О проблемно-ориентированной оптимизации базисов задач распознавания*

К. В. Воронцов

Вычислительный центр РАН, Москва

Работа выполнена в рамках алгебраического подхода к проблеме распознавания. Для построения базисного набора алгоритмических операторов предложен итерационный процесс, на каждом шаге которого решается задача совместной оптимизации очередного оператора и корректирующей операции. При этом базис оказывается проблемно-ориентированным, то есть настроенным на заданную прецедентную информацию. Подробно рассмотрен случай монотонных корректирующих операций. Для него доказана сходимость метода. Показано, что выбор базисного оператора сводится к стандартной задаче поиска подсистемы неравенств, имеющей максимальный вес. Описана эффективная вычислительная процедура построения монотонной корректирующей операции.

1 Введение

Пусть заданы множества $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$, называемые пространствами допустимых начальных и финальных информаций соответственно. Вычислимые отображения из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$ будем называть алгоритмами, преобразующими информацию, или просто алгоритмами. Множество всех алгоритмов обозначим через $\mathfrak{M}^*$.

Задача синтеза алгоритма состоит в построении произвольного алгоритма, удовлетворяющего некоторой совокупности ограничений, и определяется предикатом $Z\colon \mathfrak{M}^* \to \{0,1\}$. Символом Z условимся обозначать как предикат, так и саму задачу. Любой алгоритм A, для которого $Z(A) = 1$, называется решением задачи Z, или алгоритмом, корректным для задачи Z. Задача называется разрешимой, если для неё существует корректный алгоритм.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00552)

Отображение F из $(\mathfrak{M}^*)^p$ в $\mathfrak{M}^*$ называется корректирующей операцией. Множество всех корректирующих операций обозначим через $\mathfrak{F}^*$:

$$\mathfrak{F}^* = \bigcup_{p=0}^{\infty} \{F \mid F\colon (\mathfrak{M}^*)^p \to \mathfrak{M}^*\}.$$

Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ — семейство корректирующих операций, то $\mathfrak{F}$-расширением множества алгоритмов $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^*$ называется множество алгоритмов

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = \{F(A_1, \ldots, A_p) \mid F \in \mathfrak{F},\ (A_1, \ldots, A_p) \in \mathfrak{M}^p\}.$$

Определение 1. Конечное множество алгоритмов $\{A_1, \ldots, A_p\}$ называется *базисом* задачи Z относительно семейства корректирующих операций $\mathfrak{F}$, если в $\mathfrak{F}(A_1, \ldots, A_p)$ найдётся корректный для Z алгоритм.

В дальнейшем будем рассматривать не все задачи синтеза алгоритмов, а только задачи распознавания.

Пусть $\mathfrak{M}^u$ — подмножество $\mathfrak{M}^*$, $\{x_k\}_{k=1}^q$ — последовательность различных элементов множества $\mathfrak{I}_i$, $\{y_k\}_{k=1}^q$ — последовательность элементов множества $\mathfrak{I}_f$. Задача распознавания определяется предикатом

$$Z(A) = \bigwedge_{k=1}^{q} (A(x_k) = y_k) \bigwedge (A \in \mathfrak{M}^u). \tag{1.1}$$

Последовательность пар $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^q$ называется прецедентной или локальной информацией. Подмножество $\mathfrak{M}^u$ называется универсальной информацией. Следуя [3, 4], будем считать, что универсальная информация учитывается на этапе построения семейств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таким образом, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^u$ и $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}^u$. В данной работе эти семейства предполагаются фиксированными, поэтому основное внимание уделяется локальной информации.

Существует несколько подходов к решению данной задачи.

1. Оптимизационный подход. Сначала из некоторых априорных соображений выбирается модель алгоритмов $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$. Затем путём оптимизации в $\mathfrak{M}$ ищется алгоритм A, удовлетворяющий предикату Z. На практике может оказаться, что выбранная модель не содержит корректного для Z алгоритма, либо используемый метод оптимизации не находит его. Тогда приходится довольствоваться приближённым, в том или ином смысле, решением, либо вообще заменять модель.

2. Алгебраический подход. Наряду с моделью $\mathfrak{M}$ выбирается такое семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M}$ содержит базис данной задачи относительно $\mathfrak{F}$. Тогда решение сводится к построению какого-либо базиса $\{A_1, \ldots, A_p\}$ и выбору корректирующей операции $F \in \mathfrak{F}$, для которой алгоритм $F(A_1, \ldots, A_p)$ является корректным.

В основополагающих работах по алгебраическому подходу [1, 2] показано, что подобное построение возможно для широкого класса задач, называемых регулярными, и при условии, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ обладают свойством полноты. Методы, использованные в вышеуказанных работах при конструктивных доказательствах теорем существования, естественно, не предназначены для непосредственного применения на практике. Синтез решений методами алгебраического подхода для прикладных задач сводится к решению последовательности оптимизационных проблем, первоначальное изучение которых является целью настоящей работы.

2 Оптимизационные задачи построения базиса

Функционал качества задачи распознавания Z есть отображение $Q\colon \mathfrak{M}^* \to [0, \infty)$, зависящее от $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^q$ и $\mathfrak{M}^u$ как от параметров. Функционал качества выбирается из априорных соображений, включая удобство решения оптимизационных задач. Обычно при этом соблюдается условие $Q(A) = 0 \Leftrightarrow Z(A) = 1$.

Чтобы получить решение задачи Z в виде $A = F(A_1, \dots, A_p)$, поставим следующую оптимизационную задачу: найти минимальное p и такие $A_1, \dots, A_p \in \mathfrak{M}$, $F \in \mathfrak{F}$, что $Q(A) \leqslant \varepsilon$ для заданного $\varepsilon \geqslant 0$. При $\varepsilon = 0$ ищется корректный алгоритм, при $\varepsilon > 0$ — приближённое решение.

На практике совместная оптимизация по p элементам множества $\mathfrak{M}$ и элементу множества $\mathfrak{F}$ может натолкнуться на значительные технические трудности. Поэтому предлагается использовать один из итерационных процессов, в общем случае не гарантирующих минимальность p.

