоритм A_π упорядочивает конъюнкции $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$. Выделяется первая по порядку конъюнкция $\mathfrak{A}$, для которой выполнено одно из соотношений (3.6) или (3.7):

$$N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{B} \in [S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) \setminus \mathfrak{A}]} N_{\mathfrak{B}} \tag{3.6}$$

(т. е. $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}$);

$$N_{\mathfrak{A}} = M_1 \cup M_2, \tag{3.7}$$

где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Если для $\mathfrak{A}$ выполнено условие (3.6), ставим над $\mathfrak{A}$ отметку (α); если для $\mathfrak{A}$ выполнено условие (3.7), ставим над $\mathfrak{A}$ отметку (β). После выполнения акта отметки первый шаг заканчивается.

Если множество конъюнкций, для которых выполнено одно из условий (3.6), (3.7), в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ пусто, то алгоритм заканчивается на 1-м шаге.

n-й шаг. Пусть после выполнения ($n-1$)-го шага в $\mathfrak{N}$ отмечены знаком (α) конъюнкции $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$, знаком ($\beta$) — конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$.

Рассмотрим множество $\widetilde{M}$ конъюнкций, входящих в д. н. ф.

$$\mathfrak{N}\diagdown\left(\bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i \vee \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i\right).$$

Если оно пусто, удаляем из $\mathfrak{N}$ все конъюнкции с отметкой (β). На этом алгоритм заканчивается.

Пусть $\widetilde{M}$ непусто. Элементарный алгоритм A_π упорядочивает конъюнкции из $\widetilde{M}$. Выделяется первая по порядку конъюнкция $\mathfrak{A}$ из $\widetilde{M}$, для которой выполнено одно из соотношений (3.8), (3.9). Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{N}}$ д. н. ф., которая получается из д. н. ф. $\mathfrak{N}$ удалением всех конъюнкций с отметкой (β), входящих в $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$:

$$N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{B}\in[S_1(\mathfrak{A},\, \widetilde{\mathfrak{N}})\diagdown\mathfrak{A}]} N_{\mathfrak{B}} \tag{3.8}$$

(т. е. $\mathfrak{A}$ входит в ядро д. н. ф. $\widetilde{\mathfrak{N}}$);

$$N_{\mathfrak{A}} = M_1 \cup M_2, \tag{3.9}$$

где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \widetilde{\mathfrak{N}})$, M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

Если для $\mathfrak{A}$ выполнено условие (3.8), то над $\mathfrak{A}$ ставится отметка (α); если для $\mathfrak{A}$ выполнено (3.9), то над $\mathfrak{A}$ ставится отметка (β). Если множество конъюнкций, для которых выполнено одно из условий (3.8), (3.9), пусто, то алгоритм заканчивается вычеркиванием из $\mathfrak{N}$ всех конъюнкций с отметкой (β).

Алгоритмы упрощения, определяемые выше, назовем A-алгоритмами. Два A-алгоритма, A_1 и A_2, вообще говоря, различаются элементарными алгоритмами порядка (т. е. способами упорядочивания конъюнкций в д. н. ф.).

В дальнейшем мы докажем, что конечный результат упрощений при помощи A-алгоритмов не зависит от алгоритма A_π, т. е. все A-алгоритмы приводят к расстановке одинаковых отметок и, следовательно, к одинаковым упрощениям в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ (теорема единственности).

Из п. 1 теоремы 10 легко следует, что определение A-алгоритма является корректным, так как на каждом шаге алгоритма может быть поставлено не более одной вполне определенной отметки.

Пусть $\mathfrak{N}_A$ — результат применения A-алгоритма к д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и пусть в процессе A-алгоритма отметки (β) в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ получили конъюнкции

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q.$$

Из п. 3 теоремы 10 следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{A}_i \notin \mathfrak{N}_{\Sigma M} \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, q \\ \text{и} \quad &\mathfrak{N}_A \supseteq \mathfrak{N}_{\Sigma M}. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Пусть $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$ — совокупность всех конъюнкций из $\mathfrak{N}$, получивших в A-алгоритме отметку (β). Из п. 2 теоремы 10 следует, что

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{B}_i \in \mathfrak{N}_{\cap M} \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, p \\ \text{и} \\ \bigvee\limits_{i=1}^{p} \mathfrak{B}_i \subseteq \mathfrak{N}_{\cap M}. \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

Теорема 10 сохраняет силу, если понятие «множество первого типа относительно ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$)» заменить понятием «специальное множество первого типа относительно ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$)».

Полученное путем такой замены утверждение (назовем его теоремой 10′) доказывается так же, как и теорема 10. Алгоритм, получающийся таким же путем из A-алгоритма, назовем A'-алгоритмом.

§ 3. Соотношения между A-алгоритмами и A'-алгоритмами

Пусть $\overline{M}$ — множество A-алгоритмов и A'-алгоритмов.

Установим в $\overline{M}$ частичную упорядоченность.

Определение. Д. н. ф. $\mathfrak{N}$ называется *правильной*, если всем конъюнкциям из $\mathfrak{N}$ соответствуют максимальные в $N_{\mathfrak{N}}$ интервалы и $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{N}_{\Sigma M}$.

Пусть A — произвольный алгоритм из $\overline{M}$. Обозначим через $\mathfrak{N}_A^\alpha$ и $\mathfrak{N}_A^\beta$ множества всех конъюнкций из $\mathfrak{N}$, получивших в алгоритме A отметки (α) и (β) соответственно.

Определение. Пусть $A, B \in \overline{M}$; положим $A \geqslant B$, если для любой правильной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ выполнены включения

$$\mathfrak{N}_A^\alpha \supseteq \mathfrak{N}_B^\alpha, \quad \mathfrak{N}_A^\beta \supseteq \mathfrak{N}_B^\beta.$$

Мы скажем, что $A = B$, если $A \geqslant B$, $B \geqslant A$.

В следующей главе будут доказаны теоремы:

Теорема 11. *Пусть A и B — произвольные A-алгоритмы (A'-алгоритмы), тогда*

$$A = B.$$

Теорема 12. *Пусть A — произвольный A-алгоритм, B — произвольный A'-алгоритм; тогда*

$$A \geqslant B.$$

Укажем функцию алгебры логики f, сокращенная д. н. ф. которой сильнее упрощается A-алгоритмами, чем A'-алгоритмами.

Пример. 3.3. Пусть

$$\mathfrak{N}_f = \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_{11} \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \ldots \bar{x}_{11} \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \ldots \bar{x}_{11} \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee$$
$$\vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bigvee_{i=5}^{11} \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_i \vee \bigvee_{i=5}^{11} x_1 x_3 \bar{x}_3 x_i \quad \text{(см. рис. 4).}$$

Укажем A-алгоритм A и A'-алгоритм B такие, что

$$(\mathfrak{N}_f)_A^\alpha \supset (\mathfrak{N}_f)_B^\alpha,$$
$$(\mathfrak{N}_f)_A^\beta \supset (\mathfrak{N}_f)_B^\beta.$$

Зададим элементарные алгоритмы порядка A_π^1 и A_π^2 в алгоритмах A и B соответственно. Положим $A_\pi^1 = A_\pi^2 = A_\pi$. Элементарный алгоритм порядка A_π (один для обоих алгоритмов) зададим следующим образом:

1) порядок конъюнкций в д. н. ф. $\mathfrak{N}$:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_5,\ \ldots,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_{11},\ x_1x_2\bar{x}_3x_5,\ \ldots,$$
$$x_1x_2\bar{x}_3x_{11},\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\ \ldots\ \bar{x}_{11},\ \bar{x}_1x_2\bar{x}_4\ \ldots\ \bar{x}_{11}, \tag{3.12}$$
$$\bar{x}_3\ \ldots\ \bar{x}_{11},\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4,\ x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4;$$

2) после отметки некоторых конъюнкций порядок конъюнкций, оставшихся неотмеченными, сохраняется.

Заметим, что все конъюнкции из $\mathfrak{N}_f$, кроме трех последних (порядок указан в (3.12)), входят в ядро д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$. Поэтому на первых шестнадцати шагах алгоритмов A и B первые 16 конъюнкций (порядок указан в (3.12)) получат отметки (α).

К началу 17-го шага останутся неотмеченными конъюнкции $\bar{x}_3\ \ldots\ \bar{x}_{11}$, $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$, $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$. Очевидно *)

$$N_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}}=M_1\cup M_2,$$

где $M_1=\{(010\ \ldots\ 0),\ (10\ \ldots\ 0)\}$, $M_2=N_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}}\setminus M_1$.

Из рис. 5 видно, что точки $(010\ldots0)$ и $(10\ldots00)$ регулярны относительно $(\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11},\mathfrak{N}_f)$.

Кроме того, $M_2\subseteq N_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}}$ и $M_2\subseteq(N_4\cup N_5)$; $N_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}}$ содержит 9 букв, а N_4 и N_5 по 4. Поэтому M_2 есть множество первого типа относительно $(\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11},\mathfrak{N}_f)$.

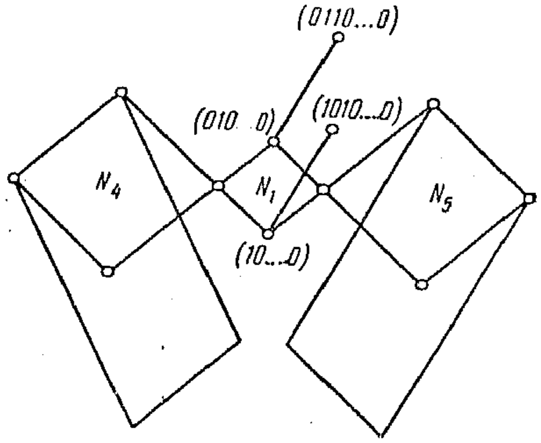

Рис. 5. Схематическое расположение интервалов в покрытии, соответствующем д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$.

