АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Распознавание
Классификация
Прогноз

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Выпуск 1

Ежегодник основан в 1988 г.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР
Ю. И. ЖУРАВЛЕВ

МОСКВА «НАУКА» 1989

Теорема 10. Для всяких η, $\varepsilon > 0$ с вероятностью $1 - \eta$ частота ошибок алгоритма из $\mathfrak{A}^L_{\mathscr{P}}\{\mathfrak{M}\}$, решающего контрольную выборку $\tilde{S}^q$, отличается от частоты ошибок данного алгоритма на обучающей выборке не более чем на ε, если величина отношения длины выборки q к произведению параметров модели $\mathfrak{A}^L_{\mathscr{P}}\{\mathfrak{M}\}$ удовлетворяет условию

$$q\,(2w\,(\varkappa e \tau m + L)(\log\,(mL + 1) + 1)^{-1} \geqslant f\,(n,\ \varepsilon,\ \eta),$$

где $w \leqslant n$; $e\tau < L$.

Настоящая теорема указывает на возможность синтеза алгоритма с заданным качеством для всякой регулярной задачи, имеющей относительно невысокую размерность алгоритма, корректного на ее обучающей выборке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. 1978Вып. . 33. С. 5—68.
2. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов // Кибернетика. 1977. № 4. С. 14—21; № 6. С. 21—27; 1978. № 2. С. 35—43.
3. *Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.* Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974. 416 с.
4. *Вапник В. Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979. 448 с.
5. *Матросов В. Л.* Оптимальные алгоритмы в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок // ДАН СССР. 1982. Т. 262, № 4. С. 818—822.
6. *Матросов В. Л.* Емкость алгебраически расширений модели алгоритмов вычисления оценок // ЖВМиМФ. 1984. Т. 24, № 11. С. 1719—1730.
7. *Матросов В. Л.* Нижние оценки емкости многомерных алгебр алгоритмов вычисления оценок // Там же. 1984. Т. 24, № 12. С. 1881—1892.
8. *Матросов В. Л.* Емкость алгоритмических многочленов над множеством алгоритмов вычисления оценок // Там же. 1985. Т. 25, № 1. С. 122—133.
9. *Рудаков К. В.* Универсальные и локальные ограничения в проблемах коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика. 1987. № 2. С. 30—34.

УДК 519.7

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ

К. В. РУДАКОВ

Введение. Общая постановка задач классификации. Основная конструкция алгебраических расширений семейств алгоритмов классификации. Универсальные и локальные ограничения. Формализация понятия «универсальные ограничения». Об основных понятиях алгебраического подхода к решению задач классификации. Некоторые универсальные ограничения для задач классификации. Об основных понятиях теории универсальных и локальных ограничений. Основные общие результаты для задач и алгоритмов классификации. Общие приемы исследования алгебраической теории универсальных и локальных ограничений. Примеры.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа имеет целью описание мотивов возникновения, основных понятий и некоторых результатов теории универсальных и локальных ограничений для задач и алгоритмов классификации. Эта теория является составной частью алгебраического подхода к решению задач распознавания. Поскольку теория универсальных и локальных ограничений тесно связана с базисными понятиями и построениями всего алгебраического подхода, представляется уместным прежде всего кратко остановиться на его наиболее важных особенностях.

Основы алгебраического подхода были заложены классическими работами Ю. И. Журавлева [1—4]. В них впервые было предпринято регулярное исследование возможностей использования алгебраических конструкций для построения алгоритмов распознавания. Отметим. что имеется принципиальное отличие этого подхода от ранее известных примеров алгебраических построений в распознавании образов (см. [5]), поскольку эти построения имели целью лишь создание математических моделей тех или иных предметных областей. а предметом приложения методов алгебраического подхода является собственно сам процесс решения задач.

С методологической точки зрения возникновение алгебраического подхода явилось логическим развитием идеи о возможности применения математических методов для решения прикладных задач в предметных областях, для которых нет адекватных математических моделей (эта идея в свое время привела к возникновению распознавания как самостоятельного направления исследований). Но это не означает, что при таком подходе не используются модели. Используются не модели предметной области, а модели процесса преобразования информации, представляющие собой, как правило, параметрические семейства отображений (алгоритмов). Такие семейства и принято называть моделями алгоритмов распознавания. Например. в настоящее время развита теория и разработаны конкретные алгоритмы, основанные на использовании понятий тестов и представительных наборов [6—8]. Исходной для этих построений является идея выделения во входной информации простейших частей. достаточных в том или ином смысле для решения задач. Широко используются также модели, основанные на принципах голосования («голосуют» части входной информации), разделения (применяются специальные геометрические конструкции) и т. п. (литературу см. в [1]). Такие модели алгоритмов распознавания можно назвать эвристическими информационными моделями, поскольку они являются результатом формализации интуитивных представлений о возможных связях между начальными и финальными (входными и выходными) данными в конкретных задачах.

Решение задач на базе эвристических информационных моделей проводится в два этапа: сначала выбирается модель и потом в рамках модели производится поиск алгоритма, в наибольшей степени соответствующего конкретной информации, т. е. конкретной задаче.

Исходным пунктом алгебраического подхода послужила мысль о том, что эвристические информационные модели не являются отражением какой-либо физической реальности и, следовательно, их не обязательно использовать в процессе решения в качестве жестких границ, в которых только и можно искать подходящий алгоритм. Действительно, в отличие от стандартных математических моделей, параметры, определяющие конкретные алгоритмы в эвристических информационных моделях, как правило, с самого начала имеют лишь весьма приблизительную содержательную интерпретацию (чем, впрочем, и обеспечивается применимость методов распознавания в самых различных плохо формализованных областях). *Поэтому при решении конкретной задачи основную ценность представляют не отдельные значения параметров, но весь их комплекс, т. е. сам алгоритм, причем его качество полностью определяется тем, насколько он полно и точно соответствует имеющейся в задаче конкретной информации.* Итак, исходная идея алгебраического подхода состоит в том, чтобы использовать в процессе решения конкретных задач эвристические модели лишь как исходный материал, на базе которого с помощью алгебраических конструкций можно строить искомые алгоритмы.

Существенной особенностью алгебраических методов в распознавании является то, что целью их применения ставится поиск (синтез) действительно экстремальных по качеству алгоритмов, т. е. алгоритмов, полностью и точно использующих имеющиеся в задаче данные. Полученные в настоящее время результаты показывают, что эта цель может быть достигнута, конечно, для строго определенного класса разрешимых задач, т. е. задач с внутренне непротиворечивой информацией. Этим алгебраический подход существенно отличается от методов, основанных на использовании фиксированных эвристических информационных моделей, поскольку в этом случае именно в силу фиксированности модели обычно приходится ставить лишь вопрос о поиске экстремального в рамках модели алгоритма, который может и не соответствовать полностью имеющейся в конкретной задаче информации.

Основным техническим приемом алгебраического подхода является проблемно-ориентированный синтез расширений исходных моделей с помощью так называемых корректирующих операций. Эти операции применяются к алгоритмам исходной модели и позволяют строить экстремальные для конкретных задач алгоритмы (конечно, если эти задачи разрешимы). Очень важно, что формирование корректирующих операций и выбор их аргументов, т. е. алгоритмов из исходной модели, проводятся с использованием и на базе имеющейся в задаче информации, что позволяет в значительной степени избежать трудностей решения задач оптимизации, присущих методам, основанным на прямом использовании эвристических информационных моделей.

В основополагающих работах Ю. И. Журавлева был построен ряд конкретных примеров расширений известных эвристических информационных моделей и были указаны явные методы синтеза точных решений для широкого класса задач распознавания. В то же время оставались открытыми представляющиеся важными и интересными вопросы:

1. Какова степень общности полученных результатов? Иначе говоря, имеется ли возможность использовать те же методы для решения более широкого класса задач (описания классов задач, допускающих гарантированно точное решение, формулировались в [2—4] как, по сути дела, достаточные, но, вообще говоря, не необходимые условия)?

2. Имеется ли возможность, «слегка» изменив методы решения, существенно расширить класс разрешимых задач?

3. Какими свойствами должны обладать используемые в качестве исходных в алгебраических построениях эвристические информационные модели?

4. Какими свойствами должны обладать семейства корректирующих операций?

