Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 519.7

К. В. РУДАКОВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКЦИИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Настоящая работа выполнена в рамках алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов на базе семейств эвристических алгоритмов [1 — 4].

В общем случае рассматриваемая задача является задачей синтеза алгоритма, реализующего отображение из множества $\mathfrak{J}_i$ (множества возможных начальных информаций) в множество $\mathfrak{J}_f$ (множество возможных финальных информаций). В дальнейшем не будем различать алгоритмы и реализуемые ими отображения. Будем считать, что условия, выделяющие из множества $\mathfrak{M}_0 = \{A \mid A : \mathfrak{J}_i \to \mathfrak{J}_f\}$ отображение, которое надлежит реализовать, формализованы в виде системы ограничений I_0. Таким образом, при фиксированных множествах $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ каждая конкретная задача определяется своей системой ограничений I_0.

Существенной особенностью большинства возникающих при решении практических задач систем I_0 является их неполнота в следующем смысле: ограничениям, составляющим I_0, удовлетворяет не некоторое единственное отображение из $\mathfrak{M}_0$, а целое семейство отображений. Такие семейства обозначим $\mathfrak{M}(I_0)$.

Пусть зафиксирована некоторая задача Z, т. е. некоторая система ограничений I_0. Отображения из $\mathfrak{M}(I_0)$ называется допустимыми для задачи Z. Любой алгоритм, реализующий произвольное допустимое отображение, называется корректным для задачи Z и является ее решением.

Системы ограничений I_0 могут иметь самый разный вид. Очень важным является случай задач экстраполяции, когда ограничения, составляющие I_0, содержат набор пар $((I_i^1, I_f^1), \ldots, (I_i^k, I_f^k)) \in (\mathfrak{J}_i \times \mathfrak{J}_f)^k$ и в качестве допустимых отображений A рассматриваются только отображения, удовлетворяющие системе равенств $A(I_i^r) = I_f^r$ при $r \in \{1, \ldots, k\}$ (при этом в I_0 могут содержаться и некоторые дополнительные ограничения).

Частным случаем общих задач экстраполяции являются задачи классификации. В таких задачах множества $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ — пространства матриц некоторой фиксированной (для задачи) размерности $q \times l$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество, $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ — пространство матриц размерности $q \times l$ над $\mathfrak{A}$, для обозначения матриц размерности $q \times l$ будем использовать полужирные символы. Итак, в задачах классификации $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{L}(\mathfrak{J})$ и $\mathfrak{J}_f = \mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{J}})$ (при этом множества $\mathfrak{J}$ и $\tilde{\mathfrak{J}}$ называются множествами допустимых начальных информаций и множеством допустимых финальных информаций соответственно). Кроме того, в задачах классификации в ограничениях, составляющих I_0, содержится единственная пара (I_i, I_f) из $\mathfrak{J}_i \times \mathfrak{J}_f$, т. е. единственная пара матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$ из $\mathfrak{L}(\mathfrak{J}) \times \mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{J}})$, так что допустимые отображения A из $\mathfrak{L}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{J}})$ должны удовлетворять единственному «экстраполяционному» условию: $A(\mathbf{I}) = \tilde{\mathbf{I}}$. Для конкретной задачи классификации Z матрица $\mathbf{I}$ называется матрицей информации, а матрица $\tilde{\mathbf{I}}$ — информационной.

Отметим, что из самой постановки задач классификации как задач экстраполяции функций, заданных в единственной точке пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{J})$, вытекает особая роль, которую играют для таких задач дополнительные («неэкстраполяционные») ограничения: при их отсутствии для любой задачи Z, определенной парой матриц $(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})$, в качестве решения может быть использовано допустимое в данном случае отображение-константа A такое, что для всех $\mathbf{I}' \in \mathfrak{L}(\mathfrak{J})$ выполнено равенство $A(\mathbf{I}') = \tilde{\mathbf{I}}$, так что в отсутствие дополнительных ограничений задача становится тривиальной.