На 17-м шаге алгоритма A конъюнкция $\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}$ получит отметку (β). Конъюнкции $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ и $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ входят в ядро д. н. ф. $(\mathfrak{N}_f\setminus\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11})$ (см. рис. 4). На 18-м и 19-м шагах алгоритма A эти конъюнкции получат отметки (α). A'-алгоритм закончится на 17-м шаге, так как нельзя представить $N_{\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}}$ в виде $M_1\cup M_2$, где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A},\mathfrak{N}_f)$, M_2 — специальное множество первого типа относительно $(\mathfrak{A},\mathfrak{N}_f)$, $\mathfrak{A}=\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{11}$ (см. определение A- и A'-алгоритмов). Окончательно имеем (в силу теоремы 11), если A — произвольный A-алгоритм, B — произвольный A'-алгоритм, то

$$(\mathfrak{N}_f)_A^\alpha\supset(\mathfrak{N}_f)_B^\alpha,$$
$$(\mathfrak{N}_f)_A^\beta\supset(\mathfrak{N}_f)_B^\beta.$$

Если различать алгоритмы по окончательным результатам упрощений, к которым они приводят, то все A-алгоритмы (соответственно A'-алгоритмы) совпадают между собой (теорема 11). Мы будем поэтому говорить об одном A-алгоритме и одном A'-алгоритме. Мы видели, что существуют д. н. ф., которые A-алгоритм упрощает сильнее, чем A'-алгоритм. Однако, как мы увидим, «почти всегда» результат применения A-алгоритма к сокращенной д. н. ф. совпадает с результатом применения A'-алгоритма к этой д. н. ф.

Пусть $\chi_{\alpha\beta}(n)$ — число функций алгебры логики от переменных $x_1,\ldots,x_n$, для которых A-алгоритм и A'-алгоритм одинаково упрощают сокращенные д. н. ф.

Теорема 13.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi_{\alpha\beta}(n)}{2^{2^n}}=1.$$

---

*) Иногда у интервала в качестве индекса будем писать соответствующую ему конъюнкцию (вместо ее номера).

Обозначим через $\Psi_k(n)$ число функций f алгебры логики от n переменных таких, что в множестве N_f целиком содержится интервал размерности не меньше k.

Лемма. *Если* $k=[\log_2 n]+2$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi_k(n)}{2^{2^n}}=0.$$

Доказательство. Число функций f алгебры логики таких, что в N_f содержится фиксированный интервал размерности k, выражается формулой $2^{2^n-2^k}$.

Различных интервалов размерности k в n-мерном единичном кубе имеется $2^{n-k}C_n^k$.

Поэтому при $k\leqslant n$

$$0<\frac{\Psi_k(n)}{2^{2^n}}\leqslant\frac{2^{n-k}C_n^k}{2^{2^k}}\leqslant\frac{3^n}{2^{2^k}}.$$

Пусть $k=[\log_2 n]+2$. Тогда

$$2^{2^k}>2^{2^{\log_2 n+1}}=2^{2n}=4^n,\quad \frac{3^n}{2^{2^k}}<\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{и} \quad 0<\frac{\Psi_k(n)}{2^{2^k}}<\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

откуда легко следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 13. Обозначим через $\chi(n)$ число функций алгебры логики от переменных $x_1,\ldots,x_n$ таких, что в N_f не содержится ни одного интервала размерности выше $[\log_2 n]+2$. Из леммы легко следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(n)}{2^{2^n}}=1.$$

Выберем число n_0 так, что для всех $n\geqslant n_0$

$$n-2[\log_2 n]-4>0. \tag{3.13}$$

Докажем, что если $n\geqslant n_0$ и функция $f(x_1,\ldots x_n)$ такова, что в N_f не содержится ни одного интервала размерности выше $[\log_2 n]+2$, то результат применения A-алгоритма к $\mathfrak{N}_f$ совпадает с результатом применения A'-алгоритма к $\mathfrak{N}_f$. Отсюда будет следовать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\chi_{\alpha\beta}(n)}{2^{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\chi(n)}{2^{2^n}}=1.$$

Пусть $\mathfrak{N}_f$ — сокращенная д. н. ф. функции $f(x_1\ldots x_n)$, $\mathfrak{A}$ — элементарная конъюнкция, $\mathfrak{A}\in\mathfrak{N}_f$, в $\mathfrak{N}_f$ не содержится ни одного интервала размерности выше $[\log_2 n]+2$ и $n\geqslant n_0$.

Тогда всякое множество первого типа относительно $(\mathfrak{A},\mathfrak{N}_f)$ есть специальное множество первого типа относительно $(\mathfrak{A},\mathfrak{N}_f)$. Действительно, пусть $M\subseteq N_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A}$ имеет ранг r, $M\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}N_{\mathfrak{A}_i}$, $k\geqslant 2$, $\mathfrak{A}_i\in\mathfrak{N}_f$ и $\mathfrak{A}_i$ имеет ранг r_i, $i=1,2,\ldots,n$. Тогда

$$n\geqslant k(n-[\log_2 n]-2)\geqslant 2n-2[\log_2 n]-4$$

и

$$n-2[\log_2 n]-4\leqslant 0.$$

Из последнего неравенства и (3.13) легко следует теорема 13.

Таким образом, вместо A-алгоритма упрощения «почти всегда» можно применять более простой A'-алгоритм.

В заключение отметим два обстоятельства, имеющие некоторый интерес:

1°. A-алгоритм (A'-алгоритм) использует информацию только о конъюнкциях, входящих в главную окрестность второго порядка. Действительно, факт постановки отметки над $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{N}$, и тип отметки однозначно определяются конъюнкциями из $S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ и отметками, ранее поставленными над этими конъюнкциями.

2°. A-алгоритм иногда позволяет провести сильные упрощения сокращенной д. н. ф. Вместе с тем возможны случаи, когда применение A-алгоритма не приводит к упрощению д. н. ф. Так, если все точки $x \in N_f$ не являются регулярными относительно любой пары $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_f)$, то A-алгоритм не позволяет поставить в $\mathfrak{N}_f$ ни одной отметки (β). Это легко следует из теоремы 3 (глава I).

ГЛАВА IV

АЛГОРИТМЫ УПРОЩЕНИЯ Д. Н. Ф. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Однозначные алгоритмы упрощения сокращенной д. н. ф. основаны на удалении из $\mathfrak{N}$ конъюнкций, относительно которых удалось установить, что они не содержатся в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$ (т. е. не входят ни в какую минимальную д. н. ф.). Существуют различные критерии невхождения конъюнкции $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{N}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Все они являются достаточными и основаны на изучении конъюнкций, «близких» к $\mathfrak{A}$. Под близкими конъюнкциями можно, например, понимать конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ из $\mathfrak{N}$ такие, что $\mathfrak{A}_i \in S_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. В процессе поиска конъюнкций, не входящих в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$, иногда удается получить дополнительную информацию о некоторых конъюнкциях из $\mathfrak{N}$. Так, метод Квайна позволяет выделить некоторые конъюнкции, входящие во все минимальные д. н. ф. В дальнейшем это помогает при поиске конъюнкций, не входящих в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Однозначные алгоритмы упрощения д. н. ф. естественно рассматривать как алгоритмы, расставляющие отметки над конъюнкциями из $\mathfrak{N}$. Над конъюнкциями, не входящими в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$, расставляются отметки первого типа; над конъюнкциями, входящими в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$ — отметки второго типа. После того, как все возможные в данном алгоритме отметки расставлены, из $\mathfrak{N}$ удаляются все конъюнкции с отметками первого типа. На этом алгоритм упрощения заканчивается.

Переходим к формальному описанию алгоритмов упрощения д. н. ф.*).

§ 1. Конъюнкции с отметками

Вместе с конъюнкциями $\mathfrak{A}$ мы будем рассматривать конъюнкции с отметками $\mathfrak{A}^{(j)}$, где $j = 1, 2, 3, 4$. Неотмеченные конъюнкции $\mathfrak{A}$ будем записывать как $\mathfrak{A}^{(0)}$. Конъюнкции $\mathfrak{A}^{(l)}$ и $\mathfrak{B}^{(m)}$ такие, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, но $l \neq m$, суть одинаковые конъюнкции, относительно которых в процессе работы алгоритма получена разная информация. Конъюнкции $\mathfrak{A}^{(i)}$ и $\mathfrak{B}^{(j)}$ назовем равными по информации (обозначение $\mathfrak{A}^{(i)} \curlywedge \mathfrak{B}^{(j)}$), если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $i = j$.

Мы будем рассматривать д. н. ф., составленные из конъюнкций с отметками (0), (1), (2), (3), (4), причем каждой конъюнкции приписана

*) Результаты главы IV кратко изложены в заметке [4].

единственная отметка, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned}&1^\circ.\ \text{Если } \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{N}, \text{ то } \mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\Sigma M}.\\ &2^\circ.\ \text{Если } \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{N}, \text{ то } \mathfrak{A} \notin \mathfrak{N}_{\Sigma M}.\\ &3^\circ.\ \text{Если } \mathfrak{A}^{(3)} \in \mathfrak{N}, \text{ то } \mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\Sigma M} \text{ и } \mathfrak{A} \notin \mathfrak{N}_{\cap M}.\\ &4^\circ.\ \text{Если } \mathfrak{A}^{(4)} \in \mathfrak{N}, \text{ то } \mathfrak{A} \in \mathfrak{N}_{\cap M}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

В процессе работы алгоритма отметка может меняться. Д. н. ф., составленные из конъюнкций $\mathfrak{A}^{(j)}$, где $0 \leqslant j \leqslant 4$, и удовлетворяющие условиям 1°—4°, назовем *допустимыми*. В дальнейшем мы будем рассматривать только допустимые д. н. ф.

Введем операторы M', $M^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Область определения этих операторов состоит из двух множеств:

1) множество всех д. н. ф.,

2) множество всех конечных множеств конъюнкций с отметками.

Результат применения M к д. н. ф. $\mathfrak{N}$ (обозначение $M(\mathfrak{N})$) есть множество всех конъюнкций, входящих в д. н. ф. $\mathfrak{N}$, причем отметки над конъюнкциями стерты.

Результат применения оператора M к произвольному конечному множеству S отмеченных конъюнкций (обозначение $M(S)$) есть множество, составленное из тех же конъюнкций, что и множество S, причем отметки над конъюнкциями стерты.

Результат применения оператора $M^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, к д. н. ф. $\mathfrak{N}$ (обозначение $M^{(i)}(\mathfrak{N})$), или соответственно к произвольному конечному множеству S конъюнкций с отметками (обозначение $M^{(i)}(S)$) есть множество, составленное из всех конъюнкций, входящих в $\mathfrak{N}$ (соответственно в S) с отметкой (i), причем отметки над конъюнкциями стерты.