1. На p-ом шаге, $p = 1, 2, \dots$ фиксируется подмодель $\mathfrak{M}_p \subseteq \mathfrak{M}$, и путём минимизации функционала $Q(A)$ по множеству $\mathfrak{M}_p$ находится алгоритм $A_p \in \mathfrak{M}_p$. Затем строится корректирующая операция F_p и алгоритм $A^{(p)} = F_p(A_1, \dots, A_p)$, для которого оценивается функционал качества. Итерации прекращаются, как только $Q(A^{(p)}) \leqslant \varepsilon$ для заданного $\varepsilon \geqslant 0$. Данный процесс часто применяется в совокупности с корректирующими операциями, основанными на принципе голосования или выделении областей компетентности.

2. В настоящей работе рассматривается другой итерационный процесс, в котором алгоритмы A_p, начиная с $p = 2$, настраиваются не только на исходную задачу, но и на уменьшение дефекта предыдущих алгоритмов:

$$A_1 = \arg\min_{A \in \mathfrak{M}} Q(A) \tag{2.1}$$

$$(A_p, F_p) = \arg\min_{(A,F) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{F}} Q(F(A_1, \dots, A_{p-1}, A)), \quad p = 2, 3, \dots \tag{2.2}$$

Решением на p-м шаге является алгоритм $A^{(p)} = F_p(A_1, \dots, A_p)$. Итерации прекращаются, как только $Q(A^{(p)}) \leqslant \varepsilon$ для заданного $\varepsilon \geqslant 0$.

При исследовании данного процесса особый интерес будут представлять вопросы, связанные с его сходимостью:

а) при каких условиях гарантируется $Q(A^{(p+1)}) < Q(A^{(p)})$;

б) сколько алгоритмов необходимо взять для получения корректного $A^{(p)}$?

Ответы на эти вопросы, а также практическая реализация данного процесса, зависят от выбора конкретных множеств $\mathfrak{I}_i$, $\mathfrak{I}_f$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$. В качестве первого шага такой конкретизации положим, что алгоритмы из $\mathfrak{M}$ и корректирующие операции из $\mathfrak{F}$ имеют структуру, допускающую применение алгебраического подхода.

Следуя [1, 3], выберем помимо множеств $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$, определяемых исходной постановкой задачи, ещё одно множество $\mathfrak{I}_e$, называемое пространством возможных оценок. Модель $\mathfrak{M}$ зададим как семейство суперпозиций

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{C \circ B \mid C \in \mathfrak{M}^1, B \in \mathfrak{M}^0\},$$

где $\mathfrak{M}^0$ — заданное множество отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$, называемых алгоритмическими операторами, а $\mathfrak{M}^1$ — заданное множество отображений из $\mathfrak{I}_e$ в $\mathfrak{I}_f$, называемых решающими правилами. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ зададим с помощью семейства отображений $\mathfrak{f}$,

$$\mathfrak{f} \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \{f \mid f\colon \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_e\}.$$

Всякому отображению f из $\mathfrak{f}$ поставим в соответствие корректирующую операцию $F_f\colon (\mathfrak{M}^0)^p \to \mathfrak{M}^0$ над алгоритмическими операторами, положив для всех $B_1, \dots, B_p \in \mathfrak{M}^0$ и $x \in \mathfrak{I}_i$

$$F_f(B_1, \dots, B_p)(x) = f(B_1(x), \dots, B_p(x)).$$

Всякой паре отображений (f, C) из $\mathfrak{f} \times \mathfrak{M}^1$ поставим в соответствие корректирующую операцию $F_{f,C}$ над алгоритмами, положив для всех $B_1, \dots, B_p \in \mathfrak{M}^0$ и $C_1, \dots, C_p \in \mathfrak{M}^1$

$$F_{f,C}(C_1 \circ B_1, \dots, C_p \circ B_p) = C \circ F_f(B_1, \dots, B_p).$$

Таким образом семейство $\mathfrak{f}$ и множество $\mathfrak{M}^1$ индуцируют семейство корректирующих операций $\mathfrak{F} = \{F_{f,C} \mid f \in \mathfrak{f}, C \in \mathfrak{M}^1\}$.

Выбор «промежуточного» пространства $\mathfrak{I}_e$ и, как следствие, представление алгоритмов в виде суперпозиций, является классическим приёмом алгебраического подхода, который позволяет, по сути дела, перенести построение решения в пространство $\mathfrak{I}_e$, выбираемое, в отличие от $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$, из соображений удобства.

Дальнейшая конкретизация постановки задачи связана с наложением дополнительных ограничений на множества $\mathfrak{I}_i$, $\mathfrak{I}_f$, $\mathfrak{I}_e$, $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{f}$, а также выбором функционала качества Q.

3 Монотонные корректирующие операции

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{I}_f$ и $\mathfrak{I}_e$ — линейно упорядоченные множества, $\mathfrak{f}$ — семейство всех монотонных отображений из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_e$, $\mathfrak{M}^1$ — непустое семейство всех монотонных сюръективных отображений из $\mathfrak{I}_e$ в $\mathfrak{I}_f$.

Эти ограничения формализуют следующий эвристический принцип. Если алгоритмы $A_1, \ldots, A_p$ настроены на экстраполяцию одной и той же зависимости, то одновременное увеличение их выходных значений не должно приводить к уменьшению значения на выходе алгоритма $F(A_1, \ldots, A_p)$.

Введём на $\mathfrak{I}_e^p$ отношение порядка, положив $(u_1, \ldots, u_p) \leqslant (v_1, \ldots, v_p)$ если $u_i \leqslant v_i$ для всех $i = 1, \ldots, p$. Несравнимость векторов u и v из $\mathfrak{I}_e^p$ будем обозначать через $u \parallel v$. Если U и V — произвольные упорядоченные множества, то отображение $g: U \to V$ называется монотонным, если для любых $u_1, u_2 \in \mathfrak{I}_e^p$ из $u_1 \leqslant u_2$ следует $g(u_1) \leqslant g(u_2)$. Если отображения $f \in \mathfrak{f}$ и $C \in \mathfrak{M}^1$ монотонны, то корректирующие операции F_f и $F_{f,C}$ также будем называть монотонными.

Далее предполагается, что $q \geqslant 2$. Множество индексов $\{1, \ldots, q\}$ обозначим через $\mathbb{Q}$.

Итак, рассматривается задача распознавания, определяемая предикатом (1.1).

Определение 2. Пара индексов $(j, k) \in \mathbb{Q}^2$ называется *дефектной парой* алгоритма $A = C \circ B$, если $y_j < y_k$ и $B(x_j) \geqslant B(x_k)$. Множество всех дефектных пар алгоритма A обозначим через $D(A)$.

