ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМЕНИ В. А. СТЕКЛОВА
1958 г., том LI

Ю. И. Журавлев

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДМНОЖЕСТВ ВЕРШИН n-МЕРНОГО ЕДИНИЧНОГО КУБА

Введение

В программировании, в теории электрических схем и пр. приходится иметь дело с функциями $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенными на некотором подмножестве вершин единичного n-мерного куба и принимающими значения 0 и 1. Обычно при различных рассмотрениях возникает необходимость доопределения значений функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на остальных вершинах куба. С точки зрения исследуемой функциональной зависимости все доопределения равноправны. Однако такое доопределение, вообще говоря, существенно влияет на вид формул, схем и пр., задающих данную функцию. Оказывается [2], например, что варьируя доопределение, мы получаем различные по простоте формулы, схемы и пр. Поэтому возникает задача об отыскании простейших в том или ином смысле доопределений.

Вопрос об упрощении формул, схем за счет выбора надлежащего доопределения исследовался различными авторами. Для дальнейших справок мы отсылаем читателей к работе В. Н. Рогинского [2].

В настоящей работе рассматривается полное решение поставленной задачи для случая, когда простейшее доопределение ищется в классе дизъюнктивных нормальных форм. Не представляет труда с помощью принципа двойственности перенести полученные результаты на случай, когда ищется простейшее доопределение в классе конъюнктивных нормальных форм. Полученный результат прилагается к отысканию минимальных нормальных форм для функций алгебры логики. В последнем параграфе исследуются возможности упрощения указанных формул за счет выделения тех или иных наборов существенных переменных.

§ 1. Постановка задачи

Функции алгебры логики, зависящие от n аргументов, можно рассматривать как функции, определенные на множестве E_n всех вершин n-мерного единичного куба и принимающие значения 0 и 1 [3]. При такой интерпретации существует взаимно однозначное соответствие между функциями алгебры логики, зависящими от n аргументов, и подмножествами E_n. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и подмножество $M_f \subseteq E_n$ соответствуют друг другу, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ на } M_f, \\ 0 \text{ на } E_n \setminus M_f. \end{cases}$$

Определение. *Элементарной конъюнкцией k-го ранга* называется логическое произведение $\mathfrak{A} = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k}$, где все x_{i_j} различны и

$$x^\sigma = \begin{cases} x \text{ при } \sigma = 1, \\ \bar{x} \text{ при } \sigma = 0. \end{cases}$$

Единица считается элементарной конъюнкцией нулевого ранга.

Определение. Логическая сумма $\mathfrak{N}$ элементарных конъюнкций $\mathfrak{A}_i$

$$\mathfrak{N} = \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{A}_i$$

называется *дизъюнктивной нормальной формой* (д. н. ф.).

Заметим, что всякой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры логики соответствует непустой класс д. н. ф., реализующих данную функцию. Отсюда следует, что подмножества $M \subseteq E_n$ можно задавать при помощи д. н. ф.

Определение. Подмножество $M_\mathfrak{A} \subseteq E_n$, соответствующее элементарной конъюнкции $\mathfrak{A}$ k-го ранга, называется *интервалом k-го ранга.*

Очевидно, что интервал k-го ранга есть $(n-k)$-мерная грань n-мерного единичного куба.

Пусть $I = \{M_\mathfrak{A}\}$ есть некоторое подмножество интервалов из E_n.

Определение. Интервал $M_\mathfrak{B} \in I$ называется *максимальным* относительно I, если не существует в I интервала $M_\mathfrak{A}$ такого, что $M_\mathfrak{B} \neq M_\mathfrak{A}$ и $M_\mathfrak{A} \supseteq M_\mathfrak{B}$.

Легко видеть, что в д. н. ф. для $f(x_1, \ldots, x_n)$ могут входить лишь элементарные конъюнкции $\mathfrak{A}_i$, соответствующие интервалам, содержащимся в M_f. Выберем все максимальные интервалы $M_{\mathfrak{B}_i} \subseteq M_f$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ и образуем из соответствующих элементарных конъюнкций д. н. ф. $\bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i$. Полученная д. н. ф. называется *сокращенной нормальной формой* для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ задана на подмножестве $M \subseteq E_n$ и принимает значения 0 и 1. Существуют такие подмножества M_1 и M_2, что

$$M_1 \cup M_2 = M, \quad M_1 \cap M_2 = 0,$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} 1 \text{ на } M_1 \\ 0 \text{ на } M_2 \end{cases}$$

Таким образом, $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ определена заданием пары непересекающихся множеств M_1 и M_2 или, в силу предыдущих рассмотрений, парой функций алгебры логики f_1 и f_2, причем $f_1 \cdot f_2 \equiv 0$ (т. е. f_1 и f_2 ортогональны) и $M_1 = M_{f_1}$, $M_2 = M_{f_2}$. Верно и обратное: всякой паре ортогональных функций f_1 и f_2 соответствует функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенная на некотором подмножестве из E_n и принимающая значения 0 или 1.

Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ задана, вообще говоря, не на всем множестве E_n. Существуют различные доопределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ в классе функций алгебры логики, не эквивалентные между собой.

Основной нашей задачей является нахождение простейших, в некотором смысле, доопределений. Для уточнения постановки задачи введем понятие индекса простоты множества или функции.

Поставим по некоторому правилу в соответствие каждому подмножеству $M_f \subseteq E_n$ целое неотрицательное число и назовем его *индексом простоты* подмножества M_f и функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим класс M множеств таких, что для $M_{f_i} \in M$ имеют место условия

$$M_{f_i} \cap M_2 = 0, \quad M_{f_i} \supseteq M_1.$$

Заметим, что $M_1 \in M$. Теперь мы можем сформулировать задачу следующим образом: в классе M множеств найти множество M_f с минимальным индексом простоты.

В последующем данная задача решается для специального определения индекса простоты.

Определение. *Минимальной д. н. ф.* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ называется д. ч. ф., реализующая $f(x_1, \ldots, x_n)$ и имеющая минимальное число букв.

Мы определим индекс простоты множества M_f как число букв в минимальной д. н. ф. для $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$.

Множество M_f с минимальным индексом простоты обладает свойствами

$$M_f \supseteq M_1, \qquad E_n \setminus M_f \supseteq M_2;$$

M_f и $E_n \setminus M_f$ отделяют, таким образом, M_1 и M_2 и являются простейшими, в нашем смысле, отделителями.

Итак, задача свелась к задаче об отделении двух непересекающихся множеств множествами более простой природы. Подобные задачи возникали в дескриптивной теории множеств [1]. Поэтому естественно называть задачу о построении множества с минимальным индексом простоты *задачей о логической отделимости*.

§ 2. Решение задачи логической отделимости

Мы дадим два решения задачи: геометрическое и аналитическое. Первое представляет интерес для теоретических исследований, второе — с практической точки зрения.

Геометрическое решение. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ задана с помощью пары непересекающихся множеств M_1 и M_2 (см. стр. 144). Выделим все максимальные интервалы $M_{\mathfrak{B}_i}$ $(i=1, 2, \ldots, l)$, содержащиеся в $E_n \setminus M_2$ и имеющие непустое пересечение с M_1. Д. н. ф. $\mathfrak{N} = \bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{B}_i$ называется *сокращенной нормальной формой* для $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, что $\mathfrak{N}$ однозначно определяется заданием множеств M_1 и M_2. Если $F(x_1, \ldots, x_n)$ является всюду определенной, т. е. функцией алгебры логики, то это определение совпадает с ранее введенным.

Очевидно, что множество $M_{\mathfrak{N}}$ принадлежит классу M.

Теорема 1. *Минимальная д. н. ф. $\mathfrak{N}_{\min}$, отвечающая простейшему отделителю M_f множеств M_1 и M_2, получается из сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}$ для функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ путем удаления некоторых элементарных конъюнкций $\mathfrak{B}_i$.*

Доказательство. Достаточно показать, что любая элементарная конъюнкция $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{N}_{\min}$ соответствует интервалу $M_{\mathfrak{B}}$ такому, что

(1) $M_{\mathfrak{B}} \subseteq E_n \setminus M_2$,

(2) $M_{\mathfrak{B}}$ является максимальным интервалом в $E_n \setminus M_2$,

(3) $M_{\mathfrak{B}} \cap M_1$ непусто.

