УДК 519 714

ОБ АЛГОРИТМАХ РАСПОЗНАВАНИЯ С ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫМИ НАБОРАМИ (О ЛОГИЧЕСКИХ АЛГОРИТМАХ)[1)]

© 2002 г. Ю. И. Журавлёв

(119991 Москва, ул Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: zhur@ccas.ru

Поступила в редакцию 10.01.02 г.

Изучаются алгоритмы, базирующиеся на делении классов дизъюнктивными нормальными формами и выборе весов конъюнкций и эталонов. Построен алгоритм, оптимальный при скользящем контроле. Даны способы понижения размерности оптимизационной задачи при контроле, не пересекающемся с обучением. Библ. 8.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача распознавания или классификации с двумя непересекающимися классами K_1, K_2. Объекты задаются наборами значений n-бинарных признаков, принимающих значения 0, 1; $S = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. В дальнейшем предполагается, что читатель знаком с терминологией, принятой в математической теории представления и минимизации булевых функций (функций алгебры логики) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) [1]–[3]. Используется также терминология алгебраической теории алгоритмов [3]–[5].

Обучающая (исходная) информация $I_0(K_1, K_2)$ задается наборами объектов

$$\tilde{K}_1 = \{S_1, \ldots, S_k\} \in K_1, \quad \tilde{K}_2 = \{S_{k+1}, \ldots, S_{k+l}\} \in K_2,$$

$$S_i = \{\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}\}, \quad \alpha_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, k+l, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Распознающий алгоритм $\mathcal{A}$ для каждого S по его описанию и по $I_0(K_1, K_2)$ заносит S в один из классов K_1, K_2 или отказывается от распознавания. Алгоритм $\mathcal{A}$ является композицией распознающих операторов $\mathcal{B}$ и решающего правила $\mathcal{C}$. Оператор $\mathcal{B}$ переводит $(I_0(K_1, K_2), S)$ в пару оценок: Γ_1, Γ_2 за классы K_1, K_2 соответственно. Рассматривается простейшее решающее правило $C(\Gamma_1(S), \Gamma_2(S))$:

$$\Gamma_1(S) > \Gamma_2(S), \quad S \in K_1, \quad \Gamma_1(S) < \Gamma_2(S), \quad S \in K_2,$$

$$\Gamma_1(S) = \Gamma_2(S) \text{ – отказ от распознавания.}$$

Рассматривается также контрольная информация – наборы объектов

$$\tilde{K}'_1 = \{S'_1, \ldots, S'_m\} \in K_1, \quad \tilde{K}'_2 = \{S'_{m+1}, \ldots, S'_{m+q}\} \in K_2,$$

$$S'_i = \{\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in}\}, \quad \beta_{ij} \in \{0.1\}, \quad i = 1, 2, \ldots m+q, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Обучающая и контрольная информация часто задается в виде таблиц обучения и контроля, поэтому удобно обозначать ее, соответственно, через

$$[TO]_{n,k,l}, \quad [TK]_{n,m,q}.$$

Если из соответствующей информации изъяты описания объектов S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_t} (соответственно, S'_{u_1}, S'_{u_2}, S'_{u_v}), то обозначается

$$[TO]_{n,k,l} \backslash \{S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_t}\} \quad \text{и} \quad [TK]_{n,m,q} \backslash \{S'_{u_1}, S'_{u_2}, S'_{u_v}\}.$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-00433, 00-15-96064), программы РАН "Интеллектуальные компьютерные технологии" и программы INTAS, проект 00-397.

При одном изъятом S_i имеем $[TO]_{n,k,l} \backslash S_i = [TO]_{n,k-1,l}$, $S_i \in K_1$, $[TO]_{n,k,l-1}$, $S_i \in K_2$. Аналогичные обозначения примем для контрольной информации.

С задачей распознавания связаны не всюду определенные булевы функции $F_1(x_1, \ldots, x_n)$, $F_2(x_1, \ldots, x_n)$: $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1 на $\tilde{K}_1$, равна 0 на $\tilde{K}_2$ и не определена на остальных наборах; $F_2 = \bar{F}_1$ на $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ и не определена на остальных наборах.

В дальнейшем рассматриваются семейства $\{\mathcal{A}\}$ алгоритмов, и из них по данной $[TO]_{n,k,l}$ или по паре $[TO]_{n,k,l}$, $[TK]_{n,m,q}$ выбирается алгоритм, доставляющий максимальное значение одному из следующих функционалов качества алгоритма.

1. $\varphi_{\text{ск}}(\mathcal{A})$ – функционал скользящего контроля. Применяется

$$\mathcal{A}([TO]_{n,k,l} \backslash S_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k+l.$$

Пусть r – число правильно распознанных S_i, $i = 1, 2, \ldots, k + l$. Тогда $\varphi_{\text{ск}}(\mathcal{A}) = r/(k + l)$.

2. $\varphi_{\text{контр}}(\mathcal{A})$ – функционал независимого контроля. Применяется

$$\mathcal{A}([TO]_{n,k,l} \backslash S'_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m, m+l, \ldots, m+q.$$

Пусть t – число правильно распознанных S'_j, $j = 1, 2, \ldots, m, m + 1, \ldots, m + q$. Тогда

$$\varphi_{\text{const}}(\mathcal{A}) = t/(m+q).$$

В дальнейшем рассматриваются ДНФ $\mathfrak{D}(F)$, реализующие не всюду определенные булевы функции F. Если $N_1(F)$, $N_0(F)$ – множество единиц (соответственно, нулей) F и $\mathfrak{D}(F) = Q_1 \vee \ldots \vee Q_p$, Q_i – элементарные конъюнкции (ЭК), $i = 1, 2, \ldots, p$, то

$$N_{Q_i} \cap N_1(F) \neq \varnothing, \quad N_{Q_i} \cap N_1(F) = \varnothing, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Т.е. предполагается, что все ЭК в $\mathfrak{D}(F)$ допустимые.

