1985

Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

КИБЕРНЕТИКА

№ 1 ЯНВАРЬ-ФЕВРАЛЬ 1988

ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА
«ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ им. В. М. ГЛУШКОВА»

ОСНОВАН В ЯНВАРЕ 1965 ГОДА
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА

УДК 519.7

К. В. РУДАКОВ

О ПРИМЕНЕНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

Работа выполнена в рамках алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов на базе семейств эвристических алгоритмов [1, 2]. Она является завершением цикла статей [3—5]. Ниже понятия и обозначения из этих работ будут использоваться без дополнительных оговорок.

1. РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ (КЛАССИФИКАЦИИ)

В [3] рассматривалась общая постановка задач классификации, состоящая в следующем: зафиксированы натуральные числа q и l (числа рассматриваемых одновременно объектов и классов), множества $\mathfrak{J}$ и $\tilde{\mathfrak{J}}$ (множества допустимых начальных и финальных информаций), полная допустимая категория Ψ (подкатегория категории $\Psi^{q,l}$), являющаяся формальным выражением системы дополнительных универсальных ограничений, и две матрицы $\mathbf{I}$ и $\tilde{\mathbf{I}}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ и $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$ соответственно (матрица информации и информационная матрица); задачей классификации Z называется задача построения алгоритма A, реализующего отображение A из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$ такое, что A является морфизмом категории Ψ (т. е. удовлетворяет универсальным ограничениям) и $A(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{I}}$.

Ниже будут рассматриваться классы $\mathfrak{Z}$ задач классификации, т. е. множества задач, возникающие при фиксации $q, l, \mathfrak{J}$ и $\tilde{\mathfrak{J}}$ (каждая задача Z из $\mathfrak{Z}$ определяется дополнительным заданием категории Ψ и пары матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$).

Напомним, что задача Z с матрицей информации $\mathbf{I}$ и информационной матрицей $\tilde{\mathbf{I}}$ называется полной относительно семейства отображений $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Hom}_{\Psi}(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))$, если

$$\mathfrak{M}(\mathbf{I}) = \{A(\mathbf{I}) \mid A \in \mathfrak{M}\} = \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}). \tag{1}$$

Задача Z называется $\mathfrak{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}$, если она полна относительно расширения $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$.

Допустим, что зафиксированы некоторый класс задач распознавания $\mathfrak{Z}$ и полная допустимая категория Ψ.

Тем самым определен подкласс $\mathfrak{Z}[\Psi]$ задач, различающихся только парами матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$.

Определение 1. Задача Z из подкласса $\mathfrak{Z}[\Psi]$ называется регулярной, если в рамках категории Ψ (т. е. среди подмножеств множества морфизмов $\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))$ существует множество отображений $\mathfrak{M}$ такое, что Z полна относительно $\mathfrak{M}$.

Отметим, что свойство полноты является монотонным относительно теоретико-множественного включения в следующем смысле: если некоторая задача Z полна относительно семейства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — такое семейство, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))$, то Z полна и относительно семейства $\mathfrak{M}_2$. Следовательно, задача Z регулярна тогда и только тогда, когда она полна относительно $\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))$, т. е. когда выполнено равенство

$$\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))(\mathbf{I}) = \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}), \tag{2}$$

где $\mathbf{I}$ — матрица информации задачи Z.

Равенство (2), если его использовать в качестве условия, определяющего регулярность задач, обладает существенным недостатком: в то время как регулярность задачи Z зависит только от ее матрицы информации $\mathbf{I}$, где $\mathbf{I} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{J})$, в (2) фигурирует «лишнее» пространство матриц $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$. Справедливость сказанного вытекает из теоремы 1, дающей еще одно описание регулярных задач.

Теорема 1. Задача Z с матрицей информации $\mathbf{I}$, принадлежащая подклассу $\mathfrak{Z}[\Psi]$, регулярна тогда и только тогда, когда одноэлементное множество $\{\mathbf{I}\}$ является базой категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$.

Доказательство данной теоремы сводится к непосредственному использованию равенства (2) и леммы 3 из [3].

Описания баз симметрических и функциональных категорий, полученные в [5], в сочетании с теоремой 1 приводят к следующим результатам.

Теорема 2. Пусть σ — некоторая подгруппа группы σ_0, которой соответствует симметрическая категория Σ. Задача классификации Z с матрицей информации $\mathbf{I}$, принадлежащая подклассу $\mathfrak{Z}[\Sigma]$, регулярна тогда и только тогда, когда для любой неединичной подстановки s из группы σ выполнено соотношение $s(\mathbf{I}) \neq \mathbf{I}$.