Условие (1) следует из соотношений

$$M_{\mathfrak{B}} \subseteq M_f, \qquad M_f \cap M_2 = 0.$$

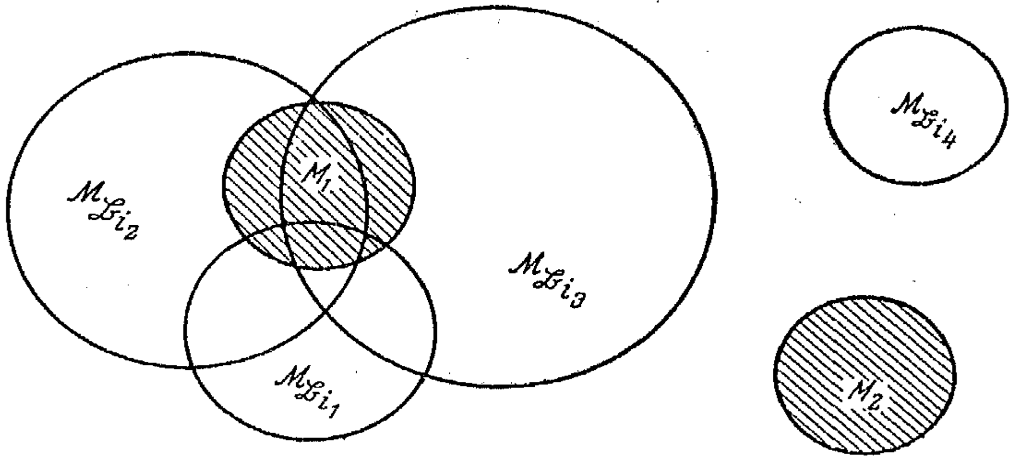
Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная конъюнкция из $\mathfrak{N}_{\min}$. Допустим, что $M_{\mathfrak{B}}$ не является максимальным интервалом в $E_n \setminus M_2$. Тогда $M_{\mathfrak{B}}$ содержится в некотором максимальном интервале $M_{\mathfrak{B}_i}$. Очевидно, что д. н. ф. $\mathfrak{N}_0$, полученная из $\mathfrak{N}_{\min}$ заменой элементарной конъюнкции $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_i$, имеет меньшее число букв, чем $\mathfrak{N}_{\min}$ и $M_{\mathfrak{N}_0}$, $E_n \setminus M_{\mathfrak{N}_0}$ являются отделителями множеств M_1 и M_2, т. е. $M_{\mathfrak{N}_0} \in M$. Это противоречит минимальности индекса простоты M_f. Этим (2) доказано.

Пусть опять $\mathfrak{B}$ — некоторая элементарная конъюнкция из $\mathfrak{N}_{\min}$ и $M_{\mathfrak{N}} \cap M_1$ пусто. Очевидно, что д. н. ф. $\mathfrak{N}_0$, полученная из $\mathfrak{N}_{\min}$ путем удаления конъюнкции $\mathfrak{B}$, отвечает отделителю множеств M_1 и M_2 с меньшим, чем у M_f, индексом, что противоречит допущению.

Теорема полностью доказана.

Установленная теорема показывает, что д. н. ф. с минимальным числом букв для простейшего отделителя M_f множеств M_1 и M_2 получается из сокращенной д. н. ф. для $F(x_1, \ldots, x_n)$ удалением некоторых элементарных конъюнкций $\mathfrak{B}$.

Заметим, что если д. н. ф. $\mathfrak{N} = \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{A}_i$ отвечает некоторому отделителю множеств M_1 и M_2 и $\mathfrak{A}_i$ — элементарная конъюнкция из $\mathfrak{N}$ такая, что $M_1 \cap M_{\mathfrak{A}_i} \subseteq \bigcup_{j \neq i} M_{\mathfrak{A}_j}$, то д. н. ф. $\mathfrak{N}' = \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{A}_j$ также отвечает отделителю множеств M_1 и M_2 и имеет меньшее число букв. Воспользовавшись этим замечанием, мы можем вычеркивать последовательно элементарные конъюнкции из сокращенной д. н. ф. для $F(x_1, \ldots, x_n)$. Перебирая всевозможные способы удаления, мы найдем все $\mathfrak{N}_{\min}$.



Фиг. 1

Таким образом, построение минимальной д. н. ф. можно разбить на этапы *.

1. Выделение максимальных интервалов в $E_n \setminus M_2$ (фиг. 1).

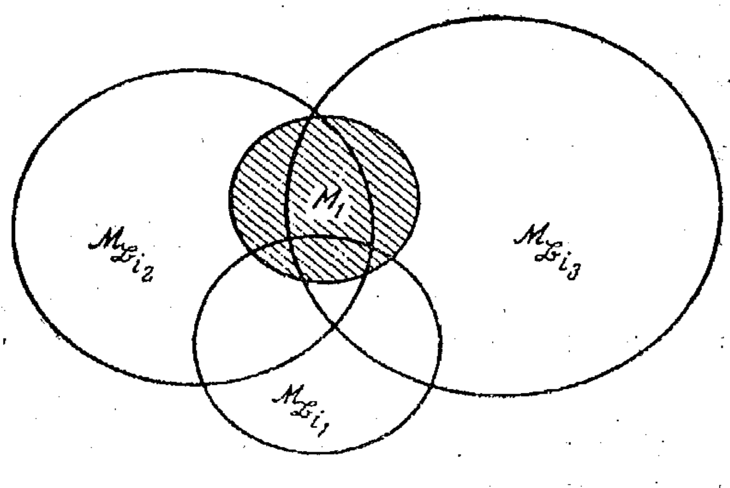
2. Выделение максимальных интервалов, имеющих непустое пересечение с M_1 (фиг. 2).

3. Удаление интервалов, содержащихся в сумме оставшихся (фиг. 3). На рисунке $\mathfrak{N}_{\min} = \mathfrak{B}_{i_2} \vee \mathfrak{B}_{i_3}$

Аналитическое решение. Пусть заданы

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}^{\sigma_k} = \bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{A}_i,$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee x_{j_1}^{\sigma_1} \cdot x_{j_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_s}^{\sigma_s}$$



Фиг. 2

такие, что $M_1 = M_{f_1}$, $M_2 = M_{f_2}$. Очевидно, что $f_1 \cdot f_2 = 0$.