Результатом решения задачи в любом случае должно быть явно заданное отображение из $\mathfrak{M}_0$ (алгоритм). В рамках описываемого подхода вопрос о получении искомого отображения в явном виде решается следующим образом. Вначале на базе общих содержательных гипотез о природе изучаемой реальной ситуации формируется параметрическое семейство отображений $\mathfrak{M}$ (подмножество множества $\mathfrak{M}_0$), называемое эвристической моделью алгоритмов (гипотезы, на базе которых создается эвристическая модель, могут иметь статистический, метрический характер и т. д.). В этом случае задача синтеза могла бы быть поставлена либо как задача выбора отображения из $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_0$, либо как задача поиска в семействе $\mathfrak{M}$ отображения, в некотором смысле близкого к множеству $\mathfrak{M}(I_0)$. Однако во многих случаях такой подход оказывается не вполне адекватным.

Действительно, предположение о непустоте пересечения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(I_0)$ эквивалентно с содержательной точки зрения предположению о том, что эвристическое семейство $\mathfrak{M}$ угадано настолько хорошо, что оно содержит точное решение задачи. Поиск же наиболее близкого к $\mathfrak{M}(I_0)$ отображения из $\mathfrak{M}$ оказывается основанным на введении еще одной эвристики—меры близости, так что результат решения такой задачи также имеет эвристический характер (напомним, что вся известная информация об искомом отображении предполагается выраженной системой ограничений I_0). Отметим, наконец, что решение задач непосредственно в рамках эвристических семейств очень часто приводит к непреодолимым вычислительным трудностям.

В качестве альтернативы при алгебраическом подходе вместо задачи синтеза, которая решается как задача выбора параметров, выделяющих искомое отображение в $\mathfrak{M}$, рассматривается задача синтеза корректного алгоритма на базе отображений из $\mathfrak{M}$ с помощью так называемых корректирующих операций.

Вообще говоря, под корректирующей операцией можно понимать произвольную операцию над множеством отображений $\mathfrak{M}_0$. Такое общее определение оставляет, однако, открытым принципиальный вопрос о способах реализации изучаемых операций, в то время как при решении конкретных задач эти операции обязательно должны быть определены в явном виде.

В рамках описываемого подхода применяется один из наиболее стандартных способов определения операций над отображениями. Пусть $\mathfrak{N}_0 = \{A \mid A: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ — произвольные множества, и пусть $\mathfrak{G}'$ — некоторое множество операций над множеством $\mathfrak{A}$. В этом случае каждой p-арной операции G' из $\mathfrak{G}'$ можно сопоставить p-арную операцию G над $\mathfrak{N}_0$, положив для произвольных $A_1, \ldots, A_p$ из $\mathfrak{N}_0$ и V из $\mathfrak{B}$

$$G(A_1, \ldots, A_p)(V) = G'(A_1(V), \ldots, A_p(V)). \qquad (1)$$

В результате возникает множество $\mathfrak{G}$, состоящее из операций над $\mathfrak{N}_0$, сопоставленных операциям из $\mathfrak{G}'$ соотношением (1).

Непосредственное использование вышеописанного способа определения операций над отображениями при применении к $\mathfrak{M}_0$ во многих случаях не дает удовлетворительных результатов. Дело в том, что в реальных задачах множество $\mathfrak{J}_f$ возникает как формализация содержательных требований к виду «ответов», даваемых искомыми алгоритмами, а отсюда отнюдь не вытекает, что множество $\mathfrak{J}_f$ является удобным «исходным материалом» для определения на нем «хороших» в том или ином смысле операций [2].

Напомним [5], что для произвольных отображений $u: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $v: \mathfrak{A}' \to \mathfrak{B}'$ (где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$ — произвольные множества) произведение $u \times v$ есть отображение из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$ такое, что для всех (U, U') из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ выполнено равенство $u \times v((U, U')) = (u(U), v(U'))$. Пусть $u: \mathfrak{A}^p \to \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, p — произвольное натуральное число. Диагонализацией отображения u назовем отображение $u_\Delta: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ такое, что для всех U из $\mathfrak{A}$ выполнено равенство $u_\Delta(U) = u(U, U, \ldots, U)$.

