АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

9

МОСКВА · 1988

Литература

1. *Marti J. T.* On the norm of the Sobolev imbedding of $H^2(G)$ into $C(G)$ for square domains in $\mathbb{R}^2$ // Math. Finite Elements and Applic. N. Y., 1985. P. 441–450.
2. *Hegland M., Marti J. T.* Numerical computation of least constants for the Sobolev inequality // Numer. Math. 1986. V. 48. P. 607–617.

Поступила в редакцию 20.VII.1987
Переработанный вариант 16.II.1988

УДК 519.7

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА КОРРЕКТНЫХ ПРОЦЕДУР РАСПОЗНАВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ С НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ КЛАССАМИ

РУДАКОВ К. В., ТРОФИМОВ С. В.

(Москва)

Описывается процедура построения корректных алгоритмов в алгебраическом замыкании семейств алгоритмов с представительными наборами для задач распознавания с непересекающимися классами.

В работах [1] и [2] заложены основы алгебраического подхода к решению задач распознавания образов. Целью этого подхода является построение корректных алгоритмов в алгебраических замыканиях множеств некорректных (эвристических) алгоритмов. Разработан математический аппарат, позволяющий исследовать различные классы задач распознавания (см. [3], [4]). В настоящей работе рассматриваются задачи распознавания с непересекающимися классами, в которых объекты попарно независимы и однородны, т. е. в них классификация любого объекта не зависит от классификации любого другого объекта, но должна производиться по тому же закону. Кроме того, предполагается, что классы не пересекаются, т. е. они взаимно зависимы (если объект занесен в некоторый класс, то он уже не может быть занесен ни в какой другой класс).

В рамках теории универсальных ограничений для задач классификации [3], [4] сказанное выше выражается предположением о том, что универсальные ограничения в рассматриваемых задачах выражаются категорией (будем обозначать ее $\Phi_i\cap\Sigma_j$), множества морфизмов которой являются пересечениями соответствующих множеств морфизмов категорий Φ_i и Σ_j.

Отображения, являющиеся морфизмами категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$, описывает

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, p_1 и p_2 — произвольные натуральные числа. Отображение u из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ и $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ — пространства $(q\times l)$-матриц над множествами $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно, является морфизмом категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$ тогда и только тогда, когда существуют функции $f_1,\dots,f_{p_2}$ из $\mathfrak{U}^{ep_1}$ в $\mathfrak{B}$ такие, что выполняется следующее:*

1) *для любых матриц $U^1,\dots,U^{p_1}\in\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ из*

$$u(U^1,\dots,U^{p_1})=(\|V_{ij}{}^1\|_{q\times l},\dots,\|V_{ij}{}^{p_2}\|_{q\times l})$$

следует, что

$$V_{ij}{}^r=f_r(U_{ij}{}^1,U_{i1}{}^1,\dots,\overset{1}{U}_{i,j-1},\overset{1}{U}_{i,j+1},\dots,U_{il}{}^1,\dots,U_{ij}{}^{p_1},$$

$$U_{i1}{}^{p_1},\dots,\overset{p_1}{U}_{i,j-1},\overset{p_1}{U}_{i,j+1},\dots,U_{il}{}^{p_1})$$

при $r=1,2,\dots,p_2$:

2) *для любого набора значений $(\bar U_1{}^1,\dots,\bar U_l{}^1,\dots,\bar U_1{}^{p_1},\dots,\bar U_l{}^{p_1})$ и любой подстановки $s\in\sigma^1_{l-1}$, где σ^j_{l-1} — группа всех биекций множества $\{1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,l\}$ на себя, выполнено равенство*

$$f_r(\bar U_1{}^1,\bar U_2{}^1,\dots,\bar U_e{}^1,\dots,\bar U^{p_1}_1,\bar U^{p_1}_2,\dots,\bar U^{p_1}_e)=f_r(\bar U_1{}^1,\bar U^1_{s(2)},\dots,\bar U^1_{s(l)},\dots$$
$$\dots,\bar U^{p_1}_1,\bar U^{p_1}_{s(2)},\dots,\bar U^{p_1}_{s(l)}).$$

На основе этой леммы нетрудно получить и описание баз категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$.

Лемма 2. *Пусть* $U \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, *где* $\mathfrak{U}$ — *некоторое произвольное множество. Множество* $\{U\}$ — *база категории* $\Phi_i \cap \Sigma_j$ *тогда и только тогда, когда строки* U *попарно различны как множества, а элементы каждой строки матрицы* U *попарно различны.*

Замечание 1. Предполагается, что наборы $\{x_1, \ldots, x_l\}$ и $\{y_1, \ldots, y_l\}$ различны как множества, если не существует биекции $s: \{1, 2, \ldots, l\} \to \{1, 2, \ldots, l\}$ такой, что $(x_1, \ldots, x_l) = (y_{s(1)}, \ldots, y_{s(l)})$.