Аналитическое решение мы разбиваем на три этапа, каждый из которых соответствует определенному этапу геометрического решения:

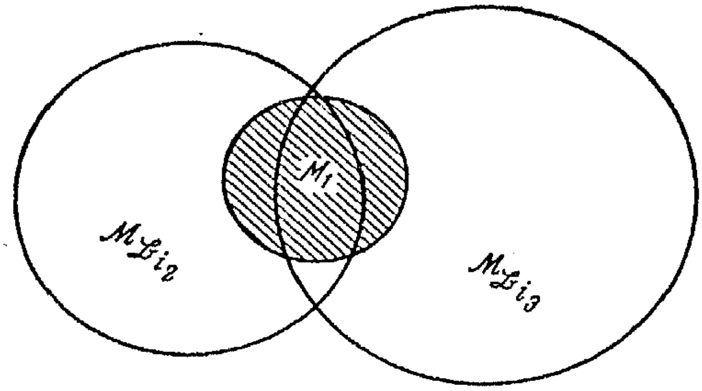
1. Выделение всех максимальных интервалов, целиком содержащихся в $E_n \setminus M_2$.

* На фиг. 1—3 изображены характерные конфигурации интервалов при построении минимальной д. н. ф.

Очевидно, что $E_n \setminus M_2 = M_{\bar{f}_2}$. Поэтому достаточно построить сокращенную д. н. ф. для функции $\bar{f}_2$. Это построение мы выполним, пользуясь методом Нельсона [4]. Рассмотрим конъюнктивную нормальную форму для $\bar{f}_2$, т. е.

$$\& \, x_{j_1}^{\sigma_1} \vee x_{j_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{j_s}^{\sigma_s}.$$

Производя перемножение дизъюнктивных членов по правилам алгебры логики, выполняя приведение подобных и отбрасывая поглощаемые члены, получим сокращенную д. н. ф. $\vee \mathfrak{B}_j$ для $\bar{f}_2$.



Фиг. 3

2. Выделение максимальных интервалов из $E_n \setminus M_2$, имеющих непустое пересечение с M_1.

В сокращенной д. н. ф. $\bar{f}_2$ отбрасываем все конъюнкции $\mathfrak{B}_i$ такие, что $f_1 \cdot \mathfrak{B}_i \equiv 0$. После этого получим сокращенную д. н. ф. для функции $F(x_1, \ldots, x_n)$.

3. Выбрасывание из сокращенной д. н. ф. для $F(x_1, \ldots, x_n)$ элементарных конъюнкций, отвечающих интервалам, поглощаемым внутри множества M_1 суммой остальных интервалов.

Этот этап можно разбить на элементарные шаги, каждый из которых представляет собой удаление из д. н. ф., полученной на предыдущем шаге, одной элементарной конъюнкции. Последнее устанавливается с помощью аналитического критерия, который выясняет случаи покрытия суммой интервалов $\bigcup_{i=1}^{k} M_{\mathfrak{C}_i}$ части некоторого интервала $M_{\mathfrak{C}_0}$, содержащейся в данном множестве $M_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N} = \bigvee_{i=1}^{l} \mathfrak{A}_i$.

Заметим, что соотношение $M_{f'} \subseteq M_{f''}$, где $M_{f'} \subseteq E_n$ и $M_{f''} \subseteq E_n$, эквивалентно тождеству

$$(f' \to f'') \equiv 1.$$

При этих обозначениях наша задача состоит в отыскании условий, при которых

$$(\mathfrak{C}_0 \cdot \mathfrak{N} \to \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{C}_i) \equiv 1.$$

Пусть $\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j$ образована из всех конъюнкций $\mathfrak{C}_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, неортогональных к $\mathfrak{C}_0$. Аналогично $\mathfrak{N}' = \bigvee_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i$ построена из всех конъюнкций $\mathfrak{A}_i$, неортогональных к $\mathfrak{C}_0$. Очевидно, что условие

$$\left(\mathfrak{C}_0 \cdot \mathfrak{N} \to \bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{C}_i\right) \equiv 1$$

эквивалентно условию

$$\left(\mathfrak{C}_0 \cdot \mathfrak{N}' \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j\right) \equiv 1.$$

Теорема 2. *Условие*

$$\left(\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{C}_0 \to \bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{C}'_j\right) \equiv 1$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}'_j = \mathfrak{C}_j \cdot v_j$ $(j = 1,\ 2, \ldots, s)$, *где* $\mathfrak{C}_j$ и v_j — *элементарные конъюнкции и*

$$\left(\mathfrak{N}' \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j\right) \equiv 1, \tag{1}$$

$$\left(\mathfrak{C}_0 \to \mathop{\&}_{j=1}^{s} v_j\right) \equiv 1. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\mathfrak{C}_0 = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdot \ldots \cdot x_{i_q}^{\sigma_{i_q}}.$$