Теорема 3. Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)}; \lambda)$ — некоторая допустимая функциональная сигнатура, определяющая функциональную категорию Φ. Задача классификации Z с матрицей информации $\mathbf{I} = \| I_{ij} \|_{q\times l}$, принадлежащая подклассу $\mathfrak{Z}[\Phi]$, регулярна тогда и только тогда, когда для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (q,l)\}$ таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в множестве $\{1, 2, \ldots, z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)\}$ существует k, для которого выполнено соотношение $I_{s(i_1,j_1,k)} \neq I_{s(i_2,j_2,k)}$.

В работах по алгебраической теории распознавания чаще всего рассматриваются задачи, для которых универсальные ограничения описываются определяемыми ниже категориями Φ_0 и Σ_0.

Категория Φ_0 — это функциональная категория, задаваемая функциональной сигнатурой $\varphi_0 = (S^0_{(1,1)}, \ldots, S^0_{(q,l)}; \lambda^0)$, где $S^0_{(i,j)} = \{(i,j)\}$ и $\lambda^0(i,j) = 1$ при $(i,j) \in S$.

Из определения φ-отображений (равенство (7) в [5]) вытекает, что для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$, а также для натуральных чисел p и r морфизмы категории Φ_0 из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{B})$ — это отображения u такие, что

$$u(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p) = u(\| U^1_{ij} \|_{q\times l}, \ldots, \| U^p_{ij} \|_{q\times l}) =$$

$$= (\| f^1(U^1_{ij}, \ldots, U^p_{ij}) \|_{q\times l}, \ldots, \| f^r(U^1_{ij}, \ldots, U^p_{ij}) \|_{q\times l})$$

для любого набора матриц $(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)$ из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ и для некоторого набора функций $f^1, \ldots, f^r$, где $f^k : \mathfrak{U}^p \to \mathfrak{B}$ при $k \in \{1, \ldots, r\}$. Отметим, что морфизмами категории Φ_0 являются алгоритмические операторы вычисления оценок [1, 2], операции сложения матриц над полем действительных чисел, умножения таких матриц на скаляр и по Адамару и т. д.

Категория Σ_0 — это симметрическая категория, соответствующая симметрической группе σ_0 — группе всех подстановок, действующих на множестве $S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (q,l)\}$. Морфизмы u категории Σ_0 — это отображения из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{B})$ (при произвольных $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, p$ и r) такие, что для любой подстановки s множества S и любого набора матриц $(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)$ из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $s(u(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)) = u(s(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p))$

Легко видеть, что категория Φ_0 является подкатегорией категории Σ_0, т. е. все морфизмы категории Φ_0 являются также и морфизмами категории Σ_0. Кроме того, морфизмами категории Σ_0 оказываются, например, операции типа выбора наибольшего элемента матрицы [2] и т. п.

Из определения 3 [5] вытекает, что $\Sigma_0 = \Sigma_{\varphi_0}$, а из теоремы 3 [5],— что категория Φ_0 является Г-полной подкатегорией категории Σ_0. Таким образом, базы категорий Φ_0 и Σ_0 в любом пространстве матриц одинаковы.

Из теорем 2 и 3 для категорий Φ_0 и Σ_0 получаем следствие 1.

Следствие 1. Задача классификации Z с матрицей информации $\mathbf{I}$, принадлежащая подклассу $\mathfrak{Z}[\Phi_0]$ или подклассу $\mathfrak{Z}[\Sigma_0]$, регулярна тогда и только тогда, когда элементы матрицы $\mathbf{I}$ попарно различны.

Рассмотрим конкретный пример — класс задач $\mathfrak{Z}_\Gamma$ (см. [1, 2]; для решения задач из этого класса предназначены алгоритмы вычисления оценок). Положим $\mathfrak{S} = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, где M_t при $t \in \{1, \ldots, n\}$ — пространства с введенными на них полуметриками ρ_t, и назовем элементы множества $\mathfrak{S}$ допустимыми объектами.