Подход, позволяющий преодолеть трудности, возникающие при попытках определения корректирующих операций путем применения соотношения (1) к $\mathfrak{M}_0$, основан на использовании специально выбранного множества $\mathfrak{J}_e$, называемого множеством возможных оценок. При этом место исходного эвристического семейства $\mathfrak{M}$ занимают эвристические же семейства $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, где $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{K}_0 = \{B \mid B: \mathfrak{J}_i \to \mathfrak{J}_e\}$ и $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \{C \mid C: \mathfrak{J}_e^p \to \mathfrak{J}_f\}$, называемые семействами алгоритмических операторов и решающих правил соответственно. Семейство $\mathfrak{M}$ определяется следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{C \circ (B_1 \times \ldots \times B_p)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1, (B_1, \ldots, B_p) \in \\ \in (\mathfrak{M}^0)^p\}.$$

В качестве баз для определения множеств корректирующих операций рассматриваются множества операций, определенных над $\mathfrak{J}_e$.

Пусть $\mathfrak{F}'$ — некоторое множество операций над $\mathfrak{J}_e$ и $\mathfrak{F}$ — множество операций над $\mathfrak{K}_0$, сопоставленных операциям из $\mathfrak{F}'$ соотношением (1) (при $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}_e$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F}'$). Применяя операции из $\mathfrak{F}$ к отображениям из $\mathfrak{M}^0$, можно получить, вообще говоря, более широкое семейство отображений

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \{F(B_1, \ldots, B_p) \mid F \in \mathfrak{F}, (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p\}. \qquad (2)$$

Множество $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ называется $\mathfrak{F}$-расширением семейства $\mathfrak{M}^0$.

Используя вместо семейства $\mathfrak{M}^0$ его $\mathfrak{F}$-расширение, можно, наконец, получить $\mathfrak{F}$-расширение исходного семейства алгоритмов $\mathfrak{M}$, обозначаемое $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$:

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0). \qquad (3)$$

Отметим, что для выполнения включений $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ достаточно, чтобы в $\mathfrak{F}'$ (а потому и в $\mathfrak{F}$) содержался тождественный унарный оператор.

Рассмотрим случай задач классификации. Для этих задач удобно в качестве множества возможных оценок $\mathfrak{J}_e$ использовать пространства матриц той же размерности $q \times l$, что и $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$, т. е. для задач классификации $\mathfrak{J}_e = \mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ (множество $\mathfrak{R}$ называется при этом множеством допустимых оценок). Чаще всего выбирают $\mathfrak{R} = \mathbf{R}$, в результате чего оказывается возможным определять корректирующие операции на базе операций над действительными матрицами.

Решение задач синтеза корректных алгоритмов с использованием вышеописанной техники построения расширений исходных эвристических семейств во многих случаях позволяет строить такое $\mathfrak{F}$-расширение семейства $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}] \cap \mathfrak{M}(I_0) \neq \varnothing$ даже когда задача, определенная системой ограничений I_0, неразрешима в рамках исходного семейства $\mathfrak{M}$ (т. е. когда $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}(I_0) = \varnothing$). Более того, используя свойства множества $\mathfrak{F}$, сравнительно легко можно получать искомое отображение в явном виде, т. е. строить корректный алгоритм.

ПОЛНОТА ЗАДАЧ СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ

При фиксированных множествах $\mathfrak{J}_i$ и $\mathfrak{J}_f$ каждая конкретная задача определяется системой ограничений I_0. Решение задач в рамках описанного подхода проводится поэтапно: от формирования семейства $\mathfrak{M}$ (или его $\mathfrak{F}$-расширения) и до выбора конкретного допустимого отображения из $\mathfrak{M}$ (из $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$). Соответственно с этим используется и информация, выраженная системой ограничений I_0: от самых общих ограничений до конкретных, выделяющих данную задачу из множества «близких» к ней задач.

Формальным отражением вышесказанного является предположение о том, что множество рассматриваемых задач $\mathfrak{Z}$ (множество соответствующих систем ограничений I_0) разбито по некоторому отношению эквивалентности $\approx$ на классы. При этом считается, что на определенном этапе решения используется не вся информация, заключенная в I_0, а лишь информация, выражаемая включением $I_0 \in \hat{I}_0'$, где $\hat{I}_0'$ — подходящий класс эквивалентности.

При наличии разбиения множества $\hat{I}_0$ на классы обобщением понятия разрешимости оказывается понятие полноты.