Возьмем произвольную конъюнкцию $\mathfrak{C}'_j$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и представим ее в виде $\mathfrak{C}'_j = \mathfrak{C}_j \cdot v_j$ следующим образом: v_j — элементарная конъюнкция, состоящая из всех букв $x_{l_1}^{\sigma_{l_1}}$, $x_{l_2}^{\sigma_{l_2}}$, $\ldots$, $x_{l_p}^{\sigma_{l_p}}$, общих для $\mathfrak{C}_0$ и $\mathfrak{C}'_j$. Если таких нет, то v_j положим равным единице. Буквы из $\mathfrak{C}'_j$, не вошедшие в v_j, объединим в элементарную конъюнкцию $\mathfrak{C}_j$. Если $x_{l_1}^{\sigma_{l_1}}$, $x_{l_2}^{\sigma_{l_2}}$, $\ldots$, $x_{l_p}^{\sigma_{l_p}}$ исчерпывают все множители в $\mathfrak{C}'_j$, то $\mathfrak{C}_j$ положим равным единице.

Заметим, что в $\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j$ не могут входить буквы

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}},\ x_{i_2}^{\sigma_{i_2}},\ \ldots,\ x_{i_q}^{\sigma_{i_q}}, \qquad x_{i_1}^{\bar{\sigma}_{i_1}},\ x_{i_2}^{\bar{\sigma}_{i_2}},\ \ldots,\ x_{i_q}^{\bar{\sigma}_{i_q}},$$

первые по построению $\mathfrak{C}_j$, вторые ввиду неортогональности $\mathfrak{C}'_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ к $\mathfrak{C}_0$.

Покажем, что $\left(\mathfrak{N}' \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j\right) \equiv 1$. Пусть это не так. Тогда на некотором множестве M'' имеет место $\mathfrak{N}' = 1$, а $\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j = 0$, следовательно,

$$\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j \cdot v_j = \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j = 0.$$

Очевидно, $\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j$ не зависит от переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_q}$. В силу неортогональности к $\mathfrak{C}_0$ всех элементарных конъюнкций из $\mathfrak{N}'$, выражение $\mathfrak{N}'$ может содержать переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$ только в виде $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, x_{i_2}^{\sigma_{i_2}}, \ldots, x_{i_q}^{\sigma_{i_q}}$. Отсюда следует, что M'' содержит точку, в которой

$$x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} = x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} = \ldots = x_{i_q}^{\sigma_{i_q}} = 1.$$

Мы нашли точку, в которой $\mathfrak{N}' = 1$, $\mathfrak{C}_0 = 1$ и $\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j = 0$. Тогда в этой точке $\left(\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{C}_0 \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j\right) = 0$, что противоречит допущению.

Условие (2) выполнено тривиально.

Достаточность. Пусть выполнены условия (1) и (2). Очевидно, достаточно показать, что из равенства $\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{C}_0 = 1$ следует, что $\bigvee_{i=1}^{s} \mathfrak{C}'_i = 1$. Поскольку $\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{C}_0 = 1$, то $\mathfrak{N}' = 1$ и $\mathfrak{C}_0 = 1$. Далее из выполнения условий (1) и (2) следует, что

$$\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j = 1, \quad \mathop{\&}_{j=1}^{s} v_j = 1.$$

Отсюда следует, что для всех j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ $v_j = 1$ и значит $\mathfrak{C}'_j = \mathfrak{C}_j$. Тогда в этой точке

$$\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j = \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j = 1.$$

Теорема полностью доказана.

С. В. Яблонским было замечено, что в зависимости от того, какой нормальной формой задано множество $M_{\mathfrak{N}}$, будут получаться разные д. н. ф. $\mathfrak{N}'$. Если $\mathfrak{N}_1$ — сокращенная д. н. ф. и $\mathfrak{N}_2$ — совершенная д. н. ф., отвечающие данному множеству $M_{\mathfrak{N}}$, то

$$M_{\mathfrak{N}} = M_{\mathfrak{N}_1} = M_{\mathfrak{N}_2}, \quad M_{\mathfrak{N}'_1} \supseteq M_{\mathfrak{N}'} \supseteq M_{\mathfrak{N}'_2}.$$

В силу этого соотношения в формулировке необходимого условия можно взять самое сильное условие, отвечающее заданию множества $M_{\mathfrak{N}}$ посредством сокращенной д. н. ф. $\mathfrak{N}_1$. Именно, если $\left(\mathfrak{N}'_1 \mathfrak{C}_0 \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}'_j\right) \equiv 1$, то $\mathfrak{C}'_j = \mathfrak{C}_j \cdot v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, где $\mathfrak{C}_j$ и v_j — элементарные конъюнкции и

$$\left(\mathfrak{N}'_1 \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j\right) \equiv 1, \quad \left(\mathfrak{C}_0 \to \mathop{\&}_{j=1}^{s} v_j\right) \equiv 1.$$