Пусть заданы m допустимых объектов $S_1, \ldots, S_m$ и m наборов из $\tilde{\mathfrak{J}}^l$, где $\tilde{\mathfrak{J}} = \{0, 1\}$, обозначаемых $(P_1(S_1), \ldots, P_l(S_1)), \ldots, (P_1(S_m), \ldots, P_l(S_m))$. При постановке конкретной задачи Z из класса $\mathfrak{Z}_\Gamma$ рассматривается набор из q допустимых объектов $(S^1, \ldots, S^q)$ и матрицей информации оказывается при этом матрица $\mathbf{I} = \| I_{ij} \|_{q \times l}$, где

$$I_{ij} = (\rho_1(S^i, S_1), \ldots, \rho_1(S^i, S_m), \rho_2(S^i, S_1), \ldots$$
$$\ldots, \rho_n(S^i, S_m), P_j(S_1), \ldots, P_j(S_m)),$$

т. е. в этом случае $\mathfrak{J} = R_+^{mn} \times \tilde{\mathfrak{J}}^m$, где R_+ — множество неотрицательных действительных чисел. Используя следствие 1, для задач из $\mathfrak{Z}_\Gamma[\Phi_0]$ и из $\mathfrak{Z}_\Gamma[\Sigma_0]$ получаем следствие 2.

Следствие 2. Задача Z из $\mathfrak{Z}_\Gamma[\Phi_0]$ или $\mathfrak{Z}_\Gamma[\Sigma_0]$ регулярна тогда и только тогда, когда для любых $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1, \ldots, q\}$ существуют k в $\{1, \ldots, m\}$ и t в $\{1, \ldots, n\}$ такие, что $\rho_t(S^{i_1}, S_k) \neq \rho_t(S^{i_2}, S_k)$, и когда для любых $j_1 \neq j_2$ из $\{1, \ldots, l\}$ существует k в $\{1, \ldots, m\}$ такое, что $P_{j_1}(S_k) \neq P_{j_2}(S_k)$.

Доказательство данного следствия сводится к проверке того, что попарная различность элементов матрицы информации эквивалентна приведенным условиям.

2. ПОЛНЫЕ МОДЕЛИ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть $\mathfrak{Z}$ — класс задач с множеством допустимых начальных информаций $\mathfrak{J}$ и зафиксирована полная допустимая категория Ψ (подкатегория категории $\Psi^{q,l}$). В этом случае определено подмножество подкласса $\mathfrak{Z}[\Psi]$, состоящее из регулярных задач, т. е. подмножество, состоящее из задач, полнота которых достижима при использовании семейств отображений, являющихся морфизмами категории Ψ.

Рассмотрим модель (семейство) $\mathfrak{M}^0$ алгоритмических операторов с множеством допустимых оценок $\mathfrak{R}$, считая, что операторы из модели $\mathfrak{M}^0$ суть морфизмы категории Ψ, т. е. что имеет место включение $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\mathfrak{R}))$.

Определение 2. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ называется полной (в категории Ψ), если для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ существуют такие множества $\mathfrak{F}$ корректирующих операций и $\mathfrak{M}^1$ решающих правил, являющихся морфизмами категории Ψ, что Z оказывается $\mathfrak{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Легко видеть, что требование полноты для моделей алгоритмических операторов является самым слабым из возможных. Действительно, если оказывается, что некоторая модель $\mathfrak{M}^0$ категории Ψ не полна в этой категории, то обязательно найдется регулярная задача Z такая, что для нее полноты нельзя будет добиться при использовании любых множеств корректирующих операций и решающих правил, удовлетворяющих универсальным ограничениям. В таком случае можно сказать, что алгоритмические операторы из модели $\mathfrak{M}^0$ «существенно неадекватно» производят перекодирование содержащейся в задаче исходной информации. В то же время, если модель $\mathfrak{M}^0$ полна, можно утверждать, что она с точки зрения разрешимости задач классификации неулучшаема в классе моделей категории Ψ.

Итак, определение 2 выражает основное требование, которое должно предъявляться к моделям алгоритмических операторов — требование полноты. Характеризацию полных моделей алгоритмических операторов, рассматриваемых как семейства отображений, дает следующая теорема.

Теорема 4. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ полна в категории Ψ тогда и только тогда, когда семейство отображений $\mathfrak{M}^0$ слабо 1 — Г-полно в категории Ψ (определение 2 в [4]).

Доказательство этой теоремы сводится к ссылке на лемму 1 из [4], поскольку для регулярных задач Z одноэлементные множества $\{\mathbf{I}\}$ (где $\mathbf{I}$ — матрицы информации задач Z) в силу теоремы 1 являются базами категории Ψ.