5. Можно ли проводить исследование моделей и семейств корректирующих операций по отдельности (в [1—4], скажем, критерии, которым должны удовлетворять модели алгоритмов, были неразрывно связаны с использованием корректирующих операций, индуцированных операциями линейной алгебры)?

6. Каков минимальный уровень сложности моделей алгоритмов и семейств корректирующих операций, необходимый для решения всех разрешимых задач данного класса? Иначе говоря, можно ли в конкретных ситуациях использовать более простые модели и семейства вместо исходных, ничего не теряя при этом в смысле сужения множества разрешимых задач?

Актуальность последнего вопроса обусловлена тем, что семейства корректирующих операций и эвристические информационные модели создаются на базе различного рода неформальных соображений, так что исходная сложность этих семейств определяется в конечном счете просто богатством фантазии авторов.

Желание получить строгие ответы на поставленные выше, да и многие другие вопросы и привело к разработке алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации, рассмотрению основных положений и результатов которой и посвящена настоящая работа.

1. Общая постановка задач классификации

Одной из основных задач математической кибернетики и, по-видимому, теоретической информатики является задача синтеза алгоритмов, преобразующих начальные (исходные, входные) данные (информации) в финальные (выходные) данные. Рассматривая общий случай, мы будем считать, что изучается класс задач, в которых входные данные являются элементами множества $\mathfrak{J}_i$, называемого множеством возможных начальных информаций, а выходные — элементами множества $\mathfrak{J}_f$, называемого множеством возможных финальных информаций. Примеры множеств $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ будут приведены ниже при рассмотрении задач классификации.

Постановка конкретной задачи синтеза алгоритма преобразования информации, которую мы будем называть задачей Z, распадается на три части: описание множества $\mathfrak{J}_i$, описание множества $\mathfrak{J}_f$ и описание требований, которым должен удовлетворять искомый алгоритм. Эти требования можно рассматривать как систему ограничений, выделяющую из множества всех отображений из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$ отображение, которое должно быть реализовано алгоритмом-решением. Итак, при заданных множествах $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ постановка конкретной задачи Z сводится к описанию информации I_0, определяющей ограничения, которым должно удовлетворять отображение из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$, реализуемое искомым алгоритмом A. Ниже мы, как правило, не будем различать алгоритмы и реализуемые ими отображения.

Введем некоторые новые обозначения и термины. Множество всех отображений из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$ будем обозначать $\mathfrak{M}_0$, а всех отображений из $\mathfrak{M}_0$, удовлетворяющих ограничениям из системы I_0, будем обозначать $\mathfrak{M}(I_0)$.

Существенной особенностью большинства практических задач синтеза алгоритмов преобразования информации является то, что в этих задачах система ограничений I_0 оказывается неполной, т. е. она не позволяет выделить из $\mathfrak{M}_0$ единственное отображение. Мы зафиксируем это обстоятельство, считая, что допустим случай, когда $|\mathfrak{M}(I_0)| > 1$ (здесь и далее $|X|$ — мощность множества X). В любом случае понятие решения определяется следующим образом: решением здачи Z, которая определяется системой ограничений I_0, является любой алгоритм A, реализующий любое отображение из множества $\mathfrak{M}(I_0)$. Отображения из $\mathfrak{M}(I_0)$ называются допустимыми для задачи Z, а алгоритмы, реализующие допустимые для задачи Z отображения,— корректными для задачи Z. Итак, решением задачи Z является любой корректный для нее алгоритм. Отметим, что, если вся имеющаяся у нас информация выражена описаниями множеств $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ и системой ограничений I_0, мы в принципе не можем предпочесть один корректный алгоритм другому (конечно, если не учитывать вопросы сложности реализации таких алгоритмов).

На уровне данной общей постановки соотношение между подходом, основанном на использовании эвристических информационных моделей, и алгебраическим подходом выглядит следующим образом. В первом случае формируется семейство отображений $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0$ и в его рамках ищется отображение либо принадлежащее пересечению $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}(I_0)$, либо близкое в каком-то смысле к множеству $\mathfrak{M}(I_0)$ (так что в этом случае приходится использовать еще и дополнительные предположения о виде адекватных оценок близости между отображениями). При алгебраическом же подходе регулярным образом строятся расширения множества $\mathfrak{M}$ так, что пересечение расширенной модели $\mathfrak{M}'$ и множества $\mathfrak{M}(I_0)$ оказывается априори не пустым, и более того, так, что удается в явном виде синтезировать алгоритм, реализующий некоторое отображение из $\mathfrak{M}(I_0)$, т. е. корректный алгоритм.

Рассмотрим теперь более подробно задачи классификации. В таких задачах множества $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ можно считать пространствами матриц фиксированной (для конкретной задачи) размерности $q \times l$, где l — число классов и q — число объектов, для которых известны их описания и задано, к каким классам принадлежит каждый из них.

Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество. Пространство $q \times l$-матриц над $\mathfrak{U}$ будем обозначать символом $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ (рассматривая задачи классификации, мы будем считать q и l произвольными, но зафиксированными натуральными числами), для обозначения $q \times l$-матриц будут использоваться полужирные символы.

Итак, в задачах классификации $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ и $\mathfrak{J}_f = \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$, где $\mathfrak{J}$ и $\tilde{\mathfrak{J}}$ — множества, называемые множеством допустимых начальных и множеством допустимых финальных информаций соответственно.

Кроме того, общей чертой рассматриваемых задач классификации является то, что в ограничениях I_0 содержится пара матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$ из $\mathfrak{J}_i \times \mathfrak{J}_f$, которыми определяется требование, чтобы *допустимые отображения из $\mathfrak{M}(I_0)$ удовлетворяли равенству $A(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{I}}$* (здесь A — произвольное отображение, допустимое для задачи Z). Для задачи классификации Z матрица $\mathbf{I}$ называется матрицей информации, а матрица $\tilde{\mathbf{I}}$ — информационной матрицей.

С содержательной точки зрения элементы матрицы информации представляют собой данные, которые относятся «локально» к соответствующему объекту и соответствующему классу (классам соответствуют столбцы, а объектам — строки).

В качестве конкретного примера рассмотрим теперь класс $\mathfrak{Z}_\Gamma$ задач, для решения которых используются алгоритмы вычисления оценок (их подробное описание и соответствующую библиографию см. в ст. В. В. Рязанова в наст. сб.). Ниже будут использоваться следующие обозначения и термины: $M_1, \ldots, M_n$ — пространства с полуметриками $\rho_1, \ldots, \rho_n$; элементы произведения $\mathfrak{A} = M_1 \times \ldots \times M_n$ называются допустимыми объектами. Для данных задач используется так называемый стандартный способ формирования начальной информации. При этом прежде всего фиксируется набор допустимых объектов $S_1, \ldots, S_m$ и задается набор булевых векторов $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1l}), \ldots, (\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{ml})$, определяющих принадлежность объектов $S_1, \ldots, S_m$ классам $K_1, \ldots, K_l$. Для задачи Z из $\mathfrak{Z}_\Gamma$ матрица информации $\mathbf{I} = \| I_{ij} \|_{q\times l}$ определяется условием $I_{ij} = (\| \rho_t (S^i, S_R) \|_{m\times n}, \alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})$, а информационная матрица $\tilde{\mathbf{I}} = \| \tilde{I}_{ij} \|_{q\times l}$ — условием $\tilde{I}_{ij} = \alpha^i_j$ при $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$. Итак, в этом случае $\mathfrak{J} = \mathbf{R}^{mn}_+ \times \{0, 1\}^m$ и $\tilde{\mathfrak{J}} = \{0, 1\}$. Таким образом, в постановке рассматриваемых задач участвует еще и набор допустимых объектов $S^1, \ldots, S^q$, принадлежность которых классам определяется булевыми векторами $(\alpha^1_1, \ldots, \alpha^1_l), \ldots, (\alpha^q_1, \ldots, \alpha^q_l)$. Объекты $S_1, \ldots, S_m$ принято называть объектами обучения, а объекты $S^1, \ldots, S^q$ — контрольными объектами.

Нетрудно заметить, что если в постановке рассматриваемых задач ограничиться лишь требованием, чтобы корректный алгоритм A реализовал отображение из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$, удовлетворяющее условию $A(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{I}}$, то тривиальным образом могут быть построены решения, не имеющие реального смысла (скажем, в таком случае возможно решение при использовании отображений — констант). Отсюда немедленно вытекает, что при постановке этих задач, а равно и вообще при постановке задач классификации, обязательно должны накладываться некоторые дополнительные ограничения, т. е. в I_0 должны содержаться не только пара матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$ с соответствующим условием, но и еще какие-то условия, суживающие класс допустимых отображений.