Отметим, что произвольная дефектная пара алгоритма $C \circ B$ является также дефектной парой для всех алгоритмов вида $C' \circ B$, $C' \in \mathfrak{M}^1$. Поэтому множество $D(A)$ не зависит от выбора решающего правила.

Введём функционал $Q(A) = |D(A)|$ и рассмотрим некоторые его свойства.

Если $Z(A) = 1$, то алгоритм A не может иметь дефектных пар, следовательно $Q(A) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно; однако если $Q(C \circ B) = 0$, то всегда можно указать решающее правило $C' \in \mathfrak{M}^1$, для которого $Z(C' \circ B) = 1$. Действительно, раз алгоритм $C \circ B$ не имеет дефектных пар, то для любой пары $(j, k) \in \mathbb{Q}^2$ из $B(x_j) \leqslant B(x_k)$ следует $y_j \leqslant y_k$. Поэтому существует такое монотонное отображение $C' \in \mathfrak{M}^1$, что $C'(B(x_k)) = y_k$ для всех $k \in \mathbb{Q}$, следовательно $Z(C' \circ B) = 1$.

Таким образом, при соответствующем выборе решающего правила условия $Q(A) = 0$ и $Z(A) = 1$ равносильны. Это означает, что введённый функционал можно рассматривать как функционал качества. Далее будем полагать, что именно этот функционал минимизируется при решении задачи (2.2).

Введём набор из q векторов $a_k = (B_1(x_k), \ldots, B_p(x_k)) \in \mathfrak{I}_e^p$, $k = 1, \ldots, q$. Тогда условие корректности алгоритма $F_{f,C}(A_1, \ldots, A_p)$ примет вид

$$C(f(a_k)) = y_k, \quad k \in \mathbb{Q}. \tag{3.1}$$

Набор алгоритмов $A_1, \ldots, A_p$ называется *допустимым*, если для любой пары $(j,k) \in \mathbb{Q}^2$ из $y_j \neq y_k$ следует $a_j \neq a_k$. Допустимость является достаточным условием существования некоторого (не обязательно монотонного) отображения $C \circ f$, для которого выполнено (3.1).

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^q$ — произвольная последовательность элементов некоторого упорядоченного множества. Последовательность пар $\{(a_k, u_k)\}_{k=1}^q$ будем называть монотонной, если для всех $(j,k) \in \mathbb{Q}^2$ из $a_j \leqslant a_k$ следует $u_j \leqslant u_k$.

Лемма 1. *Если $A_1, \ldots, A_p$ — допустимый набор алгоритмов, то монотонное p-арное отображение $C \circ f$, удовлетворяющее (3.1), существует тогда и только тогда, когда $\{(a_k, y_k)\}_{k=1}^q$ — монотонная последовательность.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть последовательность $\{(a_k, y_k)\}_{k=1}^q$ монотонна.

Возьмём произвольное отображение $C \in \mathfrak{M}^1$. В силу его сюръективности для каждого $k \in \mathbb{Q}$ найдётся $u_k \in \mathfrak{I}_e$, удовлетворяющий условию $C(u_k) = y_k$. Выберем элементы u_k таким образом, чтобы из $y_j = y_k$ следовало $u_j = u_k$ для всех $(j,k) \in \mathbb{Q}^2$.

Последовательность $\{(a_k, u_k)\}_{k=1}^q$ является монотонной. Действительно, для всех $(j,k) \in \mathbb{Q}^2$ из $a_j \leqslant a_k$ следует $y_j \leqslant y_k$. Если $y_j = y_k$, то $u_j = u_k$ по построению; если же $y_j < y_k$, то $u_j < u_k$ в силу монотонности отображения C. Поэтому из $a_j \leqslant a_k$ следует $u_j \leqslant u_k$.

Определим для каждого $a \in \mathfrak{I}_f^p$ множество $U(a) = \{u_k \mid k \in \mathbb{Q}, a_k \leqslant a\}$ и отображение

$$f(a) = \begin{cases} \max U(a), & \text{если } U(a) \neq \varnothing, \\ \min\{u_1, \ldots, u_q\}, & \text{если } U(a) = \varnothing. \end{cases}$$

Отображение $C \circ f$ монотонно и удовлетворяет условию (3.1) в силу допустимости набора алгоритмов $A_1, \ldots, A_p$ и монотонности последовательности $\{(a_k, u_k)\}_{k=1}^q$.

Лемма доказана.

Множество $D(A_1, \ldots, A_p) = D(A_1) \cap \ldots \cap D(A_p)$ назовём *неустранимым дефектом* набора алгоритмов $A_1, \ldots, A_p$. Введение этого термина оправдывается следующей леммой.

Лемма 2. *Для любой p-арной монотонной корректирующей операции F*

$$D(F(A_1, \ldots, A_p)) \supseteq D(A_1, \ldots, A_p). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $(j,k) \in D(A_i)$ для всех $i = 1, \ldots, p$. Тогда $y_j < y_k$ и $a_j \geqslant a_k$. Следовательно $C(f(a_j)) \geqslant C(f(a_k))$ для любых монотонных C и f, а значит для любой монотонной корректирующей операции F пара (j,k) дефектная для алгоритма $F(A_1, \ldots, A_p)$.

Лемма доказана.

Для успешного решения задачи (2.2) необходимо выяснить, из каких пар состоит множество $D(F(A_1, \dots, A_p))$, и каким образом его мощность (функционал качества) зависит от F и A_p. С учётом доказанной леммы этот вопрос сводится к следующему: при каких условиях включение (3.2) обращается в равенство, и из каких пар состоит разность множеств $D(F(A_1, \dots, A_p)) \setminus D(A_1, \dots, A_p)$, когда равенства нет.

В следующей теореме выделен простейший, но важный частный случай, когда соотношение (3.2) обращается в равенство.

Теорема 1. *Если $D(A_1, \dots, A_p) = \varnothing$, то существует такая монотонная корректирующая операция F, что $D(F(A_1, \dots, A_p)) = \varnothing$.*

Доказательство. Условие теоремы эквивалентно тому, что для любой пары $(j, k) \in \mathbb{Q}^2$ из $a_k \leqslant a_j$ следует $y_k \leqslant y_j$. Значит последовательность $\{(a_k, y_k)\}_{k=1}^q$ является монотонной, и по лемме 1 существует отображение $C \circ f$, удовлетворяющее (3.1). Положим $F = F_{f,C}$. Допустим, существует пара чисел $(j, k) \in D(F(A_1, \dots, A_p))$. Тогда $y_j < y_k$ и $C(f(a_j)) \geqslant C(f(a_k))$, что противоречит (3.1). Следовательно, множество $D(F(A_1, \dots, A_p))$ пусто.