2. МНОЖЕСТВО РАСПОЗНАЮЩИХ АЛГОРИТМОВ

Определяемое ниже семейство $\mathcal{A}$ является вариантом множества алгоритмов с представительными наборами [6]. Оно определяется заданием ДНФ:

$$\mathfrak{D}_1(F_1) = \bigvee_{i=1}^{t} Q_i, \quad \mathfrak{D}_2(F_2) = \bigvee_{j=1}^{v} Q'_j, \tag{1}$$

параметрами $W(Q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$, $W(Q'_j)$, $j = 1, 2, \ldots, v$, и параметрами $W(S_i) = W_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k + 1, \ldots, q + l$. В некоторых случаях применяются обозначения

$$W(Q_i) = W^i, \quad i = 1, 2, \ldots, t, \quad W(Q'_j) = W^j, \quad j = 1, 2, \ldots, v.$$

Алгоритм $\mathcal{A}$ представляется в виде композиции $\mathcal{B}\,\mathcal{C}$ распознающего оператора $\mathcal{B}$ и описанного ранее решающего правила $\mathcal{C}$. Оператор $\mathcal{B}$ определяется, во-первых, заданием ДНФ $\mathfrak{D}(F_1)$, $\mathfrak{D}(F_2)$ и (1). При этом ЭК Q_i, Q'_j, $i = 1, 2, \ldots, t$, $j = 1, 2, \ldots, v$, не обязательно простые импликанты, т.е. интервалы N_{Q_i}, N_{Q_j} не обязательно максимальные. Во-вторых, заданием способа вычисления оценок $\Gamma_1(Q, S)$, $\Gamma_2(Q, S)$, $\Gamma_1(S)$, $\Gamma_2(S)$:

$$\begin{gathered}
\Gamma_1(Q, S) = \left(\sum_{S_i \in \{N_1(F_1) \cap N_Q\}} Q(S_i) W(S_i)\right) W(Q) Q(S), \quad \{N_1(F_1) \cap N_Q\} = \varnothing, \quad \Gamma_1(Q, S) = 0, \\
\Gamma_2(Q', S) = \left(\sum_{S_i \in \{N_1(F_2) \cap N_Q\}} Q'(S_i) W(S_i)\right) W(Q') Q(S), \quad \{N_1(F_2) \cap N_Q\} = \varnothing, \quad \Gamma_2(Q, S) = 0;
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\Gamma_1(S) = \sum_{i=1}^{t} \Gamma_1(Q_i, S) = \left(\sum_{i=1}^{t} Q_i(S) W(Q_i) \sum_{S_u \in \{N_1(F_1) \cap N_Q\}} W(S_u)\right) Q(S),$$

$$\Gamma_2(S) = \sum_{i=1}^{v} \Gamma_1(Q'_j, S) = \left(\sum_{j=1}^{v} Q'_j(S) W(Q'_j) \sum_{S_u \in \left\{N_1(F_1) \cap N_{Q_j}\right\}} W(S_u)\right) Q(S). \tag{3}$$

Очевидно, что $\Gamma_1(S)$, $\Gamma_2(S)$ являются билинейными формами:

$$\sum d_{it} W(Q_i) W(S_t), \quad \sum c_{ju} W(Q'_j) W(S_u). \tag{4}$$

При процедуре скользящего контроля объекты S_t изымаются из $[TO]_{n,k,l}$. Поэтому (2), (3) заменяются на (5), (6). Так,

$$\Gamma_1(Q, S_t) = \left(\sum_{S_t \in \{(N_1(F_1) \backslash S_t) \cap N_Q\}} Q(S_t) W(S_t)\right) W(Q) Q(S_t), \ \{(N_1(F_1) \backslash S_t) \cap N_Q\} = \varnothing, \Gamma_1(Q, S_t) = 0 \tag{5}$$

Аналогично меняется $\Gamma_2(Q', S_t)$.

В то же время

$$\Gamma_2(S_t) = \sum_{v=1}^{t} \Gamma_1(Q_v, S_t) = \left(\sum_{v=1}^{t} Q_v(S_t) W(Q_v) \sum_{S_u \in \{(N_1(F_1) \backslash S_t) \cap N_Q\}}^{t} W(S_u)\right) Q_v(S_t). \tag{6}$$

Аналогично меняется $\Gamma_2(S_t)$.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ПО ФУНКЦИОНАЛУ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТРОЛЯ $\varphi_{\text{ск}}(\mathcal{A})$

Пусть $\tilde{\gamma}^1 = (\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1j}, \ldots \gamma_{1n}), \ldots, \tilde{\gamma}^p = (\gamma_{p1}, \ldots, \gamma_{pj}, \ldots, \gamma_{pn})$ – вершины E^n – единичного n-мерного куба. Пусть N_Q – минимальный интервал (если он существует), содержащий вершины $\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^p$, Q – соответствующая ему конъюнкция.

Очевидно, такой интервал существует тогда и только тогда, когда в матрице $\|\gamma_{ij}\|_{n \times p}$ есть хотя бы один нулевой или единичный столбец.

Конъюнкцию Q в дальнейшем будем обозначать через $Q(\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^p)$.

Пусть $j_1, \ldots, j_v$ – номера всех одинаковых столбцов в матрице $\|\gamma_{ij}\|_{n \times p}$, $v < p$.

Утверждение 1. *Верно соотношение*

$$Q(\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^p) = x_{j_1}^{\gamma_{ij_1}} \ldots x_{j_v}^{\gamma_{ij_v}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Доказательство. Очевидно, $Q(\tilde{\gamma}^1) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Добавление к Q любого сомножителя приведет к тому, что хотя бы в одной $\tilde{\gamma}^u$, $1 \le u \le p$, преобразованная конъюнкция окажется равной 0. Удаление любого сомножителя даст ЭК, соответствующую не минимальному интервалу, содержащему вершины $\tilde{\gamma}^1, \ldots, \tilde{\gamma}^p$. Утверждение доказано.

Пусть $\{Q(S_u, S_v)\}$ $(u = 1, 2, \ldots, k,\ v = 1, 2, \ldots, u-1, u+1, \ldots, k)$ – совокупность конъюнкций, которым соответствуют минимальные интервалы, содержащие всевозможные пары различных точек из $\tilde{K}_1$. Аналогично задается $\{Q(S_p, S_d)\}$, $S_p \neq S_d$, $S_p, S_d \in \tilde{K}_2$.

Определение 1. Объект S_t называется изолированным в K_1 (соответственно, в K_2), если каждый непустой $N_{Q(S_u, S_v)}$, $Q(S_u, S_v) \in \{Q(S_u, S_v)\}$ (соответственно, каждый непустой $N_{Q(S_p, S_d)}$, $Q(S_p, S_d) \in \{Q(S_p, S_d)\}$) имеет непустое пересечение с $N_0(F_1)$ (соответственно, с $N_0(F_2)$).