Отметим, что во многих случаях уже на стадии формирования эвристических информационных моделей исследователи неявно использовали дополнительные ограничения, так что, решая задачи в рамках таких моделей, «автоматически» можно было получить только удовлетворяющие дополнительным ограничениям алгоритмы. В то же время, используя конструкции алгебраического подхода и не фиксируя в явном виде дополнительные ограничения, можно достаточно легко получить универсальные, но бессмысленные с содержательной точки зрения результаты. Принципиально также то, что дополнительные ограничения мы рассматриваем как часть постановки задач, что позволяет, например, говорить о разрешимости задач классификации (если дополнительные ограничения не входят в постановку, то невозможность решения при использовании какого-либо метода всегда можно приписать слабости самого этого метода).

2. Основная конструкция алгебраических расширений семейств алгоритмов классификации

Как уже говорилось, для расширения моделей алгоритмов классификации применяются корректирующие операции. Вообще говоря, под корректирующей операцией можно понимать произвольную операцию под множеством отображений $\mathfrak{M}_0$, т. е. над множеством всех отображений из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$. Существенно, однако, что корректирующие операции должны допускать эффективные определение и реализацию, поскольку в результате их применения должны возникать явно определенные отображения (алгоритмы). В силу этого при алгебраическом подходе используется в настоящее время только описываемый ниже способ формирования корректирующих операций.

Пусть $\mathfrak{N}_0 = \{A \mid A : X \to Y\}$, где X и Y — некоторые множества, и пусть $\mathfrak{G}'$ — некоторое множество операций над множеством Y. В этом случае каждой p-арной операции G' из $\mathfrak{G}'$ можно сопоставить p-арную операцию G над $\mathfrak{N}_0$, используя как определение равенство

$$G(A_1, \ldots, A_p)(x) = G'(A_1(x), \ldots, A_p(x)),$$

где $A_1, \ldots, A_p$ — отображения из $\mathfrak{N}_0$ и x — произвольный элемент множества X. В результате множеству $\mathfrak{G}'$ оказывается сопоставленным множество $\mathfrak{G}$, состоящее из операций, сопоставленных вышеуказанным способом операциям из множества $\mathfrak{G}'$.

Непосредственное использование описанной (впрочем, крайне хорошо известной в классической математике) конструкции для алгоритмов классификации, т. е. синтез корректирующих операций на базе операций над множеством $\mathfrak{J}_f$, оказалось во многих случаях затруднительным. Причина этого состоит в том, что в интересных для практики задачах множество $\mathfrak{J}_f$, возникающее как формализация содержательных требований к виду выходных данных, оказывается мало приспособленным для введения на нем удобных алгебраических операций. Известный результат, подтверждающий эту мысль, можно найти в [1].

Теперь мы перейдем к описанию реально используемого при алгебраическом подходе способа определения корректирующих операций. Напомним прежде всего, что для произвольных отображений $u : X \to Y$ и $v : X' \to Y'$ (при произвольных множествах X, Y, X' и Y') произведение $u \times v$ — отображение из $X \times X'$ в $Y \times Y'$ такое, что для всех (x, x') из $X \times X'$ выполнено равенство $u \times v(x, x') = (u(x), v(x'))$. Пусть теперь $u : X^p \to Y$, где X и Y — произвольные множества и p — произвольное натуральное число. Диагонализацией отображения u будем называть отображение $u_\Delta : X \to Y$ такое, что для всех x из X выполнено равенство $u_\Delta(x) = u(x, x, \ldots, x)$.

Одним из основных технических приемов алгебраического подхода является введение и использование специально выбираемого для определения корректирующих операций «промежуточного» между $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ пространства $\mathfrak{J}_e$, называемого пространством возможных оценок. Место исходного эвристического семейства $\mathfrak{M}$ занимает при этом семейство суперпозиций отображений из эвристических же семейств $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, где $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{M}_0^0 = \{B \mid B : \mathfrak{J}_i \to \mathfrak{J}_e\}$ и $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \{C \mid C : \mathfrak{J}_e^p \to \mathfrak{J}_f\}$. Множество $\mathfrak{M}^0$ называется семейством (или моделью) алгоритмических операторов, а множество $\mathfrak{M}^1$ — семейством решающих правил. Само семейство $\mathfrak{M}$ определяется при этом следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 =$$
$$= \{C \circ (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_p)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1, (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p\}.$$

Отметим, во-первых, что на практике наиболее часто используются унарные решающие правила, т. е. рассматривается случай, когда $\mathfrak{M}^1 \subseteq \{C \mid C : \mathfrak{J}_e \to \mathfrak{J}_f\}$. Во-вторых, эвристические информационные модели чаще всего с самого начала формируются как семейства суперпозиций указанного вида.

Пусть теперь $\mathfrak{F}'$ — некоторое множество операций над множеством $\mathfrak{J}_e$ и $\mathfrak{F}$ — множество операций над $\mathfrak{M}_0^0$, сопоставленных операциям из $\mathfrak{F}'$ вышеописанным способом. Если применить операции из $\mathfrak{F}$ к отображениям из $\mathfrak{M}^0$, то можно получить расширение семейства $\mathfrak{M}^0$ — семейство

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \{F(B_1, \ldots, B_p) \mid F \in \mathfrak{F}, (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p\}.$$

Множество $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ называется $\mathfrak{F}$-расширением модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$.

Используя теперь вместо исходной модели $\mathfrak{M}^0$ ее $\mathfrak{F}$-расширение $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$, получаем $\mathfrak{F}$-расширение исходного семейства алгоритмов $\mathfrak{M}$, которое мы будем обозначать $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$:

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$$

(использование квадратных скобок в $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ вместо круглых указывает на специальный вид применяемых суперпозиций).

Следует отметить, что для выполнения включений $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ достаточно, чтобы в множестве $\mathfrak{F}'$ (а потому и в множестве $\mathfrak{F}$) содержался тождественный унарный оператор.

Итак, описана основная конструкция, позволяющая получать расширения моделей алгоритмов с использованием корректирующих операций. Наиболее важных особенностей этой конструкции две: использование пространства возможных оценок и возможность использовать при синтезе единственного алгоритма целый набор исходных алгоритмических операторов, что позволяет, вообще говоря, применяя соответствующие операции, компенсировать недостатки одних алгоритмических операторов за счет других. Таким образом, при алгебраическом подходе открывается возможность переноса «центра тяжести» задач на выбранное исследователем пространство возможных оценок, что обеспечивает значительные технические преимущества и в теоретическом, и в чисто вычислительном плане.

Описанная конструкция применима, конечно, в общем случае задач построения алгоритмов преобразования информации. В случае задач классификации их специфика выражается в том, что в качестве пространства возможных оценок оказывается удобным использовать пространства $q \times l$-матриц, причем чаще всего полагают $\mathfrak{J}_e = \mathfrak{C}(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел. В последнем случае корректирующие операции могут индуцироваться привычными операциями над действительными матрицами.

В частности, в работах [1—4] и в [21—22] подробно изучались множества корректирующих операций, индуцированных операциями линейной алгебры и умножением матриц по Адамару.

3. Универсальные и локальные ограничения

Из сказанного во введении и в разд. 1 нетрудно заключить, что наиболее интересной и важной частью задач распознавания является информация, выражаемая системами ограничений I_0. Эти системы ограничений и будут предметом рассмотрения в этой и следующей главах.

В системы ограничений I_0 *могут входить ограничения, самым* непосредственным образом связанные с конкретными пространствами $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$. Примером такого рода является прецедентная информация в задачах классификации, выражаемая парой матриц $(I, \tilde{I})$ и требованием выполнения равенства $A(\mathrm{I}) = \tilde{\mathrm{I}}$. Ограничения *описываемого вида мы будем называть локальными.*

Отдельное рассмотрение локальных ограничений при использовании алгебраических методов коррекции оправдывается тем, что такие ограничения могут быть использованы только лишь применительно к «целым» алгоритмам, но они оказываются непосредственно не применимыми к алгоритмическим операторам, корректирующим операциям и решающим правилам. Ограничения, которые применимы ко всем используемым в процессе реше*ния отображениям, мы будем называть универсальными, причем* будем считать, что других ограничений нет. Таким образом, мы полагаем, что $I_0 = (I_0^u, \ I_0^l)$, причем $\mathfrak{M}(I_0) = \mathfrak{M}(I_0^u) \cap \mathfrak{M}(I_0^l)$, где I_0^l — система локальных ограничений; I_0^u — система универсальных ограничений; $\mathfrak{M}(I_0^u)$ и $\mathfrak{M}(I_0^{l})$ — удовлетворяющие этим ограничениям семейства отображений из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$.