Теорема доказана.

В случае $D(A_1, \dots, A_p) \neq \varnothing$ соотношение (3.2) может быть как равенством, так и строгим включением. Далее будет показано, что, не прибегая к построению корректирующей операции F, возможно указать, из каких элементов состоит разность $D(F(A_1, \dots, A_p)) \setminus D(A_1, \dots, A_p)$.

Определение 3. Тройка индексов $(j, s, k) \in \mathbb{Q}^3$ называется *дефектной тройкой* для набора алгоритмов $A_1, \dots, A_p$, если:

а) пара (j, k) дефектная для всех A_i, $i = 1, \dots, p$;

б) вектор a_s несравним с a_j и a_k;

в) выполнена цепочка неравенств $y_j \leqslant y_s \leqslant y_k$.

Дефектная тройка (j, s, k) называется *строго дефектной*, если $y_j < y_s < y_k$. Пару (j, k) будем называть *основанием* дефектной тройки (j, s, k), а пары (j, s) и (s, k) — её рёбрами. Очевидно, основание любой дефектной тройки принадлежит неустранимому дефекту.

Пример 1. Пусть $p = 2$, $q = 3$, $a_1 = (3, 2)$, $a_2 = (1, 3)$, $a_3 = (2, 1)$, $y_k = k$ для $k = 1, 2, 3$. Тогда тройка $(1, 2, 3)$ строго дефектная. При замене y_2 на 1 или 3 она становится не строго дефектной.

Введём на $\mathbb{Q}$ бинарное отношение $\prec$, положив $j \prec k$ в том и только том случае, когда либо $a_j \leqslant a_k$, либо $a_j \parallel a_k$ и $y_j \leqslant y_k$.

Отношение $\prec$ не является отношением порядка, так как на любой дефектной тройке (j, s, k) образуется цикл: $k \prec j$, $j \prec s$, $s \prec k$. Следующая лемма утверждает, что не существует иных последовательностей индексов, препятствующих отношению $\prec$ быть предпорядком.

Лемма 3. *Если в $\mathbb{Q}^3$ нет дефектных троек, то отношение $\prec$ является линейным предпорядком на $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Отсутствие несравнимых элементов и рефлексивность отношения $\prec$ очевидны. Покажем, что при отсутствии дефектных троек оно транзитивно, то есть что для любых j, k, s из $\mathbb{Q}$ если $j \prec k$ и $k \prec s$, то $j \prec s$. Каждое из отношений $j \prec k$ и $k \prec s$ имеет место в одном из двух случаев, поэтому всего возможны четыре варианта.

1. $a_j \leqslant a_k$ и $a_k \leqslant a_s$.

Тогда $a_j \leqslant a_s$ и получаем требуемое $j \prec s$.

2. $a_j \leqslant a_k$ и $a_k \parallel a_s$, $y_k \leqslant y_s$.

Рассмотрим возможные отношения между a_j и a_s. Если $a_j \leqslant a_s$, то получаем требуемое $j \prec s$. Случай $a_s \leqslant a_j$ невозможен, так как иначе было бы $a_s \leqslant a_k$, что противоречит их несравнимости. Пусть теперь $a_j \parallel a_s$. Рассмотрим возможные отношения между y_j и y_k. Если $y_j \leqslant y_k$, то $y_j \leqslant y_s$, и получаем требуемое $j \prec s$. Если $y_j > y_k$, то предположение $y_s \leqslant y_j$ приводит к наличию дефектной тройки (k, s, j), поэтому $y_j < y_s$, следовательно $j \prec s$.

3. $a_j \parallel a_k$, $y_j < y_k$ и $a_k \leqslant a_s$.

Рассмотрим возможные отношения между a_j и a_s. Если $a_j \leqslant a_s$, то получаем требуемое $j \prec s$. Случай $a_s \leqslant a_j$ невозможен, так как иначе было бы $a_k \leqslant a_j$, что противоречит их несравнимости. Пусть теперь $a_j \parallel a_s$. Рассмотрим возможные отношения между y_k и y_s. Если $y_k \leqslant y_s$, то $y_j \leqslant y_s$, и получаем требуемое $j \prec s$. Если $y_k > y_s$, то предположение $y_s \leqslant y_j$ приводит к наличию дефектной тройки (s, j, k), поэтому $y_j < y_s$, следовательно $j \prec s$.

4. $a_j \parallel a_k$, $y_j \leqslant y_k$ и $a_k \parallel a_s$, $y_k \leqslant y_s$.

Рассмотрим возможные отношения между a_j и a_s. Если $a_j \leqslant a_s$, то получаем требуемое $j \prec s$. Случай $a_s \leqslant a_j$ невозможен, так как иначе тройка (j, k, s) была бы дефектной. Если $a_j \parallel a_s$, то в силу $y_j \leqslant y_s$ имеем требуемое $j \prec s$.

Лемма доказана.

Введём на $\mathbb{Q}$ ещё одно бинарное отношение θ, положив $j\theta k$ в том и только том случае, когда $j \prec k$ и $k \prec j$. Легко проверить, что если $\prec$ — предпорядок, то θ — отношение эквивалентности на $\mathbb{Q}$. Причём для любых j и k из одного класса эквивалентности выполняются условия $a_j \parallel a_k$ и $y_j = y_k$.

Следующая теорема утверждает, что включение (3.2) возможно обратить в равенство в том и только в том случае, когда отсутствуют дефектные тройки.

Теорема 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_p$ — допустимый набор алгоритмов. Тогда:*

а) если в $\mathbb{Q}^3$ *имеется хотя бы одна строго дефектная тройка, то для любой монотонной корректирующей операции* F *справедливо строгое включение:*

$$D(F(A_1,\dots,A_p)) \supset D(A_1,\dots,A_p); \tag{3.3}$$

б) если в $\mathbb{Q}^3$ *нет дефектных троек, то существует такая монотонная корректирующая операция* F*, что:*

$$D(F(A_1,\dots,A_p)) = D(A_1,\dots,A_p). \tag{3.4}$$

Доказательство.