Д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ назовем *равными по информации* (обозначение $\mathfrak{N}_1 \curlywedge \mathfrak{N}_2$), если $M^{(i)}(\mathfrak{N}_1) = M^{(i)}(\mathfrak{N}_2)$ для любого $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — д. н. ф., составленная из неотмеченных конъюнкций. Обозначим через $M_{\mathfrak{N}}$ множество допустимых д. н. ф. $\tilde{\mathfrak{N}}$ таких, что

$$M(\tilde{\mathfrak{N}}) = M(\mathfrak{N}).$$

Все д. н. ф. из $M_{\mathfrak{N}}$ — это д. н. ф., различающиеся только уровнем информации. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что

1°. $N_{\mathfrak{A}}(i) = N_{\mathfrak{A}}$ для любого $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

2°. Точка $x \in N_{\mathfrak{A}^{(j)}}$ регулярна относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, \tilde{\mathfrak{N}})$, где $\mathfrak{A}^{(j)} \in \tilde{\mathfrak{N}}$, $\tilde{\mathfrak{N}} \in M_{\mathfrak{N}}$, тогда и только тогда, когда x регулярна относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$.

3°. Множество $M \subseteq N_{\mathfrak{A}^{(j)}}$ есть множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, \tilde{\mathfrak{N}})$ тогда и только тогда, когда M есть множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$ *).

Операции над д. н. ф., составленными из отмеченных конъюнкций, определяются только для д. н. ф., у которых равные (функционально) конъюнкции имеют одинаковые отметки.

Д. н. ф. $\tilde{\mathfrak{N}}_{\Sigma M}$, $\tilde{\mathfrak{N}}_{\cap M}$, $\tilde{\mathfrak{N}}_{\Sigma T}$, $\tilde{\mathfrak{N}}_{\cap T}$ для д. н. ф. $\tilde{\mathfrak{N}} \in M_{\mathfrak{N}}$ состоят из тех же конъюнкций, что и д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$, $\mathfrak{N}_{\cap M}$, $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$, $\mathfrak{N}_{\cap T}$, причем отметки над конъюнкциями стерты.

---

*) Аналогично можно сформулировать для д. н. ф. $\tilde{\mathfrak{N}}$ другие определения, введенные в главах I—III.

§ 2. Понятие функции, порождающей алгоритм

Алгоритм упрощения д. н. ф. полностью определяется заданием алгоритма, расставляющего отметки, и алгоритма, определяющего очередность расстановки отметок (элементарный алгоритм A_π). Алгоритм, расставляющий отметки, производит вычисление функции φ, значение которой на каждом шаге алгоритма будет определять вид отметки, выставляемой на этом шаге.

Каждой паре $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$, где $\mathfrak{A}^{(j)} \in \mathfrak{N}$, сопоставим множество $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ составленное из конъюнкций, входящих в $\mathfrak{N}$, причем

$$\mathfrak{A}^{(j)} \in S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}).$$

Множество $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ назовем *окрестностью* $\mathfrak{A}^{(j)}$ в $\mathfrak{N}$. Конъюнкцию $\mathfrak{A}^{(j)}$ назовем *центром окрестности*.

Заметим, что возможны случаи, когда окрестности с разными центрами, состоят из одних и тех же конъюнкций. Каждой окрестности $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ сопоставим множества

$$M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})], \quad M^{(i)}[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})], \quad \text{где} \quad j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Мы будем рассматривать системы окрестностей, для которых выполнено условие:

Если $\mathfrak{A}^{(j)} \in \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{A}^{(i)} \in \mathfrak{N}_2$,

$$M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] \subseteq M(\mathfrak{N}_2) \quad \text{и} \quad M(\mathfrak{N}_2) \subseteq M(\mathfrak{N}_1),$$

то

$$M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)]. \tag{4.2}$$

Условие (4.2) означает, что если д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ «вблизи» конъюнкций $\mathfrak{A}^{(i)}$, $\mathfrak{A}^{(j)}$ «устроены» одинаково, то $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)$ и $S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)$ состоят из одних и тех же конъюнкций.

Окрестности $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)$ и $S(\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)$ назовем *равными по информации* $(S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1) \Lsh S(\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{N}_2))$, если $\mathfrak{B}^{(i)} \Lsh \mathfrak{A}^{(j)}$ и $M^{(k)}[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] = M^{(n)}[S(\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)]$ при любом $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Среди различных систем окрестностей особое значение для дальнейшего имеют системы главных окрестностей k-го порядка $(k=1,\ 2, \ldots, m \ldots)$ (см. также главу II, §§ 2, 4).

О п р е д е л е н и е. *Главной окрестностью* $S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ *первого порядка* конъюнкции $\mathfrak{A}^{(j)}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ назовем совокупность всех таких конъюнкций из $\mathfrak{N}$, что соответствующие им интервалы имеют непустое пересечение с интервалом $N_{\mathfrak{A}}$. Пусть определена главная окрестность $(k-1)$-го порядка $S_{k-1}(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ конъюнкции $\mathfrak{A}^{(j)}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$. *Главной окрестностью* $S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ *k-го порядка конъюнкции* $\mathfrak{A}^{(j)}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ назовем совокупность всех конъюнкций $\mathfrak{A}_k^{(l)}$ из $\mathfrak{N}$, для которых выполнено одно из следующих условий:

1°. Интервал $N_{\mathfrak{A}_k}$ имеет непустое пересечение с интервалом, соответствующим конъюнкции из $S_{k-1}(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$.

2°. Интервал, соответствующий конъюнкции $\mathfrak{A}_k^l$, содержится в сумме интервалов, каждому из которых соответствует конъюнкция из $\mathfrak{N}$, удовлетворяющая условию 1°.

Очевидно, $M[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] \subseteq M[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] \subseteq \ldots \subseteq M[S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] \subseteq \ldots$

Данное определение окрестностей корректно, поскольку для определенных подмножеств

$$S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}), \ldots, S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}), \ldots$$

при любом фиксированном k выполнено условие (4.2): если д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ таковы, что $\mathfrak{A}^{(j)} \in \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{A}^{(i)} \in \mathfrak{N}_2$, $M[S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] \subseteq M(\mathfrak{N}_2)$ и $M(\mathfrak{N}_2) \subseteq M(\mathfrak{N}_1)$, то $M[S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S_k(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)]$.

Пусть для каждой пары $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$, где $\mathfrak{A}^{(j)} \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ — допустимая д. н. ф., определена окрестность $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$. Множество всех таких окрестностей обозначим через $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}^{(j)}, S, \mathfrak{N})$.

Функция φ, *порождающая алгоритм*, это функция от двух аргументов, первый из которых пробегает множество конъюнкций $\mathfrak{A}^{(j)}$ из $\mathfrak{N}$, а второй — множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}^{(j)}, S, \mathfrak{N})$. Значения функции φ обозначаются через

$$\varphi[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})]. \tag{4.3}$$

Область значений φ состоит из отметок (0), (1), (2), (3), (4). Если $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)$ и $S(\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)$ не равны по информации, то значения

$$\varphi[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] = (k), \quad \varphi[\mathfrak{B}^{(i)}, S(\mathfrak{B}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)] = (l),$$

вообще говоря, различны.

§ 3. Примеры функций φ

1°. Функция φ_1.

Область определения: пары $(\mathfrak{A}^{(j)}, S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}))$. Пусть

$$M[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] = \{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\alpha\},$$
$$M^{(4)}[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] = \{\mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i_\beta}\}.$$

Тогда полагаем

$$\varphi_1[\mathfrak{A}^{(0)}, S_1(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N})] = \begin{cases} (4), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\alpha} N_{\mathfrak{B}_i}, \\ (2), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\beta} N_{\mathfrak{B}_{i_j}}, \\ (0) & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\varphi_1[\mathfrak{A}^{(j)}, S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] = (j) \quad \text{при} \quad j \neq 0. \tag{4.5}$$

Функция φ_1 соответствует алгоритму Квайна.

2°. Функция φ_2.

Область определения: пары $(\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}))$.

$$\varphi_2[\mathfrak{A}^{(0)}, S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N})] = \begin{cases} (2), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \text{ есть множество, регулярное относительно } (\mathfrak{A}, \mathfrak{N}), \\ (0), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \text{ не является множеством, регулярным относительно } (\mathfrak{A}, \mathfrak{N}); \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\varphi_2[\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] = (j) \quad \text{при} \quad j \neq 0. \tag{4.7}$$

Функция φ_2 соответствует алгоритму перехода от сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ к д. н. ф. $(\mathfrak{N}_f)_{\Sigma T}$.

3°. Функция $\varphi_{\alpha\beta}$.

Область определения функции $\varphi_{\alpha\beta}$ совпадает с областью определения функции φ_2.

Пусть $M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{R})] = \{\mathfrak{B}_1^{(2)}, \ldots, \mathfrak{B}_{k_2}^{(2)}\}$. Тогда полагаем:

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(0)}, S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{R})] =$$
$$= \begin{cases} (4), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{B}\in\{(M[S_1(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{R})]\setminus M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{R})])\setminus\mathfrak{A}\}} N_{\mathfrak{B}}, \\ (2), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} = M_1 \bigcup M_2, \text{ где } M_1 \text{ есть множество, регулярное относительно } (\mathfrak{A}, \mathfrak{R} \setminus \bigvee\limits_{i=1}^{k_2} \mathfrak{B}_i), \text{ а } M_2 \text{ есть множество первого типа относительно } (\mathfrak{A}, \mathfrak{R}), \\ (0) & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(1)}, S_2(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{R})] =$$
$$= \begin{cases} (4), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{B}\in\{(M[S_1(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{R})]\setminus M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{R})])\setminus\mathfrak{A}\}} N_{\mathfrak{B}}, \\ (1) & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{R})] = (j) \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4. \tag{4.10}$$

Функции $\varphi_{\alpha\beta}$ соответствует A-алгоритм. Вместо отметки (α) здесь вводится отметка (4). Вместо отметки (β) — отметка (2).

4°. Функция $\varphi'_{\alpha\beta}$.