Из этой леммы следует

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{I}}$ — *пространства допустимых начальных и финальных информаций для семейства алгоритмических операторов* $\mathfrak{M}$, *т. е. пусть* $\mathfrak{M}$ *состоит из отображений из* $\mathfrak{C}(\mathfrak{I})$ *в* $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{I}})$. *Пусть также все отображения из* $\mathfrak{M}$ *являются морфизмами категории* $\Phi_i \cap \Sigma_j$. *Семейство* $\mathfrak{M}$ *является полным семейством алгоритмических операторов тогда и только тогда, когда для каждой одноэлементной базы* X *произвольных пар* $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ *при* $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, q\}$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, l\}$ *и произвольной подстановки* $s \in \sigma_{l-1}^{j_2}$ *найдется такой элемент* $B \in \mathfrak{M}$, *что для* $B(X) = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ *выполнено условие*

$$(U_{i_1 j_1}, U_{i_1 1}, \ldots, U_{i_1 j_1 - 1}, U_{i_1 j_1 + 1}, \ldots, U_{i_1 l}) \neq$$
$$\neq (U_{i_2 j_2}, U_{i_2 s(1)}, \ldots, U_{i_2 s(j_1 - 1)}, U_{i_2 s(j_2 + 1)}, \ldots, U_{i_2 s(l)}).$$

На базе этой теоремы доказывается полнота описанного в [5] семейства алгоритмов распознавания с представительными наборами $\mathfrak{M}(\tilde{p}, \widetilde{\gamma})$. Каждый алгоритм этого семейства определяется набором значений параметров $\tilde{p}$ и $\widetilde{\gamma}$ — весов признаков и обучающих объектов. В алгоритмах семейства $\mathfrak{M}(\tilde{p}, \widetilde{\gamma})$ используется решающее правило C вида

$$P_j(S) = \begin{cases} 1, \text{ если } 2\Gamma_j(S) - \sum_{s=1}^{l} \Gamma_t(S) > 0, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

где $\Gamma_j(S)$ — оценка распознаваемого объекта S по классу K_j, а $P_j(S)$ — значение предиката «$S \in K_j$».

Ниже приводится описание процедуры синтеза набора алгоритмических операторов из семейства $\mathfrak{M}(\tilde{p}, \widetilde{\gamma})$, достаточного для решения произвольной регулярной задачи Z из рассматриваемого класса. Любая такая задача Z определяется двумя $(q \times l)$-матрицами: матрицей информации I, (i, j)-й элемент которой содержит всю информацию, относящуюся к i-му объекту и j-му классу $(I \in \mathfrak{C}(\mathfrak{I}))$, и информационной матрицей $\tilde{I}$, (i, j)-й элемент которой определяет принадлежность i-го элемента j-му классу $(\tilde{I} \in \mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{I}}),\ i \in \{1, 2, \ldots, q\},\ j \in \{1, 2, \ldots, l\})$. Везде далее I — матрица информации задачи Z и $\tilde{I}$ — ее информационная матрица.

Определение 1. Пусть R — произвольная матрица из $\mathfrak{C}(\mathbb{R})$. Назовем элементы R выделенными для задачи Z, если соответствующие элементы информационной матрицы задачи Z равны единице.

Определение 2. Матрица $R \in \mathfrak{C}(\mathbb{R})$ называется подобной информационной матрицей $\tilde{I}$ задачи Z, если из $\tilde{I}_{ij} = 1$ следует

$$2R_{ij} > \sum_{t=1}^{l} R_{it}.$$

При построении корректного для задачи Z алгоритма достаточно с помощью корректирующих операций над операторами из $\mathfrak{M}(\tilde{p}, \widetilde{\gamma})$ построить отображение, переводящее матрицу информации задачи Z в матрицу, подобную ее информационной матрице.

Опишем способ построения оператора B такого, что $R = B(I)$ является матрицей, подобной матрице $\tilde{I}$. Процесс построения оператора B состоит из нескольких шагов.

Введем функционалы $d(M)$ и $D(M)$, действующие на произвольную действительную матрицу M, считая ниже, что не все элементы этой матрицы попарно равны. По определению, $d(M) = \min |M_{i_1 j_1} - M_{i_2 j_2}|$, где минимум берется по всем парам (i_1, j_1) и (i_2, j_2) таким, что $|M_{i_1 j_1} - M_{i_2 j_2}| \neq 0$. В свою очередь, $D(M) = \max |M_{i_1 j_1} - M_{i_1 j_2}|$, где максимум берется по всем парам (i_1, j_1) и (i_2, j_2). Легко видеть, что для матрицы $M_1 =$

$=M/d(M)$ и $M_2=M/D(M)$ справедливы неравенства $d(M_1)\geqslant 1$ и $D(M_2)\leqslant 1$ соответственно. Обозначим через $T(M_1, M_2)$ операцию $M_1/d(M_1)+M_2/[2D(M_2)]$.