Помимо чисто формального признака — применимости к тем или иным отображениям, существует еще одно важное обстоятельство, заставляющее различать универсальные и локальные ограничения. А именно необходима возможность эффективной проверки того, удовлетворяет ли данное отображение конкретному локальному ограничению. Действительно, допустим, что методами алгебраического подхода для данной задачи построен некоторый алгоритм. Если при этом в системе I_0 имеется не допускающее эффективной проверки ограничение, причем ограничение локальное, то в этом случае за конечное число шагов, вообще говоря, нельзя решить вопрос о том, является ли построенный алгоритм корректным для данной задачи.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай, когда $\mathfrak{J}_i$ — бесконечное линейно упорядоченное множество, $\mathfrak{J}_f$ — упорядоченное множество, $\mathfrak{J}_e$ — множество, на котором не введено отношение порядка, и требуется, чтобы корректный алгоритм реализовывал монотонное отображение (удовлетворяющее, возмож*но, некоторым дополнительным условиям). В этом случае при* «проходе» через пространство возможных оценок $\mathfrak{J}_e$ информация о порядке окажется потерянной и эффективная проверка корректности для любого построенного с помощью описанных в разд. 2 конструкций алгоритма окажется невозможной. Так что в этом случае требование монотонности должно обязательно использоваться как универсальное ограничение, выполнения которого следует потребовать и для алгоритмических операторов, и для корректирующих операций, и для решающих правил. Тогда любой построенный алгоритм будет «автоматически» реализовывать монотонное отображение и вопрос будет стоять лишь о выполнении остальных ограничений.

Перейдем теперь к рассмотрению задач классификации, считая, что единственным локальным ограничением в каждой задаче является пара матриц $(\mathbf{I}, \widetilde{\mathbf{I}})$ с требованием выполнения равенства $A(\mathbf{I}) = \widetilde{\mathbf{I}}$, т. е. будем считать, что все остальные ограничения в этих задачах универсальны. Приведем примеры таких ограничений.

С л у ч а й 1. Пусть известно, что ни порядок вхождения контрольных объектов в выборку $S^1, \ldots, S^q$, ни порядок рассмотрения классов, ни, более того, порядок рассмотрения пар вида объект-класс не несут информации, т. е. чисто случайны. Мы будем говорить в таком случае, что информации, относящиеся «локально» к i_1-му объекту и j_1-му классу и к i_2-му объекту и j_2-му классу однородны при любых $1 \leqslant i_1, i_2 \leqslant q$ и любых $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant l$. Эта ситуация может быть выражена в виде ограничения на корректные алгоритмы следующим образом.

Пусть σ_0 — симметрическая группа подстановок, действующих на множестве $\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (q, l)\}$, $\mathfrak{U}$ — произвольное множество, $\mathbf{U} = \| U_{ij} \|_{q\times l}$ — матрица из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, s — подстановка из σ_0. Определим действие подстановки s на пространстве матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ равенством $s(\mathbf{U}) = \| U_{s(i,\, j)} \|_{q\times l}$.

Допустим, что u — произвольное отображение из $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}$ (так же как и $\mathfrak{A}$) — произвольное множество. Отображение u коммутирует с подстановкой s, если для любой матрицы $\mathbf{U}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ выполнено равенство $u(s(\mathbf{U})) = s(u(\mathbf{U}))$.

Соответствующее ограничение выглядит следующим образом: реализуемое корректным алгоритмом отображение, т. е. допустимое отображение A из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{J}})$, должно коммутировать со всеми подстановками из группы σ_0.

С л у ч а й 2. Пусть известно, что, кроме оговоренных в случае 1 условий, информации, относящиеся «локально» к различным классам или объектам, попарно независимы. Это условие может быть выражено требованием (ограничением на вид допустимых отображений), чтобы допустимые отображения могли задаваться единственной функцией $f: \mathfrak{J} \to \widetilde{\mathfrak{J}}$ следующим образом:

$$A(\mathbf{I}) = A(\| I_{ij} \|_{q\times l}) = \| f(I_{ij}) \|_{q\times l}$$

для любой матрицы $\mathbf{I}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$.

Приведенные примеры, как нетрудно видеть, определяют универсальные ограничения.

Отметим, что приведенному в случае 2 ограничению удовлетворяют многие реально используемые эвристические информационные модели и семейства корректирующих операций. В силу этого зачастую и вообще задачи классификации рассматривают не как задачи синтеза алгоритмов, реализующих отображения из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$, но как задачи синтеза алгоритмов, реализующих отображения из $\mathfrak{J}$ в $\tilde{\mathfrak{J}}$, т. е. ограничиваются именно случаем 2. Представляя, несомненно, большой интерес, такие исследования, однако, оставляют «за кадром» многие практические важные ситуации. Например, оставаясь в рамках случая 2, нельзя решать задачи с непересекающимися классами, так как в этом случае классы не являются независимыми (если некоторый объект занесен в определенный класс, то он уже не может быть занесен ни в какой иной класс).

Изучение связей между универсальными и локальными ограничениями и составляет собственно предмет теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации. При этом особый интерес представляют собой именно универсальные ограничения. Поэтому нашей ближайшей целью будет строгое формальное определение понятия универсальных ограничений, на базе которого можно проводить их систематическое изучение.

4. Формализация понятия «универсальные ограничения»

Прежде всего мы предположим, что определен класс $\mathscr{K}$, объектами которого являются множества, которые могут использоваться как $\mathfrak{J}_i$, $\mathfrak{J}_f$ и $\mathfrak{J}_e$, и объектами которого являются также все конечные декартовы степени таких множеств. Скажем, для задач классификации в качестве $\mathscr{K}$ можно выбрать класс, объектами которого являются пространства $q \times l$-матриц над произвольными неодноэлементными множествами и все конечные декартовы степени таких пространств. Отметим, что в этом случае $\mathscr{K}$ будет собственным классом (не множеством!).

Пусть теперь Ψ — полная подкатегория категории множеств с классом объектов $\mathscr{K}$, т. е. пусть $\mathrm{Ob}\,\Psi = \mathscr{K}$ и морфизмы Ψ — все отображения объектов друг в друга, причем суперпозиция морфизмов совпадает с суперпозицией отображений в обычном смысле.

Легко видеть, что все отображения, соответствующие алгоритмам классификации и используемые для их построения методами алгебраического подхода (т. е. алгоритмические операторы, корректирующие операции и решающие правила), являются морфизмами категории Ψ. Заметим, что включение в класс объектов $\mathscr{K}$ наряду с множествами, используемыми в качестве $\mathfrak{J}_i$, $\mathfrak{J}_f$ и $\mathfrak{J}_e$ их конечных декартовых степеней, обусловлено тем, что в рамках одной категории приходится вести изучение как унарных отображений (алгоритмов в целом и алгоритмических операторов), так и отображений, вообще говоря, многоместных (корректирующих операций и решающих правил).

Допустим теперь, что зафиксирована некоторая система универсальных ограничений I_0^u. Ясно прежде всего, что она должна высекать из любого «полного» множества отображений одного объекта категории Ψ в другой соответствующее ей подмножество, т. е. системой I_0^u должны определяться подмножества всех множеств морфизмов категории Ψ. Такие подмножества мы ниже будем называть выделенными.

С содержательной точки зрения морфизмы из выделенных подмножеств являются допустимыми относительно данной системы универсальных ограничений отображениями. Совершенно понятно, что суперпозиции допустимых отображений также должны быть допустимыми, т. е. попадать в соответствующие выделенные подмножества. Действительно, в противном случае, т. е. если бы суперпозиции допустимых отображений могли бы быть недопустимыми, терялся бы весь смысл использования при алгебраических построениях универсальных ограничений.

Введем, наконец, еще одно крайне естественное требование: все тождественные отображения объектов класса $\mathcal{K}$ на себя допустимы при любой системе универсальных ограничений.