Области определения функций $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\varphi'_{\alpha\beta}$ совпадают. Функция $\varphi'_{\alpha\beta}$ определяется аналогично функции $\varphi_{\alpha\beta}$, только при определении φ'_α (4.10) заменяется на (4.11):

$$\varphi'_{\alpha\beta}(\mathfrak{A}^{(0)}, S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{R})) =$$
$$= \begin{cases} (4), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup\limits_{\mathfrak{B}\in\{M[S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{R})]\setminus M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{R})]\setminus\mathfrak{A}\}} N_{\mathfrak{B}}, \\ (2), & \text{если } N_{\mathfrak{A}} = M_1 \bigcup M_2, \text{ где } M_1 \text{ есть множество, регулярное относительно } (\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{R}\setminus \bigvee\limits_{i=1}^{k_2} \mathfrak{B}_i^{(2)}), M_2 \text{ есть специальное множество первого типа относительно } (\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{R}\setminus \bigvee\limits_{i=1}^{k_2} \mathfrak{B}_i^{(2)}), \\ (0) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.11}$$

Установим некоторые свойства рассмотренных здесь функций φ. Введем частичную упорядоченность в некоторых множествах, обобщающую понятие «равенства по информации».

1) В множестве отметок положим

$$\begin{aligned} (0) &\leqslant (j) \quad \text{при} \quad j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ (1) &\leqslant (j) \quad \text{при} \quad j \in \{1, 3, 4\}, \\ (j) &\leqslant (j) \quad \text{при} \quad j \in \{2, 3, 4\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Очевидно, что если отметки (i) и (j) находятся в отношении $(i) \leqslant (j)$, то отметка (j) несет не меньше информации о конъюнкции, чем отметка (i).

2) В множестве отмеченных конъюнкций положим $\mathfrak{A}^{(i)} \leqslant \mathfrak{B}^{(j)}$, если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ и $(i) \leqslant (j)$.

3) В множестве окрестностей положим $S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{R}_1) \leqslant S(\mathfrak{B}^{(j)}, \mathfrak{R}_2)$, если выполняются следующие условия:

1°. $\mathfrak{A}^{(i)} \leqslant \mathfrak{B}^{(j)}$,

2°. $M[S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S(\mathfrak{B}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]$,

3°. Для любой пары одинаковых конъюнкций $\mathfrak{A}_s^{(k)}$, $\mathfrak{A}_s^{(l)}$ таких, что $\mathfrak{A}_s^{(k)} \in S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)$, $\mathfrak{A}_s^{(l)} \in S(\mathfrak{B}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)$, имеет место соотношение $\mathfrak{A}_s^{(k)} \leqslant \mathfrak{A}_s^{(l)}$.

4) В множестве д. н. ф. положим $\mathfrak{N}_1 \leqslant \mathfrak{N}_2$, если

1°. $M(\mathfrak{N}_1) = M(\mathfrak{N}_2)$,

2°. Для любой пары одинаковых конъюнкций таких, что $\mathfrak{A}^{(j)} \in \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}^{(i)} \in \mathfrak{N}_2$, имеет место соотношение $\mathfrak{A}^{(j)} \leqslant \mathfrak{A}^{(i)}$.

Очевидно, что если

$$\mathfrak{N}_1 \leqslant \mathfrak{N}_2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}_2 \leqslant \mathfrak{N}_1, \quad \text{то} \quad \mathfrak{N}_1 \curlywedge \mathfrak{N}_2. \tag{4.13}$$

Определение. Функция φ называется *монотонной*, если для любой пары $[\mathfrak{A}^{(i)}, S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)]$, $[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]$ из ее области определения такой, что

$$S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1) \leqslant S(\mathfrak{A})^{(j)}, \mathfrak{N}_2),$$

имеет место соотношение

$$\varphi[\mathfrak{A}^{(i)}, S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] \leqslant \varphi[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{j}, \mathfrak{N}_2)]. \tag{4.14}$$

Теорема 14. *Функции* $\varphi_{\alpha\beta}$ *и* $\varphi'_{\alpha\beta}$ *являются монотонными.*

Доказательство. Мы покажем, что если

$$S_2(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1) \leqslant S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2), \tag{4.15}$$

то

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(i)}, S_2(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] \leqslant \varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]. \tag{4.16}$$

Для доказательства разберем четыре случая.

I. $i \in \{2, 3, 4\}$; тогда $\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(i)}, S_2(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] = (i)$.

Из (4.15) следует, что $\mathfrak{A}^{(i)} \leqslant \mathfrak{A}^{(j)}$, и так как $i \in \{2, 3, 4\}$, то $i = j$. Поэтому $\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2]] = (j)$, и соотношение (4.16) в случае (1) доказано.

II. $i = 1$ и, следовательно, $\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(1)}, S_2(\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{N}_1)] = (1)$.

Тогда в (4.15) $j \in \{1, 3, 4\}$, и (4.16) в этом случае легко вытекает из определения $\varphi_{\alpha\beta}$ (см. (4.10) и (4.9)).

III. $i \in \{0, 1\}$, т. е. $\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(i)}, S_2(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] = (4)$.

Из определения функции $\varphi_{\alpha\beta}$ следует, что в этом случае

$$\begin{gathered} N_{\mathfrak{A}} \not\supseteq N_{\mathfrak{B}}, \\ \mathfrak{B} \in \{[M[S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] \diagdown M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)]] \diagdown \mathfrak{A}\}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Так как $S_2(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1) \leqslant S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)$, то

$$M[S_2(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2). \tag{4.18}$$

Соотношение (4.18) показывает, что главные окрестности второго порядка конъюнкций $\mathfrak{A}^{(i)}$ и $\mathfrak{A}^{(j)}$ соответственно в д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ состоят из одних и тех же конъюнкций. Следовательно, главные окрестности первого порядка $S_1(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)$ и $S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)$ также состоят из одних и тех же конъюнкций. Имеем

$$M[S_1(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)], \tag{4.19}$$

$$M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] \subseteq M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]. \tag{4.20}$$

Из (4.19) и (4.20) получаем

$$M[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] \setminus M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] \subseteq M[S_1(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)] \setminus M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_1)]. \tag{4.21}$$

Из (4.17) и (4.21) получаем

$$\begin{gathered} N_{\mathfrak{A}} \not\subseteq \bigcup N_{\mathfrak{B}}, \\ \mathfrak{B} \in \{\{M[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] \setminus M^{(2)}[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]\} \setminus \mathfrak{A}\}. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Поэтому

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] = (4).$$

Соотношение (4.16) в случае III доказано.

IV. $i=0$; тогда $\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(0)}, S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)] = (2)$.

Пусть $M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)] = \{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k\}$. Имеем (по определению функции $\varphi_{\alpha\beta}$)

$$N_{\mathfrak{A}} = M_1 \bigcup M_2, \tag{4.23}$$

где M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_1 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})$, M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_1)$.

По теореме 10 главы III $\mathfrak{A} \notin (\mathfrak{N}_1)_{\Sigma M}$.

Докажем, что

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] = (2). \tag{4.24}$$

Если $j=2$, равенство (4.24) очевидно. Пусть $j \neq 2$ и $M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] = \{\mathfrak{B}_1', \ldots, \mathfrak{B}_l'\}$. Заметим, что из $S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1) \leqslant S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)$ вытекает $M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)] \subseteq M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]$.

Докажем, что

1°. M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i^{(2)})$,

2°. M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_2)$. (4.25)

Имеем

$$S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1) \leqslant S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2),$$

$$M[S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)] \leqslant M[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)],$$

$$M[S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1 \setminus \bigvee_{i=1}^{h} \mathfrak{B}_i^{(2)})] = M[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})].$$

Окрестности второго порядка конъюнкций $\mathfrak{A}^{(0)}$ и $\mathfrak{A}^{(j)}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}_1 \setminus \bigvee_{i=1}^{h} \mathfrak{B}_i^{(2)}$ и $\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{h} \mathfrak{B}_i^{(2)}$ соответственно состоят из одних и тех же конъюнкций. Поэтому множество точек, регулярных относительно

$(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_1 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})$, совпадает с множеством точек, регулярных относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})$. Пусть

$$M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] \setminus M^{(2)}[S_2(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)] = \\ = \{\mathfrak{B}_1', \ldots, \mathfrak{B}_l'\} \setminus \{\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k\} = \{C_1 \ldots C_p)$$

(здесь $C_i \notin (\mathfrak{N}_2)_{\Sigma M}$ в силу допустимости д. н. ф. $\mathfrak{N}_2$).

Покажем, что всякая точка x, регулярная относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})$, регулярна относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, (\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}) \setminus \bigvee_{i=1}^{p} C_i^{(2)})$. В силу регулярности найдется точка x', $x' \in N_{(\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})} \setminus N_{\mathfrak{A}}$, такая, что

$$m(x', \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}) \subseteq m(x, \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}).$$

Так как

$$N_{\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}} = N_{(\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}) \setminus \bigvee_{i=1}^{p} C_i^{(2)}} = \overline{N},$$

то

$$m[x', (\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}) \setminus \bigvee_{i=1}^{p} C_i^{(2)}] \subseteq m[x, (\mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)}) \setminus \bigvee_{i=1}^{p} C_i^{(2)}]$$

(здесь $x' \in \overline{N} \setminus N_{\mathfrak{A}}$).

Таким образом, мы доказали, что множество M_1, регулярное относительно $(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1 \setminus \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{B}_i^{(2)})$, регулярно относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2 \setminus \bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{B}'^{(2)}_i)$.

Так как $M[S_1(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S_1(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)]$, то всякое множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_1)$ есть множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)$. Соотношения (4.25) доказаны. Из (4.25) и способа определения функции $\varphi_{\alpha\beta}$ следует

$$\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S_2(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] = (2).$$

V. В случае $\varphi_{\alpha\beta}[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_2)] = (0)$ доказательство тривиально.

В силу определения $\varphi_{\alpha\beta}$ других возможностей для $\varphi_{\alpha\beta}$ (кроме I — V) нет.

Монотонность функции $\varphi_{\alpha\beta}$ полностью доказана. Монотонность $\varphi'_{\alpha\beta}$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

§ 4. Определение алгоритма упрощения д. н. ф.

Мы будем изучать алгоритмы A с монотонными функциями φ. Алгоритмы с немонотонными φ будут рассмотрены позднее.