Утверждение а). Рассмотрим произвольную строго дефектную тройку (j,s,k) и произвольную p-арную монотонную корректирующую операцию $F_{f,C}$. Пусть f_j, f_s и f_k — значения отображения f в точках a_j, a_s и a_k соответственно. Поскольку $a_k \leqslant a_j$, из монотонности следует $f_k \leqslant f_j$. Если предположить, что ни одна из пар (j,s) и (s,k) не является дефектной, то получится $f_j < f_k$, что противоречит условию монотонности. Значит, хотя бы одна из этих двух пар дефектная. Поскольку $a_j \parallel a_s$ и $a_s \parallel a_k$, то ни одна из них не может содержаться в пересечении $D(A_1)\cap\ldots\cap D(A_p)$, и имеет место строгое включение (3.3).

Утверждение б). Предполагая, что в $\mathbb{Q}^3$ нет дефектных троек, построим монотонную корректирующую операцию F, для которой верно равенство (3.4).

Множество $\mathbb{Q}$ можно упорядочить по отношению предпорядка $\prec$. Это означает, что существует такая перестановка σ элементов множества $\mathbb{Q}$, что из $s < t$ следует $\sigma(s) \prec \sigma(t)$. Образуем последовательность $\{\widetilde{y}_k\}_{k=1}^{q}$, положив

$$\widetilde{y}_{\sigma(t)} = \max(y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(t)}), \quad t \in \mathbb{Q}. \tag{3.5}$$

Покажем, что последовательность пар $\{(a_k,\widetilde{y}_k)\}_{k=1}^{q}$ монотонна. Возьмём произвольную пару $(j,k)\in\mathbb{Q}^2$, $j\neq k$. Очевидно, $(j,k) = (\sigma(s),\sigma(t))$ для некоторых s и t. По определению отношения $\prec$ из $a_j \leqslant a_k$ следует $\sigma(s)\prec\sigma(t)$. Возможны два случая. Либо $s<t$, тогда из (3.5) сразу получаем требуемое $\widetilde{y}_j \leqslant \widetilde{y}_k$. Либо $t<s$ и $\sigma(t)\prec\sigma(s)$, тогда элементы $\sigma(t)$ и $\sigma(s)$ лежат в одном классе эквивалентности по отношению θ. Следовательно $y_{\sigma(t)} = y_{\sigma(s)}$, или, что то же самое, $\widetilde{y}_j = \widetilde{y}_k$. Монотонность последовательности пар $\{(a_k,\widetilde{y}_k)\}_{k=1}^{q}$ доказана.

Согласно лемме 1 существует такое монотонное отображение вида $C\circ f$, что $C(f(a_k)) = \widetilde{y}_k$ для всех $k\in\mathbb{Q}$. Положим $F = F_{f,C}$.

Возьмём произвольный элемент $(j,k) = (\sigma(s),\sigma(t))$ множества $D(F(A_1,\dots,A_p))$ и покажем, что он принадлежит также и множеству $D(A_1,\dots,A_p)$. По определению 2 выполнено $y_j < y_k$ и $f(a_j)\geqslant f(a_k)$. Из первого неравенства следует, что j и k не могут лежать в одном классе эквивалентности по θ. Второе неравенство приводит к $\widetilde{y}_j \geqslant \widetilde{y}_k$.

Допустим, что условие $a_k \leqslant a_j$ не выполнено. Тогда либо $a_j \leqslant a_k$, либо $a_j \parallel a_k$. С учётом $y_j < y_k$ заключаем, что в обоих случаях $j \prec k$. Противоположное соотношение $k \prec j$ не может иметь места, так как j и k не эквивалентны. Отсюда вытекает, что $s < t$ и $\widetilde{y}_j \leqslant \widetilde{y}_k$, а значит $\widetilde{y}_{\sigma(s)} = \widetilde{y}_{\sigma(t)}$. Из формулы (3.5) делаем вывод, что $y_{\sigma(s)} \geqslant y_{\sigma(t)}$, но это противоречит условию $y_j < y_k$.

Итак, $a_k \leqslant a_j$, следовательно пара (j,k) является дефектной для всех алгоритмов $A_1,\dots,A_p$, то есть принадлежит $D(A_1,\dots,A_p)$.

Теорема доказана.

Таким образом, множество $D(F(A_1,\dots,A_p))$ состоит из дефектных пар трёх типов: элементов неустранимого дефекта, рёбер дефектных троек, и всех остальных пар. Из доказанной теоремы следует, что корректирующую операцию можно выбрать так, чтобы отсутствие пар второго типа автоматически приводило к отсутствию пар третьего типа, а отсутствие пар первого типа — к отсутствию любых дефектных пар. На этом основании предлагается следующий эвристический принцип минимизации функционала качества $Q(F(A_1,\dots,A_p))$: последовательно устранять дефектные пары первого типа, стремясь вместе с ними устранить наибольшее число пар второго типа, и вообще не принимать во внимание пары третьего типа.

Согласно этому принципу будем выбирать алгоритм $A_p = C_p \circ B_p$ с тем расчётом, чтобы как можно больше пар, принадлежащих $D(A_1,\dots,A_{p-1})$, исключить из множества $D(A_1,\dots,A_p)$. В первую очередь будем исключать пары, лежащие в основании наибольшего количества дефектных троек. Для исключения пары (j,k) достаточно потребовать, чтобы алгоритмический оператор B_p удовлетворял условию $B_p(x_j) < B_p(x_k)$.

Исходя из этих соображений в следующем параграфе будет введена весовая функция на множестве дефектных пар и сформулирована оптимизационная задача поиска алгоритма A_p.

4 Задача совместной оптимизации алгоритма и корректирующей операции

Полученные результаты позволяют свести задачу (2.2) к последовательному нахождению алгоритма $A_p \in \mathfrak{M}$ и корректирующей операции $F_p \in \mathfrak{F}$. Первая подзадача состоит в том, чтобы найти алгоритм A_p, для которого мощность множества $D(F(A_1,\dots,A_p))$ минимальна при наилучшем выборе F. Вторая подзадача заключается в построении корректирующей операции F_p при уже известном A_p.

Рассмотрим сначала первую подзадачу.

Обозначим для краткости множество $D(A_1,\dots,A_{p-1})$ через Δ, множество всех дефектных троек набора алгоритмов $A_1, \dots, A_{p-1}$ — через T, а подмножество всех его строго дефектных троек — через T_0.