Содержащийся в теореме 4 критерий оказывается основным инструментом исследования конкретных параметрических моделей алгоритмических операторов. Для его применения должна быть определена полная допустимая категория Ψ (подкатегория категории $\Psi^{q,l}$), морфизмами которой являются алгоритмические операторы из рассматриваемой модели $\mathfrak{M}^0$. В рамках Ψ и ведется дальнейшее рассмотрение.

Доказательство полноты некоторой модели $\mathfrak{M}^0$ алгоритмических операторов на базе теоремы 4 будет выглядеть при этом следующим образом: пусть Z — некоторая регулярная задача классификации из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ с матрицей информации $\mathbf{I}$, т. е. пусть одноэлементное множество $\{\mathbf{I}\}$ — база категории Ψ. Покажем, что множество $\mathfrak{M}^0(\mathbf{I}) = \{B(\mathbf{I}) \mid B \in \mathfrak{M}^0\}$ является базой категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ и доказательство завершается проверкой того, что $\mathfrak{M}^0(\mathbf{I})$ — действительно база категории Ψ.

Используя результаты [5], из теоремы 4 получаем критерии полноты моделей алгоритмических операторов в симметрических и функциональных категориях.

Следствие 3. Пусть σ — произвольная подгруппа группы σ_0 и $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов категории Σ. Для того чтобы $\mathfrak{M}^0$ была полна в категории Σ, необходимо и достаточно, чтобы для любой матрицы $\mathbf{I}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ такой, что для любой неединичной подстановки s из σ выполнено $s(\mathbf{I}) \neq \mathbf{I}$, и для любой неединичной подстановки s_0 из σ в модели $\mathfrak{M}^0$ существовал алгоритмический оператор B_0 такой, что $s_0(B_0(\mathbf{I})) \neq B_0(\mathbf{I})$.

Следствие 4. Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, S_{(1,2)}, \ldots, S_{(q,l)}; \lambda)$ — допустимая функциональная сигнатура и $\mathfrak{M}^0$ — модель алгоритмических операторов категории Φ. Для того чтобы $\mathfrak{M}^0$ была полна в Φ, необходимо и достаточно, чтобы для любой матрицы $\mathbf{I} = \| I_{ij} \|_{q \times l}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ такой, что для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из S таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, существует k в $\{1, \ldots, z(i_1, j_1)\}$ такое, что $I_{s(i_1, j_1, k)} \neq I_{s(i_2, j_2, k)}$, и для любых $(i_1^0, j_1^0) \neq (i_2^0, j_2^0)$ из S с $\lambda(i_1^0, j_1^0) = \lambda(i_2^0, j_2^0)$ в модели $\mathfrak{M}^0$ существовал алгоритмический оператор B такой, что при некотором k из $\{1, \ldots, z(i_1^0, j_1^0)\}$ в матрице $B(\mathbf{I}) = \| R_{ij} \|_{q \times l}$ элементы $R_{s(i_1^0, j_1^0, k)}$ и $R_{s(i_2^0, j_2^0, k)}$ различны.

Отметим, что громоздкая (хотя и весьма прозрачная) формулировка последнего следствия существенно упрощается, когда речь идет о конкретной функциональной сигнатуре φ. Например, для категорий Φ_0 и Σ_0 получаем следствие 5.

Следствие 5. Для того чтобы модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ категории Φ_0 или Σ_0 была полна, необходимо и достаточно, чтобы для любой матрицы $\mathbf{I}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ с попарно различными элементами и для любых $(i_1^0, j_1^0) \neq (i_2^0, j_2^0)$ из S в $\mathfrak{M}^0$ содержался оператор B такой, что в $B(\mathbf{I}) = \| R_{ij} \|_{q \times l}$ выполнялось бы соотношение $R_{i_1^0 j_1^0} \neq R_{i_2^0 j_2^0}$.

Использование критерия, даваемого теоремой 4, позволяет решать вопрос о минимальной необходимой сложности моделей алгоритмических операторов.

В качестве меры сложности моделей часто удобно использовать число параметров. Допустим, что рассматривается некоторая модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, где $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — параметры, фиксация значений которых выделяет из семейства отображений $\mathfrak{M}^0(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ конкретное отображение. В этой ситуации следует прежде всего установить, является ли сама модель $\mathfrak{M}^0(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ полной (если нет, то она должна быть заменена более богатой). Если семейство $\mathfrak{M}^0(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ оказалось полным, то, последовательно отказываясь от использования параметров (фиксируя значения некоторых из них), следует получать более простые, чем исходная модель, подмодели и снова исследовать их полноту. В результате будут выделены все «минимальные» полные подмодели исходной модели, т. е. такие, что отказ от использования любого из оставшихся «свободными» параметров приводит к потере свойства полноты.