Алгоритм A упрощения д. н. ф. состоит из ряда последовательных шагов. Этот алгоритм всегда применяется к д. н. ф., составленной из конъюнкций с отметкой (0).

1-й шаг. Элементарный алгоритм A_π упорядочивает конъюнкции $\mathfrak{A}^{(0)}$ из $\mathfrak{N}$. Выделяется первая (относительно этого порядка) конъюнкция

$\mathfrak{A}_i^{(0)}$ из $\mathfrak{N}$ такая, что

$$\varphi[\mathfrak{A}_i^{(0)}, S(\mathfrak{A}_i^{(0)}, \mathfrak{N})] = (\widetilde{\varphi}), \quad \widetilde{\varphi} \neq 0.$$

Конъюнкция $\mathfrak{A}_i^{(0)}$ переводится в конъюнкцию $\mathfrak{A}_i^{(\widetilde{\varphi})}$. Д. н. ф. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$ переходит в д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$. Очевидно, $\mathfrak{N}_0 \leqslant \mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ отличается от $\mathfrak{N}_0$ отметкой ровно над одной конъюнкцией. На этом выполнение первого шага заканчивается. Если $\varphi[\mathfrak{A}^{(0)}, S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N})] = (0)$ для всех конъюнкций $\mathfrak{A}^{(0)}$ из $\mathfrak{N}$,то алгоритм заканчивается на первом шаге. В этом случае алгоритм оставляет д. н. ф. $\mathfrak{N}$ без изменения.

n-й шаг. Пусть выполнен $n-1$-й шаг алгоритма A. На последовательных шагах алгоритма д. н. ф. $\mathfrak{N}_0$ переходила в д. н. ф. $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{n-1}$. Пусть $\mathfrak{N}_0 \leqslant \mathfrak{N}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{N}_{n-1}$ и д. н. ф. $\mathfrak{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, отличается от д. н. ф. $\mathfrak{N}_{i-1}$ отметкой ровно над одной конъюнкцией.

Элементарный алгоритм A_π упорядочивает конъюнкции из $\mathfrak{N}_{n-1}$, входящие в $M^{(0)}(\mathfrak{N}_{n-1}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N}_{n-1})$. Если таких конъюнкций нет, алгоритм A заканчивается на n-м шаге удалением из $\mathfrak{N}_{n-1}$ всех конъюнкций с отметкой (2). Выделяется первая по порядку (установленному A_π) конъюнкция $\mathfrak{A}^{(j)}$, входящая в $M^{(0)}(\mathfrak{N}_{n-1}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N}_{n-1})$ и такая, что

$$\varphi[\mathfrak{A}^{(j)}, S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_{n-1})] = (\alpha), \quad \alpha \neq j. \tag{4.26}$$

Конъюнкция $\mathfrak{A}^{(j)}$ переходит в конъюнкцию $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$. При этом д. н. ф. $\mathfrak{N}_{n-1}$ переходит в д. н. ф. $\mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{N}_{n-1} \leqslant \mathfrak{N}_n$, так как в силу монотонности φ, очевидно, $(\alpha) \geqslant (j)$. Если в $M^{(0)}(\mathfrak{N}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N})$ нет конъюнкций, для которых выполнено (4.26), то алгоритм заканчивается на n-м шаге удалением из $\mathfrak{N}_{n-1}$ конъюнкций с отметкой (2). n-й шаг алгоритма заканчивается после изменения отметки $\mathfrak{A}^{(j)}$ с (j) на (α).

Нетрудно видеть, что в силу монотонности φ алгоритм закончится в конечное число шагов.

Мы видели также, что каждому алгоритму A и д. н. ф. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$ можно сопоставить последовательность $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha$ (обозначение $C(\mathfrak{N}, A)$), обладающую следующими свойствами:

1) алгоритм A последовательно переводит $\mathfrak{N}_0$ в $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{i-1}, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha$;

2) соседние элементы последовательности отличаются отметками ровно над одной конъюнкцией;

3) если через $A(\mathfrak{N})$ обозначить д. н. ф., полученную в результате применения к д. н. ф. $\mathfrak{N}$ алгоритма A, то $A(\mathfrak{N})$ получается из $\mathfrak{N}_\alpha$ удалением всех конъюнкций с отметкой (2);

4) $\mathfrak{N}_0 \leqslant \mathfrak{N}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{N}_\alpha$.

Д. н. ф. $\mathfrak{N}_\alpha$ назовем *образом* д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в алгоритме A и обозначим через $\mathfrak{N}_A$. Алгоритм A называется *допустимым*, если для всякой правильной д. н. ф., состоящей из неотмеченных конъюнкций, последовательность $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha$ состоит из допустимых д. н. ф.

Алгоритмы упрощения д. н. ф. мы расчленим на элементарные алгоритмы и логические условия [7, 8], опишем их функционирование и напишем логическую схему [7, 8], общую для всех алгоритмов упрощения с монотонной функций φ. Элементарные алгоритмы:

1°. A_π выделяет в $\mathfrak{N}$ все конъюнкции, входящие в множество $M^{(0)}(\mathfrak{N}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N})$, и упорядочивает это множество, причем для д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ таких, что $M^{(i)}(\mathfrak{N}_1) = M^{(i)}(\mathfrak{N}_2)$, $i = 0, 1$, порядок устанавливается одинаково.

2°. $A(i)$ выделяет в $M^{(0)}(\mathfrak{N}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N})$ элемент $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ с номером i и окрестность $S(\mathfrak{A}_i^{(j)}, \mathfrak{N})$.

3°. $A_\varphi(i)$ вычисляет $\varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)}, S(\mathfrak{A}_i^{(j)}, \mathfrak{N})] = (\widetilde{\varphi})$.

4°. $B_\varphi(i)$ преобразует конъюнкцию $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ в конъюнкцию $\mathfrak{A}_i^{(\widetilde{\varphi})}$.
5°. $F(i+1)$ прибавляет к i единицу.
6°. $F(i \to 1)$ преобразует i в единицу.
7°. C удаляет из $\mathfrak{N}$ все конъюнкции с отметкой (2).
8°. Символ ω указывает на окончание алгоритма.
Логические условия:

$$p_1 = \begin{cases} 0, \text{ если } M^{(0)}(\mathfrak{N}) \bigcup M^{(1)}\mathfrak{N} \text{ пусто}, \\ 1 \text{ в противном случае}; \end{cases}$$

$$p_2(i) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)}, S(\mathfrak{A}_i^{(j)}, \mathfrak{N})] = (\widetilde{\varphi}) = (j), \\ 0 \text{ в противном случае}; \end{cases}$$

$$p_3(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } i-1 < k, \text{ где } k \text{ — номер последнего элемента} \\ \qquad M^{(0)}(\mathfrak{N}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N}), \\ 1, \text{ если } i-1 = k. \end{cases}$$

Алгоритмы упрощения перерабатывают д. н. ф. $\mathfrak{N}$, составленную из неотмеченных конъюнкций, в д. н. ф., составленную из конъюнкций с отметками, и затем вычеркивают из $\mathfrak{N}$ конъюнкции с отметкой (2). Логическая схема алгоритма упрощения имеет вид

$$\underset{2}{\rfloor} F(i \to 1) A_\pi p_1 \underset{1}{\lfloor} \underset{3}{\rfloor} A(i) A_\varphi(i) B_\varphi(i) F(i+1) p_2 \underset{2}{\lfloor} p_3 \underset{3}{\lfloor} \underset{1}{\rfloor} C\omega \qquad (4.27)$$

(здесь φ — монотонная функция).

Существуют алгоритмы упрощения д. н. ф., которые не укладываются в описанную схему. Эти алгоритмы не гарантируют получения минимальных д. н. ф. при дальнейших упрощениях. С другой стороны, известные нам алгоритмы упрощения, при выполнении которых не происходит потери минимальных д. н. ф., укладываются в описанную нами схему.

Каждому алгоритму упрощения с логической схемой вида (4.27) можно взаимно однозначно сопоставить пару (A_π, φ). Мы скажем, что алгоритмы A и B принадлежат одному классу $K(\varphi)$, если им сопоставлены пары $((A_\pi)', \varphi_1)$ и $((A_\pi)'', \varphi_2)$ такие, что $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Будем называть элементы класса $K(\varphi)$ алгоритмами, порожденными функцией φ.

Так, нетрудно видеть, что функция $\varphi_{\alpha\beta}$ порождает класс A-алгоритмов, а функция $\varphi'_{\alpha\beta}$ порождает класс A'-алгоритмов (достаточно положить $\alpha = 4$, $\beta = 2$). Могут быть построены и другие монотонные функции с различными областями определения, порождающие классы алгоритмов упрощения.

Определение. Функция φ называется *допустимой*, если все алгоритмы из $K(\varphi)$ допустимы.

Допустимость функции $\varphi_{\alpha\beta}$ легко следует из теоремы 10 главы III. Мы будем рассматривать только допустимые функции φ.

§ 5. Теорема единственности

Алгоритмы A и B назовем эквивалентными, если д. н. ф. $A(\mathfrak{N})$ и $B(\mathfrak{N})$, полученные после применения A и B к любой правильной д. н. ф. $\mathfrak{N}$, составленной из неотмеченных конъюнкций, равны по информации. Очевидно, для эквивалентности алгоритмов A и B необходимо и достаточно, чтобы образы любой правильной д. н. ф. $\mathfrak{N}$, составленной из неотмеченных конъюнкций, в алгоритмах A и B были равны по информации.

Алгоритмы с монотонной функцией φ обладают свойством единственности: конечный результат применения алгоритма не зависит от A_π.