Пусть $w(j,k)$ — оценка числа дефектных пар, автоматически исключаемых из $D(A_1, \dots, A_p)$ при исключении пары $(j,k) \in \Delta$ и наилучшем выборе корректирующей операции. Например, можно положить для всех $(j,k) \in \Delta$

$$w(j,k) = |\{s : (j,s,k) \in T\}| + 1.$$

Можно придать строго дефектным и не строго дефектным тройкам различные веса, учитывая, что только первые образуют не менее двух дефектных пар:

$$w(j,k) = W_0|\{s : (j,s,k) \in T_0\}| + W_1|\{s : (j,s,k) \in T \setminus T_0\}| + 1,$$

где W_0 и W_1 — задаваемые априори константы, например, $W_0 = 2\frac{1}{2}$ и $W_1 = 1\frac{1}{2}$.

Введённая функция естественным образом порождает весовую функцию на подмножествах множества Δ:

$$w(\Delta') = \sum_{(j,k)\in\Delta'} w(j,k), \quad \Delta' \subseteq \Delta.$$

Пусть $B \in \mathfrak{M}^0$ — произвольный алгоритмический оператор. Обозначим через $\Delta(B)$ множество всех пар $(j,k) \in \Delta$, для которых $B(x_j) < B(x_k)$. Поставим задачу поиска алгоритма A_p, $p \geqslant 2$, следующим образом.

Задача 1. *Пусть задан функционал качества $Q'(A)$, $A \in \mathfrak{M}$ и неотрицательное число δ. Требуется найти алгоритм $A_p = C_p \circ B_p$, для которого вес $w(\Delta(B_p))$ максимален и выполнено условие $Q'(A_p) \leqslant \delta$.*

При указанном способе выбора алгоритмов A_p легко доказать сходимость процесса (2.1), (2.2) за конечное число шагов.

Теорема 3. *Пусть $p_0 = |D(A_1)|+1$ и для любой пары $(j,k) \in D(A_1)$ в модели $\mathfrak{M}^0$ найдётся алгоритмический оператор B, удовлетворяющий условию $B(x_j) < B(x_k)$.*

Тогда для каждого p, $p = 2, \dots, p_0$, можно указать такое число δ, что не более, чем за p_0 шагов будет найден алгоритм A^*, для которого $Q(A^*) = 0$.

Доказательство.

В силу условия теоремы для каждого p, $p = 2, \dots, p_0$, в модели $\mathfrak{M}^0$ найдётся такой алгоритм $A'_p = C'_p \circ B'_p$, что $\Delta(B'_p) \neq \varnothing$. Положим $\delta = Q'(A'_p)$. Тогда существует алгоритм $A_p = C_p \circ B_p$, для которого вес $w(\Delta(B_p))$ максимален и выполнено условие $Q'(A_p) \leqslant \delta$. В силу цепочки неравенств $w(\Delta(B_p)) \geqslant w(\Delta(B'_p)) > 0$ множество $\Delta(B_p)$ не может оказаться пустым.

Всякая пара (j,k) из множества $\Delta(B_p)$ принадлежит множеству $D(A_1, \dots, A_{p-1})$ и не принадлежит $D(A_1, \dots, A_p)$. Отсюда вытекает, что на каждом шаге итерационного процесса, начиная с $p = 2$, мощность множества $D(A_1, \dots, A_{p-1})$ уменьшается, по меньшей мере, на единицу. При некотором $p \leqslant |D(A_1)|+1$ множество $D(A_1, \ldots, A_p)$ окажется пустым. В силу теоремы 1 отсюда следует $Q(A^{(p)}) = 0$.

Теорема доказана.

Если в качестве функционала Q' используется число дефектных пар алгоритма, то задачу можно сформулировать немного иначе.

Введём множество $J = \{(j,k) \in \mathbb{Q}^2 \mid y_j < y_k\}$. Минимизация функционала $Q(C_p \circ \circ B_p)$ сводится к поиску алгоритмического оператора B_p, для которого выполняется максимальное число ограничений вида

$$B_p(x_j) < B_p(x_k), \quad (j,k) \in J. \tag{4.1}$$

В нашем случае эта система разбивается на две части. На подмножестве ограничений Δ, $\Delta \subseteq J$ должна быть найдена совместная подсистема с максимальным весом, а на подмножестве $J \setminus \Delta$ — максимальная (состоящая из наибольшего числа ограничений) совместная подсистема.

Введём на множестве J весовую функцию

$$w_\lambda(j,k) = \begin{cases} \lambda + w(j,k), & \text{если } (j,k) \in \Delta; \\ \lambda, & \text{если } (j,k) \in J \setminus \Delta. \end{cases}$$

Аналогично функции $w(j,k)$ она индуцирует весовую функцию $w_\lambda(J')$ на множестве всех подмножеств J. Обозначим через $J(B)$ множество всех пар $(j,k) \in J$, для которых $B(x_j) < B(x_k)$. Множество $J(B)$ определяет подсистему системы ограничений (4.1), совместную для данного алгоритмического оператора B. Сформулируем задачу поиска алгоритма A_p, $p \geqslant 2$, следующим образом.

Задача 1$'$. *Пусть λ — заданное неотрицательное число. Найти алгоритм $A_p = C_p \circ B_p$, для которого вес $w_\lambda(J(B_p))$ максимален.*

Таким образом, в случае $Q' \equiv Q$ задача свелась к известной задаче поиска совместной подсистемы с максимальным весом.

Отметим, что параметры δ и λ в приведённых постановках имеют схожий смысл. С их помощью регулируется соотношение между настройкой на исходную прецедентную информацию и исправлением дефекта предыдущих алгоритмов. Предельное уменьшение δ или неограниченное увеличение λ приводят к решению полностью независимых задач поиска алгоритмов $A_1, \ldots, A_p$. При неограниченном увеличении δ или при $\lambda = 0$ наблюдается обратная ситуация: только алгоритм A_1 настраивается на прецедентную информацию, все последующие алгоритмы будут нацелены исключительно на компенсацию ошибок, допущенных A_1. Подбор оптимальных значений параметров δ и λ является отдельной задачей. На практике они либо задаются априори, либо выбираются по результатам нескольких пробных решений.

5 Построение корректирующей операции

Рассмотрим задачу построения монотонной корректирующей операции F_p при известном алгоритме A_p.