Соответственно, при формулировке достаточного условия, берем самое слабое условие, отвечающее заданию множества $M_{\mathfrak{N}}$ посредством совершенной д. н. ф. Именно, если $\mathfrak{C}'_j = \mathfrak{C}_j \cdot v_j$ так, что

$$\left(\mathfrak{N}'_2 \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j\right) \equiv 1, \quad \left(\mathfrak{C}_0 \to \mathop{\&}_{j=1}^{s} v_j\right) \equiv 1,$$

то

$$\left(\mathfrak{N}'\mathfrak{C}_0 \to \bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{L}'_j\right) \equiv 1.$$

Следствие. В случае, когда $M_{\mathfrak{N}} = E_n$, т. е $\mathfrak{N} \equiv 1$, получаем необходимое и достаточное условие покрытия суммой интервалов $\bigcup_{i=1}^{k} M_{\mathfrak{C}_i}$ интервала $M_{\mathfrak{C}_0}$. Условия (1) и (2) перепишутся так:

$$\bigvee_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_j \equiv 1,$$

$$\left(\mathfrak{C}_0 \to \mathop{\&}_{j=1}^{s} v_j\right) \equiv 1.$$

Теорема сводит проверку тождественной истинности одной формулы к проверке тождественной истинности двух формул. Но (2) проверяется тривиально. Проверка (1) значительно проще, чем проверка исходной импликации.

Пример: $\mathfrak{N} = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_4$;

$$\mathfrak{C}_0 = x_1x_2, \quad \mathfrak{C}_1 = x_2x_4, \quad \mathfrak{C}_2 = \bar{x}_3\bar{x}_4, \quad \mathfrak{C}_3 = \bar{x}_1x_4.$$

Очевидно, здесь $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{C}_0 \cdot \mathfrak{C}_3 \equiv 0$. Поэтому

$$\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}_1 = x_2x_4, \quad \mathfrak{C}'_2 = \mathfrak{C}_2 = \bar{x}_3\bar{x}_4,$$

$$\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}_1 \cdot v_1, \quad \mathfrak{C}'_2 = \mathfrak{C}_2 \cdot v_2,$$

где

$$v_1 = x_2, \ v_2 = 1, \ \mathfrak{C}_1 = x_4, \ \mathfrak{C}_2 = \bar{x}_3\bar{x}_4.$$

Мы установим, что

$$(\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2) \equiv 1,$$

если покажем, что

$$(\mathfrak{N} \to \mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{C}_2) \equiv 1,$$

т. е., если

$$((x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_4) \to (\bar{x}_3 \vee x_4)) \equiv 1.$$

Но последнее тождество очевидно. Поэтому на основании теоремы 2 имеем

$$M_{\mathfrak{N}} \cdot M_{\mathfrak{C}_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{3} M_{\mathfrak{C}_i}.$$

§ 3. О выборе существенных переменных

Громоздкость решения задачи отделимости существенно зависит от числа переменных функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (см. стр. 144). В настоящем параграфе мы обсудим возможности построения простейшего отделителя как за счет введения новых переменных, так и за счет сокращения числа имеющихся переменных.

Сначала уточним, что мы понимаем под введением новых переменных.

Определение. Мы говорим, что функция $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ получена из функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ путем *введения новых переменных* $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, если для каждого набора $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, для которого определена функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, найдутся такие числа $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k}$ $(0 \leqslant \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k} \leqslant 1)$, что $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k}$ определена и

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k}) = F(\alpha_1, \ldots \alpha_n).$$

Возникает вопрос: можно ли путем введения новых переменных получать более простые отделители? Рассмотрение последующего примера показывает, что, вообще говоря, это так.

В самом деле, пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция алгебры логики. Очевидно, что $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \equiv x_{n+1}$ получена из функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ путем введения переменного x_{n+1}.

Этот пример показывает, что при введении нового переменного x_{n+1} значения функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ на наборах $(\alpha_1 \ldots, \alpha_n, 0)$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 1)$ являются, вообще говоря, различными и не определяются значением функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Следовательно, при введении новых переменных в функцию F требуется дополнительная информация. Это обстоятельство приводит к необходимости уточнения понятия введения новых переменных.