Теорема 15. *Если элементы класса $K(\varphi)$ порождены монотонной функцией φ, то все алгоритмы из $K(\varphi)$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N} = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{(0)}$. Сопоставим д. н. ф. $\mathfrak{N}$ конечную последовательность д. н. ф. $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^{(1)}, \mathfrak{N}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(\alpha)}$ следующим образом. Пусть $\varphi\,[\mathfrak{A}_i^{(0)}, S\,(\mathfrak{A}_i^{(0)}, \mathfrak{N})] = \varphi_{1i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Положим $\mathfrak{N}^{(1)} = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{\varphi_{1i}}$. Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}^{(1)}$ равны по информации, то сопоставим $\mathfrak{N}$ последовательность из одного элемента $\mathfrak{N}$. Пусть сформированы элементы последовательности $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(k-1)}$ и все они различны по информации. Пусть, далее, $\mathfrak{N}^{(k-1)} = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{\varphi_{k-1,\, i}}$. Обозначим $\varphi\,[\mathfrak{A}_i^{\varphi_{k-1,\, i}}, S\,(\mathfrak{A}_i^{\varphi_{k-1,\, i}} \mathfrak{N}^{(k-1)})]$ через φ_{ki}. Положим $\mathfrak{N}^{(k)} = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}_i^{\varphi_{ki}}$. Если $\mathfrak{N}^{(k-1)}$ и $\mathfrak{N}^{(k)}$ равны по информации, то сопоставим $\mathfrak{N}$ последовательность $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(k-1)}$ (в этом случае $\alpha = k - 1$). В силу монотонности φ в описанном построении найдется номер s такой, что $\mathfrak{N}^{(s)} \mathrel{⩓} \mathfrak{N}^{(s+1)}$. Последовательность будет иметь вид $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{N}^{(s)}$, где $\mathfrak{N}^{(s)} = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{A}^{\varphi_{si}}$ и $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{N}^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что образ $\mathfrak{N}_A$ д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в произвольном алгоритме A, порожденном функцией φ, равен по информации $\mathfrak{N}^{(s)}$.

Докажем сначала по индукции, что $\mathfrak{N}_\alpha \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. Мы указывали, что алгоритму A можно сопоставить последовательность $C\,(\mathfrak{N}, A) = \{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha\}$ (здесь $\mathfrak{N}_\alpha \mathrel{⩓} \mathfrak{N}_A$).

1°. Ясно, что $\mathfrak{N}_1 \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. Очевидно, что $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{N}^{(1)} \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. $\mathfrak{N}_1$ отличается от $\mathfrak{N}$ отметкой над одной конъюнкцией $\mathfrak{A}_{i_1}$, причем эта конъюнкция в $\mathfrak{N}_1$ имеет отметку $\varphi\,[\mathfrak{A}_i^{(0)}, S\,(\mathfrak{A}_i^{(0)}, \mathfrak{N})]$. Такую же отметку эта конъюнкция имеет и в д. н. ф. $\mathfrak{N}^{(1)}$. Остальные конъюнкции $\mathfrak{A}_j$ имеют в д. н. ф. $\mathfrak{N}^{(1)}$ отметку (0) и

$$(0) \leqslant \varphi\,[\mathfrak{A}_j^{(0)}, S\,(\mathfrak{A}_j^{(0)}, \mathfrak{N})].$$

Поэтому

$$\mathfrak{N}_1 \leqslant \mathfrak{N}^{(1)} \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}.$$

2°. Пусть $\mathfrak{N}_h \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. Докажем, что тогда $\mathfrak{N}_{h+1} \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. Пусть $\mathfrak{N}_h$ отличается от $\mathfrak{N}_{h+1}$ отметкой над конъюнкцией $\mathfrak{A}_{i_h}$. В д. н. ф. $\mathfrak{N}_{h+1}$ конъюнкция $\mathfrak{A}_{i_h}$ имеет отметку $\varphi\,[\mathfrak{A}_{i_h}^{(i)}, S\,(\mathfrak{A}_{i_h}^{(i)}, \mathfrak{N}_h)] = \widetilde{\varphi}$. В д. н. ф. $\mathfrak{N}^{(s)}$ конъюнкция $\mathfrak{A}_{i_h}$ имеет отметку φ_{si_h}. Так как $\mathfrak{N}_h \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$, то

$$S\,(\mathfrak{A}_{i_h}^{(i)}, \mathfrak{N}_h) \leqslant S\,(\mathfrak{A}_{i_h}^{\varphi_{si_h}}, \mathfrak{N}_s),$$

$$\varphi\,[\mathfrak{A}_{i_h}^{(i)}, S\,(\mathfrak{A}_{i_h}^{(i)}, \mathfrak{N}_h)] \leqslant \varphi\,[\mathfrak{A}_{i_h}^{\varphi_{si_h}}, S\,(\mathfrak{A}_{i_h}^{\varphi_{si_h}}, \mathfrak{N}^{(s)}), \tag{4.28}$$

$$\widetilde{\varphi} \leqslant \varphi_{si_h}.$$

Из (4.28) следует, что

$$\mathfrak{N}_{h+1} \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}.$$

Соотношение $\mathfrak{N}_\alpha \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$ доказано.

Докажем теперь, что $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}^{(1)}$.

1°. Имеем $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}$. Поэтому для всех $\mathfrak{A}_i$ из $M\,(\mathfrak{N})$

$$S\,(\mathfrak{A}_i^{(j)}, \mathfrak{N}_\alpha) \geqslant S\,(\mathfrak{A}_i^{(0)}, \mathfrak{N}).$$

В силу монотонности φ

$$\varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)},\ S(\mathfrak{A}_i^{(j)},\ \mathfrak{N}_\alpha)] \geqslant \varphi[\mathfrak{A}_i^{(0)},\ S(\mathfrak{A}_i^{(0)},\ \mathfrak{N})] = \varphi_{1i}.$$

Но $\varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)},\ S(\mathfrak{A}_i^{(j)},\ \mathfrak{N}_\alpha)] = (j)$, так как в противном случае алгоритм не закончился бы получением д. н. ф. $\mathfrak{N}_\alpha$. φ_{1i} — отметка конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}^{(1)}$. Из соотношения

$$(j) \geqslant \varphi_{1i}$$

следует, что $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}^{(1)}$.

2°. Пусть $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}^{(k-1)}$, где $k-1 < S$. Докажем, что тогда $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}^{(k)}$. Для всех $\mathfrak{A}_i^{(j)}$ из $\mathfrak{N}_\alpha$ выполнено равенство

$$\varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)},\ S(\mathfrak{A}_i^{(j)},\ \mathfrak{N}_\alpha)] = (j).$$

Кроме того, для всех $\mathfrak{A}_i^{\varphi_k, i}$ из $\mathfrak{N}^{(k-1)}$ имеем

$$S(\mathfrak{A}_i^{\varphi_{k-1}, i},\ \mathfrak{N}^{(k-1)}) \leqslant S(\mathfrak{A}_i^{(j)},\ \mathfrak{N}_\alpha),$$

$$\varphi[\mathfrak{A}_i^{\varphi_{k-1}, i},\ S(\mathfrak{A}_i^{\varphi_{k-1}, i},\ \mathfrak{N}^{(k-1)})] \leqslant \varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)},\ S(\mathfrak{A}_i^{(j)},\ \mathfrak{N}_\alpha)].$$

Но

$$\varphi[\mathfrak{A}^{\varphi_{k-1}, i},\ S(\mathfrak{A}^{\varphi_{k-1}, i},\ \mathfrak{N}^{(k-1)})] = \varphi_{ki},$$

$$\varphi[\mathfrak{A}_i^{(j)},\ S(\mathfrak{A}_i^{(j)},\ \mathfrak{N}_\alpha)] = (j).$$

Следовательно, $\varphi_{ki} \leqslant (j)$ и $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}^{(k)}$.

Мы доказали, что $\mathfrak{N}_\alpha \geqslant \mathfrak{N}^{(s)}$ и $\mathfrak{N}_\alpha \leqslant \mathfrak{N}^{(s)}$. Поэтому $\mathfrak{N}_\alpha \curlyeqsucc \mathfrak{N}^{(s)}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Так как функции* $\varphi_{\alpha\beta}$ *и* $\varphi'_{\alpha\beta}$ *монотонны, то А-алгоритмы* (аналогично *А'-алгоритмы*) *эквивалентны между собой.*

Таким образом, теорема 11 (глава III) доказана. Результат применения A-алгоритма $(\mathfrak{N}_f)_{\alpha\beta}$ к сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ определен однозначно и зависит только от вида функции f.

Д. н. ф. $(\mathfrak{N}_f)_{\alpha\beta}$ обладают тремя важными свойствами:

1°. $(\mathfrak{N}_f)_{\alpha\beta}$ однозначно определяется функцией f.

2°. $(\mathfrak{N}_f)_{\alpha\beta} \supseteq \mathfrak{N}_{\Sigma M}$.

3°. $\mathfrak{N}_f \supseteq (\mathfrak{N}_f)_{\alpha\beta}$.

В силу 1°, 2°, 3° она является, вообще говоря, более простым аналогом сокращенной д. н. ф. Поэтому д. н. ф. $(\mathfrak{N}_f)_{\alpha\beta}$ назовем *сильно сокращенной* д. н. ф. функции f.

Из теоремы единственности следует и теорема 12 (глава III), устанавливающая, что A-алгоритм приводит к упрощениям не меньшим, чем A'-алгоритм.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 12. Пусть A'-алгоритм переводит последовательно правильную д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{\alpha-1}, \mathfrak{N}_\alpha$. В последовательности $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha$ ($\mathfrak{N}_\alpha$ — образ д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в A'-алгоритме) соседние д. н. ф. различаются отметками ровно над одной конъюнкцией. Пусть при переходе к д. н. ф. $\mathfrak{N}_{i+1}$ изменяется отметка над конъюнкцией $\mathfrak{A}_i$. Рассмотрим A-алгоритм, у которого элементарный алгоритм A_π устроен следующим образом: множество конъюнкций, входящих в д. н. ф. $\mathfrak{N}_i$ с отметками (0) и (1), упорядочивается так, что $\mathfrak{A}_i$ получает номер 1.

Такой A-алгоритм на первых α шагах переведет $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha$. В дальнейшем отметки в $\mathfrak{N}_\alpha$ могут быть только усилены.

Так как все A-алгоритмы эквивалентны между собой и все A'-алгоритмы эквивалентны между собой, то любой A-алгоритм приводит к более сильным упрощениям, чем любой A'-алгоритм.

Теорема 12 доказана.