Выделим в $\tilde{K}_1$ (соответственно, в $\tilde{K}_2$) все изолированные объекты $S_{r_1}, \dots, S_{r_p}$ (соответственно, $S_{r_{p+1}}, \dots, S_{r_{p+d}}$). Рассмотрим множества

$$M(\tilde{K}_1) = \tilde{K}_1 \backslash \{S_{r_1}, \dots, S_{r_p}\}, \quad 1 \le r_1, \dots, r_p \le k,$$

$$M(\tilde{K}_2) = \tilde{K}_2 \backslash \{S_{r_{p+1}}, \dots, S_{r_{p+d}}\}, \quad k+1 \le r_{p+1}, \dots, r_{p+d} \le k+l,$$

$$\{Q(S_i, S_j)\}, \quad S_i \ne S_j, \quad S_i, S_j \in M(\tilde{K}_1), \quad N_{Q(S_i, S_j)} \cap N_0(F_1) = \varnothing,$$

$$\{Q(S_u, S_v)\}, \quad S_u \ne S_v, \quad S_u, S_v \in M(\tilde{K}_2), \quad N_{Q(S_u, S_v)} \cap N_0(F_2) = \varnothing.$$

Рассмотрим произвольный алгоритм $\mathcal{A}$, оператор которого задается произвольными ДНФ

$$\mathfrak{D}_1(F_1) = \bigvee_{i=1}^{t} Q_i, \quad \mathfrak{D}_2(F_2) = \bigvee_{j=1}^{g} Q'_j,$$

обладающими следующими свойствами:

а) для каждой $Q(S_i, S_j) \in \{Q(S_i, S_j)\}$ найдется $Q_r \in \mathfrak{D}_1(F_1)$, $1 \le r \le t$, $r = r(i, j)$, такая, что

$$N_{Q(S_i, S_j)} \subseteq N_{Q_r};$$

б) для каждой $Q(S_u, S_v) \in \{Q(S_u, S_v)\}$ найдется $Q_m \in \mathfrak{D}_2(F_2)$, $1 \le m \le g$, $m = m(u, v)$, такая, что

$$N_{Q(S_u, S_v)} \subseteq N'_{Q_m}.$$

Такие пары ДНФ $(\mathfrak{D}_1(F_1), \mathfrak{D}_2(F_2))$ называются в дальнейшем достаточными.

Пусть также в операторе алгоритма $\mathcal{A}$ все параметры $W(Q)$, $Q \in \mathfrak{D}_1(F_1)$, $W(Q')$, $Q' \in \mathfrak{D}_2(F_2)$, $W^1, \dots, W^{k+l}$ положительные.

Теорема 1. *Любой алгоритм с достаточной парой ДНФ* $(\mathfrak{D}_1(F_1), \mathfrak{D}_2(F_2))$ *и положительными параметрами правильно распознает в скользящем контроле все неизолированные объекты обучающей выборки.*

Доказательство. Пусть $S_i \in \tilde{K}_1$ и S_i – неизолированный объект; тогда в $K_1 \backslash S_i$ существует объект S_j и в $\mathfrak{D}_1(F_1)$ существует конъюнкция Q_r, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k$, $i \ne j$, такие, что $N_{Q(S_i, S_j)} \subseteq N_{Q_r}$.

Объекты $S_i, S_j \in N_{Q_r}$, $Q_r(S_i) = Q_r(S_j) = 1$, $S_j \in \{N_1(F_1) \cap N_Q\} \backslash S_i$. Но тогда, в силу (5), (6),

$$\Gamma_1(Q_r, S_i) \ge W(Q_r)W(S_i) > 0, \quad \Gamma_1(S_i) > 0.$$

Решающее правило отнесет S_i к классу K_1, так как ни одна из конъюнкций Q'_j из $\mathfrak{D}_2(F_2)$ не равна 1 на S_i (Q'_j – допустимая ЭК для F_2). Аналогично доказывается, что каждый неизолированный объект S_u из $\tilde{K}_2$ будет занесен алгоритмом $\mathcal{A}$ в класс $\tilde{K}_2$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Любой алгоритм с произвольными* $\mathfrak{D}_1(F_1)$, $\mathfrak{D}_2(F_2)$ *и произвольными параметрами* $W(Q)$, $W(S_i)$ *отказывается от распознавания изолированных в* K_1 *и* K_2 *объектов*

Доказательство. Пусть $S_i \in \tilde{K}_1$, S_i изолирован в K_1, $1 \le i \le k$. Тогда в любом непустом $N_{Q(S_i, S_t)}$, $t = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k$, находятся нули функции F_1. Но тогда любой содержащий S_i интервал, соответствующий допустимой конъюнкции, не содержит ни одного S_t из $\tilde{K}_1 \backslash S_i$. Формулы (5), (6) показывают, что $\Gamma_1(S_i) = 0$.

Очевидно, $\Gamma_2(S_i) = 0$, так как ни одна из ЭК $\mathfrak{D}(F_2)$ не равна 1 на S_i. Теорема доказана.

Следствие. Если число изолированных в K_1 и K_2 объектов из $[TO]_{n,k,l}$ равно p и d соответственно, то

$$\max_{\mathcal{A}} \varphi_{sk}(\mathcal{A}) = 1 - \frac{p+d}{k+l},$$

и этот максимум достигается на любом $\mathcal{A}$ с достаточной парой ДНФ и положительными параметрами $W(Q)$, $W(S_i)$.

Из доказательства теоремы следует, что для выяснения результатов скользящего контроля по $[TO]_{n\ k,l}$ достаточно выделить все объекты, изолированные в K_1 и K_2. Для этого требуется построить не более $k(k-1)$ непустых $N_{Q(S_i,S_j)}$ в $\tilde{K}_1$ и не более $l(l-1)$ непустых $N_{Q(S_u,S_v)}$ в $\tilde{K}_2$. Для каждого $Q(S_i, S_j)$ проверить l равенств $Q(S_i, S_j)(S_r) = 0$, $r = k+1, \ldots, k+l$. Аналогично, для каждого $Q(S_u, S_v)$ проверить k равенств. Очевидно, суммарное число операций для построения всех изолированных объектов не превосходит

$$\mathrm{const}\,n(lk(k-1)+kl(l-1)) = (\mathrm{const})'nkl(k+l-2).$$

Из доказанного также следует, что при построении алгоритма, оптимального по $\varphi_{\text{ск}}$, могут быть выбраны любые положительные параметры. Это подвергает сомнению саму возможность применения скользящего контроля при оценке качества распознающих алгоритмов.