Определение. Мы говорим, что *переменные* $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ *введены* в функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *естественным образом*, если для всех наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, на которых определена функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, имеет место следующее соотношение между функциями $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ и $F(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) \equiv F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Определение. Множество $M \subseteq E_{n+k}$ называется *цилиндрическим* относительно переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, если оно наряду с каждой точкой $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+k})$ содержит все точки, у которых первые n координат совпадают соответственно с $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Теорема 3. *При естественном введении новых переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ (где k — произвольное положительное число) в функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$ простейший отделитель для функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$, полученной при этом доопределении, имеет индекс простоты не меньший, чем простейший отделитель функции $F(x_1, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Очевидно достаточно показать, что сокращенная д. н. ф. для функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ не содержит элементарных конъюнкций с переменными $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$.

Пусть M_1' и M_2' — подмножества из E_{n+k}, отвечающие функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$, т. е.

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = \begin{cases} 1 \text{ на } M_1', \\ 0 \text{ на } M_2'. \end{cases}$$

Из определения функции Φ вытекает, что множества M_1' и M_2' являются цилиндрическими относительно переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$. Пусть

$$\mathfrak{B} = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots x_{i_l}^{\sigma_l} \& x_{i_{l+1}}^{\sigma_{l+1}} \& \ldots \& x_{i_p}^{\sigma_p}$$

элементарная конъюнкция из сокращенной д. н. ф. для функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$. Пусть далее $1 \leqslant i_1, \ldots, i_l \leqslant n$ и $n+1 \leqslant \leqslant i_{l+1}, \ldots, i_p \leqslant n+k$, т. е. эта конъюнкция содержит некоторые из переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$. Рассмотрим элементарную конъюнкцию $\mathfrak{B}' = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{il}^{\sigma_l}$ и отвечающий ей интервал $M_{\mathfrak{B}'}$. Очевидно, что $M_{\mathfrak{B}'} \cap M_2' = 0$. В самом деле, если это не так, то найдется точка

$$\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{n+k}) \in M_{\mathfrak{B}'} \cap M_2'.$$

Тогда

$$\beta_{i_1}^{\sigma_1} = \beta_{i_2}^{\sigma_2} = \ldots = \beta_{il}^{\sigma_l} = 1.$$

Поскольку множество M_2' является цилиндрическим относительно переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, то точка

$$\tilde{\gamma} = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{n+k}),$$

где

$$\gamma_{i_{l+1}}^{\sigma_{l+1}} = \ldots = \gamma_{i_p}^{\sigma_p} = 1,$$

принадлежит также множеству M_2'. Отсюда следует, что точка $\tilde{\gamma}$ принадлежит множеству $M_{\mathfrak{B}}$ и поэтому $\tilde{\gamma} \in M_{\mathfrak{B}} \cap M_2'$. Последнее противоречит тому факту, что конъюнкция $\mathfrak{B}$ принадлежит сокращенной д. н. ф. функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$. Следовательно, мы построили интервал $M_{\mathfrak{B}'}$, имеющий меньший ранг, чем интервал $M_{\mathfrak{B}}$ и $M_{\mathfrak{B}'} \cap M_2' = 0$. Это означает, что интервал $M_{\mathfrak{B}}$ не является максимальным. Таким образом, допущение, что конъюнкция $\mathfrak{B}$ из сокращенной д. н. ф. функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ содержит некоторые из переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$, является ложным.

Теорема доказана.

Установленная теорема показывает, что естественное введение новых переменных ничего не дает с точки зрения возможностей упрощения д. н. ф.

Теперь перейдем к отысканию совокупностей переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ из множества всех переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(k \leqslant n)$, через которые выражаются логические отделители для функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для выделения таких совокупностей возможна следующая методика. Пусть $F(x_1, \dots, x_n)$ задана табл. 1. Составим все сочетания из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n;\ x_1,\ x_2;\ \dots;\ x_{n-1},\ x_n;\ \dots;\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n. \qquad (*)$$

Для каждой пары $(i, j)\,(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant l)$ выпишем разности

$$\gamma_1^{ij} = \alpha_1^i - \beta_1^j,\quad \gamma_2^{ij} = \alpha_2^i - \beta_2^j,\quad \dots,\quad \gamma_n^{ij} = \alpha_n^i - \beta_n^j.$$

Таблица 1

$x_1, x_2, \dots, x_n$	$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$
$\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n'$	1
. . . .	...
$\alpha_1^m, \alpha_2^m, \dots, \alpha_n^m$	1
$\beta_1', \beta_2', \dots, \beta_n'$	0
. . . .	...
$\beta_1^l, \beta_2^l, \dots, \beta_n^l$	0

Пусть $\gamma_{r_1}^{ij}, \gamma_{r_2}^{ij}, \dots, \gamma_{r_s}^{ij}$ — все нулевые разности. Образуем из переменных $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_s}$ возможные сочетания по $1, 2, \dots, s$ элементов. Полученные сочетания удалим из системы (*). Последняя операция совершается для каждой пары (i, j) $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant l)$. Утверждается, что каждой из оставшихся совокупностей переменных $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ из системы (*) отвечает, по крайней мере, один логический отделитель для $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представляющий собой д. н. ф., зависящую только от переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ и обратно — каждый логический отделитель функции $F(x_1, \dots, x_n)$ зависит от совокупности переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, принадлежащей к оставшейся подсистеме из (*).