Итак, установлено, что:

1. Любой системе универсальных ограничений соответствуют подмножества множеств морфизмов категории Ψ.

2. Суперпозиции морфизмов из выделенных подмножеств также должны принадлежать выделенным подмножествам.

3. Тождественные отображения объектов в себя (единичные морфизмы) всегда принадлежат выделенным подмножествам.

Условия 1—3 эквивалентны следующему положению: любой системе универсальных ограничений соответствует подкатегория категории Ψ (см., например, [9, 10]) с классом объектов $\mathcal{K}$.

Учтем теперь специфику используемых при алгебраической коррекции суперпозиций. Вспомним для этого, что возникающие при применении этого метода алгоритмы имеют вид (см. разд. 2)

$$A = C\,(F_1\,(B_{11}, \ldots, B_{1r_1}), \ldots, F_p\,(B_{p1}, \ldots, B_{pr_p})).$$

Отсюда вытекает, что необходимо и достаточно, чтобы используемые в качестве формализаций универсальных ограничений подкатегории категории Ψ удовлетворяли следующему условию: они должны быть замкнуты относительно произведения морфизмов и замкнуты относительно диагонализации. Иначе говоря, для любых двух морфизмов $u: \mathfrak{U}^{p_1} \to \mathfrak{B}^{p_2}$ и v: $\mathfrak{U}^{r_1} \to \mathfrak{B}^{r_2}$ такой категории отображение $u \times v$ также должно быть ее морфизмом и для любого морфизма $u: \mathfrak{U}^p \to \mathfrak{B}$ диагонализация u_Δ также должна быть морфизмом. Подкатегории категории Ψ, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть допустимыми.

Итак, установлено, что в качестве формального эквивалента понятия универсальных ограничений могут и должны использоваться допустимые подкатегории категории Ψ. Для случая задач классификации (описание соответствующего класса $\mathscr{K}$ дано в начале настоящей главы) такое изучение будет проведено в разд. 6 и 7.

5. *Об основных понятиях алгебраического подхода к решению задач классификации*

Исходным понятием является понятие задачи классификации. Напомним, что оно включает:

1. Фиксацию размерности, т. е. фиксацию числа q контрольных объектов и числа l классов.

2. Фиксацию пространства допустимых начальных информаций $\mathfrak{J}$ и пространства допустимых финальных информаций $\tilde{\mathfrak{J}}$.

3. Фиксацию пары матриц $(\mathrm{I}, \tilde{\mathrm{I}})$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J}) \times \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$, т. е. фиксацию матрицы информации и информационной матрицы.

4. Фиксацию некоторой системы универсальных ограничений. При этом сама задача Z ставится как задача синтеза алгоритма, реализующего отображение A из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$ такое, что $A(\mathrm{I}) = \tilde{\mathrm{I}}$ и A удовлетворяет универсальным ограничениям (является морфизмом соответствующей категории), т. е. задача ставится как задача синтеза корректного алгоритма.

Следует отметить, что в данной постановке задача может оказаться и неразрешимой. С содержательной точки зрения это будет означать, что универсальные и локальные ограничения в такой задаче противоречат друг другу. Формально этот факт выражается равенством $\mathfrak{M}(I_0^u) \cap \mathfrak{M}(I_0^l) = \varnothing$, где, как обычно, $\mathfrak{M}(I_0^l)$ — множество всех отображений из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$, удовлетворяющих локальным, а $\mathfrak{M}(I_0^u)$ — универсальным ограничениям.

В рамках алгебраического подхода обычно изучается и используется понятие регулярности (обобщение понятия разрешимости) и непосредственно связанное с ним понятие полноты. Рассмотрение этих понятий и будет нашей ближайшей целью.

Введение понятий полноты и регулярности связано с тем, что основные конструкции алгебраического подхода к решению задач классификации предназначены, конечно, не для решения отдельных конкретных задач, но целых классов таких задач. Далее, в процессе решения отдельной задачи обычно происходит не единовременное использование сразу всей имеющейся в задаче информации, а постепенная «настройка» метода на эту информацию. Иначе говоря, введение понятий регулярности и полноты отражает тот факт, что, решая конкретную задачу, мы сначала рассматриваем ее как представителя некоторого множества задач, совпадающих с исследуемой только частью информации. При этом целью оказывается построение семейства методов решения, пригодного для решения любой задачи из этого множества, т. е. такого семейства, что в его рамках для любой задачи из множества можно найти решающий ее метод.

Формальным выражением вышесказанного является предположение о том, что на множестве рассматриваемых задач введено отношение эквивалентности, так что на промежуточном этапе решения используется лишь информация о том, какому классу эквивалентности принадлежит данная конкретная задача. Задача называется полной относительно некоторого семейства алгоритмов, если в этом семействе содержатся решения для всех задач из класса эквивалентности, которому она принадлежит. Задача, для которой существует семейство алгоритмов, относительно которого она полна, называется регулярной.

Рассмотрим теперь наиболее часто используемую эквивалентность задач классификации, порождающую обычные для алгебраического подхода понятия полноты и регулярности.

Эта эквивалентность определяется следующим образом. Рассматривается множество задач одной размерности с одними и теми же пространствами допустимых начальных и финальных информаций и с одинаковыми универсальными ограничениями. Две задачи Z и Z' считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда равны их матрицы информации. Таким образом, орбита задачи, совпадающая с классом эквивалентности, возникает при произвольном варьировании информационной матрицы.

Из только что сформулированного определения базисного отношения эквивалентности вытекает следующее определение регулярной задачи классификации: задача Z, определенная парой матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$ и универсальными ограничениями, которым соответствует категория Ψ_0, регулярна тогда и только тогда, когда существует подмножество $\mathfrak{M}$ множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))$ такое, что имеет место равенство $\mathfrak{M}(\mathbf{I}) = \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$; при этом Z называется полной относительно $\mathfrak{M}$. В силу монотонности свойства полноты относительно теоретико-множественного включения семейств алгоритмов определение регулярной задачи классификации можно переформулировать следующим образом: задача Z регулярна тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}))(\mathbf{I}) = \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}}).$$

Итак, регулярность и разрешимость (которая может быть определена как регулярность при диагональном базовом отношении эквивалентности, т. е. является частным случаем регулярности) являются основным предметом исследования алгебраического подхода в части, относящейся к постановке задач.

Допустим теперь, что рассматривается класс задач фиксированной размерности и с фиксированными пространствами допустимых начальных и допустимых финальных информаций. Пусть также зафиксирована система универсальных ограничений I_0^u, которой соответствует допустимая категория Ψ_0. Основным предметом исследования алгебраического подхода являются, конечно, семейства алгоритмов классификации. Допустим, что в описанной выше ситуации изучается семейство алгоритмов $\mathfrak{M}$, т. е. семейство отображений из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$. Возникает естественный вопрос: каким условиям должно удовлетворять семейство $\mathfrak{M}$, чтобы в его рамках можно было решить все «хорошо поставленные» задачи?

Ответ может быть дан после того, как определено, что именно понимается под «правильно поставленной» задачей. Обычно в исследованиях, проводимых в рамках алгебраического подхода, под «правильно поставленными» понимались регулярные задачи. В последнее время, однако, были получены результаты, свидетельствующие о том, что в некоторых практически важных случаях условия, которым должны удовлетворять семейства $\mathfrak{M}$, не изменяются, если под «правильно поставленными» понимать задачи разрешимые (которые, вообще говоря, не являются регулярными). Эти результаты будут приведены в разд. 9. Здесь же мы ограничимся рассмотрением случая, когда «правильно поставленными» считаются регулярные задачи.

Итак, если изучается некоторое семейство алгоритмов классификации $\mathfrak{M}$ (оно чаще всего бывает $\mathfrak{F}$-расширением некоторой исходной эвристической информационной модели при некотором семействе корректирующих операций $\mathfrak{F}$), то основное условие, которому оно должно удовлетворять, таково: в рамках $\mathfrak{M}$ должно иметься решение для любой регулярной задачи. Нетрудно видеть, что это условие эквивалентно следующему: относительно $\mathfrak{M}$ все регулярные задачи должны быть полны. Семейства алгоритмов, удовлетворяющие этому условию, называются полными. При этом, естественно, предполагается, что все отображения из $\mathfrak{M}$ удовлетворяют универсальным ограничениям, т. е. являются морфизмами категории Ψ_0.