Очевидно построение хотя бы одной достаточной пары $(\mathfrak{D}_1(F_1)\mathfrak{D}_2(F_2)$. Изолированные объекты реализуются произвольными конъюнкциями

$$\bigvee Q_t^1 \text{ в } \mathfrak{D}_1(F_1), \quad \bigvee Q_r^2 \text{ в } \mathfrak{D}_2(F_2).$$

Тогда

$$\mathfrak{D}_1(F_1) = \bigvee Q_t^1 \vee \bigvee Q(S_i, S_j) \text{ по всем допустимым } Q(S_i, S_j),$$
$$i = 1, 2, \ldots, k, \ j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k,$$

$$\mathfrak{D}_2(F_2) = \bigvee Q_r^2 \vee \bigvee Q(S_u, S_v) \text{ по всем допустимым } Q(S_u, S_v),$$
$$u = k+1, 2, \ldots, k+l, \ \ v = k+1, \ldots, i-1, u+1, \ldots, k+l.$$

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО НЕЗАВИСИМОМУ КОНТРОЛЮ

Рассматривается задача построения алгоритма, максимального по функционалу $\varphi_{\text{контр}}(\mathcal{A})$. Требуется найти алгоритм, дающий наибольшее число правильных распознаваний для $m+q$ объектов-строк $TK_{n,m,q}$. Запишем условия правильного распознавания объектов $S'_1, \ldots, S'_m$, $S'_{m+1}, \ldots, S'_{m+q}$:

$$\begin{gathered}\Gamma_1(S'_1) > \Gamma_2(S'_1), \ldots, \Gamma_1(S'_m) > \Gamma_2(S'_m),\\ \Gamma_1(S'_{m+1}) > \Gamma_2(S'_{m+1}), \ldots, \Gamma_1(S'_{m+q}) > \Gamma_2(S'_{m+q}).\end{gathered} \tag{7}$$

Согласно (4), система (7) при фиксированных $\mathfrak{D}_1(F_1)$, $\mathfrak{D}_2(F_2)$ является, вообще говоря, несовместной системой билинейных неравенств.

Наилучшему по $\varphi_{\text{контр}}(\mathcal{A})$ алгоритму соответствует (любое) решение максимальной совместной подсистемы системы (7). Методы отыскания таких подсистем весьма трудоемки. Построению приближенных методов посвящено большое число публикаций, например [7], [8].

Пусть выделена совместная подсистема

$$\begin{gathered}\Gamma_1(S_{i_1}) > \Gamma_2(S_{i_1}), \ldots, \Gamma_1(S_{i_p}) > \Gamma_2(S_{i_p}), \quad p \le k,\\ \Gamma_1(S_{j_1}) > \Gamma_2(S_{j_1}), \ldots, \Gamma_1(S_{j_d}) > \Gamma_2(S_{j_d}), \quad d \le l.\end{gathered} \tag{8}$$

Для формирования алгоритма может быть выбрано любое решение (8). Как правило, решение выбирается как решение задачи

$$\left(\sum_{i=1}^{k+l} |1 - W(S_i)| + \sum_{Q \in \mathfrak{D}(F_1)} |1 - W(Q)| + \sum_{Q' \in \mathfrak{D}(F_2)} |1 - W(Q')|\right) \longrightarrow \min \tag{9}$$

при ограничениях (8).

Во многих случаях (9) заменяется на функционал, оптимизация которого может выполняться традиционными методами:

$$\left(\sum_{i=1}^{k+l}[1-W(S_i)]+\sum_{Q\in\mathfrak{D}(F_1)}[1-W(Q)]+\sum_{Q'\in\mathfrak{D}(F_2)}[1-W(Q')]\right)\longrightarrow \min, \tag{10}$$

$$0\le W(S_i)\le 1,\quad 0\le W(Q),\quad W(Q')\le 1.$$

К указанной процедуре оптимизации следует добавить алгоритм выбора $\mathfrak{D}_1(F_1)$ и $\mathfrak{D}_2(F_2)$, что делает синтез $\mathcal{A}$ весьма сложным. Поэтому важны методы, позволяющие хотя бы частично строить ДНФ для F_1, F_2, уменьшать число неравенств в (7) и находить хотя бы некоторые значения $W(S_i)$, $W(Q)$, $W(Q')$ с помощью нетрудоемких методов.

Пусть $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ – не всюду определенные булевы функции:

$$\tilde{F}_1=\begin{cases}1 \text{ на } \tilde{K}_1=\{S_1,\dots,S_k\},\\ 0 \text{ на } \tilde{K}_2\cup\{S'_{m+1},\dots,S'_{m+q}\} - \text{объектах из } K_2\\ \text{ в } [TO]_{n,k,l} \text{ и } [TK]_{n,m,q}, \text{ не определена на остальных наборах,}\end{cases}$$

$$\tilde{F}_2=\begin{cases}1 \text{ на } \tilde{K}_2=\{S_{k+1},\dots,S_{k+l}\},\\ 0 \text{ на } \tilde{K}_1\cup\{S'_1,\dots,S'_m+q'\} - \text{объектах из } K_1\\ \text{ в } [TO]_{n,k,l} \text{ и } [TK]_{n,m,q}, \text{ не определена на остальных наборах.}\end{cases}$$

Пусть S'_j – контрольный объект из K_1, и пусть существует S_t в $\tilde{K}_1$ такой, что в $N_{Q(S_t,S'_j)}$ нет нулей функции $\tilde{F}_1$, т.е. $Q(S_t, S'_j)(S_i)=0$, $i=k+1,\dots,k+l$, $Q(S'_u, S'_j=0$, $u=m+1,\dots,m+q)$. Зафиксируем все такие $S'_{j_1},\dots,S'_{j_p}$ из K_1 в $[TK]_{n,m,q}$.

Аналогично определим и зафиксируем $S'_{u_1},\dots,S'_{u_d}$ из K_2 в $[TK]_{n,m,q}$ (при этом K_1 заменяется на K_2, $\tilde{F}_1$ – на $\tilde{F}_2$).

Положим $\mathfrak{M}_1=\{S'_{j_1},\dots,S'_{j_p},S'_{u_1},\dots,S'_{u_d}\}$.

Пусть S'_v – контрольный объект из $\tilde{K}_1$ и все $N_{Q(S_i,S_v)}$, $i=1,2,\dots,k$, содержат нули функции F_1, т.е. наборы из $\tilde{K}_2$. Зафиксируем все такие $S'_{v_1},\dots,S'_{v_r}$ из K_1 в $[TK]_{n,m,q}$. Аналогично определим и зафиксируем $S'_{u_1},\dots,S'_{u_h}$ из K_2 в $[TK]_{n,m,q}$.