Определение 1. Пусть система ограничений I_0, определяющая задачу Z, принадлежит классу $\hat{I}_0'$. Задача Z называется полной относительно семейства отображений $\mathfrak{M}$ (где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0$), если для всякой системы ограничений I_0' из $\hat{I}_0'$ выполнено соотношение $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}(I_0') \neq \varnothing$. Задача Z называется $\mathfrak{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}$, если Z полна относительно $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$.

Легко видеть, что из полноты ($\mathfrak{F}$-полноты) задачи Z относительно $\mathfrak{M}$ немедленно вытекает разрешимость этой задачи в рамках $\mathfrak{M}$ (в рамках $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$) и что в случае, когда отношение $\approx$ диагонально, т. е. когда для любых I_0' и I_0'' из $\hat{I}_0$ соотношение $I_0' \approx I_0''$ эквивалентно равенству $I_0' = I_0''$, понятие полноты переходит в понятие разрешимости.

Для задач экстраполяции обычно используется эквивалентность, определяемая следующим образом: системы ограничений I_0^1 и I_0^2, содержащие наборы пар $((I_i^{11}, I_f^{11}), \ldots, (I_i^{k_1 1}, I_f^{k_1 1}))$ и $((I_i^{12}, I_f^{12}), \ldots, (I_i^{k_2 2}, I_f^{k_2 2}))$ соответственно, эквивалентны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $I_i^{r1} = I_i^{r2}$ при $r \in \{1, \ldots, k_1 = k_2\}$ и дополнительные ограничения в системах I_0^1 и I_0^2 совпадают. Эта эквивалентность порождает следующее понятие полноты.

Определение 2. Задача экстраполяции Z, определяемая системой ограничений I_0, содержащей набор пар $((I_i^1, I_f^1), \ldots, (I_i^k, I_f^k))$, называется полной относительно семейства $\mathfrak{M}$ отображений, удовлетворяющих дополнительным ограничениям из I_0, если для любого набора $(I_f'^1, \ldots, I_f'^k)$ из $\mathfrak{J}_f^k$ в $\mathfrak{M}$ содержится отображение A такое, что $A(I_i^r) = I_f'^r$ при $r \in \{1, \ldots, k\}$.

Для задач классификации эквивалентность, определяющая понятие полноты, задается так же, как и для общих задач экстраполяции: системы ограничений I_0^1 и I_0^2, содержащие пары матриц $(\mathbf{I}^1, \tilde{\mathbf{I}}^1)$ и $(\mathbf{I}^2, \tilde{\mathbf{I}}^2)$ соответственно, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathbf{I}^1 = \mathbf{I}^2$ и все дополнительные ограничения в системах I_0^1 и I_0^2 совпадают. Отсюда вытекает следующее определение.

Определение 3. Задача классификации Z с матрицей информации $\mathbf{I}$ и информационной матрицей $\tilde{\mathbf{I}}$ называется полной относительно семейства $\mathfrak{M}$ отображений, удовлетворяющих дополнительным ограничениям этой задачи, если

$$\mathfrak{M}(\mathbf{I}) = \{A(\mathbf{I}) \mid A \in \mathfrak{M}\} = \mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{J}}). \qquad (4)$$

Задача Z называется $\mathfrak{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}$, если она полна относительно $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$.

Общее исследование разрешимости (полноты) задач в рамках тех или иных семейств отображений является одним из центральных вопросов теории коррекции эвристических алгоритмов (сама идея коррекции непосредственно связана с проблемой полноты при использовании расширений исходных эвристических семейств алгоритмов).

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Из вышесказанного легко заключить, что изучение рассматриваемых задач в значительной степени сводится к изучению систем ограничений I_0. При алгебраическом подходе корректные алгоритмы строятся на базе алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил. В связи с этим представляется естественным рассматривать системы ограничений I_0, определяющие конкретные задачи, как совокупности двух систем, т. е. считать, что $I_0 = (I_0^u, I_0^l)$, где I_0^u — система ограничений «общего характера», применимых ко всем рассматриваемым отображениям (алгоритмам, алгоритмическим операторам, корректирующим операциям и решающим правилам), а I_0^l — система ограничений, применимых только к отображениям из $\mathfrak{J}_i$ в $\mathfrak{J}_f$. Ограничения, входящие в I_0^u, будем называть универсальными, а входящие в I_0^l, — локальными, полагая, что $\mathfrak{M}(I_0) = \mathfrak{M}(I_0^u) \cap \mathfrak{M}(I_0^l)$.