Задача 2. *Найти корректирующую операцию F_p, доставляющую минимум функционалу качества $Q(F) = |D(F(A_1, \ldots, A_p))|$,*

$$D(F(A_1, \ldots, A_p)) = \{(j,k) \in \mathbb{Q}^2 \mid f(a_j) \geqslant f(a_k) \text{ и } y_j < y_k\},$$

где $F \equiv F_{f,C}$, $f \in \mathfrak{f}$ и $C \in \mathfrak{M}^1$.

Решать эту задачу будем в два этапа. Сначала выберем значения f_k, $k \in \mathbb{Q}$ с тем расчётом, чтобы минимизировать функционал качества при условии монотонности последовательности пар $\{(a_k, f_k)\}_{k=1}^q$. Затем построим монотонное отображение f, удовлетворяющее условию $f(a_k) = f_k$ для всех $k \in \mathbb{Q}$, и, возможно, обладающее некоторыми дополнительными свойствами, например, непрерывное или гладкое. Значение функционала качества становится известным уже после первого этапа, поэтому построение монотонной аппроксимирующей функции достаточно провести единственный раз на последнем шаге итерационного процесса (2.2).

В общих чертах предлагаемый метод формирования последовательности $\{f_k\}_{k=1}^q$ состоит в следующем. Сначала из множества $\mathbb{Q}$ исключается по возможности наименьшее число индексов таким образом, чтобы последовательность оставшихся пар (a_k, f_k) оказалась монотонной. Оставшиеся $\widetilde{q}$ индексов упорядочиваются по отношению линейного предпорядка $\prec$, образуя последовательность $i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_{\widetilde{q}}$. Затем в неё по очереди вставляются ранее исключённые индексы, причём место вставки находится путём минимизации числа дефектных пар. В результате получается последовательность $\{i_k\}_{k=1}^q$, задающая некоторый оптимальный порядок на множестве $\mathbb{Q}$, в соответствии с которым и формируется последовательность $\{f_k\}_{k=1}^q$. Теперь опишем отдельные шаги этого метода более подробно.

1. Будем последовательно исключать из множества N индексы, входящие в наибольшее число пар из $D(A_1, \ldots, A_p)$. Пусть r пробегает значения $q, (q-1), \ldots, (\widetilde{q}+1)$. Положим $\mathbb{Q}_q = \mathbb{Q}$;

$$\begin{aligned}
D_r(k) &= \{j \in \mathbb{Q}_r \mid D(A_1, \ldots, A_p) \cap \{(j,k),(k,j)\} \neq \varnothing\}, \quad k \in \mathbb{Q}_r; \\
k_r &= \arg\max_{k \in \mathbb{Q}_r} |D_r(k)|; \\
\mathbb{Q}_{r-1} &= \mathbb{Q}_r \setminus \{k_r\}.
\end{aligned}$$

Число $\widetilde{q}$ определим из условия $D_{\widetilde{q}}(k) = \varnothing$ для всех $k \in \mathbb{Q}_{\widetilde{q}}$. В силу этого условия последовательность $\{(a_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{Q}_{\widetilde{q}}}$ монотонна, и на множестве $\mathbb{Q}_{\widetilde{q}}$ нет дефектных пар и троек. Следовательно отношение $\prec$ является отношением предпорядка на $\mathbb{Q}_{\widetilde{q}}$. Упорядочив множество $\mathbb{Q}_{\widetilde{q}}$ по этому отношению, получим последовательность индексов $i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_{\widetilde{q}}$.

Пусть $I_r = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ — последовательность попарно различных элементов множества $\mathbb{Q}$. Пару $(i_s, i_t) \in I^2$, $t < s$, условимся называть *нарушением порядка*, если $y_{i_s} < y_{i_t}$; и *сильным нарушением порядка*, если $a_{i_s} \leqslant a_{i_t}$. Множество нарушений порядка в последовательности I обозначим через $D(I)$. Очевидно, $D(I) \subset \mathbb{Q}^2$.

2. Итак, требуется добавить ранее исключённые индексы $k_{\widetilde{q}+1}, \ldots, k_q$ в последовательность $I_{\widetilde{q}}$ таким образом, чтобы число нарушений порядка было минимально, а сильных нарушений порядка не было вообще.

Будем добавлять эти индексы поочерёдно. Пусть r пробегает значения от $\widetilde{q}+1$ до q, и при каждом r индекс k_r вставляется в последовательность I_{r-1} перед элементом с порядковым номером t_r, $1 \leqslant t_r \leqslant r$. Если $t_r = r$, то элемент k_r добавляется в конец последовательности. В результате получается последовательность I_r.

Определим штрафные функции $\xi_r(t)$, $\eta_r(t)$ и $\varphi_r(t)$, положив:

$$\begin{aligned}
\xi_r(t) &= \sum_{s=1}^{t-1} (\chi(y_{k_r} < y_{i_s}) + M\chi(a_{k_r} \leqslant a_{i_s})), \\
\eta_r(t) &= \sum_{s=t}^{r-1} (\chi(y_{i_s} < y_{k_r}) + M\chi(a_{i_s} \leqslant a_{k_r})), \\
\varphi_r(t) &= \xi_r(t) + \eta_r(t),
\end{aligned}$$

где $t = 1, \ldots, r$; сумма нулевого числа слагаемых считается равной нулю; M — заданное неотрицательное число; χ — характеристическая функция предиката, равная 1, если предикат истинен и 0, если ложен. Положим t_r равным тому числу, которое доставляет минимум функции $\varphi_r(t)$.

Введённые функции имеют следующий смысл. Допустим, элемент k_r вставляется в последовательность I_{r-1} перед i_t. Тогда функции $\xi_r(t)$ и $\eta_r(t)$ определяют штраф за все нарушения порядка, образуемые добавляемым элементом в паре с элементами $i_1, \ldots, i_{t-1}$ и $i_t, \ldots, i_{r-1}$ соответственно. Величина штрафа за каждое нарушение порядка равна 1, за каждое сильное нарушение — M. Функция $\varphi_r(t)$ определяет суммарный штраф за нарушения порядка в последовательности I_r, возникающие в результате добавления элемента k_r.

Теорема 4. *Пусть $A_1, \ldots, A_p$ — допустимый набор алгоритмов и $M > q$. Тогда число нарушений порядка в последовательности I_q вычисляется по формуле*

$$|D(I_q)| = \sum_{r=\widetilde{q}+1}^{q} \varphi_r(t_r),$$

причём сильных нарушений порядка в этой последовательности нет.