Положим $\mathfrak{M}_2=\{S'_{v_1},\dots,S'_{v_r},S'_{u_1},\dots,S'_{u_h}\}$.

Утверждение 2. *Ни один из элементов $\mathfrak{M}_2$ не будет распознан ни одним алгоритмом с произвольными ДНФ $\mathfrak{D}_1(F_1)$, $\mathfrak{D}_2(F_2)$, реализующими не всюду определенные F_1, F_2.*

Доказательство. S'_{v_i}, $i=1,2,\dots,r$, не может быть отнесен к классу K_1, так как любой интервал, проходящий через S'_{v_i}, и любой обучающий S_t из $\tilde{K}_1$ содержит нули функции F_1. Поэтому ни одна ЭК Q такая, что $Q(S'_{v_i})=1$, не обращается в 1 ни на одном S_t из $\tilde{K}_1$. Поэтому в любом $\mathcal{A}$: $\Gamma_1(S'_{v_i})=0$ объект S'_{v_i} либо не будет распознан, либо будет занесен в K_2, т.е. распознан неправильно. Аналогично доказывается утверждение 1 для $S'_{u_1},\dots,S'_{u_h}$ из K_2 в $[TK]_{n,m,q}$.

Следствие. Неравенства, соответствующие объектам $S'_{v_1},\dots,S'_{v_r},S'_{u_1},\dots,S'_{u_h}$, следует удалить из системы (7).

Удалим из контрольной выборки объекты из множества $\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$. Из системы (7) удалим неравенства, соответствующие этим объектам. Построим ДНФ $\tilde{\mathfrak{D}}_1(F_1)$, $\tilde{\mathfrak{D}}_2(F_2)$, реализующие F_1,

F_2 соответственно. В системе билинейных неравенств, построенной для $\{S'_1, \ldots, S'_m, S'_{m+1}, \ldots$ $\ldots, S'_{m+q}\}\backslash\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, найдем совместную подсистему (может быть, максимальную) и, решив ее, получим значения параметров $W(Q)$, $Q \in \tilde{\mathfrak{D}}_1(F_1)$, $W(Q')$, $Q' \in \tilde{\mathfrak{D}}_2(F_2)$, $W(S_1), \ldots, W(S_{k+l})$.

Тем самым определен алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}$. Пусть $M_1(\tilde{\mathcal{A}})$, $M_2(\tilde{\mathcal{A}})$ – множество объектов из $[TK]_{n,m,q}$, принадлежащих классам K_1, K_2 соответственно и правильно распознаваемых алгоритмом $\tilde{\mathcal{A}}$.

Теорема 3. *Существует добавление в* $\tilde{\mathfrak{D}}_1(F_1)$, $\tilde{\mathfrak{D}}_2(F_2)$ *конъюнкций вида* $Q(S_i, S'_j)$, $S_i \in [TO]_{n,k,l}$, $S'_j \in [TK]_{n,q,m}$, *такое, что, задав величины* $W(Q(S_i, S'_j))$ *и изменив некоторые из параметров* $W(S_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k + l$, *построим алгоритм* $\mathcal{A}$, *правильно распознающий все объекты из* $\mathfrak{M}_1$ *и такой,что*

$$M_1(\tilde{\mathcal{A}}) \subseteq M_1(\mathcal{A}), \quad M_2(\tilde{\mathcal{A}}) \subseteq M_1(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Пусть $S'_j \in K_1$, $1 \le j \le m$. По определению M_1, в $[TO]_{n,k,l}$ существует $S_i \in \tilde{K}_1$, $1 \le i \le k$, такой, что $N_{Q(S_i, \tilde{S}_j)}$ не содержит нулей функции $\tilde{F}_1$. Следовательно, $Q(S_i, \tilde{S}_j)$ – допустимая ЭК для F_1 и $N_{Q(S_i, \tilde{S}_j)}$ не содержит контрольных объектов из K_2. Пусть также в $\tilde{\mathcal{A}}$ будет $\Gamma_1(S'_j) \le$ $\le \tilde{\Gamma}_2(S'_j)$, т.е. в алгоритме $\mathcal{A}$ объект S'_j не зачислен в K_1. В противном случае, не меняя $\mathcal{A}$, переходим к следующему объекту из $\mathfrak{M}_1$. Выделим в $\tilde{K}_1$ все $S_{u_1}, \ldots, S_{u_p}$ такие, что $Q(S_i, \tilde{S}_j)(S_{u_r}) \ne 0$, $r = 1, 2, \ldots, p$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: среди $W(S_{u_r})$, $r = 1, 2, \ldots$, в $\tilde{\mathcal{A}}$ есть хотя бы один $W(S_u) \ne 0$, $1 \le h \le p$.

Положим

$$W(Q(S_i, S'_j)) = \frac{\tilde{\Gamma}_2(S'_j) - \tilde{\Gamma}_1(S'_j) + c}{W(S_{u_h})}, \quad c > 0. \tag{11}$$

Добавим к $\tilde{\mathfrak{D}}_1(F_1)$ ЭК $Q(S_i, S'_j)$ с весом $W(Q(S_i, S'_j))$, определенным согласно (11), не меняя остальных параметров. Обозначим новый алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j)$. В нем к оценке $\tilde{\Gamma}_1(S'_j)$ будет добавлена величина, не меньшая $W(S_{u_h}) : W(Q(S_i, S'_j)) = \tilde{\Gamma}_2(S'_j) - \tilde{\Gamma}_1(S'_j) + c$. В $\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j)$ оценка $\tilde{\Gamma}_2(S'_j)$ не изменится, так как $Q(S_i, S'_j)$ не участвует в формировании оценок за K_2. Следовательно, в $\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j)$ объект S'_j будет зачислен в K_1, т.е. распознан правильно. Объекты из M_1 разве что увеличат оценки за K_1 и оценки за K_2 у них не изменятся. Поэтому $M_1(\tilde{\mathcal{A}}) \subseteq M_1(\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j))$. С контрольными объектами из K_2 интервал $N_{Q(S_i, S_j)}$ не пересекается. Поэтому для них обе оценки не изменятся, т.е. $M_2(\tilde{\mathcal{A}}) \subseteq M_2(\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j))$.