Отметим, что в рассмотренных выше задачах экстраполяции и классификации «экстраполяционная» часть ограничений локальна. Дополнительные же ограничения в таких задачах чаще всего имеют универсальный характер, что будет предполагаться ниже без дополнительных оговорок.

Поскольку и универсальные ограничения, и эвристические модели алгоритмов $\mathfrak{M}$ формируются для конкретных задач на основе одних и тех же общих представлений о взаимосвязи начальных и финальных информаций, то чаще всего «по построению» оказывается выполненным условие соответствия модели $\mathfrak{M}$ и ограничений I_0^u, т. е. условие $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}(I_0^u)$. В дальнейшем будет рассматриваться именно эта ситуация.

Чтобы понятие универсальных ограничений могло стать объектом математического исследования, его необходимо прежде всего формализовать.

Положим, что определен класс $\mathcal{K}$, объектами которого являются множества, используемые как $\mathfrak{I}_i$, $\mathfrak{I}_e$ и $\mathfrak{I}_f$, и все конечные декартовы степени таких множеств. Пусть Ψ — полная подкатегория категории множеств с классом объектов $\mathcal{K}$, т. е. пусть $\mathrm{Ob}\,\Psi = \mathcal{K}$, морфизмы Ψ — отображения объектов друг в друга, суперпозиции морфизмов — суперпозиции отображений. Все рассматриваемые отображения (алгоритмы, алгоритмические операторы, корректирующие, операции и решающие правила) соответствуют при этом морфизмам категории Ψ. Формальным эквивалентом понятия универсальных ограничений является понятие подкатегорий категории Ψ, имеющих тот же класс объектов $\mathcal{K}$. Так, если системе универсальных ограничений I_0^u отвечает подкатегория Ψ_0 категории Ψ, то $\mathfrak{M}(I_0^u) = \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{I}_i, \mathfrak{I}_f)$.

Итак, всякой системе универсальных ограничений соответствует своя подкатегория категории Ψ. Однако не всякая подкатегория категории Ψ может рассматриваться как формализация некоторой системы универсальных ограничений. Подкатегории, обладающие нужными для этого свойствами, называются допустимыми.

Определение 4. Подкатегория Ψ_0 категории Ψ называется допустимой, если для любых двух морфизмов u и v категории Ψ_0, таких, что $u: \mathfrak{A}^{p_1} \to \mathfrak{B}^{q_1}$ и $v: \mathfrak{A}^{p_2} \to \mathfrak{B}^{q_2}$, произведение $u \times v$ является морфизмом категории Ψ_0 и если для любого морфизм u категории Ψ_0 из $\mathfrak{A}^p$ в $\mathfrak{B}^q$ диагонализация u_Δ также является морфизмом категории Ψ_0.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ

Изучение универсальных ограничений для задач классификации сводится к изучению допустимых подкатегорий полной подкатегории $\Psi^{q,l}$ категории множеств, объектами которой являются все конечные декартовы степени пространств матриц размерности $q \times l$ над произвольными множествами (в действительности изучение категории $\Psi^{q,l}$ при произвольных натуральных q и l есть изучение счетного семейства категорий).

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, Ψ_0 — подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Множество $\mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{L}(\mathfrak{A}), \mathfrak{L}(\mathfrak{B}))$ обозначим $H_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, множество $\bigcup_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Psi_0} \times (\mathfrak{L}^p(\mathfrak{A}), \mathfrak{L}(\mathfrak{B}))$ — $\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Для любого $X \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ положим

$$H_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(X) = \{u(\mathbf{U}) \mid u \in H_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),\ \mathbf{U} \in X\}$$

и

$$\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(X) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p) \mid u \in \mathrm{Hom}_{\Psi_0}(\mathfrak{L}^p(\mathfrak{A}), \mathfrak{L}(\mathfrak{B})),\ (\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p) \in X^p\}.$$

Определение 5. Пусть Ψ_0 — подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Категория Ψ_0 называется полной, если для любых неодноэлементных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ выполнено равенство $\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(\mathfrak{L}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$.

Замечание. Полные категории не являются, вообще говоря, полными подкатегориями категории $\Psi^{q,l}$.