Шаг 1. Выбираем из семейства $\mathfrak{M}(\tilde{p}, \tilde{\gamma})$ некоторый оператор B_0 способом, описанным в [5], и полагаем $B=B_0$ (указанный способ основан на применении методов линейного программирования для поиска оптимальных значений параметров $\tilde{p}$ и $\tilde{\gamma}$). Если удается найти точное решение системы билинейных неравенств для задачи Z, то на этом построение корректного для этой задачи алгоритма завершается. Поскольку система билинейных неравенств из [5] описывает матрицы, подобные информационной матрице $\tilde{I}$, то корректным для задачи Z будет алгоритм $C\circ B$, где C – решающее правило вида (1). По определению, $C\circ B(I)=C(B(I))$ для любой матрицы $I\in\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$.

На шаге 1 найдено решение некоторой собственной совместной подсистемы системы неравенств для задачи Z. В этом случае использование оператора B_0 не позволит правильно классифицировать все объекты тестовой выборки.

Шаг 2. Строим оператор B, переводящий матрицу I в матрицу R такую, что выделенные в каждой строке элементы матрицы R для задачи Z являются уникальными в этой строке, т. е. не равны никакому другому элементу этой строки.

Шаг 3. Рассматриваем строку i матрицы $R=B(I)$ с выделенным элементом R_{ij} такую, что $R_{ij}=R_{ij_1}=\ldots=R_{ij_k}$ $(1\leqslant j_1,\ldots,j_k\leqslant l)$. Записываем для этой строки k неравенств:

$$(2)\qquad R_{ij}>R_{ij_1},\ldots,R_{ij}>R_{ij_k}.$$

Составляем общую систему неравенств из систем вида (2), содержащую (2) для всех строк матрицы R, ведущие элементы которых не уникальны в своих строках. Находим решение некоторой совместной подсистемы общей системы неравенств методом из [5]. Оно определяет оператор B_1 из $\mathfrak{M}(\tilde{p}, \tilde{\gamma})$. Корректируем оператор B следующим образом: $B=T(B, B_1)$.

Шаг 4. Анализируем ведущие элементы текущей матрицы оценок. Если не все ведущие элементы матрицы R уникальны в своих строках, то переходим к шагу 3.

Замечание 2. Построен оператор B, который переводит матрицу информации задачи Z в матрицу R, обладающую следующим свойством: в каждой строке R выделенный для задачи Z элемент отличается от всех остальных элементов этой строки. Однако наличия одного этого свойства недостаточно для построения корректного для задачи Z алгоритма. Требуется еще, чтобы для всех пар строк матрицы R, элементы которых совпадают как множества, ведущие элементы равнялись по величине.

Шаг 5. Если для всех пар совпадающих как множества строк матрицы R содержащиеся в них ведущие элементы попарно равны, то переходим к шагу 8.

Шаг 6. (Строки i_1 и i_2 матрицы R совпадают как множества, и ведущие в строках i_1 и i_2 элементы не равны между собой.) Находим произвольные j_1 и j_2 такие, что $R_{i_1j_1}=R_{i_2j_2}$. Формируем систему неравенств, содержащую неравенства вида $R_{i_1j_2}>R_{i_2j_2}$ для всех подобных пар строк матрицы R. Находим решение некоторой совместной ее подсистемы с помощью метода, описанного в [5]. Это решение определяет оператор $B_2\in\mathfrak{M}(\tilde{p}, \tilde{\gamma})$. Полагаем $B=T(B, B_2)$.

Шаг 7. Если не для всех пар совпадающих как множества строк матрицы R содержащиеся в них ведущие элементы попарно равны, то переходим к шагу 6.

Шаг 8. Для матрицы $R=B(I)$ строим отображение, являющееся морфизмом категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$ и переводящее матрицу I в матрицу, подобную информационной матрице $\tilde{I}$ задачи Z.

Замечание 3. Построенная в результате выполнения указанной процедуры матрица оценок не будет, вообще говоря, являться базой категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$. Однако легко видеть, что если исключить в матрице R строки, совпадающие как множества, то полученная матрица будет базой категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$ (конечно, при некотором меньшем q). Для этой базы и произвольной действительной матрицы, в частности и любой матрицы, подобной информационной для задачи Z, может быть построен полиномиальный корректирующий оператор категории $\Phi_i\cap\Sigma_j$, переводящий сокращенную матрицу R в соответствующим образом сокращенную матрицу, подобную сокращенной матрице $\tilde{I}$. Такое построение реализуется методами, описанными в [1], [2] (по поводу полиномиальных расширений семейства алгоритмов вычисления оценок см. также [6]).

Литература

1. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. 1978. Вып. 33. С. 5—68.
2. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5—17; II // № 6. С. 21—27; III // 1978. № 2. С. 35—43.
3. *Рудаков К. В.* Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика. 1987. № 2. С. 30—34.
4. *Рудаков К. В.* Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 3. С. 106—109.
5. *Трофимов С. В.* Оптимизация весовых коэффициентов в алгоритмах распознавания с представительными наборами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 8. С. 1266—1271.
6. *Матросов В. Л.* О полиномиальных расширениях семейства алгоритмов вычисления оценок // Докл. АН СССР. 1980. Т. 57. С. 1019—1022.

Поступила в редакцию 30.VII.1987