Случай 2: $W(S_{u_r}) = 0$ в $\tilde{\mathcal{A}}$, $r = 1, 2, \ldots, p$. Пусть

$$d = \min_{S'_v \in M_2(\tilde{A})} [\tilde{\Gamma}_2(S'_v) - \tilde{\Gamma}_1(S'_v)]. \tag{12}$$

Положим $W(S_{u_1}) = \varepsilon$, $W(S_{u_i}) = 0$, $i = 2, 3, \ldots, r$. Выделим в $\tilde{\mathfrak{D}}_1(F_1)$ все ЭК $Q_{t_1}, \ldots, Q_{t_p}$ такие,что $Q_{t_j}(S_{u_1}) = 1$. Пусть $W(Q_{t_1}) + \ldots + W(Q_{t_p}) = N$, $W(Q_{t_i})$ – значение параметра в алгоритме $\tilde{\mathcal{A}}$. Выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon(W(Q_{t_1}) + \ldots + W(Q_{t_p})) < d.$$

Далее переход от $\tilde{\mathcal{A}}$ к $\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j)$ осуществляется, как в случае 1. Очевидно, в новом алгоритме S'_j будет зачислен в K_1, т.е. распознан правильно, $M_1(\tilde{\mathcal{A}}) \subseteq M_1(\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j)) < d$. Но если учесть (12), то оценка за K_2 при этом останется больше оценки за K_1, т.е. $M_2(\tilde{\mathcal{A}}) \subseteq M_2(\tilde{\mathcal{A}}(+S'_j))$.

Достройка проводится последовательно для объектов из $K_1 \cap \mathfrak{M}_1$. Затем (полностью аналогично) – для объектов из $\mathfrak{M}_1 \cap K_2$. Очевидно, на этом этапе конъюнкции $Q(S_u, S'_v)$, $S'_v \in \mathfrak{M}_1 \cap K_2$, пополняют ДНФ $\tilde{\mathfrak{D}}_1(F_2)$. Теорема доказана.

Заметим, что вместо $Q(S_i, S'_j)$ могут быть добавлены конъюнкции Q_t такие, что $N_{Q(S_i, S'_j)} \subset N_{Q_t}$ и интервалы N_{Q_t} не содержат нулей функции $\tilde{F}_1$ (соответственно, $\tilde{F}_2$), если $S'_j \in K_1$ (соответственно, $S'_j \in K_2$). Вычисление весов новых конъюнкций и замена некоторых $W(S_i)$, равных 0, на положительные значения выполняются так же, как при доказательстве теоремы 3.

Легко видеть, что выделение объектов из $\mathfrak{M}_2$ и доопределение алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}$ так, чтобы все объекты из $\mathfrak{M}_1$ распознавались правильно, не требует больших вычислений. Если $\chi(\mathcal{A}, S)$ – число операций при распознавании алгоритмом $\mathcal{A}$ объекта S, то суммарная трудоемкость конструирования $\mathcal{A}$, не делающего ошибок на $\mathfrak{M}_1$ и не менее точного, чем $\tilde{\mathcal{A}}$ на $[TK]_{n,m,q}\backslash(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2)$, не превосходит величины, пропорциональной $\chi(\mathcal{A})|\mathfrak{M}_1|$. Вместе с тем исключение $|(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2)|$ из неравенств упрощает процесс построения оптимального или приближенного оптимального по $\varphi_{\text{контр}}$ алгоритма.

5. ОДИН СПОСОБ УВЕЛИЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ НА $[TK]_{n,m,q}$

Пусть в задаче с $[TO]_{n,k,l}$, $[TK]_{n,m,q}$ проведены все построения, описанные в разд. 4. Сконструирован алгоритм $\mathcal{A}$, который в $[TK]_{n,m,q}\backslash\mathfrak{M}_2$ не распознал или неправильно распознал $S'_{i_1}, \ldots, S'_{i_d}$, $d \le m$, из K_1 и $S'_{j_1}, \ldots, S'_{j_h}$, $d \le m$, из K_2.

Введем не всюду определенные $\hat{F}_1$, $\hat{F}_2$: $\hat{F}_1(S_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $\hat{F}_1(S_j) = 0$, $j = k+1, \ldots, k+l$; $\hat{F}_1(S'_t) = 0$ для всех S'_t из $\{S'_{m+1}, \ldots, S'_{m+q}\}\backslash\{S'_{j_1}, \ldots, S'_{j_h}\}$. На остальных наборах из E^n функция $\hat{F}_1$ не определена. В отличие от $\hat{F}_1$, функция $\hat{F}_2$ равна 0 не на всех объектах из K_2, а только на правильно распознанных алгоритмом $\mathcal{A}$; $\hat{F}_2(S_j) = 1$, $j = k+1, \ldots, k+l$; $\hat{F}_2(S_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $\hat{F}_2(S'_v) = 0$ для всех S'_v из $\{S'_1, \ldots, S'_m\}\backslash\{S'_{i_1}, \ldots, S'_{i_d}\}$, т.е. всех правильно распознанных контрольных объектов из K_1. На остальных наборах $\hat{F}_2$ не определена.

Выделим в множестве $\{S'_{i_1}, \ldots, S'_{i_d}\} \subseteq K_1$ любой S'_{i_j}, $1 \le j \le d$, для которого существует $S_t \in K_1$ такой, что

$$N_{Q(S_t, S_{i_j})} \cap N_0(\hat{F}_1) = \varnothing. \tag{13}$$

В отличие от построений разд. 4, $Q(S_t, S'_{i_j})$ может быть равной 1 на контрольных объектах из K_2, но только тех, что не были отнесены в K_2 алгоритмом из разд. 4. Пусть опять алгоритмом $\mathcal{A}$ правильно распознаны контрольные объекты из множеств $M_1(\mathcal{A})$, $M_2(\mathcal{A})$, соответственно, из классов K_1, K_2 в контрольной таблице. Пусть в $\mathcal{A}$ функция F_1 реализована ДНФ $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_1)$.