Доказательство проведём индукцией по r.

Последовательность $I_{\widetilde{q}}$ не содержит сильных нарушений порядка. В противном случае для некоторой пары $(i_s, i_t) \in I_{\widetilde{q}}^2$ выполнялось бы $i_t \prec i_s$ и $a_{i_s} \leqslant a_{i_t}$, следовательно $a_{i_s} = a_{i_t}$, что противоречит допустимости набора алгоритмов $A_1, \ldots, A_p$.

Последовательность $I_{\widetilde{q}}$ не содержит нарушений порядка. В противном случае для некоторой пары $(i_s, i_t) \in I_{\widetilde{q}}^2$ выполнялось бы $i_t \prec i_s$ и $y_{i_s} < y_{i_t}$, следовательно $a_{i_t} \leqslant a_{i_s}$, что невозможно в силу монотонности последовательности $\{(a_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{Q}_{\widetilde{q}}}$. Таким образом, $D(I_{\widetilde{q}}) = \varnothing$.

Пусть для последовательности I_{r-1} утверждение теоремы верно.

Найдём в I_{r-1} элемент i_u с наибольшим порядковым номером u, для которого $a_{i_u} \leqslant a_{k_r}$. Положим $u = 0$, если таких элементов вообще нет. Аналогично, найдём элемент i_v с наименьшим порядковым номером v, для которого $a_{k_r} \leqslant a_{i_v}$, либо положим $v = r$, если таких элементов нет. По предположению индукции в I_{r-1} нет сильных нарушений порядка, поэтому из $a_{i_u} \leqslant a_{k_r} \leqslant a_{i_v}$ вытекает $u \leqslant v$. Если допустить, что $u = v$, то получим равенство $a_{i_u} = a_{k_r}$, которое (с учётом $k_r \neq i_u$) приводит к противоречию с допустимостью набора алгоритмов $A_1, \ldots, A_p$. Следовательно $u < v$.

Оценим функцию $\varphi_r(t)$ в следующих трёх случаях:

а) при $t \leqslant u$ справедливы оценки $\varphi_r(t) \geqslant \eta_r(t) \geqslant \eta_r(u) \geqslant M > q$;

б) при $t > v$ справедливы оценки $\varphi_r(t) \geqslant \xi_r(t) \geqslant \xi_r(v) \geqslant M > q$;

в) при $u < t \leqslant v$ найдём оценку сверху. Поскольку $u < t$, отношение $a_{i_s} \leqslant a_{k_r}$ не выполняется для всех s: $t \leqslant s < r$. Следовательно $\eta_r(t) \leqslant r - t$. Аналогично, в силу $t \leqslant v$ отношение $a_{k_r} \leqslant a_{i_s}$ не выполняется для всех s таких, что $1 \leqslant s < t$. Следовательно $\xi_r(t) < t$. Суммируя, получаем, что $\varphi_r(t) < r \leqslant q$.

Таким образом, число t_r, доставляющее минимум функции $\varphi_r(t)$, удовлетворяет условию $u < t_r \leqslant v$. Отсюда вытекают два вывода. Во-первых, индекс k_r не участвует ни в одном сильном нарушении порядка в последовательности I_r. С учётом предположения индукции получаем, что в I_r нет сильных нарушений порядка. Во-вторых, значение $\varphi_r(t_r)$ в точности равно числу нарушений порядка, в которых участвует элемент k_r. Следовательно $|D(I_r)| = |D(I_{r-1})| + \varphi_r(t_r)$.

Теорема доказана.

3. С помощью полученной последовательности $\{i_k\}_{k=1}^q$ построим последовательность $\{f_k\}_{k=1}^q$, удовлетворяющую условиям:

$$f_{i_1} \leqslant f_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant f_{i_q}; \tag{5.1}$$

$$\text{для всех } (s,t) \in \mathbb{Q}^2 \text{ из } s < t \text{ и } y_{i_s} < y_{i_t} \text{ следует } f_{i_s} < f_{i_t}. \tag{5.2}$$

Последовательность пар $\{(a_k, f_k)\}_{k=1}^q$ монотонна, так как по доказанному в I_q нет сильных нарушений порядка. Следовательно существует такое монотонное отображение f, что $f(a_k) = f_k$ для всех $k \in \mathbb{Q}$, и ему соответствует монотонная корректирующая операция $F_p = F_{f,C}$.

Покажем, что имеет место равенство $D(F_p(A_1, \ldots, A_p)) = D(I_q)$.

Возьмём произвольный элемент (i_s, i_t) множества $D(I_q)$. Тогда $t < s$ и $y_{i_s} < y_{i_t}$. Из первого неравенства и (5.1) вытекает $f_{i_t} \leqslant f_{i_s}$, значит $(i_s, i_t) \in D(F_p(A_1, \ldots, A_p))$.

Если же (i_s, i_t) — произвольный элемент множества $D(F_p(A_1, \ldots, A_p))$, то $y_{i_s} < y_{i_t}$ и $f_{i_t} \leqslant f_{i_s}$. С учётом (5.2) получаем, что $t < s$, а значит $(i_s, i_t) \in D(I_q)$.

Таким образом, функционал качества можно вычислять по формуле

$$Q(F_p(A_1, \ldots, A_p)) = \sum_{r=\widetilde{q}+1}^{q} \varphi_r(t_r).$$

Отметим, что изложенный метод формирования последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{q}$ можно несколько упростить, если пропустить первый шаг и сразу перейти к построению последовательности I_q, начав с $\widetilde{q} = 2$ и произвольной $I_{\widetilde{q}} = \{i_1, i_2\}$, в которой $i_1 \prec i_2$. Однако вычислительные эксперименты показали, что данная модификация приводит к некоторому ухудшению качества получаемых решений и не даёт выигрыша в эффективности по сравнению с описанным методом.

Автор выражает глубокую признательность Ю. И. Журавлёву за оказанную поддержку и К. В. Рудакову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Журавлёв Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. //Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 33. С. 5–68.

[2] Журавлёв Ю. И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов. I–III. //Кибернетика. 1977. № 4. С. 14–21. 1977. № 6. С. 21–27. 1978. № 2. С. 35–43.

[3] Рудаков К.В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов //Кибернетика. 1987. № 2. С. 30–35.

[4] Рудаков К.В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации //Кибернетика. 1987. № 3. С. 106–109.