Рассмотрим конкретный пример.

В [1, 2] содержится описание модели алгоритмических операторов вычисления оценок $\mathfrak{M}(\gamma, p, \varepsilon, x)$. Операторы этой модели предназначены для решения задач из упоминавшегося выше класса $\mathfrak{Z}_\Gamma$. Изучим структуру подмоделей модели $\mathfrak{M}(\gamma, p, \varepsilon, x)$. Отсутствие указания на параметры γ, p, ε или x означает, что в соответствующей подмодели $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 1$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, $\varepsilon_1 = \mathrm{const}, \ldots, \varepsilon_n = \mathrm{const}$ или $x_0 = x_1 = 1$ соответственно.

Легко видеть, что модель $\mathfrak{M}(\gamma, p, \varepsilon, x)$ и, конечно, все ее подмодели — это модели категории Φ_0. Вопрос о полноте в данном случае решается следующими теоремами.

Теорема 5. Модель $\mathfrak{M}(\gamma, \varepsilon)$ полна в категории Φ_0.

Теорема 6. Модель $\mathfrak{M}(p, \varepsilon, x)$ не полна в категории Φ_0.

Доказательство теоремы 5 проводится на базе следствия 5. Доказательством теоремы 6 является контрпример.

Поскольку очевидно, что модель $\mathfrak{M}(\gamma, p, x)$ не полна, то вопрос о полноте для всех остальных подмоделей модели $\mathfrak{M}(\gamma, p, \varepsilon, x)$ решен: они являются либо надмоделями полных моделей, либо подмоделями не полных.

3. ПОЛНЫЕ МНОЖЕСТВА КОРРЕКТИРУЮЩИХ ОПЕРАЦИЙ

Как и выше, будем считать, что $\mathfrak{Z}$ — класс задач распознавания (классификации) с множеством допустимых начальных информаций $\mathfrak{J}$ и допустимых финальных информаций $\tilde{\mathfrak{J}}$ и зафиксированы полная допустимая категория Ψ (подкатегория категории $\Psi^{q,l}$), модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ с пространством допустимых оценок $\mathfrak{R}$, полная в категории Ψ, и корректное множество решающих правил $\mathfrak{M}^1$ категории Ψ. В силу полученных выше результатов в этом и только в этом случае (т. е. когда модель $\mathfrak{M}^0$ полна и семейство $\mathfrak{M}^1$ корректно) для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ существует такое множество корректирующих операций $\mathfrak{F}$ категории Ψ, что Z является $\mathfrak{F}$-полной относительно семейства суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Определение 3. Множество $\mathfrak{F}$ корректирующих операций, являющихся морфизмами категории Ψ, называется полным, если при любой полной в Ψ модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и любом корректном семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ категории Ψ каждая регулярная задача Z из $\mathfrak{Z}[\Psi]$ является $\mathfrak{F}$-полной относительно семейства суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Основным критерием полноты семейств корректирующих операций является следующая теорема.

Теорема 7. Для того чтобы множество $\mathfrak{F}$ корректирующих операций категории Ψ было полным, достаточно, чтобы семейство отображений $\mathfrak{F}$ было Γ-полным в категории Ψ.

Доказательство. Напомним, что семейство $\mathfrak{F}$ называется Γ-полным в категории Ψ, если для любой базы X категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ выполнено равенство

$$\mathfrak{F}(X) = \{F(R_1, \ldots, R_p) \mid F \in \mathfrak{F},$$

$$(R_1, \ldots, R_p) \in X^p\} = \mathfrak{C}(\mathfrak{R}).$$

Если Z — регулярная задача из $\mathfrak{Z}[\Psi]$, то множество $\{\mathbf{I}\}$, где $\mathbf{I}$ — матрица информации задачи Z, является базой категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ (теорема 1). В этом случае множество $X = \mathfrak{M}^0(\mathrm{I})$ при любой полной модели $\mathfrak{M}^0$ является базой категории Ψ в множестве $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ (теорема 4), а потому выполнены равенства

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(\mathrm{I})) = \mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{R}).$$

Наконец, при любом корректном семействе $\mathfrak{M}^1$ имеем

$$\mathfrak{M}^1(\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0(\mathrm{I}))) = \mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}(\mathfrak{R})) = \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{F}}),$$

а это означает, что задача Z является $\mathfrak{F}$-полной относительно семейства суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$.