Присоединим к $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_1)$ ЭК $Q(S_t, S'_{i_j})$ (или любую поглощающую ее конъюнкцию, интервал которой не содержит контрольных объектов из K_2, правильно распознанных в $\mathcal{A}$, и является допустимым для F_1). Далее выполним построения, аналогичные тем, что были использованы при доказательстве теоремы 3. Если $W(S_t) \ne 0$ в алгоритме $\mathcal{A}$, то определим $W(Q(S_t, S'_{i_j}))$ таким образом, чтобы в новом алгоритме $\tilde{\mathcal{A}}$ выполнялось неравенство $\Gamma_1(S'_{i_j}) > \Gamma_1(S'_{i_j})$. В алгоритме $\mathcal{A}$ для S'_{i_j} имеем $\Gamma_2 > \Gamma_1$. Достаточно положить $W(Q(S_t, S'_{i_j}))\ W(S'_{i_j}) > \Gamma_2 - \Gamma_1$. Если ЭК $W(Q(S_t, S'_{i_j}))$ уже содержится в $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_1)$, следует увеличить вес W на величину c такую, чтобы выполнялось неравенство

$$cW(S_t) > \Gamma_2 - \Gamma_1.$$

Легко видеть, что объекты из $\tilde{K}_1$ при этом получат не меньшую оценку Γ_1. У правильно распознанных объектов из K_2 оценки не изменятся, так как на них $Q(S_t, S'_{i_j})$ равна 0.

Если $W(S_t) = 0$ и $Q(S_t, S_{i_j})$ не содержится в $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_1)$, то, как и при доказательстве теоремы 3, полагаем $W(S_t) = \varepsilon$. Выбираем ε столь малым, чтобы прирост оценки Γ_1 для правильно распознанных контрольных объектов из K_2 (множество $M_2(\mathcal{A})$) сохранил для них неравенство $\Gamma_2 > \Gamma_1$. Затем, как и в предыдущем случае, назначаем значение $W(S_t)$.

Наконец, при условии $W(S_t) = 0$ в $\mathcal{A}$, $Q(S_t, S'_{i_j}) \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_1)$, как и ранее, полагаем $W(S_t) = \varepsilon$ так, чтобы сохранить правильное распознавание объектов из K_2, и добавляем к $W(Q(S_t, S'_{i_j}))$ величину c, обеспечивающую неравенство $\Gamma_1(S'_{i_j}) > \Gamma_2(S'_{i_j})$.

Таким образом, конструируется алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}$, в котором $M_2(\tilde{\mathcal{A}}) = M_2(\mathcal{A})$, $M_1(\mathcal{A} \cup S'_{i_j} \subseteq$ $\subseteq M_1(\tilde{\mathcal{A}}))$.

Очевидно, в качестве S'_{i_j} мог быть выбран любой неправильно распознанный объект из $\tilde{K}_1$, удовлетворяющий (13).

Полностью аналогично достраивается алгоритм $\mathcal{A}$ для неправильно распознанного объекта S'_{u_v} из $\tilde{K}_2$, если существует $S_t \in \tilde{K}_2$ такой, что

$$N_{Q(S_t, S_{u_v})} \cap N_0(\hat{F}_2) = \varnothing.$$

При этом ЭК $Q(S_t, S'_{u_v})$ добавляется к $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_2)$ (если эта ЭК в $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}(F_2)$ не содержится). Все назначения и изменения параметров $W(Q(S_t, S'_{u_v}))$, $W(S_t)$ выполняются по тем же правилам. При этом множества $M_1(\mathcal{A})$ и $M_2(\mathcal{A})$ меняются местами в описании конструкции.

Очевидно, что процесс коррекции $\mathcal{A}$, вообще говоря, может быть применен несколько раз. В общем случае результат зависит от порядка ввода в $M_1(\mathcal{A})$, $M_2(\mathcal{A})$ объектов, соответственно, из $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$, удовлетворяющих (13). После каждого ввода одна из функций $\hat{F}_1$, $\hat{F}_1$ увеличивает область определения.

6. О КОНЪЮНКЦИЯХ, ПОГЛОЩАЮЩИХ КОНЪЮНКЦИИ $Q(S_t, S'_j)$

При построении ДНФ $\mathfrak{D}(F_1)$, $\mathfrak{D}(F_2)$ во многих случаях полезно вводить в эти ДНФ не только конъюнкции наибольшего ранга, равные 1 в точках S_t, S'_j, но и поглощающие их конъюнкции.

При этом расширение интервалов не должно приводить к непустоте пересечения не только с нулями, соответственно, функций F_1, F_2, но и с выделенными подмножествами контрольных объектов классов K_2, K_1 соответственно. Ранее в качестве выделенных подмножеств рассматривались либо все объекты из K_2, K_1, либо объекты этих классов, правильно распознанные алгоритмом $\mathcal{A}$.

Сформулируем более общую задачу. Дано: объект S_t из $\tilde{K}_1$ (соответственно, из $\tilde{K}_2$), $S_t \in [TO]_{n\ k,\, l \times 2}$; подмножество K'_1 (соответственно, из K'_2) из $[TK]_{n,\, m,\, q}$, $|K'_1| \le m$, $|K'_2| \le q$; подмножество K''_2 (соответственно, из K''_1) контрольных объектов из K_2 (соответственно, из K_1).

Требуется построить все максимальные интервалы N_Q, содержащие все точки множества $S_t \cup K_1'$ (соответственно, из $S_t \cup K_2'$) и не пересекающиеся с множеством K_2'' (соответственно, из K_1'').

Решим задачу для $S_t \in \tilde{K}_1$, K_1', K_2''. Решение для $S_t \in \tilde{K}_2$, K_2', K_1'' полностью аналогично.

Пусть $\tilde{\alpha}^t = S_t = \{\alpha_{t1}, \ldots, \alpha_{tn}$, $K_1' = \{\tilde{\beta}^{u_1}, \ldots, \tilde{\beta}^{u_d}\}$, $\tilde{\beta}^{u_i} = S'_{u_i}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, $1 \le u_1, \ldots, u_d \le m$; $K_2' = \{\tilde{\beta}^{v_1}, \ldots, \tilde{\beta}^{v_h}\}$, $\tilde{\beta}^{v_j} = S'_{u_j}$, $j = 1, 2, \ldots, h$, $m + 1 \le v_1, \ldots, v_h \le m + q$.

Находим все одинаковые столбцы в матрице со строками $\tilde{\alpha}^t$, $\tilde{\beta}^{u_1}$, …, $\tilde{\beta}^{u_d}$. Пусть их номера суть $t_1, \ldots, t_l$. Тогда (см. утверждение 1) минимальный интервал, содержащий $S_t \cup K_1'$, есть

$$N_{x_{t_1}^{\alpha_{tt_1}} \ldots x_{t_l}^{\alpha_{tt_l}}} = N_{Q(S_t, K_1)}.$$

Очевидно, все искомые $\tilde{Q}$ имеют интервалы, содержащие Q. Заметим, что если в матрице со строками $\tilde{\alpha}^t$, $\tilde{\beta}^{u_1}$, …, $\tilde{\beta}^{u_d}$ нет одинаковых столбцов или $N_{Q(S_t, K_1)} \cap K_2'' \ne \varnothing$, то поставленная задача не имеет решения. В противном случае множество искомых конъюнкций не пусто.