Поскольку алгебраическими методами семейства алгоритмов строятся как семейства суперпозиций алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил, то вопрос о полноте семейств алгоритмов порождает, естественно, вопросы о свойствах указанных семейств, обеспечивающих полноту семейства суперпозиций. Полное решение этой проблемы является одним из главных результатов теории, универсальных и локальных ограничений. Оно будет приведено в разд. 8.

6. Некоторые универсальные ограничения для задач классификации

Как уже говорилось в разд. 4, универсальные ограничения для задач классификации описываются допустимыми подкатегориями категории Ψ, объектами которой являются пространства $q \times l$-матриц над произвольными множествами и все конечные декартовы степени таких пространств, а морфизмами — отображения объектов друг в друга. Имея ввиду изучение проблемы полноты для задач классификации в данном случае можно еще более сузить класс категорий, которые могут рассматриваться как формальные эквиваленты систем универсальных ограничений. В качестве таких категорий можно использовать только допустимые полные подкатегории категории Ψ, понимая под полной такую подкатегорию Ψ_0, для которой при любом неодноэлементном множестве $\mathfrak{U}$ и любом $\mathfrak{B}$ выполнено равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B}))(\mathfrak{C}(\mathfrak{U})) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}).$$

Ниже без дополнительных оговорок будут использоваться следующие соглашения: все рассматриваемые категории являются полными допустимыми подкатегориями категории Ψ; все множества, пространства матриц над которыми являются объектами рассматриваемых категорий, неодноэлементны.

Класс только что определенных категорий является чрезвычайно общим. В силу этого в его рамках оказывается возможным получить только лишь сравнительно бедный спектр результатов (см. разд. 7). Это обстоятельство порождает вопрос о выделении в этом классе подклассов, с одной стороны, достаточно богатых для того, чтобы покрывать различные практические интересные частные случаи, и, с другой стороны, допускающих более детальное описание и исследование. В качестве таких подклассов в настоящее время используются классы симметрических и функциональных категорий.

Примеры универсальных ограничений, формализуемых функциональными и симметрическими категориями, были приведены в разд. 3.

В общем случае симметрические категории определяются произвольными подгруппами группы σ_0, а функциональные — так называемыми функциональными сигнатурами, которые являются формальными конструкциями, определяющими функциональные представления морфизмов функциональных категорий. В силу ограниченности объема настоящей работы мы не будем приводить точные определения и ограничимся указанием на то, что симметрические универсальные ограничения в конкретных задачах возникают как следствие (или выражение) информации об однородности информаций о различных объектах и классах, являющихся элементами матрицы информации. При этом однородность понимается так же, как и в разд. 3. Функциональные же ограничения формализуют информацию об одновременной однородности и независимости.

Следует отметить, что предположения об однородности и независимости могут оказаться внутренне противоречивыми, в связи с чем возникает вопрос о корректности определения функциональных категорий. Решение этого вопроса можно найти в [11] и в [12].

В заключение отметим, что для обозначения симметрических категорий используется символ Σ, а функциональных — Φ (чаще всего эти символы используются с индексами, определяющими конкретные категории). Так, категория, соответствующая случаю 1 из разд. 3, обозначается Σ_0, а случаю 2 — Φ_0.

7. Об основных понятиях теории универсальных и локальных ограничений

Основным формальным объектом изучения теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации являются полные допустимые категории. Центральным при изучении проблемы полноты и регулярности оказывается при этом понятие базы категории в пространстве матриц.

Определение 1. Пусть Ψ_0 — произвольная полная допустимая категория, $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Множество X называется базой категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ или просто базой категории Ψ_0, если имеет место равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{U}))(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{U}).$$

При рассмотрении полных допустимых категорий оказывается возможным ввести и исследовать ряд чисто математических конструкций, которые впоследствии оказываются основой формального аппарата при исследовании семейства алгоритмов классификации, моделей алгоритмических операторов, семейств корректирующих операций и решающих правил. Приведем основные из этих конструкций.

Определение 2. Пусть Ψ_0 — *произвольная полная допустимая* категория, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества и $\mathfrak{M}$ — множество отображений из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$, состоящее из морфизмов категории Ψ_0. Множество $\mathfrak{M}$ называется 1-Г-полным (в категории Ψ_0), *если для любой одноэлементной базы* X (т. е. $|X| = 1$) категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $\mathfrak{M}(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B})$.

Определение 3. Пусть Ψ_0 — произвольная полная допустимая категория, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества и $\mathfrak{M}$ — множество отображений из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$, являющихся морфизмами категории Ψ_0. Множество $\mathfrak{M}$ называется слабо 1-Г-полным в категории Ψ_0, если для всякой одноэлементной базы X категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ множество $\mathfrak{M}(X)$ является базой категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{B})$.

Определение 4. Пусть Ψ_0 — произвольная полная допустимая категория, $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и $\mathfrak{F}$ — подмножество объединения $\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{U}))$. Множество $\mathfrak{F}$ называется Γ-полным в категории Ψ_0, если для всякой базы X категории Ψ_0 в пространстве матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$.

Определение 5. Пусть Ψ_0 — произвольная полная допустимая категория, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества и $\mathfrak{M}^1$ — подмножество объединения $\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B}))$. Множество

$\mathfrak{M}^1$ называется корректным в категории Ψ_0, если имеет место равенство $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{C}(\mathfrak{U})) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B})$.

Прежде чем привести исходные результаты, на которых базируется применение введенных понятий при исследовании задач и алгоритмов классификации, введем новые обозначения.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, Ψ_0 — фиксированная полная допустимая категория. Множество $\mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B}))$ будем в дальнейшем обозначать $H(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$, множество

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B})) - \mathscr{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}).$$

Для любого $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ положим $H(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})(X) = \{u(\mathrm{U}) \mid u \in H(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}), \mathrm{U} \in X\}$ и $\mathscr{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})(X) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(\mathrm{U}^1, \ldots, \mathrm{U}^p) \mid u \in \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B})), (\mathrm{U}^1, \ldots, \mathrm{U}^p) \in X^p\}$.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество и $\mathbf{X}$ — одноэлементное подмножество пространства $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Для того чтобы было выполнено равенство $H(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B})$, необходимо и достаточно, чтобы множество X было базой категории Ψ_0.

Ниже мы будем считать, что $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные фиксированные множества, $\mathfrak{M}^0 \subseteq H(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathscr{H}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ и $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathscr{H}(\mathfrak{B}, \mathfrak{W})$.

Лемма 2. Для того чтобы существовали множества $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{F}$ такие, что $\mathfrak{W}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ — 1-Γ-полное в категории Ψ_0 семейство, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Γ-полным в категории Ψ_0 семейством.

Лемма 3. Для того чтобы существовали множества $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{F}$ такие, что $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ — 1-Γ-полное в категории Ψ_0 семейство, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}^1$ было корректным в категории Ψ_0 множеством отображений.

Лемма 4. Для того чтобы множество $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ было 1-Γ-полным в категории Ψ_0, необходимо, чтобы множество $\mathfrak{M}^0$ было слабо 1-Γ-полным и $\mathfrak{M}^1$-корректным в категории Ψ_0. При выполнении этого необходимого условия для 1-Γ-полноты семейства $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ в категории Ψ_0 достаточно, чтобы множество $\mathfrak{F}$ было Γ-полным в категории Ψ_0.

Отметим, что условие Γ-полноты семейства $\mathfrak{F}$ не является необходимым.

Доказательства лемм 1—4 и подробные коментарии к ним можно найти в [11—18].

Сформулированные в виде лемм 1—4 факты образуют основу, на которой после соответствующей детализации в конкретных случаях проводится исследование семейств отображений, используемых в качестве алгоритмических операторов, корректирующих операций, решающих правил и, наконец, алгоритмов классификации. Кроме того, на базе леммы 1 удается определить необходимое и достаточное условие регулярности задач классификации. Существенное отличие этого результата от тех, которые были известны до появления алгебраической теории универсальных и локальных ограничений, состоит в том, что в данном случае критерий регулярности оказывается не только достаточным, но и необходимым.

8. Основные общие результаты для задач и алгоритмов классификации

В данном разделе мы будем рассматривать классы $\mathfrak{Z}$ задач, возникающие при фиксации q, l, $\mathfrak{U}$ и $\tilde{\mathfrak{U}}$. Конкретные задачи Z выделяются из класса $\mathfrak{Z}$ фиксацией полной допустимой категории Ψ_0 и пары матриц $(\mathrm{I}, \tilde{\mathrm{I}})$ с соответствующим им требованием к корректным алгоритмам.