Таблица 2

$x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$	
$\alpha_{i_1}^1, \dots, \alpha_{i_k}'$	1
. . . . .	...
$\alpha_{i_1}^m, \dots, \alpha_{ik}^m$	1
$\beta_{i_1}', \dots, \beta_{i_k}'$	0
. . . . .	...
$\beta_{i_1}^l, \dots, \beta_{i_k}^l$	0

Доказательство легко усматривается из следующего замечания: функция $F(x_1, \dots, x_n)$ допускает продолжение $\Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ в классе функций алгебры логики тогда и только тогда, когда в табл. 2, являющейся частью таблицы для функции $F(x_1, \dots, x_n)$, одинаковым наборам значений аргументов $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ отвечают одинаковые значения в правом столбце.

Приведем пример, поясняющий применение данного алгоритма. Пусть $F(x_1, x_2, x_3)$ задана табл. 3. Для данного случая система (*) состоит из 7 совокупностей:

$$x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_1,\ x_2;\ x_1,\ x_3;\ x_2,\ x_3;\ x_1,\ x_2,\ x_3.$$

Образуем разности (по mod 2):

$$\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1 = (001),\quad \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_2 = (100),\quad \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_3 = (110),$$

$$\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_1 = (110),\quad \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2 = (011),\quad \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_3 = (001).$$

Из рассмотрения этих разностей заключаем, что из системы (*) следует удалить сочетания x_1; x_2; x_3; x_1, x_2; x_2, x_3. Таким образом, можно искать логический отделитель для функции $F(x_1, x_2, x_3)$, зависящий, соответственно, от совокупностей переменных x_1, x_3 или x_1, x_2, x_3.

Таблица 3

	x_1	x_2	x_3	F
$\tilde{\alpha}_1$	0	0	0	1
$\tilde{\alpha}_2$	1	1	1	1
$\tilde{\beta}_1$	0	0	1	0
$\tilde{\beta}_2$	1	0	0	0
$\tilde{\beta}_3$	1	1	0	0

Следует обратить внимание на то, что замечание, приведенное при обосновании алгоритма, позволяет непосредственно проверять, существует ли логический отделитель, зависящий от данной (допустимой) совокупности переменных.

Это обстоятельство мы используем в дальнейшем.

Построение простейшего логического отделителя связано с выбором определенной допустимой совокупности переменных. Последнее осуществляется так: 1) для каждой допустимой совокупности строится простейший отделитель; 2) отбираются те совокупности, которые дают простейший логический отделитель; 3) из этих совокупностей берется та, которая имеет наименьшее число букв.

Последующие примеры показывают, что простейшие логические отделители, связанные с бо́льшим числом переменных, могут быть проще, чем логические отделители, связанные с меньшим числом переменных.

Пример. Пусть функция F задана табл. 4. Нетрудно видеть, что совокупности переменных x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, x_6, x_7 являются допустимыми.

Таблица 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1

Простейший отделитель от первой совокупности переменных имеет вид:

$$\Phi_1 = x_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4.$$

Простейший отделитель от второй есть

$$\Phi_2 = x_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_5\bar{x}_6x_7 \vee \bar{x}_5x_6\bar{x}_7 \vee x_5x_6x_7.$$

Первый из отделителей является, как нетрудно видеть, самым простым из всех возможных отделителей.

Приведенный пример показывает, что допустимые множества переменных могут не пересекаться.

В начале этого пункта мы видели, что естественное введение новых переменных не дает более простых отделителей. Однако, как показывает следующий пример, переход от данной допустимой совокупности к допустимой совокупности, являющейся частью данной, может привести к усложнению логических отделителей.

Пример. Пусть функция F задана табл. 5. Для заданной функции F допустимыми совокупностями переменных являются, в частности,

Таблица 5

x_1	x_2	x_3	x_4	F
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$\{x_2, x_3, x_4\}$ и $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, причем $\{x_2, x_3, x_4\} \subset \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Простейшие отделители для этих совокупностей суть соответственно

$$\Phi_1 = x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4,$$
$$\Phi_2 = x_1 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4.$$

Отсюда видно, что логический отделитель Φ_2 для второй совокупности проще, чем любой логический отделитель для первой совокупности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах. Гостехиздат, М., 1953.
2. Рогинский В. Н. Учет неиспользуемых состояний при синтезе релейноконтактных схем. Автомат. и телемехан., 15, № 3, 1954, 206—222.
3. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике. (Наст. сб.).
4. Nelson R. J. Simplest normal truth functions. J. Simbolic logic, 20, No. 2, 1955, 105—108.