Теорема доказана.

Отметим, что использование для построения расширений моделей алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ полных множеств корректирующих операций $\mathfrak{F}$ является заведомо достаточным, но может не быть необходимым в частных случаях. Действительно, модель $\mathfrak{M}^0$ может, вообще говоря, оказаться настолько «богатой», что все регулярные задачи окажутся полными относительно исходной модели. Следовательно, если для некоторого пространства допустимых оценок $\mathfrak{R}$ в рассматриваемой категории Ψ (полной и допустимой) найдено полное множество корректирующих операций $\mathfrak{F}$, то использование любых более широких множеств корректирующих операций $\mathfrak{F}_1$ (т. е. таких, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$) оказывается заведомо избыточным. В то же время вопрос о возможности достижения полноты для всех регулярных задач при использовании не полных множеств корректирующих операций интересен и важен. Но этот вопрос может решаться только для конкретных моделей алгоритмических операторов.

Приведем теперь вытекающие из теоремы 7 критерии полноты множеств корректирующих операций симметрических и функциональных категорий.

Следствие 6. Пусть σ — произвольная подгруппа группы σ_0 и $\mathfrak{F}$ — множество корректирующих операций категории Σ. Множество $\mathfrak{F}$ полно, если при любом множестве матриц X, где $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, таком, что для любой неединичной подстановки s из группы σ в X содержится матрица R со свойством $s(R) \neq R$, выполнено равенство $f(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$.

Следствие 7. Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, S_{(1,2)}, \ldots, S_{(q,l)}; \lambda)$— допустимая функциональная сигнатура и $\mathfrak{F}$ — множество корректирующих операций категории Φ. Множество $\mathfrak{F}$ полно, если при любом множестве матриц X, где $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, таком, что для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из S таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в X содержится матрица $R = \| R_{ij} \|_{q \times l}$ со свойством

$$(R_{s(i_1,j_1,1)}, \ldots, R_{s(i_1,j_1,z(i_1,j_1))}) \neq (R_{s(i_2,j_2,1)}, \ldots, R_{s(i_2,j_2,z(i_2,j_2))}),$$

выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$.

Следствие 8. Для того чтобы множество $\mathfrak{F}$ корректирующих операций категории Φ_0 или Σ_0 было полным, достаточно, чтобы при любом множестве матриц X, где $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, таком, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из S в X содержится матрица $R = \| R_{ij} \|_{q \times l}$ с $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$, и при любой матрице R^0 из $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ для некоторого оператора F из $\mathfrak{F}$ и некоторого набора матриц $(R^1, \ldots, R^p)$ из X^p было выполнено равенство $F(R^1, \ldots, R^p) = R^0$.

Доказательство полноты некоторого множества корректирующих операций $\mathfrak{F}$ на базе, например, следствия 8 будет выглядеть следующим образом: пусть X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ такое, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из S в X содержится матрица $R = \| R_{ij} \|_{q \times l}$ с $R_{i_1 j_1} \neq R_{i_2 j_2}$; построим для произвольной матрицы $R^0 \in \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ представление в виде $R^0 = F(R^1, \ldots, R^p)$, где $F \in \mathfrak{F}$ и $(R^1, \ldots, R^p) \in X$, и доказательство заканчивается выбором в X матриц $R^1, \ldots, R^p$ и в $\mathfrak{F}$ оператора F.

Приведем в качестве примера без доказательства полученную на базе следствия 8 верхнюю границу степени для полиномиальных множеств корректирующих операций [1, 2, 6].

Теорема 8. Множество корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-1}$ полно (в категориях Φ_0 и Σ_0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II // Кибернетика.— 1977.— № 4.— С. 5—17; № 6.—С. 21—27.
2. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики.— 1978.— Вып. 33.— С. 5—68.
3. Рудаков К. В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика.— 1987.— № 2.— С. 30—35.
4. Рудаков К. В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Там же. — 1987.— № 3.— С. 106—109
5. Рудаков К. В. Симметрические и функциональные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Там же. — 1987.— № 4. — С. 73—77.
6. Рудаков К. В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты).— М.. ВЦ АН СССР, 1980.— 66 с.

Поступила 24.04.85