Допустим, что задан класс задач $\mathfrak{Z}$ и зафиксирована некоторая полная допустимая категория Ψ_0. Тогда оказывается определен и подкласс $\mathfrak{Z}(\Psi_0)$ задач из $\mathfrak{Z}$, различающихся только парами матриц $(\mathrm{I}, \tilde{\mathrm{I}})$.

Из леммы 1 немедленно вытекает следующий основной критерий регулярности задач классификации:

Теорема 1. Задача классификации Z с матрицей информации I, принадлежащая подклассу $\mathfrak{Z}(\Psi_0)$, регулярна тогда и только тогда, когда одноэлементное множество $\{\mathrm{I}\}$ является базой категории Ψ_0 в пространстве матриц информации $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях, которым должны удовлетворять модели алгоритмических операторов. При этом мы будем считать, что $\mathfrak{M}$ — модель алгоритмических операторов, реализующих отображения из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, т. е. положим, что $\mathfrak{J}_e = \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ (множество $\mathfrak{R}$ называют в таком случае множеством допустимых оценок). Будем считать также, что отображения из множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ (см. ниже) являются морфизмами полной допустимой категории Ψ_0.

Определение 6. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}$ называется полной (в категории Ψ_0), если для любой регулярной задачи Z из $\mathfrak{Z}(\Psi_0)$ существуют такие множества $\mathfrak{F}$ корректирующих операций и $\mathfrak{M}^1$ решающих правил, что Z оказывается полной относительно семейства $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$. Имеет место следующая теорема, доказываемая на базе леммы 2.

Теорема 2. Модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ полна в категории Ψ_0 тогда и только тогда, когда семейство отображений $\mathfrak{M}^0$ слабо 1-Γ-полно в категории Ψ_0.

Аналогичная теорема имеет место и для семейств решающих правил (она доказывается, конечно, на базе леммы 3).

Отметим, что для того, чтобы семейство решающих правил было корректно, достаточно, чтобы в этом семействе содержалось хотя бы одно сюръективное отображение $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ на $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$.

Рассмотрим теперь семейства корректирующих операций.

Определение 7. Семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$, являющихся морфизмами категории Ψ_0, называется полным, если при любом полном семействе алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$

и любом корректном семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ семейство суперпозиций $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ обладает тем свойством, что относительно него оказываются полными все регулярные задачи из подкласса $\mathfrak{Z}(\Psi_0)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ было полно, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было Γ-полным семейством отображений в категории Ψ_0.

Основное условие, которому должны удовлетворять модели алгоритмов (или же их расширения),— условие полноты в смысле следующего определения:

Определение 8. Семейство алгоритмов классификации, являющихся морфизмами категории Ψ_0, называется полным в этой категории, если относительно этого семейства полны все регулярные задачи из подкласса $\mathfrak{Z}(\Psi_0)$.

Теорема 4. Семейство алгоритмов классификации $\mathfrak{M}$, являющихся морфизмами категории Ψ_0, полно в категории Ψ_0 тогда и только тогда, когда оно является 1-Г-полным семейством отображений.

Вышесказанное суммируется следующей теоремой.

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{M}^0$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — семейства алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил, являющихся морфизмами категории Ψ_0. Для того чтобы семейство алгоритмов $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ было полным в категории Ψ_0, достаточно, чтобы семейства $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{F}$ были полными и чтобы семейство $\mathfrak{M}^1$ было корректным. Условия полноты для $\mathfrak{M}^0$ и корректности для $\mathfrak{M}^1$ необходимы.

Теорема 5 является одним из основных результатов алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач и алгоритмов классификации. Она демонстрирует, с одной стороны, окончательный характер результатов о полноте (полные семейства оказываются с точки зрения разрешимости регулярных задач принципиально неулучшаемыми) и, с другой стороны, оставляет возможность для использования неполных семейств корректирующих операций (правда, при этом приходится накладывать более жесткие требования на семейства алгоритмических операторов и/или решающих правил).

9. Общие приемы исследования алгебраической теории универсальных и локальных ограничений. Примеры конкретных результатов

Предположим, что требуется провести исследование некоторого класса задач и предлагаемых для их решения семейств алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил. Из сказанного в предыдущих разделах легко заключить, что работа в такой ситуации должна начинаться с поиска для универсальных ограничений формализации в виде полной допустимой категории.

Следующим этапом работы оказывается исследование (поиск описания) баз найденной категории.

Имея описание баз. можно «автоматически» получить критерий регулярности для рассматриваемых задач классификации и, конечно, проверить, являются ли предлагаемые для решения конкретные задачи регулярными.

После этого опять-таки на основе описания баз можно в явном виде выписать критерии полноты для семейств алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил и проверить, являются ли предложенные семейства полными (корректными).

Отметим. что для всех симметрических и функциональных категорий эти построения уже проведены и с их результатами можно ознакомиться, например, по работам [11—18].

Приведем теперь некоторые представляющие самостоятельный интерес конкретные результаты, полученные в рамках алгебраической теории универсальных и локальных ограничений.

Остановимся прежде всего на соотношении понятий разрешимости и полноты, рассматривая симметрические и функциональные категории. Имеют место следующие факты:

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство алгоритмов классификации, являющихся морфизмами некоторой функциональной категории Ф. Тогда условия «$\mathfrak{M}$ полно» и «в рамках $\mathfrak{M}$ можно решить все разрешимые задачи» эквиваленты (естественно, под всеми разрешимыми задачами подразумеваются все разрешимые задачи из класса задач. в которых универсальные ограничения выражены категорией Ф).

Теорема 7. Утверждение теоремы 6 неверно для случая симметрических категорий.

З а м е ч а н и е. Нетрудно заметить, что из условия «в рамках $\mathfrak{M}$ можно решить все разрешимые задачи» немедленно вытекает, что относительно $\mathfrak{M}$ полны все задачи регулярные, так что в таком случае семейство $\mathfrak{M}$ полно. Обратное же оказывается верным только в случае функциональных категорий.

Перейдем теперь к результатам, полученным для конкретных моделей алгоритмических операторов и конкретных семейств корректирующих операций.

В [1] содержится описание модели алгоритмических операторов вычисления оценок $\mathfrak{M}$ $(\gamma, p, \varepsilon, x)$. Операторы этой модели предназначены для решения задач из упоминавшегося класса задач $\mathfrak{Z}_\Gamma$. Сейчас будут приведены результаты, касающиеся некоторых подмоделей этой модели.

Отсутствие в «списке параметров» одного из символов γ, p, ε, x означает, что в соответствующей подмодели значения этих параметров зафиксированы следующим образом: $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 1$, $p_1 = \ldots = p_n = 1$, $\varepsilon_1 = \mathrm{const}, \ldots, \varepsilon_n = \mathrm{const}$ или $x_0 = x_1 = 1$ соответственно.

Легко видеть, что все отображения из модели $\mathfrak{M}$ $(\gamma, p. \varepsilon, x)$ и, конечно, из всех ее подмоделей являются морфизмами категории Φ_0. Вопрос о полноте в категории Φ_0 решается в данном случае следующей теоремой:

Теорема 8. Модель $\mathfrak{M}(\gamma, \varepsilon)$ полна. Модели $\mathfrak{M}(p, \varepsilon, x)$ и $\mathfrak{M}(\gamma, p, x)$ не полны.

Теорема 8 решает на самом деле вопросы о полноте для всех возможных (в вышеуказанном смысле) подмоделей модели $\mathfrak{M}(\gamma, p, \varepsilon, x)$, поскольку все остальные подмодели либо оказываются подмоделями неполных моделей (а потому и сами неполны), либо надмоделями полных моделей (и тогда они, конечно, полны). Доказательство этой теоремы можно найти в [18].

Отметим, что теорема 8 является примером решения вопроса о минимальной необходимости сложности семейств отображений, который, как указывалось во введении, возникает в связи с эвристическим характером предпосылок, на базе которых эти семейства формируются.