В дальнейшем вместо слов «подкатегория категории $\Psi^{q,l}$» будет использоваться просто термин «категория», так как никакие иные категории рассматриваться не будут.

Отметим, что свойство полноты независимо от свойства допустимости (существуют примеры допустимых не полных категорий и полных не допустимых). Рассматриваемая ниже Ψ_0 — полная допустимая категория.

Центральным при изучении полноты задач классификации является понятие базы.

Определение 6. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Множество X называется базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ или просто базой категории Ψ_0, если $\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})(X) = \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.

Свойство «быть базой категории Ψ_0» определено для подмножеств X пространства матриц $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ только с использованием морфизмов из $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ в себя. Нашей целью является в конечном счете изучение отображений $A: \mathfrak{L}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{L}(\tilde{\mathfrak{I}})$, т. е. отображений одного пространства матриц в другое. Рассмотрение таких отображений будет основано на следующем понятии.

Определение 7. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — неодноэлементные множества и $X \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Множество X называется базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ для $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$, если $\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(X) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B})$.

Для полных допустимых категорий понятия баз, введенные определениями 6 и 7, совпадают.

Лемма 1. Для произвольных неодноэлементных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и любого $X \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ высказывания «X — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$» и «$X$ — база категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ для $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$» эквивалентны.

Доказательства этой и остальных лемм в настоящей работе, носящие чисто технический характер, опускаются.

При изучении проблемы полноты задач классификации с самого начала возникает вопрос о свойствах матрицы информации, необходимых и достаточных для возможности достижения полноты. Общие результаты, необходимые для решения этого вопроса, содержатся в леммах 2 и 3.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества, $X \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ и $Y \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{W})$. Для того чтобы было выполнено любое из равенств

$$H_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(X) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}) \tag{5}$$

или

$$\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})(\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(H_{\Psi_0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{W})(X))) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}), \tag{6}$$

необходимо, чтобы множество X было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Для того чтобы было выполнено любое из равенств

$$\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})(Y) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}) \tag{7}$$

или

$$\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{B})(\mathscr{H}_{\Psi_0}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(Y)) = \mathfrak{L}(\mathfrak{B}), \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы Y было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{W})$.

Для задач классификации из этой леммы вытекает, что для достижимости полноты необходимо, чтобы все возникающие в процессе решения множества матриц были базами категории, выражающей универсальные ограничения.

Замечание. Утверждение леммы 2 для множества X не может быть усилено, т. е. неверно, что для выполнения равенств (5) или (6) достаточно, чтобы X было базой категории Ψ_0 в $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ (существуют соответствующие контрпримеры).

Даже требуя, чтобы множество $\{\mathbf{I}\}$, где $\mathbf{I}$ — матрица информации некоторой задачи Z, было базой категории Ψ_0, выражающей универсальные ограничения этой задачи, на базе леммы 2 нельзя гарантировать достижимость полноты задачи Z в рамках категории Ψ_0. Однако в действительности усиление леммы 2, неверное для произвольных баз, оказывается справедливым для баз одноэлементных, а это именно то, что и требуется для задач классификации, так как множество $\{\mathbf{I}\}$ — одноэлементное.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{W}$ — неодноэлементные множества, $X \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ и $|X| = 1$. Для того чтобы было выполнено любое из равенств (5) или (6), необходимо и достаточно, чтобы X было базой категории Ψ_0.

Из данной леммы следует, что при решении задач классификации для достижимости полноты необходимо и достаточно, чтобы множество $\{\mathbf{I}\}$ (одноэлементное) было базой категории, выражающей универсальные ограничения.

В заключение отметим, что некоторые частные случаи полученного в лемме 3 необходимого и достаточного условия встречались в работах, выполненных в рамках алгебраического подхода, в качестве достаточных условий регулярности задач классификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II // Кибернетика.— 1977.— № 4.— С. 5—17;— № 6.— С. 21—27.
2. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации// Пробл. кибернетики.— 1978.— Вып. 33.— С. 5—68.
3. Рудаков К. В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие реультаты).— М. : ВЦ АН СССР, 1980.— 66 с.
4. Рудаков К. В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели).— М. : ВЦ АН СССР, 1981.— 48 с.
5. Бурбаки Н. Теория множеств.— М. : Мир, 1965.— 455 с.

Поступила 19.09.84