§ 6. Алгоритмы с немонотонными функциями φ

Для описания логической схемы алгоритмов упрощения с немонотонной функцией φ видоизменим определение элементарного алгоритма A_π — будем считать, что A_π упорядочивает все множество $M(\mathfrak{N})$, причем если д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ равны по информации, то $M(\mathfrak{N}_1)$ и $M(\mathfrak{N}_2)$ упорядочиваются одинаково. В описании других элементарных алгоритмов и логических условий вместо множества $M^{(0)}(\mathfrak{N}) \bigcup M^{(1)}(\mathfrak{N})$ следует рассматривать множество $M(\mathfrak{N})$. Алгоритму A, порожденному немонотонной функцией φ с логической схемой вида (4.27), можно сопоставить бесконечную, вообще говоря, последовательность $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha, \ldots$ такую, что

1°. A переводит последовательно $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha, \ldots$;

2°. соседние элементы отличаются отметками ровно над одной конъюнкцией;

3°. начиная с некоторого $\mathfrak{N}_\gamma$, $\gamma = \gamma(A, \mathfrak{N})$, последовательность становится периодической (в смысле равенства по информации).

После получения $\mathfrak{N}_\gamma$ естественно оборвать алгоритм. Д. н. ф. $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\gamma$ назовем *образами* д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в алгоритме A. Введем элементарные алгоритмы.

1°. P вырабатывает последовательность $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\gamma$ по мере получения ее алгоритмом A; на первом шаге P формирует элемент $\mathfrak{N}$.

2°. C' выделяет в элементах последовательности, сформированной алгоритмом P, конъюнкции с отметкой (2) и вычеркивает их из соответствующих д. н. ф. Кроме того, введем логическое условие $p_4(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha)$:

$$\text{если } \alpha > 0, \text{ то } p_4(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если ни одна из д. н. ф. } \\ \mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_{\alpha-1} \text{ не равна } \mathfrak{N}_\alpha \\ \text{по информации,} \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

если $\alpha = 0$, то $p_4(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_\alpha) = p_4(\mathfrak{N}) \equiv 1$.

Логическая схема алгоритма, порожденного немонотонной функцией φ, имеет вид

$$\underset{2}{\lrcorner}\, \mathrm{F}(i \to 1)\, \mathrm{P}\, p_4 \underset{4}{\llcorner}\, A_\pi\, \underset{3}{\lrcorner}\, A(i)\, A_\varphi(i)\, B_\varphi(i)\, F(i+1)\, p_2 \underset{2}{\llcorner}\, p_3 \underset{3}{\llcorner}\, \underset{4}{\lrcorner}\, C'\omega.$$

ГЛАВА V

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ АЛГОРИТМОВ УПРОЩЕНИЯ Д. Н. Ф. С КОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

§ 1. Постановка задачи. Алгоритмы конечного индекса

Алгоритмы упрощения д. н. ф. позволяют выделить в $\mathfrak{N}$ некоторые конъюнкции, не входящие в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$, и отметить некоторые конъюнкции, входящие в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Вообще говоря, в $\mathfrak{N}$ существуют конъюнкции, для которых не удается получить информации о вхождении или невхождении в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Естественно поставить вопрос, существует ли достаточно эффективный алгоритм, позволяющий для всякой пары $(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N}$ — сокращенная д. н. ф., $\mathfrak{A}^{(0)}$ — конъюнкция из $\mathfrak{N}$, установить, содержится ли $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$. Формально эта задача допускает следующую постановку:

Задача М. *Построить алгоритм A, порожденный функцией φ,* такой, что:

1°. *если φ монотонна, то образ произвольной сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в алгоритме A не содержит конъюнкций с отметкой* (0);

2°. *если φ немонотонна, то хотя бы один из образов произвольной сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в алгоритме A не содержит конъюнкций с отметкой* (0).

Оказывается, что в широком классе алгоритмов, использующих ограниченную информацию о д. н. ф. $\mathfrak{N}$, задача М неразрешима. Целью настоящей главы *) является доказательство этого факта.

Пусть область определения функции φ есть система окрестностей, причем каждой паре $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$, где $\mathfrak{A}^{(j)} \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ — допустимая д. н. ф., сопоставлена окрестность $S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$.

Функция φ имеет индекс k, если:

1°. для всякой пары $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ выполнено соотношение

$$M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] \subseteq M[S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})];$$

2°. существует пара $(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ такая, что

$$M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})] \not\subseteq M[S_{k-1}(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})]$$

(где $S_{k-1}(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$, $S_k(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N})$ суть главные окрестности конъюнкции $\mathfrak{A}^{(j)}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ порядков $(k-1)$ и k соответственно).

Мы скажем, что *алгоритм упрощения имеет индекс k*, если он порожден функцией φ индекса k. Пусть D_k — множество всех алгоритмов индекса k. *Алгоритм A имеет конечный индекс*, если $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$.

Назовем д. н. ф. $\mathfrak{N}$ *абсолютно неупрощаемой* в алгоритме A, если существует единственный образ $\mathfrak{N}_A$ д. н. ф. $\mathfrak{N}$ в алгоритме A такой, что $\mathfrak{N} \curlywedge \mathfrak{N}_A$ и $\mathfrak{N}$ составлена из конъюнкций с отметкой (0).

Теорема 16. *Для любого $k \geqslant 1$ существует д. н. ф., абсолютно неупрощаемая в любом алгоритме индекса k.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм (см. § 2), описывающих строение минимальных д. н. ф. функций специального вида. Эти леммы будут нам нужны в дальнейшем.

§ 2. Циклические и цепные функции

Определение. Множество вершин n-мерного единичного куба называется *циклом*, если все точки его можно записать в виде последовательности $\pi = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2m})$, где $\alpha^i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})$, такой, что:

1) $\rho(\alpha^i, \alpha^{i+1}) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, 2m-1$, где $\rho(\alpha^i, \alpha^j) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\sigma_{ki} - \sigma_{kj}|$,

2) $\rho(\alpha^1, \alpha^{2m}) = 1$,

3) для всех остальных пар (α^i, α^j) точек из π имеет место неравенство $\rho(\alpha^i, \alpha^j) > 1$,

4) никакой интервал размерности 2 не содержится в $M = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^{2m}\}$.

Последовательность π назовем *правильной* для множества M.

Функцию f назовем *циклической*, если множество N_f есть цикл.

Определение. Множество M вершин n-мерного единичного куба называется *цепью*, если все точки из M можно записать в виде последовательности $\pi = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{2s})$ такой, что $\alpha^i = (\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{ni})$, и

*) Основные результаты главы V изложены в [5].

1) $\varrho(\alpha^i, \alpha^{i+1}) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, 2s-1$,

2) для всех остальных пар (α^i, α^j), где $\alpha^i, \alpha^j \in M$, $\varrho(\alpha^i, \alpha^j) > 1$.

Последовательность π назовем *правильной* для множества M.

Функцию f назовем *цепной*, если множество N_f есть цепь.

Пусть f — циклическая функция, а правильная последовательность множества N_f есть

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2m}.$$

Обозначим через $N_{\alpha^i\alpha^j}$ ребро, проходящее через точки α^i и α^j, где $j = (i+1) \pmod{2m}$.

Нетрудно выписать все максимальные в N_f интервалы

$$N_{\alpha^1\alpha^2}, N_{\alpha^2\alpha^3}, \ldots, N_{\alpha^{2m-1}\alpha^{2m}}, N_{\alpha^{2m}\alpha^1}.$$

Пусть $\mathfrak{A}(\alpha^i, \alpha^j)$ — элементарная конъюнкция, соответствующая интервалу $N_{\alpha^i\alpha^j}$, и $\mathfrak{N}_f$ — сокращенная д. н. ф. циклической функции f_{2m-1}. Очевидно,

$$\mathfrak{N}_f = \bigvee_{i=1}^{2m-1} \mathfrak{A}(\alpha^i, \alpha^{i+1}) \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2m}, \alpha').$$

Пусть f — цепная функция, а правильная последовательность множества N_f есть

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2s}.$$

Нетрудно выписать все максимальные в N_f интервалы

$$N_{\alpha^1\alpha^2}, N_{\alpha^2\alpha^3}, \ldots, N_{\alpha^{2s-1}\alpha^{2s}}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_f$ есть сокращенная д. н. ф. цепной функции f. Очевидно,

$$\mathfrak{N}_f = \bigvee_{i=1}^{2s-1} \mathfrak{A}(\alpha^i, \alpha^{i+1}).$$

Лемма 1. *Если f есть циклическая функция и $\mathfrak{N}_f$ — ее сокращенная д. н. ф., то*

$$M(\mathfrak{N}_f) = M[(\mathfrak{N}_f)_{\Sigma M}].$$

Доказательство. В силу теоремы 1 (§ 1) $\mathfrak{N}_f \supseteq (\mathfrak{N}_f)_{\Sigma M}$. Покажем, что $\mathfrak{N}_f \subseteq (\mathfrak{N}_f)_{\Sigma M}$.

Пусть правильная последовательность для множества N_f есть

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2m}.$$

Сокращенная д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ может быть записана в виде

$$\mathfrak{N}_f = \mathfrak{A}(\alpha^1, \alpha^2) \vee \mathfrak{A}(\alpha^2, \alpha^3) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2m-1}, \alpha^{2m}) \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2m}, \alpha^1).$$

Минимальная д. н. ф. функции f не может содержать менее m элементарных конъюнкций. Действительно, N_f содержит $2m$ точек. Максимальный интервал N_{α^i, α^j} покрывает 2 точки. Поэтому покрытие N_f не может содержать менее m интервалов. С другой стороны, всякая д. н. ф., эквивалентная N_f и содержащая m конъюнкций, является минимальной.

Рассмотрим д. н. ф.

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{A}(\alpha^1, \alpha^2) \vee \mathfrak{A}(\alpha^3, \alpha^4) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2m-1}, \alpha^{2m}),$$

$$\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{A}(\alpha^2, \alpha^3) \vee \mathfrak{A}(\alpha^4, \alpha^5) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2m-2}, \alpha^{2m-1}) \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2m}, \alpha^1).$$

Д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ содержат ровно по m элементарных конъюнкций.

Но $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_f, \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_j$, так как

$$(N_{\alpha^1\alpha^2} \cup N_{\alpha^3\alpha^4} \cup \ldots \cup N_{\alpha^{2m-1}\alpha^{2m}}) = (N_{\alpha^2\alpha^3} \cup N_{\alpha^4\alpha^5} \cup \ldots \cup N_{\alpha^{2m}\alpha^1}) = \\ = \{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2m}\} = N_f.$$

Поэтому $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ суть минимальные д. н. ф. функции f:

$$M(\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2) = M(\mathfrak{N}_f),$$

$$(\mathfrak{N}_f)_{\Sigma M} \supseteq \mathfrak{N}_f.$$

Таким образом, лемма доказана.