В [1] рассматривалась также R-модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^1(\gamma)$. Операторы этой модели определяются выбором кусочно-линейных поверхностей R и наборов неотрицательных действительных параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Модель $\mathfrak{M}^1(\gamma)$ будет рассматриваться вместе с ее подмоделями:

$\mathfrak{M}^1|_{\gamma=1}$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m$;

$\mathfrak{M}^1|_{R=L}$, R — гиперплоскость;

$\mathfrak{M}^1|_{\gamma=1,\, R=L} = \mathfrak{M}^1|_{\gamma=1} \bigcap \mathfrak{M}^1|_{R=L}$.

Все эти модели состоят из морфизмов категории Φ_0. Вопрос о полноте решается для них следующей теоремой [18]:

Теорема 9. Модели $\mathfrak{M}^1|_{\gamma=1}$ и $\mathfrak{M}^1|_{R=L}$ полны. Модель $\mathfrak{M}^1|_{\gamma=1,\, R=L}$ не полна.

Перейдем теперь к рассмотрению семейств корректирующих операций, считая $\mathfrak{R} = \mathbf{R}$, т. е. что в качестве пространства возможных оценок используется пространство действительных $q \times l$-матриц.

В [1] и [2] рассматривались семейство $\mathfrak{A}^n$ и семейство, которое будет обозначаться LM^n.

Семейство $\mathfrak{A}^n$ содержит корректирующие операции, индуцированные многочленами от матриц степени не выше n с умножением по Адамару, т. е. $\| R_{ij}^1 \|_{q\times l} \times \| R_{ij}^2 \|_{q\times l} = \| R_{ij} \|_{q\times l}$, где $R_{ij} = R_{ij}^1 R_{ij}^2$ при всех $i \in \{1, \ldots, q\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$. Операции из $\mathfrak{A}^n$ соответствуют морфизмам категории Φ_0.

Семейство LM^n содержит корректирующие операции, построенные на базе оператора сложения действительных матриц, оператора умножения таких матриц на действительные константы и оператора Max, определяемого следующим образом: Max $(\| R_{ij} \|_{q\times l}) = \| R'_{ij} \|_{q\times l}$, где $R'_{i_0 j_0} = 1$ тогда и только тогда, когда $R_{i_0 j_0} = \max R_{ij}$, максимум берется по всем (i, j) из множества $\{(1, 1), \ldots, (q, l)\}$; в остальных случаях $R'_{i_0 j_0} = 0$. В операциях из LM^n оператор Max применяется не более n раз.

Отметим, что операторы из LM^n соответствуют морфизмам категории Σ_0, но, вообще говоря, не Φ_0. Действительно, сам оператор Max не является морфизмом категории Φ_0.

Вопрос о полноте для описанных семейств корректирующих операций решается следующей теоремой:

Теорема 10. Семейства корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-1}$ и $LM^{](ql-1)/2[}$ полны. Семейства корректирующих операций $\mathfrak{A}^{ql-2}$ и $LM^{](ql-1)/2[-1}$ не полны.

Степень n *является естественной мерой сложности для семейств* $\mathfrak{A}^n$ и LM^n. Следующие результаты показывают, что за счет предъявления более жестких (чем полнота) требований к моделям алгоритмических операторов, можно понизить границы степени, установленные теоремой 10. При этом рассмотрение мы ограничим категориями Φ_0 и Σ_0.

Определение 9. Пусть $\mathfrak{M}^0$ — семейство отображений из $\mathfrak{C}$ $(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}$ $(\mathbf{R})$, являющихся морфизмами категории Φ_0 или категории Σ_0. Семейство $\mathfrak{M}^0$ называется 0-1-полным семейством алгоритмических операторов, если для любой регулярной задачи Z с матрицей информации $\mathbf{I}$ при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\{(1, 1), \ldots, (q, l)\}$ в пересечении $\mathfrak{M}^0(\mathbf{I}) \cap \mathfrak{C}$ $(\{0, 1\})$ содержится матрица $\mathbf{R} = \| R_{ij} \|_{q\times l}$ такая, что $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$.

Определение 10. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство операций над множеством $\mathfrak{C}(\mathbf{R})$, являющихся морфизмами категории Φ_0 или категории Σ_0. Семейство $\mathfrak{F}$ называется 0-1-полным, если при любом $X \subseteq \mathfrak{C}(\{0, 1\})$ таком, что при любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $\{(1, 1), \ldots, (q, l)\}$ в X содержится матрица $\mathbf{R} = \| R_{ij} \|_{q\times l}$ с $R_{i_1j_1} \neq R_{i_2j_2}$, выполнено равенство $\mathfrak{F}(X) = \mathfrak{C}(\mathbf{R})$.

Легко видеть, что 0-1-полные семейства алгоритмических операторов являются полными, так что в данном случае имеет место усиление предъявленных к таким семействам требований. В то же время 0-1-полные семейства корректирующих операций полными, вообще говоря, не являются, так что в этом случае требование полноты оказывается ослабленным.

Ясно также, что если $\mathfrak{M}^0$ — 0-1-полная модель алгоритмических операторов и $\mathfrak{F}$ — 0-1-полное семейство корректирующих операций, то для любой регулярной задачи Z с матрицей информации $\mathbf{I}$ выполнено равенство $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)(\mathbf{I}) = \mathfrak{C}(\mathbf{R})$. Отсюда следует, что при любом корректном семействе $\mathfrak{M}^1$ решающих правил, являющихся морфизмами категории Φ_0 или Σ_0, семейство $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ будет полным семейством алгоритмов классификации.

Имеют место следующие факты:

Теорема 11. Семейство $\mathfrak{A}^{[\log_2 q]}$ является 0-1-полным семейством корректирующих операций. Граница $[\log_2 ql]$ для степени точна.

Теорема 12. Семейство LM^1 является 0-1-полным семейством корректирующих операций.

Отметим, наконец, что, например, модель алгоритмических операторов вычисления оценок $\mathfrak{M}(\gamma, \varepsilon)$, у всех операторов которой используется единственное опорное множество $\{1, \ldots, n\}$, является 0-1-полной моделью алгоритмических операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. 1978. Вып. 33. С. 5—68.
2. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5—17; № 6. С. 21—27.
3. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. II // Там же. 1977. № 6. С. 21—27.
4. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. III // Там же. 1978. № 2. С. 35—43.
5. *Гренандер У.* Лекции по теории образов / Пер. с англ. под ред. Ю. И. Журавлева. М.: Мир. Т. 1. 1979. 384. с.; Т. 2. 1981. 448 с.; Т. 3. 1983. 432 с.
6. *Дмитриев А. Н., Журавлев Ю. И., Кренделев Ф. П.* О математических принципах классификации предметов и явлений // Дискрет. анализ. 1966. Вып. 7. С. 3—11.
7. *Дюкова Е. В.* Асимптотически оптимальные тестовые алгоритмы в задачах распознавания // Пробл. кибернетики. 1982. Вып. 39. С. 165—199.
8. *Баскакова Л. В., Журавлев Ю. И.* Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // ЖВМиМФ. 1981. Т. 21, № 5. С. 1264—1275.
9. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т. 1. 688 с.
10. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972. 354 с.
11. *Рудаков К. В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания: (Общие результаты) // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1980. 66 с.
12. *Рудаков К. В.* Симметрические и функциональные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 4. С. 35—40.
13. *Рудаков К. В.* Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Там же. 1987. № 2. С. 30—34.
14. *Рудаков К. В.* Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Там же. 1987. № 3. С. 106—109.
15. *Рудаков К. В.* О применении универсальных ограничений при исследовании алгоритмов классификации // Там же. 1987. № 5. С. 32—38.
16. *Журавлев Ю. И., Рудаков К. В.* Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации // Прикладная математика и информатика. М.: Наука, 1987. С. 240—251.
17. *Рудаков К. В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания: (Параметрические модели) // Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1981. 48 с.
18. *Рудаков К. В.* О некоторых универсальных ограничениях для алгоритмов классификации // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26, № 11. С. 1719—1730.
19. *Горелик А. Л., Гуревич И. Б., Скрипкин В. А.* Современное состояни . проблемы распознавания: Некоторые аспекты. М.: Радио и связь, 1985 160 с. (Кибернетика).
20. *Мазуров В. Д.* Комитеты системы неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. № 3. С. 36—42.
21. *Матросов В. Л.* Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов // ДАН СССР. 1980. Т. 253, № 1. С. 25—30.
22. *Матросов В. Л.* Емкость алгебраических расширений модели алгоритмов вычисления оценок // ЖВМиМФ. 1984. Т. 24, № 11. С. 1719—1730.