Для каждых $\tilde{\beta}^{v_j}$, $j = 1, 2, \ldots, h$, найдем в множестве $\{t_1, \ldots, t_l\}$ все номера $t_{r_1}, \ldots, t_{r_p}$, $p \le l$ такие,что $\alpha_{tt_{r_1}} \ne \beta_{v_j t_{r_1}}, \ldots, \alpha_{tt_{r_p}} \ne \beta_{v_j t_{r_p}}$.

Сопоставим сомножителям $Q(S_t < K_1')$ переменные $y_{t_1}, \ldots, y_{t_l}$. Для того чтобы $\tilde{\beta}^{v_j} \,\overline{\in}\, N_{\tilde{Q}}$, необходимо и достаточно, чтобы в $\tilde{Q}$ входил хотя бы один из сомножителей с сопоставленными $y_{t_{r_1}}, \ldots, y_{t_{r_p}}$, т.е.

$$\mathcal{D}(S_t, K_1', \tilde{\beta}^{v_j}) = y_{t_{r_1}} \vee \ldots \vee y_{t_{r_p}} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, h.$$

Приведя

$$\prod_{j=1}^{p} \mathcal{D}(S_t, K_1', \tilde{\beta}^{v_j})$$

к ДНФ и выполнив упрощения $y_t y_t = y_t$, $Q \vee QQ' = Q$, получим ДНФ $\tilde{\mathcal{D}} = \bigvee y_{t_{r_1}} \ldots y_{t_{t_g}}$. Каждой конъюнкции этой ДНФ соответствует искомая конъюнкция

$$x_{t_{r_1}}^{\alpha_{tt_{r_1}}} \ldots x_{t_{r_g}}^{\alpha_{tt_{r_g}}}$$

и каждой искомой конъюнкции – конъюнкция из $\tilde{\mathcal{D}}$. Доказательство несложно и проводится традиционными методами. Всего требуется выполнить умножение $|K_2''| \le q$ скобок. Для соответствующей задачи при $S_t \in \tilde{K}_2$ число перемножаемых скобок равно $|K_1''| \le m$.

При больших q и (или) m такое приведение к ДНФ весьма трудоемко. Действительно, задача сводится к нахождению всех верхних нулей монотонной булевой функции, число переменных которой равно числу сомножителей в $Q(S_t, K_1')$.

Сопоставим сомножителям $x_{t_1}^{\alpha_{tt_1}}, \ldots, x_{t_l}^{\alpha_{tt_l}}$ булевы переменные $y_1, \ldots, y_l$. На E^l задаем функцию $f(x_1, \ldots, x_l)$ следующим образом. Пусть $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_l)$, $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_d} = 1$, остальные координаты равны 0.

Сопоставим $\tilde{\gamma}$ конъюнкцию $Q(i_1, \ldots, i_d)$, в которую входят сомножители из $Q(S_t, K_1')$ с номерами $i_1, \ldots, k_d$:

$$f(\tilde{\gamma}) = \begin{cases} 1, \text{ если } N_{Q(i_1, \ldots, i_d)} \cap K_2'' \neq \varnothing, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Утверждение 3. *Функция $f(x_1, \ldots, x_l)$ монотонная. Между нижними нулями функции f и конъюнкциями, которые являются простыми импликантами для $\hat{F}_1$ и поглощающими $Q(S_t, K_1')$, существует взаимно однозначное соответствие, описанное при определении f.*

Доказательство несложно и проводится традиционными методами. Для построения максимальных расширений интервала $N_{Q(S_t, K_1')}$ можно воспользоваться любым из многочисленных методов расшифровки монотонных булевых функций.

Для построения частей ДНФ $\mathfrak{D}(F_1)$, $\mathfrak{D}(F_2)$, состоящих из конъюнкций, интервалы которых содержат одновременно как объекты обучения, так и объекты контроля соответствующего класса и не содержат выделенного подмножества объектов другого класса, следует провести следующие построения (для определенности возьмем класс K_1):

1) для каждого S_t, $S_t \in K_1$, $S_t \in [TO]_{n,k,l}$, выделяются подмножества $M(S_t, K_1)$ контрольных объектов из K_1 такие, что существует интервал N_Q, удовлетворяющий условию

$$S_t \cup M(S_t, K_1) \subseteq N_Q;$$

2) среди всех интервалов N_Q выделяются интервалы, имеющие пустое пересечение с объектами обучения из K_2.

Если эти построения невыполнимы из-за большой трудоемкости, можно ограничиться частью (вообще говоря, не обязательно максимальных) интервалов.

Например, строятся все $N_{Q(S_i, S_j')}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, m$, непустые и имеющие пустое пересечение с объектами обучения из K_2 и выделенным подмножеством (может быть, пустым) контрольных объектов из K_2. Подмножества, включающие S_j, для которых $N_{Q(S_i, S_j')}$ не удовлетворяет этим условиям, в дальнейшем не рассматриваются. Затем проводится аналогичный отбор троек (S_t, S_u', S_v'), число которых, очевидно, не превосходит $km(m-1)$, и т.д.

Задачу также нетрудно свести к расшифровке соответствующей монотонной булевой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев Ю.И.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1962. Вып. 8. С. 5–44.
2. *Журавлев Ю.И.* Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретная матем. и матем. вопр. кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 67–98.
3. *Журавлев Ю.И.* Избранные научные труды. М.: “Магистр”, 1998.
4. *Журавлев Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. М.: Наука, Вып. 33. 1978.
5. *Журавлев Ю.И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5–17.
6. *Баскакова Л.В., Журавлев Ю.И.* Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т. 21. № 5. С. 1264–1275.
7. *Рязанов В.В.* О построении оптимальных алгоритмов распознавания и таксономии (классификации) при решении прикладных задач // Ежегодник “Распознавание, классификация, прогноз. Матем. методы и их применение”. М.: Наука, 1988. Вып. 1. С. 229–279.
8. *Ryazanov V.V.* On the optimization of a class of recognition models // J. Pattern Recognition and Image Analysis. 1991. V. 1. № 1. P. 108–118.