Пусть ψ — цепная функция, $\mathfrak{N}_\psi$ — ее сокращенная д. н. ф. и последовательность, правильная для множества N_ψ, есть

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2s}.$$

Тогда

$$\mathfrak{N}_\psi = \mathfrak{A}(\alpha^1, \alpha^2) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2s-1}, \alpha^{2s}).$$

Положим

$$\mathfrak{A}(\alpha^i, \alpha^{i+1}) = \mathfrak{A}_i.$$

Л е м м а 2. *Функция ψ имеет одну минимальную д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$, составленную из элементарных конъюнкций $\mathfrak{A}_i$ с нечетными номерами, т. е.*

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_3 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{2s-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая, как и при доказательстве леммы 1, устанавливаем, что минимальная д. н. ф. функции ψ не может состоять менее чем из s конъюнкций и что всякая д. н. ф. $\mathfrak{N}$, состоящая из s конъюнкций и эквивалентная $\mathfrak{N}_\psi$, есть минимальная д. н. ф. функции ψ. Д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ состоит из s элементарных конъюнкций, и $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_\psi$.

Действительно,

$$N_{\mathfrak{A}_1} \cup N_{\mathfrak{A}_3} \cup \ldots \cup_{\mathfrak{A}_{2s-1}} = \{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{2s}\} = N_\psi.$$

Следовательно, д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$ есть минимальная д. н. ф. функции ψ. Докажем, что других минимальных д. н. ф. у функции ψ нет. Для этого достаточно показать, что д. н. ф., в которую входит хотя бы одна конъюнкция $\mathfrak{A}_i$ с четным номером, не является минимальной.

Легко видеть, что если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_\psi$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_\psi$ и в $\mathfrak{N}$ входят конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$, для которых

$$N_{\mathfrak{A}_i} \cap N_{\mathfrak{A}_j} \neq 0,$$

то $\mathfrak{N}$ не является минимальной д. н. ф. функции ψ.

Оценим число l интервалов в покрытии множества N_ψ, соответствующем $\mathfrak{N}$.

Интервалы $N_{\mathfrak{A}_i}$ и $N_{\mathfrak{A}_j}$ в сумме покрывают не более трех точек. Чтобы покрыть остальные $2s-3$ точки, необходимо не менее $\left[\frac{2s-3}{2}\right]+1$ интервалов, т. е.

$$l \leqslant 2 + \left[\frac{2s-3}{2}\right] + 1 = s+1.$$

Но минимальная д. н. ф. функции ψ должна содержать ровно s элементарных конъюнкций.

Окончательное доказательство легко получается из следующего утверждения: если в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ (где $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_\psi$, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_\psi$) входит хотя бы одна конъюнкция с четным номером, то $\mathfrak{N}$ содержит конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ такие, что $N_{\mathfrak{A}_i} \cap N_{\mathfrak{A}_j} \neq 0$.

Лемма 2 доказана.

Следствие.

$$(\mathfrak{N}_\psi)_{\Sigma M} = (\mathfrak{N}_\psi \setminus \bigvee_{j=1}^{s-1} \mathfrak{A}_{2j}) = \mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_{2s-1} = \mathfrak{A}(\alpha^1, \alpha^2) \vee \ldots \vee \mathfrak{A}(\alpha^{2s-1}, \alpha^{2s}).$$

Пусть $S_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_p}\}$ — главная окрестность k-го порядка конъюнкции $\mathfrak{A}$ в д. н. ф. $\mathfrak{N}$ и $M_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}) = \bigcup_{j=1}^{p} N_{\mathfrak{A}_{i_j}}$. Введем функцию алгебры логики $\varphi^k_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})}$:

$$\varphi^k_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \in M_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}), \\ 0, & \text{если } (x_1, \ldots, x_n) \notin M_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}). \end{cases}$$

Пусть f — циклическая функция, N_f состоит из $2m$ точек, $\mathfrak{N}_f$ — сокращенная д. н. ф. функции f, $k < m-2$, k нечетно и $\widetilde{\mathfrak{N}}$ — сокращенная д. н. ф. функции $\varphi^k_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_f)}$.

Лемма 3. *Множество $M_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_f)$ есть цепь, и $\mathfrak{A} \notin (\widetilde{\mathfrak{N}})_{\Sigma M}$.*

Доказательство леммы 3 легко следует из определений цепи, цикла и леммы 2.

§ 3. Доказательство теоремы 16

Пусть алгоритм A имеет индекс k. Рассмотрим функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n > k+3$, такую, что $N_f = \{(00 \ldots 00), (00 \ldots 01), \ldots \ldots, (01 \ldots 11), (11 \ldots 11), (11 \ldots 10), \ldots, (10 \ldots 00)\}$.

Легко проверить, что множество N_f есть цикл из $2n$ точек и последовательность $\pi = \{(100 \ldots 00), (00 \ldots 01), \ldots, (01 \ldots 11), (11 \ldots 11), (11 \ldots 10), \ldots, (10 \ldots 00)\}$ правильная для N_f.

Пусть $\mathfrak{N}_f$ — сокращенная д. н. ф. функции f, составленная из конъюнкций с отметкой (0), и пусть $\mathfrak{A}^{(0)} \in \mathfrak{N}_f$. Пусть, далее, алгоритм A порожден функцией φ индекса k и паре $(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)$ сопоставлена в области определения φ окрестность $S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)$.

Как мы увидим, теорема 16 легко вытекает из

$$\varphi[\mathfrak{A}^{(0)}, S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)] = 0. \tag{5.1}$$

Докажем это равенство.

Нечетное число из пары $(k, k+1)$ обозначим через l.

Рассмотрим функцию $\varphi^l_{(\mathfrak{A}, \mathfrak{N}_f)}$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{N}}$ — ее сокращенная д. н. ф., составленная из конъюнкций с отметкой (0). Так как $l < k+1 < n-2$, мы находимся в условиях леммы 3 и имеем

$$\mathfrak{A} \notin (\widetilde{\mathfrak{N}})_{\Sigma M}. \tag{5.2}$$

Так как f — циклическая функция, то (по лемме 1)

$$\mathfrak{A} \in (\mathfrak{N}_f)_{\Sigma M}. \tag{5.3}$$

Покажем, что

$$S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f) \curlywedge S(\mathfrak{A}^{(0)}, \widetilde{\mathfrak{N}}). \tag{5.4}$$

Так как д. н. ф. $\mathfrak{N}_f$ и $\widetilde{\mathfrak{N}}$ составлены из конъюнкций с отметкой (0), достаточно показать, что

$$M[S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)] = M[S(\mathfrak{A}^{(0)}, \widetilde{\mathfrak{N}})]. \tag{5.5}$$

Напомним, что система окрестностей, составляющая область определения функции φ, удовлетворяет условию (4.2) (глава IV, стр. 29), т. е. из

$M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] \subseteq M(\mathfrak{N}_2)$ и $M(\mathfrak{N}_2) \subseteq M(\mathfrak{N}_1)$ следует, что $M[S(\mathfrak{A}^{(j)}, \mathfrak{N}_1)] = M[S(\mathfrak{A}^{(i)}, \mathfrak{N}_2)]$. Положим $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_f$, $\mathfrak{N}_2 = \tilde{\mathfrak{N}}$. Имеем

$$M(\tilde{\mathfrak{N}}) \subseteq M(\mathfrak{N}_f),$$

$$M[S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)] \subseteq M[S_k(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)] \subseteq M[S_l(\mathfrak{A}^{(0)}, \tilde{\mathfrak{N}})] \subseteq M(\tilde{\mathfrak{N}}). \tag{5.6}$$

Сравнивая (4.2), (5.5), (5.6), получаем

$$M[S(\mathfrak{A}^{(0)}, \tilde{\mathfrak{N}})] = M[S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)],$$

$$S(\mathfrak{A}^{(0)}, \tilde{\mathfrak{N}}) \mathrel{\&} S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f).$$

Из (5.4) следует, что

$$\varphi[\mathfrak{A}^{(0)}, S(\mathfrak{A}^{(0)}, \tilde{\mathfrak{N}})] = \varphi[\mathfrak{A}^{(0)}, S(\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{N}_f)].$$

Поэтому в силу допустимости функции φ и из (5.2), (5.3) получаем (5.1).

Так как $\mathfrak{A}^{(0)}$ — произвольная конъюнкция из $\mathfrak{N}_f$, мы доказали, что произвольный алгоритм A индекса k не может изменить отметку ни над одной конъюнкцией из $\mathfrak{N}_f$, т. е. $\mathfrak{N}_f$ абсолютно неупрощаема в любом алгоритме индекса k.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова 51, 1958, 5—143.

[2] Журавлев Ю. И., Об отделимости подмножеств вершин n-мерного единичного куба, Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова 51, 1958.

[3] Журавлев Ю. И., О построении минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики, ДАН 126, 2, 1959.

[4] Журавлев Ю. И., Об алгоритмах упрощения дизъюнктивных нормальных форм, ДАН 132, 2, 1960.

[5] Журавлев Ю. И., О невозможности построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики в одном классе алгоритмов, ДАН 132, 3, 1960.

[6] Коллектив вычислительной лаборатории Гарвардского университета, Синтез электронных вычислительных и управляющих схем (пер. с англ.), М., ИЛ, 1954.

[7] Ляпунов А. А., О логических схемах программ, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 1, М., Физматгиз, 1958, 46—74.

[8] Янов Ю. И., О логических схемах алгоритмов, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 1, М., Физматгиз, 1958, 75—127.

[9] Blake A., Canonical expression in Boolen algebra, Dissertation, Chicago, 1937.

[10] Nelson R. J., Simplest normal truth functions, J. Symb. Logic 20, 2, 105—108.

[11] Quine W. V., The problem of symplifying truth functions, Amer. Math. Monthly 59, 8, 1952.

[12] Quine W. V., A may to simplify truth functions, Amer. Math. Monthly 62, 9, 1955.

[13] Quine W. V., On cores and prime implicants of truth functions, Amer. Math. Monthly 66, 9, 1959.

Поступили в редакцию:
первый вариант 1 IX 1960,
окончательный вариант 29 VI 1961